Licenciatura em Matemática EaD
UC Tópicos de Matemática Elementar
Aula presencial 3.2

Guilherme Sada Ramos

Instituto Federal de Santa Catarina/ Câmpus Tubarão

20 de março de 2020

Relações binárias

IFSC

Guilherme Sada Ramos

Um produto cartesiano entre dois conjuntos A e B, nesta ordem $(A \times B)$, é o conjunto de `todos` os pares ordenados (a, b), em que $a \in A$ e $b \in B$.

Relações binárias

Um produto cartesiano entre dois conjuntos A e B, nesta ordem $(A \times B)$, é o conjunto de `todos` os pares ordenados (a, b), em que $a \in A$ e $b \in B$.

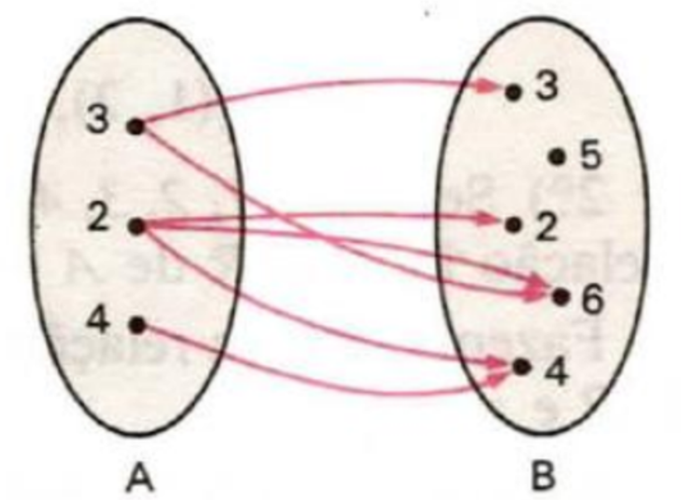
Relações binárias

Um produto cartesiano entre dois conjuntos A e B, nesta ordem $(A \times B)$, é o conjunto de `todos` os pares ordenados (a, b), em que $a \in A$ e $b \in B$.

Uma **relação de A para B, ou de A em B** é um subconjunto de $A \times B$.

Notação: $R : A \rightarrow B$

Guilherme
Sada Ramos



Exemplos

Exemplos

Considere $A = \{1, 3, 4, 6, 8\}$ e $B = \{-3, 1, 2, 5, 7, 10\}$ e as relações:

Exemplos

Considere $A = \{1, 3, 4, 6, 8\}$ e $B = \{-3, 1, 2, 5, 7, 10\}$ e as relações:

$$R_1 : A \to B = \{(x, y) \in A \times B : y = x + 1\}$$

$$R_2 : B \to A = \{(x, y) \in B \times A : x + y \leq 6\}$$

Domínio, contradomínio e imagem

Guilherme Sada Ramos

Em uma relação $R : A \to B$, definimos:

Domínio, contradomínio e imagem

IFSC
Guilherme Sada Ramos

Em uma relação $R : A \to B$, definimos:

- B como o **conjunto de chegada, ou contradomínio**.

Domínio, contradomínio e imagem

Em uma relação $R : A \to B$, definimos:

- B como o **conjunto de chegada, ou contradomínio**.
- O subconjunto de A de elementos relacionados a pelo menos um elemento de B como o **domínio**.

Domínio, contradomínio e imagem

Guilherme Sada Ramos

Em uma relação $R : A \to B$, definimos:

- B como o **conjunto de chegada, ou contradomínio**.
- O subconjunto de A de elementos relacionados a pelo menos um elemento de B como o **domínio**.
- O subconjunto de B de elementos relacionados a pelo menos um elemento de A como a **imagem**.

Gráficos

Guilherme Sada Ramos

Cada par ordenado (a, b) pertencente a uma relação $R : A \to B$ corresponde a um ponto no plano cartesiano.

