TÓPICO 01

OS FUNDAMENTOS DA DIDÁTICA DA MATEMÁTICA

OBJETIVO

· Apresentar as concepções a cerca da Didática da Matemática.

Libâneo (1995, p. 129), em uma obra clássica da área da pedagogia, a respeito das tendências pedagógicas, assim se manifesta:

> Os enfoques sobre o papel da didática na atividade escolar variam de acordo com as tendências pedagógicas, sendo possível encontrar na prática educacional pelo menos três: o tradicional, o renovado-tecnicista e o sociopolítico. O tradicional refere-se à didática assentada na transmissão cultural, concebendo o aluno como um ser receptivo/passivo, atribuindo um caráter dogmático aos conteúdos e métodos da educação; o renovado-tecnicista corresponde à versão modernizada da escola nova, acentuando o caráter prático-técnico do ensino e, assim, sua neutralidade face às questões sociais; finalmente, o sociopolítico assume uma postura crítica em relação aos dois anteriores, por acentuar a relevância dos determinantes sociais na educação e, assim, as finalidades sociopolíticas da escola.

O posicionamento de Libâneo é interessante na medida em que caracteriza, delineia e aponta as consequências das tendências pedagógicas que, podem manter uma possível relação com o saber matemático, embora, em certos casos, seja tênue, ou mesmo inexistente e superficial.

É importante que saibamos, antes de nos aprofundarmos nas aulas seguintes, que a tendência tradicional e a tendência renovado-tecnicista não explicam, não caracterizam, não anteveem de modo específico as relações estabelecidas no ensino de Matemática.

Nesta aula, demarcaremos as bases epistemológicas e os principais pressupostos epistêmicos assumidos na Didática da Matemática. Para tanto, vamos confrontar as palavras de Libâneo (1995) reproduzidas acima com as do matemático Brousseau (1996), que caracteriza a Didática da Matemática como sendo atividades didáticas, ou seja, atividades que têm como objeto o ensino.

Já o pesquisador italiano D´Amore (2007) descreve a Didática da Matemática como uma disciplina científica cujo objetivo do campo de pesquisa é saber identificar, compreender e caracterizar fenômenos que condicionam a aprendizagem e o ensino da matemática.

SAIBA MAIS!

Para maior aprofundamento sobre as tendências pedagógicas, veja o quadro síntese disponível no site http://pedagogia.tripod.com/quadro_tendencias.htm

Brousseau, ao fazer referência às relações estabelecidas entre aluno-professor-saber matemático, destaca o caráter situado do conhecimento em questão o qual, na maioria dos casos, se restringe à sala de aula.

Outro fator relevante apontado por Brousseau se relaciona aos comportamentos cognitivos dos aprendizes. De fato, quando se estuda Didática Geral, fala-se demasiadamente das ações, pensamentos e reflexões necessárias para o professor, entretanto para um professor qualquer, uma escola aleatória e alunos reunidos em torno da aquisição de um saber hipotético.

Não rejeitamos ou desvalorizamos tal perspectiva. Salientamos, porém, que, em uma aula de Matemática, no que diz respeito ao professor e seus alunos, alguns destes pressupostos generalistas podem mostrar-se inócuos, e mesmo improfícuos.

Mas afinal, qual é o objeto de estudo da *Didática da Matemática?* Recorremos mais uma vez a Brousseau (1996, p. 46):

> O saber constituído se apresenta sobre formas diversas, por exemplo, sob forma de questão e respostas. A apresentação axiomática é uma apresentação clássica da matemática. E, além disso, em virtude do cientificismo que conhecemos, ela se mostra maravilhosamente adaptada ao ensino. Ela permite a cada

SAIBA MAIS!

Guy Brousseau nasceu em 4 de fevereiro de 1933, em Taza, no Marrocos, filho de um soldado francês. Em 1953, começou a dar aulas no Ensino Fundamental numa aldeia da região de Lot et Garonne. Fonte: http://antigo.revistaescola.abril.com.br/edicoes/0219/aberto/pai-didatica-matematica-414955.shtml

> momento de definirmos os objetos que estudamos com auxílio de noções precedentes e introduzidas e, assim, de organizar a aquisição de novos saberes com o auxílio de aquisições anteriores. Ela proporciona então ao estudante e ao seu professor um meio de ordenar suas atividades e de acumular em um mínimo de tempo possível o máximo de saber próximo do savoir savante.

A forma de organização do saber transmitido no ensino é, reconhecidamente, uma preocupação da Didática; no caso específico desta disciplina, a Didática da Matemática, a forma de organização do saber matemático. Brousseau denuncia acima alguns dos malefícios da apresentação axiomática dos conteúdos, tão peculiar na atividade do professor de Matemática.

A apresentação axiomática é reconhecida com maior imediatez quando falamos de Geometria Plana. A axiomatização e sistematização das ideias e argumentações construídas há séculos pelos gregos ainda servem de modelo, paradigma e verdade para muitos professores de Matemática, ainda que possa não assegurar uma aprendizagem satisfatória.

Outro fator discutido por Brousseau diz respeito ao princípio de economia e linearidade da reprodução do saber matemático em sala de aula. Neste sentido, quando diz que a Matemática permite a cada momento definirmos os objetos que estudamos com auxílio de noções precedentes e introduzidas e, assim, de organizar a aquisição de novos saberes, Brousseau caracteriza uma prática comum e equivocada desenvolvida em sala de aula, uma vez que a aprendizagem do estudante não ocorre de modo linear e preciso.

