Licenciatura em Matemática EaD
UC Tópicos de Matemática Elementar
Videoaula - Logaritmos

Guilherme Sada Ramos

Instituto Federal de Santa Catarina/ Câmpus Tubarão

Propriedades de potenciação e radiciação

Sendo a, b reais não nulos, m, n naturais, vamos relembrar as propriedades de potenciação:

- $a^0 = 1$
- $a^1 = a$
- $a^m \times a^n = a^{m+n}$
- $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
- $(a^m)^n = a^{mn}$
- $(ab)^m = a^m \times b^m$
- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m}$

Propriedades de potenciação e radiciação

Guilherme Sada Ramos

- $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n} = \left(\dfrac{1}{a}\right)^n$
- $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$
- $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$
- $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$
- $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

Logaritmos

Guilherme Sada Ramos

E mais:

Logaritmos

Dados a e b reais positivos, com $a \neq 1$, definimos o logaritmo de b na base a como sendo o número real x tal que

$$a^x = b.$$

E mais:

Logaritmos

Dados a e b reais positivos, com $a \neq 1$, definimos o logaritmo de b na base a como sendo o número real x tal que

$$a^x = b.$$

Neste caso, temos $x = \log_a b$.

E mais:

Logaritmos

Dados a e b reais positivos, com $a \neq 1$, definimos o logaritmo de b na base a como sendo o número real x tal que

$$a^x = b.$$

Neste caso, temos $x = \log_a b$.

Definimos:

- a a **base** do logaritmo;
- b o **logaritmando** do logaritmo.

E mais:

Logaritmos

Dados a e b reais positivos, com $a \neq 1$, definimos o logaritmo de b na base a como sendo o número real x tal que

$$a^x = b.$$

Neste caso, temos $x = \log_a b$.

Definimos:

- a a **base** do logaritmo;
- b o **logaritmando** do logaritmo.

E mais:

- Quando a base é omitida, seu valor é 10 (logaritmo decimal). Ex.: $\log 4$ é logaritmo de 4 na base 10.
- Logaritmo na base $e \approx 2,71$ é chamado de logaritmo natural, denotado por ln. Ex.: $\ln 6$ é o logaritmo natural de 6.

Exemplos

Exemplos

- $\log_5 5 = 1$, pois $5^{1} = 5$.

Exemplos

- $\log_5 5 = 1$, pois $5^{1} = 5$.
- $\log_3 9 = 2$, pois $3^{2} = 9$.

Exemplos

- $\log_5 5 = 1$, pois $5^{1} = 5$.
- $\log_3 9 = 2$, pois $3^{2} = 9$.
- $\log_{25} 5 = \frac{1}{2}$, pois $25^{\frac{1}{2}} = 5$.

Exemplos

- $\log_5 5 = 1$, pois $5^{1} = 5$.
- $\log_3 9 = 2$, pois $3^{2} = 9$.
- $\log_{25} 5 = \dfrac{1}{2}$, pois $25^{\frac{1}{2}} = 5$.
- $\log_2 \dfrac{1}{8} = -3$, pois $2^{-3} = \dfrac{1}{8}$.

Exemplos

Guilherme Sada Ramos

- $\log_5 5 = 1$, pois $5^{1} = 5$.
- $\log_3 9 = 2$, pois $3^{2} = 9$.
- $\log_{25} 5 = \dfrac{1}{2}$, pois $25^{\frac{1}{2}} = 5$.
- $\log_2 \dfrac{1}{8} = -3$, pois $2^{-3} = \dfrac{1}{8}$.
- $\log_{\sqrt[3]{2}} 32 = 15$, pois $(\sqrt[3]{2})^{15} = 32$.

Exemplos

IFSC

Guilherme Sada Ramos

- $\log_5 5 = 1$, pois $5^1 = 5$.
- $\log_3 9 = 2$, pois $3^2 = 9$.
- $\log_{25} 5 = \frac{1}{2}$, pois $25^{\frac{1}{2}} = 5$.
- $\log_2 \frac{1}{8} = -3$, pois $2^{-3} = \frac{1}{8}$.
- $\log_{\sqrt[3]{2}} 32 = 15$, pois $(\sqrt[3]{2})^{15} = 32$.
- $\log_{\frac{1}{10}} 0,0001 = 4$, pois $\left(\frac{1}{10}\right)^4 = 0,0001$.

Exemplos

IFSC

Guilherme Sada Ramos

- $\log_5 5 = 1$, pois $5^1 = 5$.
- $\log_3 9 = 2$, pois $3^2 = 9$.
- $\log_{25} 5 = \dfrac{1}{2}$, pois $25^{\frac{1}{2}} = 5$.
- $\log_2 \dfrac{1}{8} = -3$, pois $2^{-3} = \dfrac{1}{8}$.
- $\log_{\sqrt[3]{2}} 32 = 15$, pois $(\sqrt[3]{2})^{15} = 32$.
- $\log_{\frac{1}{10}} 0,0001 = 4$, pois $\left(\frac{1}{10}\right)^4 = 0,0001$.
- $\log_{0,25} \sqrt{128} = -\frac{7}{4}$, pois $0,25^{-\frac{7}{4}} = \sqrt{128}$.