Gráficos

Cada par ordenado (a, b) pertencente a uma relação $R : A \to B$ corresponde a um ponto no plano cartesiano. O conjunto de todos os pontos no plano (todos os pares ordenados da relação) constitui o <u>gráfico</u> da relação.

Gráficos

Guilherme Sada Ramos

Cada par ordenado (a, b) pertencente a uma relação $R : A \to B$ corresponde a um ponto no plano cartesiano. O conjunto de todos os pontos no plano (todos os pares ordenados da relação) constitui o gráfico da relação.

Exemplos:

1. $R : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y = 4x - 1\}$
2. $R : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ R = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : xy \text{ é número primo}\}$

Relações inversas

Guilherme
Sada Ramos

Relações inversas

Dada uma relação $R : A \to B$, em que $R = \{(a, b) \in A \times B\}$. A relação inversa de R, R^{-1}, é $R^{-1} = \{(b, a) \in B \times A\}$.

Relações inversas

Guilherme Sada Ramos

Dada uma relação $R : A \to B$, em que $R = \{(a, b) \in A \times B\}$. A relação inversa de R, R^{-1}, é $R^{-1} = \{(b, a) \in B \times A\}$.

Exemplo: Sendo $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{-1, 3, 5\}$ e a relação de A em B $R = \{(1, 3), (1, 5), (2, -1), (4, 5),$

Relações inversas

IFSC

Guilherme Sada Ramos

Dada uma relação $R : A \to B$, em que $R = \{(a, b) \in A \times B\}$. A <u>relação inversa de R, R^{-1}</u>, é $R^{-1} = \{(b, a) \in B \times A\}$.

Exemplo: Sendo $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{-1, 3, 5\}$ e a relação de A em B $R = \{(1, 3), (1, 5), (2, -1), (4, 5)$, a relação inversa, de B em A é $R^{-1} = \{(3, 1), (5, 1), (-1, 2), (5, 4)\}$.

Funções

Seja uma relação $R : A \rightarrow B$. Se, para todo elemento de A houver um, e somente um, elemento de B associado, então dizemos que a relação R é uma função de A para B.

Funções

Guilherme Sada Ramos

Seja uma relação $R : A \to B$. Se, para todo elemento de A houver um, e somente um, elemento de B associado, então dizemos que a relação R é uma <u>função</u> de A para B.
Neste caso, dizemos que o elemento de B é a <u>imagem</u> do elemento de A a ele associado.

Funções

Seja uma relação $R : A \to B$. Se, para todo elemento de A houver um, e somente um, elemento de B associado, então dizemos que a relação R é uma <u>função</u> de A para B. Neste caso, dizemos que o elemento de B é a <u>imagem</u> do elemento de A a ele associado.

Neste caso, o domínio da função é o próprio conjunto A.

Funções

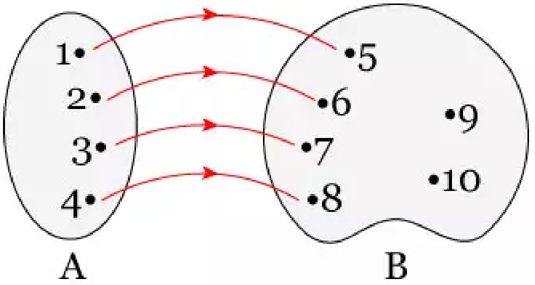
Seja uma relação $R : A \rightarrow B$. Se, para todo elemento de A houver um, e somente um, elemento de B associado, então dizemos que a relação R é uma função de A para B.
Neste caso, dizemos que o elemento de B é a imagem do elemento de A a ele associado.

Neste caso, o domínio da função é o próprio conjunto A.

Sendo x um elemento e f a função de A em B, representamos por $f(x)$ a imagem do elemento x na função f.

Exemplo: $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ e a função $f : A \to B$, em que $f(x) = x + 4$.

Exemplo: $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ e a função $f : A \to B$, em que $f(x) = x + 4$.