Podemos até afirmar que o raciocínio do professor que reproduz aquele conhecimento, muitas vezes secular, é um raciocínio linear, rigoroso e preciso, na medida em que é familiar e suficientemente conhecido e repetido dezenas de vezes. Neste sentido, Brousseau (1996, p. 46) esclarece que "este tipo de apresentação disfarça completamente a história dos saberes, isto é, as sucessões de dificuldades e de questões que provocaram a aparição de conceitos fundamentais, seu uso para propor novos problemas".

Assim, percebemos que linearidade da reprodução do saber matemático em sala de aula não transparece ou caracteriza o modo real e a maneira pela qual os matemáticos profissionais enfrentaram os problemas. Dizendo de outro modo, na descoberta ou criação de determinado conceito, seja ele da Geometria Plana, Trigonometria, Matrizes, Determinantes, etc., não houve uma trajetória linear e formal, como muitos preferem ou acreditam. Não se pode dessa forma, esperar que o aluno aprenda, num primeiro momento, tudo apresentado pelo professor.

Brousseau se preocupa de modo especial com as modificações que se fazem necessárias ao conhecimento matemático desde o seu nascedouro até a sua forma atual, organizada nos livros escolares. A tais modificações/adaptações realizadas pelo professor para efetivar o seu ensino Brousseau chama de transposição didática. O pesquisador espanhol Juan D. Gondino (2004, p. 42), a esse respeito, esclarece:

> Quando queremos ensinar um certo conteúdo, tal como os números racionais, devemos adaptá-lo ao estado do conhecimentos dos alunos, com qual deve-se simplificá-lo e buscar exemplos específicos acessíveis aos alunos, restringir algumas propriedades, usar uma linguagem e símbolos mais simples do que os habitualmente empregados pelo matemático profissional (tradução nossa.)

A1 T1

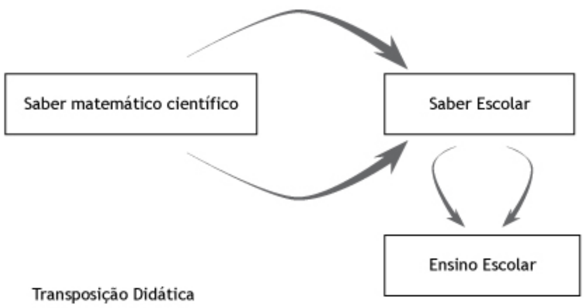


Figura 1: Transposição didática formulada por Brousseau

No ambiente escolar, deparamos com um saber matemático que sofreu várias adaptações, aperfeiçoamentos e improvisações necessárias ao entendimento do estudante. Falar sobre aprendizagem em matemática pressupõe, naturalmente, uma teoria de base cognitivista compatível com as relações experienciadas dentro de uma aula de Matemática.

Anthony Orton (2004) sublinha o caráter de especificidade necessária para que vários fenômenos relacionados ao binômio ensino-aprendizagem possam ser compreendidos, sobretudo os de natureza cognitiva. Assim, quando discutimos a noção de transposição didática (Figura 1), necessitamos adotar teorias elaboradas de modo específico para o ensino e aprendizagem de Matemática.

SAIBA MAIS!

A expressão transposição didática faz referência às modificações sofridas pelo conhecimento matemático com vistas ao ensino. Como conseqüência se produz diferenças de significado dos objetos matemáticos entre a instituição matemática e as instituições escolares. (GONDINO, 2004, p. 42).

Em grande parte, para que possamos compreender os elementos que explicam a realidade cristalizada preocupante sobre o ensino de Matemática, necessitamos focar nosso olhar na figura do professor. Brousseau (1996, p. 47) reforça esta perspectiva ao comparar o trabalha do matemático profissional com o trabalho do professor:

> Antes de comunicar o que pensa haver achado, um pesquisador deve inicialmente determiná-lo: não é fácil distinguir, num labirinto de reflexões, as que são suscetíveis de tornar-se um novo saber e interessante para os demais; as demonstrações obtidas são raramente as que foram visadas pelas conjecturas; todo o rearranjo de conhecimentos semelhantes, anteriores e novos devem ser acumulados (tradução nossa.)

ATENÇÃO!

De acordo com Brousseau "uma boa reprodução por parte do aluno da atividade científica exige que este aja, formule e que prove e construa modelos, de linguagem, de conceitos e de teorias" (BROUSSEAU, 1996, p. 49).

Neste movimento característico do matemático profissional, as reflexões inúteis são suprimidas e descartadas. Os traços dos encaminhamentos errôneos são descartados. "É necessário encontrar uma teoria mais geral na qual os resultados obtidos mostrem-se válidos" (BROUSSEAU, 1996, p. 47). Deste modo, temos um processo de *despersonalização*, *descontextualização* do saber matemático.

No que diz respeito à atividade docentes, o professor deveria, em tese, realizar um movimento contrário, em determinados aspectos, ao do trabalho do matemático profissional. De fato, ao trabalhar com um livro didático, o professor de Matemática deve preparar a sua aula e, naturalmente, salientar o que perceber de mais relevante. D´Amore (2007, p. 227), ao descrever a ação docente, sublinha que:

> Uma vez realizada a introdução da noção, no âmbito do funcionamento didático, deve ativar-se um mecanismo com base no qual nos apropriamos de tal noção para fazer algo. Eis então que ocorre a recontextualização da noção, todavia não mais no interior do saber matemático, mas no interior de tal imersão no saber ensinado.

O conhecimento oferecido aos alunos pelo professor será impregnado pelo seu ponto de vista e guiado pelas suas crenças e convicções próprias. A fazer isso, o professor realiza uma ação de "repersonalização" do conhecimento. De fato, Brousseau explica que "o trabalho do professor é numa certa medida inversa a do pesquisador, ele deve produzir uma recontextualização e repersonalização" (1996, p. 49).