Exemplo

Calcular $\log_{25} \sqrt[7]{125}$.

Exemplo

Guilherme Sada Ramos

Calcular $\log_{25} \sqrt[7]{125}$.

$$x = \log_{25} \sqrt[7]{125}$$
$$25^x = \sqrt[7]{125}$$

Exemplo

Guilherme Sada Ramos

Calcular $\log_{25} \sqrt[7]{125}$.

$$x = \log_{25} \sqrt[7]{125}$$
$$25^x = \sqrt[7]{125}$$

$$(5^2)^x = \sqrt[7]{5^3}$$

Exemplo

Guilherme Sada Ramos

Calcular $\log_{25} \sqrt[7]{125}$.

$$x = \log_{25} \sqrt[7]{125}$$
$$25^x = \sqrt[7]{125}$$

$$(5^2)^x = \sqrt[7]{5^3}$$

$$5^{2x} = 5^{\frac{3}{7}}$$

Exemplo

IFSC

Guilherme Sada Ramos

Calcular $\log_{25} \sqrt[7]{125}$.

$$x = \log_{25} \sqrt[7]{125}$$
$$25^x = \sqrt[7]{125}$$

$$(5^2)^x = \sqrt[7]{5^3}$$

$$5^{2x} = 5^{\frac{3}{7}}$$

$$2x = \frac{3}{7}$$

Exemplo

Calcular $\log_{25} \sqrt[7]{125}$.

$$x = \log_{25} \sqrt[7]{125}$$
$$25^x = \sqrt[7]{125}$$

$$(5^2)^x = \sqrt[7]{5^3}$$

$$5^{2x} = 5^{\frac{3}{7}}$$

$$2x = \frac{3}{7}$$

$$x = \frac{3}{14}$$

Propriedades dos logaritmos

Dados a, b, c, k, reais positivos, $a \neq 1$, $k \neq 1$ e n natural temos:

Propriedades dos logaritmos

Dados a, b, c, k, reais positivos, $a \neq 1$, $k \neq 1$ e n natural temos:

- $\log_a 1 = 0$
- $\log_a a = 1$
- $a^{\log_a b} = b$

Propriedades dos logaritmos

Dados a, b, c, k, reais positivos, $a \neq 1$, $k \neq 1$ e n natural temos:

- $\log_a 1 = 0$
- $\log_a a = 1$
- $a^{\log_a b} = b$
- $\log_a b + \log_a c = \log_a(bc)$ Ex.: $\log 3 + \log 4 = \log 12$

Propriedades dos logaritmos

Dados a, b, c, k, reais positivos, $a \neq 1$, $k \neq 1$ e n natural temos:

- $\log_a 1 = 0$
- $\log_a a = 1$
- $a^{\log_a b} = b$
- $\log_a b + \log_a c = \log_a (bc)$ Ex.: $\log 3 + \log 4 = \log 12$
- $\log_a b - \log_a c = \log_a \left(\frac{b}{c}\right)$ Ex.: $\ln 10 - \ln 2 = \ln \frac{10}{2} = \ln 5$
- $\log_a b^n = n \log_a b$ Ex.: $\log_5 81 = \log_5 3^4 = 4 \log_5 3$

Propriedades dos logaritmos

IFSC

Guilherme Sada Ramos

Dados a, b, c, k, reais positivos, $a \neq 1$, $k \neq 1$ e n natural temos:

- $\log_a 1 = 0$
- $\log_a a = 1$
- $a^{\log_a b} = b$
- $\log_a b + \log_a c = \log_a(bc)$ Ex.: $\log 3 + \log 4 = \log 12$
- $\log_a b - \log_a c = \log_a\left(\frac{b}{c}\right)$ Ex.: $\ln 10 - \ln 2 = \ln \frac{10}{2} = \ln 5$
- $\log_a b^n = n \log_a b$ Ex.: $\log_5 81 = \log_5 3^4 = 4 \log_5 3$
- $\log_{a^n} b = \frac{1}{n} \log_a b$ Ex.: $\log_4 8 = \log_{2^2} 8 = \dfrac{1}{2} \log_2 8 = \dfrac{3}{2}$

Propriedades dos logaritmos

Dados a, b, c, k, reais positivos, $a \neq 1$, $k \neq 1$ e n natural temos:

