## 3.5 Classes de equivalência e conjunto quociente

Vamos fazer dois exemplos antes da definição formal:

21) Considere o conjunto $A = \{1,2,3\}$ e a relação de equivalência (por quê?) $R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1)\}$. Pergunta-se: quais elementos do conjunto $A$ estão relacionados com $1$? Observando a relação $R$, vemos que ela contém os pares $(1,1)$, $(1,2)$ e $(2,1)$ e estes são todos os pares nos quais aparece o elemento $1$; isto significa que $1$ está relacionado com ele mesmo (é uma relação de equivalência, portanto reflexiva) e com $2$. Assim, o conjunto dos elementos que estão relacionados com $1$ é $\{1,2\}$ (este conjunto está contido em $A$). Analogamente, o conjunto dos elementos de $A$ que estão relacionados com $2$ é $\{1,2\}$ e o conjunto dos elementos de $A$ que estão relacionados com $3$ é $\{3\}$. Observe que $1$ e $2$ possuem o mesmo conjunto de elementos relacionados! Conseguimos então construir dois conjuntos, $\{1,2\}$ e $\{3\}$, disjuntos, e cuja união é o conjunto $A$. Estes conjuntos são chamados de "classes de equivalência segundo $R$"; o conjunto $\{1,2\}$ é a classe de equivalência de $1$ (e também de $2$) e $\{3\}$ é a classe de equivalência de $3$. Ao conjunto formado por todas as possíveis classes de equivalência, ou seja, ao conjunto $\{\{1,2\}\{3\}\}$, damos o nome de "conjunto quociente de $A$ por $R$".

22) Considere a relação de equivalência em $\mathbb{Z}$ dada por $aRb$ quando $3$ é divisor de $a-b$ (relação de congruência módulo $3$). Vamos descobrir a classe de equivalência de alguns elementos. Quais os números inteiros que estão relacionados com $0$? Em outras palavras: quais os inteiros $a$ tais que $3$ é divisor de $a-0$? Como $a-0=a$, o conjunto dos elementos relacionados com o $0$ (a classe de equivalência do $0$) será formado por todos os números inteiros múltiplos de $3$; denotamos a classe de equivalência do $0$ por $[0]$: $[0] = \{\ldots,-6,-3,0,3,6,\ldots\} = \{a \in \mathbb{Z} \,/\, a \text{ é múltiplo de } 3\}$.

Qual seria a classe de equivalência do $1$? Devemos procurar quais inteiros $a$ satisfazem a relação "$3$ é divisor de $a-1$"; teremos então os inteiros $a$ tais que $3$ é divisor de $a-1$, ou seja, $a-1=3x$ para algum $x$ inteiro. Então $a=3x+1$ e teremos que os inteiros $a$ são aqueles que na divisão por $3$ têm resto $1$. Assim, a classe de equivalência do $1$ é o conjunto $[1] = \{... -5, -2, 1, 4, 7, ...\}$. Analogamente, a classe de equivalência do $2$ é o conjunto $[2] = \{... -7, -4, -1, 2, 5, 8, ...\}$. Ao procurarmos as classes de equivalência de outros inteiros, veremos que encontraremos um destes três conjuntos: $[0], [1]$ ou $[2]$. Por exemplo: qual a classe de equivalência de $-8$? Devemos procurar os inteiros $a$ tais que $3$ é divisor de $a - (-8)$, ou seja, $3$ é divisor de $a + 8$; são eles: $\{... -8, -5, -2, 1, 4, 7, ...\} = [-8] = [1]$. Observando também o exemplo 22, vemos que se um elemento está numa classe de equivalência de algum outro elemento, a classe de equivalência dele é a mesma classe deste outro. Assim, o conjunto quociente formado por todas as classes de equivalência segundo a relação $R$ será $\{[0], [1], [2]\}$. Neste caso particular, a notação para este conjunto quociente será $\mathbb{Z}_3 = \{[0], [1], [2]\}$. Os três conjuntos que são elementos do conjunto quociente, $[0], [1], [2]$, são disjuntos dois a dois e sua união é $\mathbb{Z}$. Isto significa que todo número inteiro pertence a um e somente um dos conjuntos $[0], [1]$ ou $[2]$. Como saber a qual destes conjuntos pertence um número inteiro? Basta sabermos qual o resto da divisão euclidiana deste inteiro por $3$. Por exemplo: qual a classe de equivalência de – 50? Pelo algoritmo da divisão em $\mathbb{Z}$ (de novo, lembre-se de Fundamentos I), existem $q = (-17)$ e $r = 1$ tal que $-50 = 3 \cdot (-17) + 1$, ou seja, $(-50) - 1 = 3 \cdot (-17)$, o que significa que a diferença $(-50) - 1$ é um múltiplo de $3$. Logo, $(-50)$ está relacionado com $r = 1$ (seu resto na divisão por $3$) e pertence ao conjunto $[1]$.