Ao declarar isto, Brousseau está esclarecendo que a contextualização do saber matemático, os limites de sua validade, o porquê do seu surgimento e as funções sociais é uma ação intrínseca ao trabalho do professor.

Na Figura 2 o estudante, alvo principal de nossas preocupações didáticas, adquire uma importância vital quando falamos sobre o ensino escolar, distanciado da academia e da pesquisa do matemático profissional.

Mais adiante, Brousseau adverte, ainda no âmbito da atividade do aluno que encontrar boas questões é tão importante quanto encontrar boas soluções. É comum o professor de Matemática se deter de modo mais demorado na identificação da solução correta e destinar um tempo irrisório ao estudo das estratégias de resolução incompatíveis e errôneas, o que, na maioria das vezes, conduz os estudantes ao erro.

Desse modo, "uma boa reprodução por parte do aluno da atividade científica exige que este aja, formule e que prove e construa modelos, de linguagem, de conceitos e de teorias" (BROUSSEAU, 1996, p. 49).

Entretanto, para não reduzir o seu ensino à mera exposição e reprodução das estratégias previamente apontadas como desejáveis, o professor necessita assumir uma posição criativa e ativa, isto é, "imaginar e propor aos estudantes situações que eles possam vivenciar e nas quais os conhecimentos aparecerão como uma solução optimal e descoberta nos problemas propostas" (BROUSSEAU, 1996, p. 49).

Fonte: www.latinstock.com.br

Figura 2 : Estratégias Didáticas

Os conhecimentos devem ser os meios de comunicar boas questões e para travar alguns debates em sala de aula. Todavia, na prática, a tarefa de estimular um debate científico com os estudantes e não executar a mera reprodução do conteúdo organizado de modo "bonitinho" no livro didático apresenta alguns entraves.

A respeito desses problemas, Brousseau (1996) levanta alguns pontos:

- a ênfase dada às atividades sociais e culturais condiciona a criação e o exercício de comunicação do saber e dos conhecimentos;
- a abordagem clássica considera como central a *atividade cognitiva do sujeito* deve ser inicialmente descrita e compreendida de modo relativamente independente;
- os conhecimentos sobre o conhecimento necessário ao ensino devem se estabelecer inicialmente de modo independente e segura;

Brousseau também descreve duas hipóteses fundamentais para se trabalhar a Didática da Matemática:

- A primeira consiste em afirmar que somente o *estudo global das situações que presidem a manifestação do conhecimento* permite escolher e articular os conhecimentos de origem diferentes, necessários para compreender as atividades cognitivas do sujeito, assim como o conhecimento que utiliza e o modo pelo qual ele o modifica;
- A segunda hipótese, mais forte, consiste em dizer que o estudo inicial das

A
1
T
1

situações (*didáticas*) deve permitir derivar e modificar as concepções necessárias atualmente importadas de outros campos científicos.

Trabalhar a atividade cognitiva do sujeito é essencial assim como elaborar um saber matemático situacional e localizado para efetivar um ensino e uma aprendizagem significativa, e não a mera replicação das técnicas explicadas e determinadas pelo professor.

Quanto Brousseau se refere ao estudo global das situações que presidem a manifestação do conhecimento, ele passa a considerar o meio um elemento explicativo e condicionante para as relações pedagógicas ali desenvolvidas.

Por fim, a modelização desenvolvida por Brousseau, no que diz respeito à sistematização das situações didáticas, que envolvem de modo específico o saber matemático, é ímpar, quando analisamos outras produções científicas da área. Sua descrição mais detalhada acontecerá nas próximas aulas. Para concluir esta seção, destacamos que muitas obras na área de Didática da Matemática esquematizam uma situação qualquer de ensino pelo triângulo que representamos na figura a seguir.

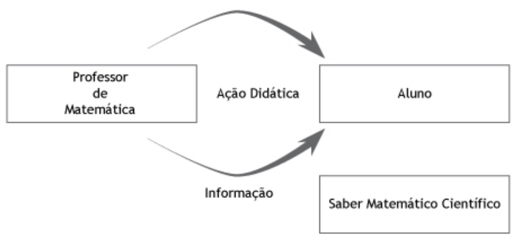


Figura 3: Relações didáticas descritas por Brousseau

A ação do professor de matemática compreende um forte componente para a aquisição de conhecimento para os alunos. As ligações que deverão ser estabelecidas entre aluno e saber matemático, inclusive as crenças e/ou concepções construídas, são, em grande parte, promovidas pelo professor.

Fonte: www.latinstock.com.br

Figura 4: A importância do professor em sala de aula

Desse modo, qualquer ação didática do professor cria uma determinada *transposição didática*. Podemos evidenciar nos estudantes o surgimento de conhecimentos previstos e desejados, como também o delineamento de conhecimentos matemáticos imprevistos, indesejados e/ou mal adaptados.

Para encerrar esta parte inicial, recordamos que discutimos alguns elementos característicos iniciais da *Didática da Matemática*. No próximo tópico, detalharemos algumas características da noção de *transposição didática* comentada por D´Amore.

TÓPICO

02 CARACTERÍSTICAS GERAIS DA TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA

OBJETIVO

· Diferenciar a transposição didática da transposição científica.

Podemos, de modo particular, descrever um trabalho de transposição que conduz o saber científico (*savoir savante*) ao saber a ensinar, caracterizado sob a forma de capítulos de manuais escolares por exemplo. Mas o trabalho de transposição não se restringe à classe, já que o saber científico marca todos os atos do ensino (JOHSUA, S. & DUPIN, 1989, p. 193).