Fonte:https://www.educamaisbrasil.com.br/enem/matematica/funcoes-matematicas

Calculando domínios de funções

Guilherme Sada Ramos

Quando não explicitamos o domínio de uma função, este será o conjunto "mais amplo" possível de elementos, para os quais a função pode vir a ser definida.

Calculando domínios de funções

Quando não explicitamos o domínio de uma função, este será o conjunto "mais amplo" possível de elementos, para os quais a função pode vir a ser definida.

Exemplo 1: $f(x) = \dfrac{x-4}{x^2-5x+6}$

Exemplo 2: $g(x) = \sqrt{x-6}$

Exemplo 3: $h(x) = \dfrac{\sqrt{2x+2}}{x^2-6x+5}$

Calculando domínios de funções

Guilherme Sada Ramos

Quando não explicitamos o domínio de uma função, este será o conjunto "mais amplo" possível de elementos, para os quais a função pode vir a ser definida.

Exemplo 1: $f(x) = \dfrac{x-4}{x^2-5x+6}$ $\quad Dom(f) = \mathbb{R} - \{2,3\}$

Exemplo 2: $g(x) = \sqrt{x-6}$

Exemplo 3: $h(x) = \dfrac{\sqrt{2x+2}}{x^2-6x+5}$

Calculando domínios de funções

Quando não explicitamos o domínio de uma função, este será o conjunto "mais amplo" possível de elementos, para os quais a função pode vir a ser definida.

Exemplo 1: $f(x) = \dfrac{x-4}{x^2-5x+6} \quad Dom(f) = \mathbb{R} - \{2, 3\}$

Exemplo 2: $g(x) = \sqrt{x-6} \quad Dom(g) = [6, \infty[$

Exemplo 3: $h(x) = \dfrac{\sqrt{2x+2}}{x^2-6x+5}$

Calculando domínios de funções

Quando não explicitamos o domínio de uma função, este será o conjunto "mais amplo" possível de elementos, para os quais a função pode vir a ser definida.

Exemplo 1: $f(x) = \dfrac{x-4}{x^2-5x+6}$ $\quad Dom(f) = \mathbb{R} - \{2,3\}$

Exemplo 2: $g(x) = \sqrt{x-6}$ $\quad Dom(g) = [6, \infty[$

Exemplo 3: $h(x) = \dfrac{\sqrt{2x+2}}{x^2-6x+5}$ $\quad Dom(h) = [-1, \infty[-\{1,5\}$

Classificação de funções

Uma função $f : A \to B$ pode ser classificada como:

Classificação de funções

Guilherme Sada Ramos

Uma função $f : A \to B$ pode ser classificada como:

- **Crescente**: quando, para $x_1, x_2 \in A$, $x_1 > x_2$, temos $f(x_1) > f(x_2)$.
- **Decrescente**: quando, para $x_1, x_2 \in A$, $x_1 > x_2$, temos $f(x_1) < f(x_2)$.

Classificação de funções

Uma função $f : A \to B$ pode ser classificada como:

- **Crescente**: quando, para $x_1, x_2 \in A$, $x_1 > x_2$, temos $f(x_1) > f(x_2)$.
- **Decrescente**: quando, para $x_1, x_2 \in A$, $x_1 > x_2$, temos $f(x_1) < f(x_2)$.
- **Injetora**: quando, para $x_1,\ x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2$, $f(x_1) \neq f(x_2)$

Classificação de funções

Uma função $f : A \rightarrow B$ pode ser classificada como:

- **Crescente**: quando, para $x_1, x_2 \in A$, $x_1 > x_2$, temos $f(x_1) > f(x_2)$.
- **Decrescente**: quando, para $x_1, x_2 \in A$, $x_1 > x_2$, temos $f(x_1) < f(x_2)$.
- **Injetora**: quando, para $x_1,\ x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2$, $f(x_1) \neq f(x_2)$
- **Sobrejetora**: quando $Im\{f\} = CD\{f\}$