**Definição.** Seja $R$ uma relação de equivalência sobre um conjunto $A$ e $a \in A$. A classe de equivalência de $a$ segundo $R$ é o conjunto $[a] = \{x \in A \,/\, aRx\}$ de todos os elementos de $A$ que estão relacionados com $a$. O conjunto das classes de equivalência determinadas sobre $A$ pela relação de equivalência $R$ é chamado conjunto quociente de $A$ por $R$ e denotado $A/R$.

**Observação 8.** O conjunto quociente pode ser explicitado como $A / R = \{[a] \,/\, a \in A\}$, no qual $[a]$ é a classe de equivalência de $a$, quando $a \in A$.

## Propriedades das classes de equivalência

As classes de equivalência determinadas por uma relação de equivalência $R$ num conjunto $A$ são subconjuntos de $A$ que gozam de certas propriedades, algumas já comentadas nos exemplos 22 e 23. No que segue, estaremos considerando $R$ uma relação de equivalência num conjunto $A$ e $[a]$ a classe de equivalência do elemento $a$.

P1) *Para todo* $a \in A$ tem-se $a \in [a]$

Em outras palavras, todo elemento de $A$ pertence à sua classe de equivalência. Isto acontece pois a relação é reflexiva: $aRa$ para todo $a \in A$ (um elemento $a$ está sempre relacionado consigo mesmo; logo, faz parte do conjunto dos elementos relacionados a si). Uma conseqüência desta propriedade é que toda classe de equivalência é um conjunto não-vazio.

P2) $aRb$ se e somente se $[a]=[b]$.

Esta propriedade corresponde ao que foi comentado no exemplo 23: se um elemento pertence à classe de equivalência de outro elemento, a classe de equivalência dele é a mesma classe de equivalência do outro. Vamos provar este fato: como é uma afirmação do tipo "se e somente se", faremos a prova em duas partes:

$(\Rightarrow)$ **Hipótese:** $aRb$

**Tese:** $[a]=[b]$

Devemos mostrar uma igualdade de conjuntos (veja o capítulo 1: $X=Y$ se e somente se $X \subset Y$ e $Y \subset X$), ou seja, que todo elemento de $[a]$ pertence a $[b]$ e que todo elemento de $[b]$ pertence a $[a]$. Seja $x \in [a]$. Como $[a]$ é o conjunto dos elementos que estão relacionados com $a$, podemos afirmar que $xRa$ (como $R$ é simétrica, poderíamos também escrever $aRx$). Por hipótese, temos $aRb$ e como $R$ é transitiva, de $xRa$ e $aRb$, temos $xRb$, ou seja, $x$ está relacionado com $b$. Logo, $x \in [b]$ e $[a] \subset [b]$ (I). Analogamente, se $y \in [b]$ então $y$ está relacionado com $b$, ou seja $yRb$. Por hipótese, temos $aRb$, e como $R$ é simétrica, temos $bRa$. Pela propriedade transitiva, se $yRb$ e $bRa$, então $yRa$, ou seja, $y \in [a]$ e $[b] \subset [a]$ (II). De (I) e (II), temos que $[a]=[b]$.

$(\Leftarrow)$ **Hipótese:** $[a]=[b]$.

**Tese:** $aRb$

Pela P1), sabemos que $a \in [a]$; como por hipótese $[a]=[b]$, temos que $a \in [b]$. Isto significa que $aRb$, como queríamos demonstrar.

■

P3) *Se* $x \in [a]$ *e* $y \in [a]$, *então* $x$ *está relacionado com* $y$ (e ambos estão relacionados com $a$).

Esta propriedade é uma conseqüência da P2); sua prova será deixada como exercício (lembre-se de separar hipótese e tese.

**Hipótese:** $x \in [a]$ *e* $y \in [a]$.

**Tese:** $xRy$. Use o fato de $R$ ser uma relação de equivalência).

P4) *Se* $[a] \cap [b] \neq \varnothing$ *então* $[a] = [b]$.

Esta propriedade nos diz que se duas classes de equivalência têm elemento comum, então elas são o mesmo conjunto. Assim, só pode ocorrer uma de duas situações: ou duas classes de equivalência são iguais, ou são disjuntas. Veja novamente os exemplos 22 e 23. Também esta propriedade é uma conseqüência da P2); vamos prová-la:

**Hipótese:** $[a] \cap [b] \neq \varnothing$ (existe pelo menos um elemento pertencente às duas classes)

**Tese:** $[a] = [b]$

Pela P2), para provar que $[a] = [b]$, basta mostrarmos que $aRb$

Por hipótese, existe um elemento $x \in [a] \cap [b]$, ou seja, $x \in [a]$ e $x \in [b]$. Então $xRa$ e $xRb$. Como $R$ é simétrica, temos $aRx$ e $xRb$. Pela propriedade transitiva da relação $R$, temos $aRb$ e podemos concluir que $[a] = [b]$.