Assim, a atenção do professor de Matemática não pode se limitar ao interior da sala de aula, e sim às consequências do ensino daquele conteúdo matemático, os momentos que antecedem uma sessão de ensino e os resultados alcançados, as formas de acomodação cognitiva apropriadas para um novo saber.

De modo esquemático, Joshua & Dupin (1989) fornecem a seguinte fluxograma para a caracterização do movimento dos saberes ao longo da *transposição didática*. Na Figura 5, destacaremos a *transposição científica,* a qual envolve o saber matemático acadêmico, e a *transposição didática,* visando ao saber matemático escolar (nos deteremos à análise pormenorizada da transposição didática).

A *transposição científica,* que caracteriza as modificações que o *saber matemático* sofre desde o momento de sua elaboração e descoberta até o da divulgação e sistematização entre a comunidade acadêmica, será discutidas em aulas posteriores.

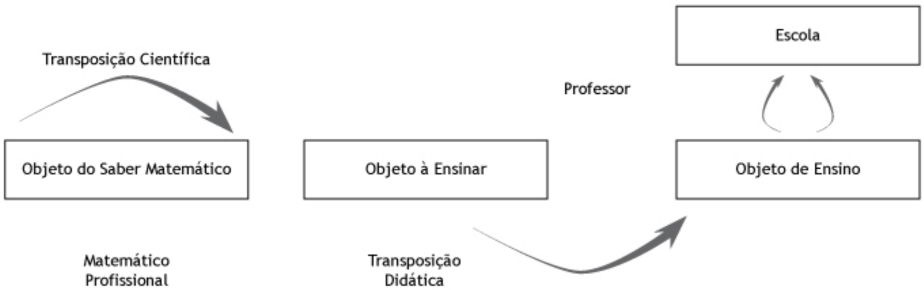


Figura 5: Transposição científica e transposição didática.

O *objeto do saber* (matemático) é definido no domínio do saber científico, isto é, aquele reconhecido pela comunidade científica. Todavia, nem sempre este objeto apresenta uma forma que propicie o seu ensino direto no ambiente escolar. Assim, "alguns mecanismos precisos devem assegurar sua extração do domínio do saber acadêmico e sua inserção em um discurso didático" (JOHSUA, S. & DUPIN, 1989, p. 194). Uma vez que isso se realiza – o que na maioria das vezes não se constitui como uma simples tarefa – o saber didático passa a ser de modo intrínseco diferente do saber matemático da academia.

Na sequência do fluxograma adaptado por nós, descrito na Figura anterior, os didatas franceses explicam ainda que "frequentemente identificamos duas posições opostas: a transposição não seria uma transformação, ela é uma degradação. Sua artificialidade mesmo lhe deixaria uma suspeita com respeito à riqueza do processo real de elaboração dos saberes científicos" (JOHSUA & DUPIN, 1989, p. 196).

Assim, o professor de matemática deve sempre ficar atento com respeito à criação do clima experimental em sala de aula que recria o ambiente de investigação do matemático profissional.

Como todo processo, a *transposição* pode atuar de modo positivo no que diz respeito à aprendizagem dos estudantes, entretanto, como bem destacamos acima, podem ocorrer erros e distorções no referido processo de transposição. Nos textos escolares, frequentemente encontramos tais distorções. A esse respeito, Joshua & Dupin (1996) sublinham que o texto segue a ordem lógica que possui às vezes pouca ligação com os reais problemas do pesquisador matemático.

Deste modo, a apresentação do *saber matemático,* por meio de uma exposição racional, a qual esconde os reais obstáculos superados até o alcance relativamente final, não apresenta o caráter de desenvolvimento progressivo, cumulativo e irreversível do *saber matemático*.

No ensino da Matemática, o teorema de Pitágoras e o teorema de Talles sempre representarão elementos de verdade, aceitos desde os séculos III antes de Cristo. Assim, quando os degraus em matemática são estabelecidos, não se descarta determinado saber constituído no passado. O *saber matemático* se acumula desde o início dos tempos. Por outro lado, observamos que:

> É necessário observar que no processo de aprendizagem, os conhecimentos não se empilham uns sobre os outros, os novos se juntam aos antigos. As reorganizações regulares vêem ao contrário forçar novas aquisições. A aprendizagem se faz em particular a partir destas integrações sucessivas (JOHSUA, S. & DUPIN, 1989, p. 197, tradução nossa.)

Joshua & Dupin (1989) citam Yves Chevalard, outro investigador francês que diferencia o *tempo didático* do *tempo de aprendizagem* em matemática. Com referência a tais noções, o sistema didático visa então à fixação da correspondência entre estes dois tempos; mas se trata de uma relação necessária se desejamos conceber uma didática. Entretanto, como já discutimos anteriormente, o professor de Matemática não pode se apoiar em expectativas que os alunos aprendem, porque cada aluno precisa enfrentar dificuldades e inseguranças até que ocorra, por parte do aluno, a compreensão de um novo conteúdo.

Em determinadas situações, o professor de Matemática se enfrenta um enorme dilema. Por um lado, a pressão para o cumprimento do currículo e do programa escolar age coercitivamente no sentido de utilizar aquele determinado tempo didático para o desenvolvimento daquele **conteúdo**. Por outro lado, o cumprimento daquele tempo estabelecido nem sempre mantém sintonia com o tempo de aprendizagem. Se temos mais conteúdos, o **tempo de aprendizagem** para raciocinar, refletir e sistematizar as ideias será incompatível com a quantidade de conteúdo, consequentemente, na maioria dos casos, o professor de Matemática não consegue um bom aprofundamento.