Classificação de funções

Uma função $f : A \to B$ pode ser classificada como:

- **Crescente**: quando, para $x_1, x_2 \in A$, $x_1 > x_2$, temos $f(x_1) > f(x_2)$.
- **Decrescente**: quando, para $x_1, x_2 \in A$, $x_1 > x_2$, temos $f(x_1) < f(x_2)$.
- **Injetora**: quando, para $x_1,\ x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2$, $f(x_1) \neq f(x_2)$
- **Sobrejetora**: quando $Im\{f\} = CD\{f\}$
- **Bijetora**: quando for injetora e sobrejetora ao mesmo tempo.

Classificação de funções

Uma função $f : A \to B$ pode ser classificada como:

- **Crescente**: quando, para $x_1, x_2 \in A$, $x_1 > x_2$, temos $f(x_1) > f(x_2)$.
- **Decrescente**: quando, para $x_1, x_2 \in A$, $x_1 > x_2$, temos $f(x_1) < f(x_2)$.
- **Injetora**: quando, para $x_1,\ x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2$, $f(x_1) \neq f(x_2)$
- **Sobrejetora**: quando $Im\{f\} = CD\{f\}$
- **Bijetora**: quando for injetora e sobrejetora ao mesmo tempo.

Podemos também classificar as funções quanto à paridade.

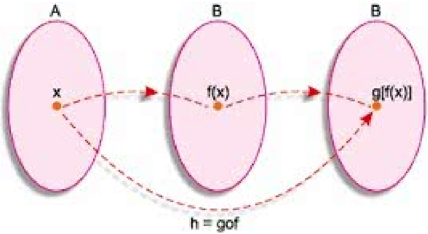
- **par**: quando, para todo $x \in A$, $f(x) = f(-x)$
- **ímpar**: quando, para todo $x \in A$, $f(x) = -f(-x)$

Composição de funções

Considere duas funções $f : A \to B$ e $g : B \to C$. Neste caso, podemos definir:

$$h = gof : A \to C.$$

Sendo $a \in A$, $b \in B$ e $c \in C$, se $f(a) = b$ e $g(b) = c$, então $h(a) = c$.



Fonte: https://www.todamateria.com.br/funcao-composta/

Exemplos

Guilherme Sada Ramos

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, com $f(x) = x^2 - 2x + 1$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, com $g(x) = \dfrac{x+2}{3}$

Quais serão as leis de formação das funções *fog* e *gof*?

Exemplos

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, com $f(x) = x^2 - 2x + 1$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, com $g(x) = \dfrac{x+2}{3}$

Quais serão as leis de formação das funções *fog* e *gof*?

$$fog(x) = f(g(x)) = \left(\frac{x+2}{3}\right)^2 - 2\frac{x+2}{3} + 1$$

Exemplos

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, com $f(x) = x^2 - 2x + 1$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, com $g(x) = \dfrac{x+2}{3}$

Quais serão as leis de formação das funções *fog* e *gof*?

$$fog(x) = f(g(x)) = \left(\frac{x+2}{3}\right)^2 - 2\frac{x+2}{3} + 1$$

$$gof(x) = g(f(x)) = \frac{x^2 - 2x + 3}{3}$$

Exemplos

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, com $f(x) = x^2 - 2x + 1$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, com $g(x) = \dfrac{x+2}{3}$

Quais serão as leis de formação das funções *fog* e *gof*?