Em outras palavras, duas classes de equivalência diferentes não têm elementos em comum.

■

P5) A união de todas as classes de equivalência (determinadas pela relação $R$ em $A$) é o conjunto $A$, ou seja, $\bigcup_{a \in A} [a] = A$.

Nesta propriedade está presente a seguinte idéia de "partição de um conjunto": *Dado um conjunto qualquer* $S$ ($S$ *não-vazio), uma partição de* $S$ *é um conjunto de subconjuntos não-vazios de* $S$, *dois a dois disjuntos, cuja união é* $S$. Vimos no exemplo 22: a relação de equivalência $R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1)\}$ em $A = \{1,2,3\}$ determina duas classes de equivalência: $\{1,2\}$ e $\{3\}$. Estas classes são disjuntas, pois $\{1,2\} \cap \{3\} = \varnothing$ e sua união é

$\{1,2\} \cup \{3\} = \{1,2,3\} = A$. Estas classes constituem uma partição de $A$. Também no exemplo 23, as classes $[0],[1]$ e $[2]$ são disjuntas duas a duas (isto significa $[0] \cap [1] = \varnothing$, $[0] \cap [2] = \varnothing$ e $[1] \cap [2] = \varnothing$) e sua união resulta no conjunto $\mathbb{Z}$. Note que o conjunto quociente é aquele cujos elementos são as classes de equivalência, isto é, seus elementos são os conjuntos que constituem a partição de $A$; podemos dizer então que o *conjunto quociente é uma partição de* $A$, ou seja, podemos dizer que toda relação de equivalência num conjunto $A$ determina uma partição de $A$. A recíproca desta afirmação também é verdadeira: dada uma partição do conjunto $A$, podemos associar a ela uma relação de equivalência; os conjuntos da partição serão as classes de equivalência desta relação. Vejamos um exemplo deste fato (a prova poderá ser encontrada na bibliografia):

**Exemplo:**

23) Consideremos o conjunto $A = \{1,2,3,4\}$ e a partição de $A$ dada por $P = \{\{1,3\},\{2,4\}\}$. Qual a relação de equivalência que está associada a esta partição? Os conjuntos da partição $\{1,3\}$ e $\{2,4\}$ devem ser as classes de equivalência da relação procurada. Então 1 e 3 devem estar relacionados, assim como $2$ e $4$. Também sabemos que cada elemento deve estar relacionado consigo mesmo. Assim, $[1] = [3] = \{1,3\}$ e $[2] = [4] = \{2,4\}$ e estamos agora em condições de escrever a relação de equivalência $R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,3),(3,1),(2,4),(4,2)\}$. Não esqueça que $R$ deve satisfazer também a propriedade simétrica, por isso aparecem os pares $(1,3)$ e $(3,1),(2,4)$ e $(4,2)$. Além disso, $R$ deve ser transitiva (prove isso!).

## Exercícios propostos

8) Explicite o conjunto quociente determinado pela relação de equivalência em $A = \{a,b,c,d\}$ dada por $R = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,b),(b,a)\}$.

9) Determine a relação de equivalência $R$ em $A = \{1,2,3,4,5\}$ que determina o seguinte conjunto quociente (partição de $A$): $A / R = \{\{1,2\},\{3,4,5\}\}$.

10) Seja $R$ a relação definida por $xRy$, se e somente se $x$ nasceu no mesmo estado ou território do Brasil que $y$, e considere $A$ o conjunto de todas as pessoas nascidas no Brasil.

a) Mostre que esta é uma relação de equivalência em $A$.

b) Quantas classes de equivalência são determinadas pela relação $R$?

c) Qual é a classe de equivalência determinada por você?

10) Encontre as classes de equivalência e o conjunto quociente $\mathbb{Z}_5$ determinados pela relação de congruência módulo $5$ em $\mathbb{Z}$ e responda:

a) Em qual classe de equivalência está a soma de dois inteiros da classe $[2]$?

b) Em qual classe de equivalência está a soma de dois inteiros, um da classe $[2]$ e outro da classe $[1]$?

c) Em qual classe de equivalência está a soma de dois inteiros da classe $[4]$?

Observando as respostas anteriores, complete a seguinte tabela de "soma" de classes em $\mathbb{Z}_5$:

| + | [0] | [1] | [2] | [3] | [4] |
|---|---|---|---|---|---|
| [0] | | | | | |
| [1] | | | | | [0] |
| [2] | | | [4] | | |
| [3] | | | | [1] | |
| [4] | [4] | | | | |

12) Construa o conjunto $\mathbb{Z}_6$ e faça uma tabela de soma de classes como no exercício anterior.

13) Usando a mesma idéia de soma no conjunto quociente $\mathbb{Z}_5$, como você construiria uma tabela de multiplicação de classes? Faça também uma tabela de multiplicação para $\mathbb{Z}_6$.