O dilen … o entre *aprofundar* … da eixo dependem

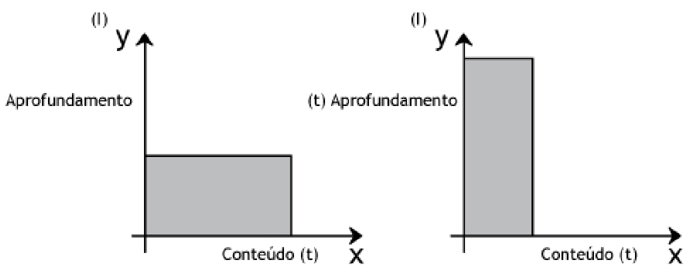


Figura 6: Produto cartesiano aprofundamento X conteúdo

O *tempo didático* depende, por sua vez, do tipo e da natureza do conteúdo que temos a intenção de realizar uma determinada *transposição didática*. De fato, quando nossa intenção é ministrar determinado conteúdo matemático, devemos ter em mente de forma clara que trabalharemos com a construção progressiva de um conjunto de conceitos e noções intrínsecos a tal conteúdo.

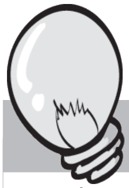
Assim, tanto no ensino escolar, apesar de lidarmos com vários *tipos de demonstração,* quanto no ambiente acadêmico, temos um conjunto de modos de demonstração ainda maior e a própria noção de demonstração não é objeto de ensino nem para os estudantes, nem mesmo para os professores em formação. Aliás, em poucas licenciaturas no estado do Ceará, encontramos como componente de estudo e de formação do futuro professor de matemática a noção de *demonstração* e *prova matemática*.

Outra *noção paramatemática* apontada por Joshua & Dupin é a noção de distância que existe no sistema escolar com uma significação bem particular. Ela é uma noção *paramatemática* porque nós a encontramos no ambiente de trabalho do matemático profissional de modo generalizado e possui um papel essencial, ‘‘mas no senso comum a noção de distância é sem dúvida uma das primeiras noções’’ (1989, p. 226). Ela entra como noção *paramatemática* de base na elaboração da Geometria Elementar. Todavia, devido a um movimento reformista e interior à própria Matemática chamado de Movimento da *Matemática Moderna,* a noção de distância foi transformada em um objeto do ensino escolar. Nas próximas aulas, mencionaremos novamente este movimento.

Ainda com relação à *transposição didática*, Brousseau oferece uma interessante perspectiva e possibilidades de eventos no decorrer de situações de ensino. Um elemento sublinhado por este autor, presente nas transposições didáticas, diz respeito ao *uso abusivo de analogias*.

Analogia é um excelente meio heurístico, mas sua utilização na relação didática de modo excessivo por ser danosa. De fato, a analogia é um recurso para a compreensão, uma espécie de muletas que oferecemos aos estudantes para a obtenção de uma compreensão imediata. Porém elas não podem substituir as próprias pernas dos estudantes.

Deste modo, um ensino heurístico de Matemática com o emprego de analogias é necessário, mas não suficiente para garantir a generalização de determinadas ideias gerais. Outra situação didática comum diz respeito ao *envelhecimento das situações de ensino*. De fato, o professor encontra dificuldades na reprodução da mesma lição para turmas diferentes.



SAIBA MAIS!

Na década de 60, o movimento chamado de Movimento da Matemática Moderna foi motivado e justificado pelo desejo de adaptar o ensino de Matemática aos padrões utilizados pelos matemáticos do século 20 (ou pelo menos um grande número deles). Nesta época, foi proposta uma reformulação radical dos currículos, com ênfase nos métodos abstratos e gerais (LIMA, 2001, p. 161).

Além disso, a reprodução exata de uma lição ou de uma aula para diferentes alunos é quase impossível. Assim, o professor de Matemática se vê diante da necessidade de realizar adaptações de sua exposição com relação à clientela a qual busca atender. Em um sentido oposto, se falamos de um professor de Matemática à moda antiga, que carrega as mesmas notas de aula por anos, diante do espírito de modernidade que respiramos (internet e tecnologia), este professor pode transformar seu ensino em um objeto cristalizado no tempo.

Com respeito à necessidade de atualização do ensino de matemática, Lima (2001, p. 160) diz que:

> A análise conjuntural com vistas a adequar o ensino da matemática ao momento presente nos leva inevitavelmente a considerar os anseios dos grupos a quem tal ensino é dirigido, as aspirações da sociedade onde o processo educativo tem lugar, bem como as restrições e obstáculos para a execução de projetos teoricamente ideais. Entre essas restrições encontram-se naturalmente as de ordem econômica, mas há outras, de natureza bem diversa, como a lentidão inevitável dos programas de treinamento de professores, além do natural apego a certas tradições, mesmo de natureza intelectual.

O matemático Elon Lages Lima identifica o condicionamento dos fatores sociais que promovem obstáculos à melhoria da qualidade da formação do professor. Assim, professor mal formado e desatualizado não apresenta condições de realizar um bom ensino, e provavelmente irá repetir de forma sistemática o roteiro do livro didático, o qual possui qualidade duvidosa. Lima (2001, p. 161) declara ainda que:

> Os professores do ensino básico, quer por formação quer por hábito, acham-se envolvidos numa rotina de trabalho onde os assuntos abordados são aqueles em que se sentem seguros de tratar e os exercícios propostos são quase sempre aqueles mesmos que já sabem resolver, mesmo porque a necessidade de complementar os seus parcos salários com o trabalho adicional não lhes permite muito tempo para estudar.

Lima desenvolve um raciocínio semelhante ao de Brousseau quando fala de *envelhecimento das situações de ensino*. Isso ocorre, como vimos acima, por causa de inúmeros fatores, inclusive devido ao meio ambiente institucional/escolar.