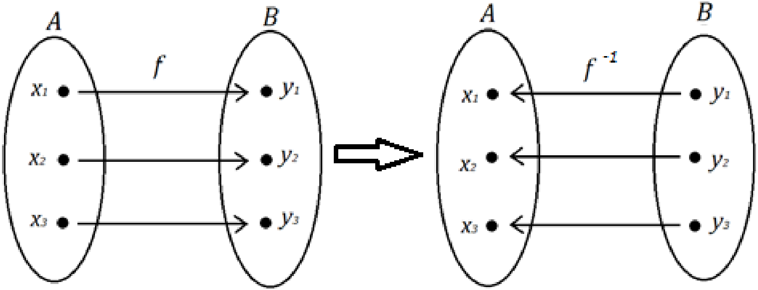
$$fog(x) = f(g(x)) = \left(\frac{x+2}{3}\right)^2 - 2\frac{x+2}{3} + 1$$

$$gof(x) = g(f(x)) = \frac{x^2 - 2x + 3}{3}$$

Para que a função composta *gof* seja definida, é necessário que $Im(f) \subset Dom(g)$.

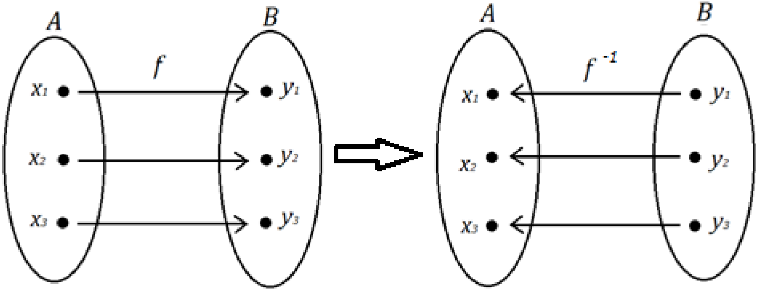
Funções inversas

Se, e somente se, uma função f for *bijetora*, a relação inversa também será uma função, denotada por f^{-1}.



Funções inversas

Se, e somente se, uma função f for *bijetora*, a relação inversa também será uma função, denotada por f^{-1}.



Note que, se $f(x_1) = y_1$, então $f^{-1}(y_1) = x_1$.

Exemplos

Exemplos:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 2x - 5$$

$$g : [0, \infty[\to [1, \infty[, \quad g(x) = x^2 + 1$$

$$h : \mathbb{R} - \{3\} \to \mathbb{R} - \{2\}, \quad h(x) = \frac{2x-5}{x-3}$$

Exemplos

Exemplos:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 2x - 5$$
$$f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f^{-1}(x) = \frac{x+5}{2}$$

$$g : [0, \infty[\to [1, \infty[, \quad g(x) = x^2 + 1$$

$$h : \mathbb{R} - \{3\} \to \mathbb{R} - \{2\}, \quad h(x) = \frac{2x-5}{x-3}$$

Exemplos

Guilherme Sada Ramos

Exemplos:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 2x - 5$$
$$f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f^{-1}(x) = \frac{x+5}{2}$$

$$g : [0, \infty[\to [1, \infty[, \quad g(x) = x^2 + 1$$
$$g^{-1} : [1, \infty[\to [0, \infty[, \quad g^{-1}(x) : \sqrt{x-1}$$

$$h : \mathbb{R} - \{3\} \to \mathbb{R} - \{2\}, \quad h(x) = \frac{2x-5}{x-3}$$

Exemplos

Exemplos:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 2x - 5$$
$$f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f^{-1}(x) = \frac{x+5}{2}$$

$$g : [0, \infty[\to [1, \infty[, \quad g(x) = x^2 + 1$$
$$g^{-1} : [1, \infty[\to [0, \infty[, \quad g^{-1}(x) : \sqrt{x - 1}$$

$$h : \mathbb{R} - \{3\} \to \mathbb{R} - \{2\}, \quad h(x) = \tfrac{2x-5}{x-3}$$
$$h^{-1} : \mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R} - \{3\}, \quad h^{-1}(x) = \tfrac{3x-5}{x-2}$$

Considerações finais

Sejam $f : A \to B$ e $g : C \to D$ funções inversíveis. Temos:

$(f^{-1})^{-1} = f$
$(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}$
$fof^{-1} = Id_B$ e $f^{-1}of = Id_A$
O gráfico de uma função f e sua inversa f^{-1} são simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares (gráfico de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, em que $f(x) = x$.