- $\log_a 1 = 0$
- $\log_a a = 1$
- $a^{\log_a b} = b$
- $\log_a b + \log_a c = \log_a(bc)$ Ex.: $\log 3 + \log 4 = \log 12$
- $\log_a b - \log_a c = \log_a\left(\frac{b}{c}\right)$ Ex.: $\ln 10 - \ln 2 = \ln \frac{10}{2} = \ln 5$
- $\log_a b^n = n \log_a b$ Ex.: $\log_5 81 = \log_5 3^4 = 4 \log_5 3$
- $\log_{a^n} b = \frac{1}{n} \log_a b$ Ex.: $\log_4 8 = \log_{2^2} 8 = \dfrac{1}{2} \log_2 8 = \dfrac{3}{2}$
- $\log_a b = \dfrac{\log_k b}{\log_k a}$ (Mudança de base) Ex.: $\log_5 3 = \dfrac{\log 3}{\log 5}$

Aplicações

Base 10

TABELA DE LOGARITMOS DECIMAIS

nº	log	nº	log	nº	log	nº	log	nº	log
1	0	21	1,322219	41	1,612784	61	1,78533	81	1,908485
2	0,30103	22	1,342423	42	1,623249	62	1,792392	82	1,913814
3	0,477121	23	1,361728	43	1,633468	63	1,799341	83	1,919078
4	0,60206	24	1,380211	44	1,643453	64	1,80618	84	1,924279
5	0,69897	25	1,39794	45	1,653213	65	1,812913	85	1,929419
6	0,778151	26	1,414973	46	1,662758	66	1,819544	86	1,934498
7	0,845098	27	1,431364	47	1,672098	67	1,826075	87	1,939519
8	0,90309	28	1,447158	48	1,681241	68	1,832509	88	1,944483
9	0,954243	29	1,462398	49	1,690196	69	1,838849	89	1,94939
10	1	30	1,477121	50	1,69897	70	1,845098	90	1,954243
11	1,041393	31	1,491362	51	1,70757	71	1,851258	91	1,959041
12	1,079181	32	1,50515	52	1,716003	72	1,857332	92	1,963788
13	1,113943	33	1,518514	53	1,724276	73	1,863323	93	1,968483
14	1,146128	34	1,531479	54	1,732394	74	1,869232	94	1,973128
15	1,176091	35	1,544068	55	1,740363	75	1,875061	95	1,977724
16	1,20412	36	1,556303	56	1,748188	76	1,880814	96	1,982271
17	1,230449	37	1,568202	57	1,755875	77	1,886491	97	1,986772
18	1,255273	38	1,579784	58	1,763428	78	1,892095	98	1,991226
19	1,278754	39	1,591065	59	1,770852	79	1,897627	99	1,995635
20	1,30103	40	1,60206	60	1,778151	80	1,90309	100	2

Fonte: https://slideplayer.com.br/slide/10621672/

Para efetuar 4×19, basta tomar os respectivos logaritmos e somá-los.

Para efetuar 4×19, basta tomar os respectivos logaritmos e somá-los.

- $\log 4 = 0,60206$
- $\log 19 = 1,278754$

Para efetuar 4×19, basta tomar os respectivos logaritmos e somá-los.

- $\log 4 = 0,60206$
- $\log 19 = 1,278754$
- $0,60206 + 1,278754 = 1,880814 = \log 76$

Para efetuar 4×19, basta tomar os respectivos logaritmos e somá-los.

- $\log 4 = 0,60206$
- $\log 19 = 1,278754$
- $0,60206 + 1,278754 = 1,880814 = \log 76$
- $4 \times 19 = 76$

Aplicações

- Para resolver equações exponenciais que não permitam colocarmos mesma base dos dois lados, usamos logaritmos. Ex.: $3^x = 5$. Neste caso, $S = \{\log_3 5\}$.
- O pH de uma solução é dado por $pH = -\log[H^+] = \log \frac{1}{[H^+]}$, em que $[H^+]$ é a concentração de íons $[H^+]$, em mol por litro, na solução. Ex.: Solução de pH 5; $5 = \log \frac{1}{[H^+]} \Rightarrow [H^+] = 10^{-5}$
- Quando acontece um terremoto, medimos sua magnitude através da relação $I = \frac{2}{3} \log \frac{E}{E_0}$, em que I é a intensidade do terremoto (graus na escala Richter), E é a quantidade de energia propagada pelas ondas sísmicas, e E_0 é um valor padrão de energia.

Função logarítmica

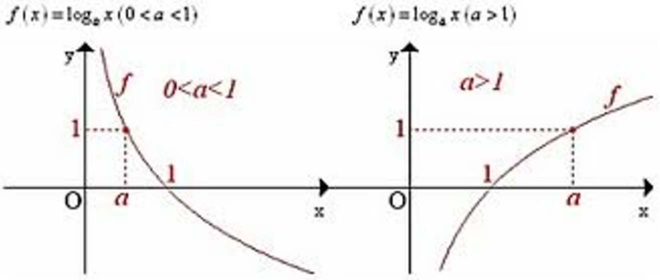
IFSC

Guilherme Sada Ramos

A função f, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}_+^*$, dada por $f(x) = a^x$ é bijetora e sua função inversa é:

$$f^{-1} : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$$

$$f^{-1}(x) = \log_a x$$



Comparando gráficos

IFSC

Guilherme Sada Ramos