VOCÊ SABIA?

A Didática da Matemática do meio ou ambiente é "aquele subsistema com o qual o aluno tem de lidar diretamente. Esse meio é inicialmente definido como o conjunto de tudo aquilo que age sobre o aluno ou sobre o que o aluno age" (D´AMORE, 2007, p. 78).

Diferentemente das *Didáticas Gerais* que consideram as relações entre um ensino de um conteúdo genérico e as relações ali estabelecidas, sejam relacionadas a qualquer disciplina, a *Didática da Matemática* se ocupa destes fenômenos, mas sem perder de vista as ligações com o saber matemático.

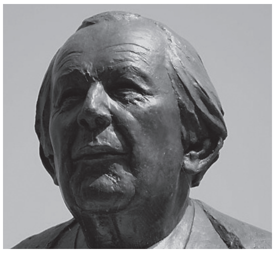
O professor Bruno D´Amore (2007) pesquisador da Universidade Italiana da Bolonha, afirma que devemos adotar uma perspectiva piagetiana para entendermos que conhecimento se constroi através da interação constante entre o sujeito e o objeto.

Os pressupostos piagetianos destacados por D'Amore merecem alguns comentários, apesar de que, nas próximas aulas, discutiremos as contribuições de Jean Piaget (1896-1980).

É comum os alunos de graduação estudarem teorias cognitivistas generalistas. Tais teorias não foram concebidas com uma preocupação referente à aprendizagem em Matemática. O diferencial da epistemologia genética de Piaget é que ele desenvolveu um pensamento analógico/descritivo para diversos fenômenos de natureza cognitiva.

VOCÊ SABIA?

Piaget foi contemporâneo de muitas figuras emblemáticas na Matemática Pura e da própria matemática extraiu inúmeros modelos e indícios para interpretar a cognição da criança. Retornaremos mais adiante a tal discussão.



Fonte: pt.wikipedia.org

Figura 7: Jean Piaget

Para concluir, sublinhamos que "o principal assunto estudado pela Didática da Matemática encontra-se constituído pelos diferentes tipos de sistemas didáticos (professor, estudante e saber)" (D´AMORE, 2007, p. 84). Seu diferencial, em relação a teorias generalistas, assenta na preocupação específica com o saber matemático, as relações entre professor de matemática e alunos diante de um currículo de Matemática.

No próximo tópico, discutiremos alguns aspectos preocupantes relacionados ao ensino da Matemática e começaremos a desenhar uma argumentação indicando de que modo a *Didática da Matemática* pode se apresentar como um instrumento poderoso para o futuro professor.

Para encerrar este tópicoreferente à noção de *Transposição*, vamos apresentar dois exemplos que você deverá pensar e trabalhar nas atividades do Fórum. O primeiro envolve a noção de proporcionalidade que é descrita por Lima (2001(a), p. 93) como *uma função* $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ *tal que, para todos reais* $c,x\in\mathbb{R}$*, temos* $f(c\cdot x)=c\cdot f(x)$ *(proporcionalidade direta) ou* $f(c\cdot x)=\dfrac{f(x)}{c}$ *(proporcionalidade inversa)*. Lima acrescenta que, "na prática, a definição tradicional equivale a dizer que a grandeza y é diretamente proporcional à grandeza x existe um número a (chamado de constante de proporcionalidade) tal que y=a.x".

Podemos lembrar o seguinte exemplo sugerido por Lima: Se um quilo de açúcar custa a reais, então x quilos custam y=a.x, a função que modeliza esta situação. Na próxima aula, continuaremos nossa discussão sobre o ensino de Matemática.

TÓPICO

03 SOBRE O ENSINO DA MATEMÁTICA

Objetivo

· Relacionar o ensino da Matemática com a prática pedagógica.

Reconhecidamente a *Didática da Matemática* e outros campos de pesquisa originados, na maioria dos casos, na Europa, se consolidaram com um objetivo maior de melhoria do ensino/aprendizagem desta disciplina. Afinal, antes de serem pesquisadores, todos os nomes até o momento citados neste texto são professores de Matemática em seus respectivos países.

No caso brasileiro, temos o orgulho de destacar a figura emblemática do professor e pesquisador Elon Lages Lima. Matemático profissional do Instituto de Matemática Pura e Aplicada do Rio de Janeiro, Lima apresenta, em sua vasta produção acadêmica, uma extensa produção voltada à Matemática do ensino superior, assim como alguns livros de cunho eminentemente voltados à formação do futuro professor.

Em um de seus livros, Lima (2001, p. 161) discute o Movimento da Matemática Moderna da década de 60 e nos mostra que "as conseqüências deste movimento em nosso país foram desastrosas, em que pese o fato de que algumas das práticas propostas eram realmente aconselháveis''.

> Acontece que, tradicionalmente, desde os nossos dias de colônia, estamos acostumados a seguir a moda que nos ditam os países mais desenvolvidos. E, em geral, imitamos o que é fácil, superficial e frívolo. Nossa imitação da Matemática Moderna resultou no abandono da Geometria e dos cálculos numéricos, substituídos por exageros conjuntivistas e um pseudo-formalismo vazio e desligado da realidade (LIMA, 2001, p. 161).

De fato, estuda-se mais Cálculo Diferencial e Integral em um curso de licenciatura do que Geometria Plana. Para completar o cenário, ainda na perspectiva de Lima, nas escolas, Euclides é colocado em segundo plano.

Em países desenvolvidos também podem ocorrer quadros graves relacionados ao ensino de Matemática como o relatado por Lima, como o Japão, que, segundo Lima (2001, p. 162):

> É um dos países do mundo onde o número de computadores por habitante é o mais alto Entretanto, apesar dos esforços das autoridades, a utilização de computadores no ensino da Matemática nas escolas japonesas teve de enfrentar a resistência e demora pois a maioria dos professores não estava preparada e relutava em preparar-se para mudar seus métodos tradicionais.

SAIBA MAIS!

Euclides de Alexandria (360 a.C. — 295 a.C.) fofoi um professor, matemático platónico e escritor possivelmente grego, muitas vezes referido como o "Pai da Geometria".Euclides também escreveu obras sobre perspectivas, seções cônicas, geometria esférica, teoria dos números e rigor.

Fonte: http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm16/biografia.htm

Lima acredita que ''esta demora resultou benéfica, pois hoje os japoneses parecem convencidos de que o uso dos computadores no ensino da Matemática e de suas aplicações é muito mais eficiente para os alunos a partir de 15 ou 16 anos, em cujos currículos tal uso se realmente justifica'' (LIMA, 2001, p. 162).

O exemplo asiático apresenta algumas semelhanças, respeitado os condicionantes culturais, com o sistema brasileiro de ensino. Aqui, a incorporação tímida por parte dos professores da escola, em muitos estados, é devida à sua frágil formação acadêmica com respeito à instrumentalização e aplicação da tecnologia para o ensino/aprendizagem.

Certamente que, no caso de nossa região Nordeste, quando a comparamos com a região Sul, evidenciamos o quanto ainda precisamos evoluir. De qualquer modo, estando o computador à disposição para uma aula de Geometria em um laboratório ou não, o exame de qualidade para a formação docente chamado Enade exige dos estudantes uma perspectiva diferenciada, no que diz respeito a uma Didática do ensino de Geometria e Geometria Dinâmica. Na Figura a seguir, apresenatremos a referida situação-problema.

Questão 34

Observe a seguinte atividade de construções geométricas.

- Construir um triângulo $\widehat{ABC}$ qualquer.
- Traçar a bissetriz do ângulo $\widehat{BAC}$ e, em seguida, a bissetriz do ângulo $\widehat{ABC}$.
- Marcar o ponto de encontro dessas duas bissetrizes.
- Traçar a bissetriz do ângulo $\widehat{ACB}$.
  O que você observa?

Será que, se você recomeçar a construção a partir de outro triângulo, chegará à mesma observação?

O uso de um software de geometria dinâmica na execução dessa atividade e de outras similares

(A) pode mostrar que o estudo das construções com régua e compasso é desnecessário.

(B) dispensa a demonstração dos resultados encontrados pelos alunos.

(C) prejudica o desenvolvimento do raciocínio lógico-dedutivo.

(D) dificulta o desenvolvimento do pensamento geométrico.

(E) pode contribuir para a elaboração de conjecturas pelos alunos.

Figura 8: Questão do Enade que exige uma perspectiva na Didática do ensino da Geometria Dinâmica

Um último exemplo destacado por Lima (2001, p. 163) refere-se ao ensino Soviético:

> De 1893 até o final da década de 60, o ensino da Geometria na Rússia, depois União Soviética, foi decisivamente influenciado pelo livro "Geometria Elementar" de A. P. Kiselev (1852-1940), que em mais de 50 edições sofreu melhoramentos e adaptações visando aperfeiçoar suas qualidades didáticas e sólida concepção, nas quais se baseou a formação de muitas gerações de cientistas, tecnólogos e matemáticos daquele país.

O autor ainda menciona que o desenvolvimento da ciência e tecnologia impulsionou na União Soviética uma reforma no ensino da Matemática no sentido "de atualizar material obsoleto e introduzir novos conhecimentos compatíveis com as exigências da época" (LIMA, 2001, p. 163).

Lima (2001, p. 163) relata a existência de duas abordagens didáticas distintas. Explica que uma delas foi liderada pelo extraordinário matemático A. N. Kolmogorov, o qual, segundo o autor:

> Comandou uma equipe para redigir os textos de Geometria baseados nos grupos de transformações geométricas. A outra tendência foi a do eminente geômetra A. V. Pogorelov, que adotou os princípios metodológicos

> de Kiselev, dando-lhes melhor consistência lógica, simplificando a apresentação, provendo-a de mais objetividade, modernizando o estilo e tirando proveito de progressos matemáticos obtidos em épocas recentes.

A reforma descrita por Lima apresenta uma preocupação interna com a organização da própria teoria matemática. Isso é um exemplo da transposição científica realizada pelos matemáticos com vistas ao ensino acadêmico, entretanto sabemos que o nível cognitivo dos estudantes pré-adolescentes é diferente de um estudante de nível universitário. Assim, na próxima etapa, precisamos pensar na *transposição didática* que tornará adequado este conteúdo ao professor da escola.

Acreditamos que seja relevante refletir por que a aprendizagem de Geometria por algumas crianças não é satisfatória. Embora esta resposta possa ser inferida a partir das colocações de Lima, assumimos a posição de que o ensino vai mal, em parte, porque os professores saem das universidades (de modo particular no Ceará) tanto com uma frágil formação em Geometria, como com uma fragilizada formação didática, a qual poderia potencializar transposições adequadas do referido conteúdo.

Para concluir este tópico, destacamos algumas considerações de Lima acerca do ensino de Matemática com referência à realidade dos países mencionados há pouco e alguns ensinamentos no que diz respeito à realidade brasileira.

O primeiro deles nos faz lembrar que:

> A Matemática é muito mais do que um encadeamento lógico de proposições referentes a conceitos abstratos, a partir das quais se pode chegar a conclusões de rara beleza e vasto alcance. Não apenas por isso que ela é universalmente ensinada. Nem tampouco é verdade que a aprendizagem se faz sob forma de silogismos, do geral para o particular. O lado prático, algorítmico e utilitário de certos tópicos da Matemática Elementar não pode ser menosprezado (LIMA, 2001, p. 164).

O segundo diz respeito ao fato de não podermos ignorar a presença dos computadores na vida diária das pessoas e a necessidade de acompanhar a evolução tecnológica. Assim, o ensino bem como as sequências didáticas do professor devem evoluir e manterem-se atualizados. A discutida formação tecnológica poderia ocorrer de modo sistêmico nas universidades.

É interessante observar que o futuro professor de Matemática, embora curse disciplinas de computação, cálculo numérico e outros objetos relacionados a linguagens computacionais, no momento de trabalhar com um *software* para o ensino de Álgebra, se vê bastante perdido. Por outro lado, o emprego computacional pode explicitar as limitações dos modelos matemáticos e enfraquecer o caráter de infalibilidade do *saber matemático*. Isso faz parte de uma *transposição didática* do docente, na medida em que busca estimular nos seus alunos um pensamento autônomo, de forma a não se restringir à repetição das regras estabelecidas na aula de Matemática.

EXERCÍCIOS DE APROFUNDAMENTO

1) Apresentamos as definições formais e mais gerais possíveis sobre a função logaritmo e a função exponencial. Responda:

a) Tais definições constituem saberes científicos?

b) Tais formulações necessitam sofrer alguma transposição didática com vistas à adaptação ao contexto escolar? Quais?

c) Indique as dificuldades de explorarmos as propriedades geométricas dos gráficos destas funções, sem o auxílio computacional.

d) Que adaptações você executaria sobre tais definições tornando-as mais acessíveis ao entendimento do estudante? Você discutiria a noção de continuidade?

e) Pelos gráficos destas funções que exibimos na figura 1, é possível conduzir e estimular o raciocínio do estudante sobre a propriedade que diz serem uma a inversa da outra?

2. (I) A função $\log_a : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ tem as seguintes propriedades:

a) $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$;

b) $\log_a(x^r) = r \cdot \log_a x$, para qualquer r e qualquer $x > 0$;

c) $\log_a(a^x) = x$, para todo x, e $a^{\log_a x} = a$, para todo $x > 0$;

d) $\log_a$ é crescente quando $a > 1$ e decrescente quando $0 < a < 1$;

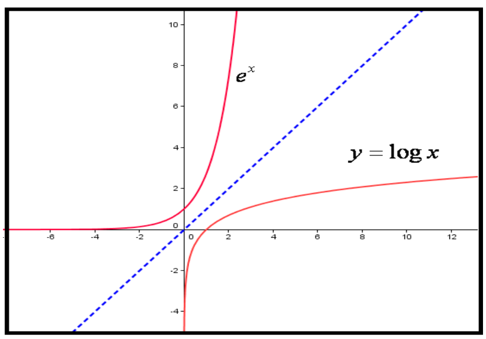
e) se $a > 1$, $Lim_{x \to 0^+} \log_a(x) = -\infty$ e $Lim_{x \to +\infty} \log_a(x) = +\infty$;

se $0 < a < 1$, $Lim_{x \to 0^+} \log_a(x) = +\infty$ e $Lim_{x \to +\infty} \log_a(x) = -\infty$;

f) $\log_a$ é sobrejetora.

(II) Definimos a função exponencial $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ como sendo a inversa da função logaritmo. Assim, por definição, $\exp(x) = y \Leftrightarrow \log y = x$. Em particular, $\exp(\log(y)) = y$ e $\log(\exp(x)) = x$.

3) No contexto da *Análise Real*, dizemos que $f : X \to Y$ é um *homemorfismo* entre os conjuntos $X, Y \subset \mathbb{R}$, quando temos que f é contínua e bijetiva, e sua inversa f^{-1} é contínua. Assim, pode-se verificar que $\log : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ é um homeomorfismo. Isto constitui um saber escolar ou um saber científico? O professor precisa conhecer esta propriedade para garantir que na figura abaixo temos de fato um *homeomorfismo*?



Relações entre as funções exponencial e logaritma

4) Enunciamos um teorema que diz respeito ao *saber científico*.

Teorema: a função exponencial é uma bijeção crescente de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{R}^+$. Ela é infinitamente diferenciável, com $(\exp)'(x) = \exp(x)$. Além disso, para $x, y \in \mathbb{R}$, vale $\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$. E para todo $r \in \mathbb{Q}$, tem-se que $\exp(r) = e^r$. Discuta a *transposição didática* necessária que torne tal saber científico discutível no contexto escolar.

5) No trecho abaixo destacamos um momento de discussão entre aluno e professor. Indique os momentos em que a professora não executa de modo eficiente a *transposição didática* adequada para sua turma de alunos. Indicar que *propriedades axiomáticas formais* a mesma faz referência.

> Contemplemos uma aula de matemática. A professora pergunta:
>
> — Por que $2 + 3 = 3 + 2$?
>
> — Porque ambos são iguais a 5 — respondem os alunos sem hesitar.
>
> — Não, a resposta exata é porque a propriedade comutativa da soma assim o sustenta. — A segunda pergunta é: Por que $9 + 2 = 11$?
>
> Novamente os alunos se apressam a responder:
>
> — 9 e 1 são 10 e mais um é 11.
>
> — Está errado! — exclama a professora. — A resposta exata é que pela definição de 2,
>
> $$9 + 2 = 9 + (1 + 1).$$

Trecho do livro de Kline (1971, p. 15)