TÓPICO
01 A NOÇÃO DE OBSTÁCULO EPISTEMOLÓGICO ESTUDADO EM DIDÁTICA DA MATEMÁTICA

OBJETIVO

· Descrever a noção de obstáculo epistemológico e suas implicações para o ensino

Iniciamos esta seção com alguns questionamentos: por que é mais difícil ensinar aos estudantes a noção de função exponencial e função logarítmica do que função afim e/ou função polinomial do segundo grau? Por que os estudantes preferem Álgebra em vez de Geometria Plana?

Aos olhos do incipiente ou o pouco treinado no *saber matemático*, essas questões podem não ter muito sentido, mas para o professor de Matemática, ser consciente do valor e das possíveis respostas para tais questões é essencial para a sua atividade. A primeira observação que fazemos é a seguinte: determinadas dificuldades enfrentadas pelos estudantes dependem de modo específico do conteúdo contemplado na ação didática.

Com isto, queremos dizer que, independentemente do professor, os alunos sempre sentem mais dificuldades na aprendizagem de função logarítmica do que na aprendizagem de função afim. Os alunos sempre preferem Álgebra a Geometria. Este sentimento de aversão e insegurança pode ser gerada pelo próprio conteúdo. Foi por isso que alguns didatas da Matemática passaram a se preocupar com as dificuldades intrínsecas oferecidas pelos próprio objeto matemático.

Historicamente, os matemáticos precisaram de mais tempo para formalizar a noção de limite, comparado-a ao tempo empregado com as noções de Derivada e Integral. É como se o tempo para a apreensão e compreensão de um objeto matemático fosse mais prolongado do que o outro; e isto dependeria das características próprias de cada objeto conceitual.

Outro aspecto interessante é que isto foi objeto de reflexão para muitos epistemólogos, que de modo particular estudaram a expansão e evolução do conhecimento matemático. Joshua e Dupin (1989, p. 61) descrevem parte deste processo quando recordam que:

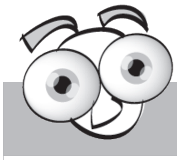
> Em particular, as matemáticas não formais, quase empíricas, não se desenvolveram por meio de uma acumulação contínua de teoremas inquestionavelmente estabelecidos, mas por meio de um aperfeiçoamento incessante de conjecturas graças à especulação crítica, graças à lógica de provas e refutações.

Na citação acima, vemos alguns vestígios apontados pelos didatas franceses ao sublinhar que a Matemática não se desenvolve por meio de um acúmulo de teoremas. De modo semelhante, o saber do aluno também não evolui à medida que passa a conhecer vinte teoremas em vez de apenas dez. Esta seria uma visão muito simplista da missão do ensino.

A partir desta visão que se preocupava em acompanhar e explicar os progressos das Ciências e da Matemática, alguns cientistas conceberam e criaram algumas noções que poderiam sistematizar e explicar, ou, pelo menos, prever surgimento de determinadas barreiras inevitáveis à evolução do saber. A noção mais celebrada nesse âmbito é chamada de *obstáculo epistemológico*.

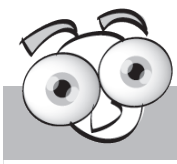
Seu fundamental criador foi o filósofo e poeta francês Gastón Bachelard (1884-1962), que, conforme Joshua e Dupin (1989, p. 63), descreve uma lista impressionante de obstáculos que interditam o modo de pensar pré-científico. Igliori (2002, p. 91) lança alguns questionamentos interessantes ao propor: O que é o conhecimento? Como se processo o conhecimento? Qual é a natureza dos objetos que compõem uma determinada ciência? Em que sentido é a Matemática um conjunto de objetos e um conjunto de ideias?

Acrescentamos a importância de refletir sobre: O que é o conhecimento matemático? Como se processa o conhecimento matemático? Qual é a natureza dos objetos



VOCÊ SABIA?

Epistemólogos são os cientistas que se debruça sobre a compreensão dos motivos da expansão do conhecimento científico.



VOCÊ SABIA?

D´Amore (2007, p. 211) explica que no ensino-aprendizagem, por um lado, é necessário que se formem ideias transitórias, mas, por outro lado, é preciso levar em conta que tais ideais resistirão (tentarão resistir) depois, quando da tentativa de serem superadas. [...] Pode-se dizer que um obstáculo é uma ideia que, no momento de formação de um conceito, foi eficaz para enfrentar os problemas anteriores, mas que se revela um fracasso quando se tenta aplicá-la a um novo problema. Dado o êxito obtido, tende-se a conservar a ideia já adquirida e comprovada e, apesar do fracasso, busca-se salvá-la; mas esse fato acaba sendo uma barreira para aprendizagens sucessivas.

que compõem a Matemática? Sublinhamos que, dentre as tendências evidenciadas na Epistemologia, nos interessamos, de modo particular, pela epistemologia das problemáticas "que se propõe a analisar como os problemas, que têm conduzido o homem ao conhecimento científico, modelaram as teorias inventadas para resolver estes problemas" (IGLIORI, 2002, p. 92).

Como sempre, as revoluções e quebra de paradigmas ocorridos na Matemática passam a influenciar e determinar mudanças em outros campos do saber. Nesse sentido, Igliori (2002) destaca os trabalhos de Karl Popper (1902-1994), que baseou sua abordagem em parte nas investigações desenvolvidas pelo matemático e físico Imre Lakatos (1922- 1974).

Ilustramos esse fato em seguida e sublinhamos as duas possibilidades: $particular \Rightarrow geral$ e $geral \Rightarrow particular$. São impressionantes os exemplos na Ciência que mostram o modo como pensadores se apoiaram em casos particulares para compreender as revoluções em caráter geral. Diante disto, o ingênuo professor de Matemática pode concluir que a trajetória $particular \Rightarrow geral$ é mais aconselhada para o sujeito que ~~se~~ depara pela primeira vez com um conhecimento.

]

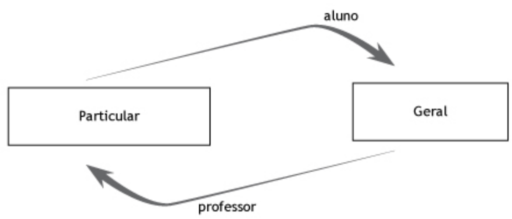


Figura 1: Caminhos da Ciência e da Matemática

Por outro lado, para quem sabe e conhece, como no caso presumimos seja o professor de Matemática, a trajetória $geral \Rightarrow particular \Rightarrow geral$ deve ser facilmente alcançada, entretanto podem ocorrer situações de quebra do contrato didático em que o mestre adota, por comodidade ou por preferência, apenas o caminho $geral \Rightarrow particular$.

Fazemos uma pequena digressão aqui para sublinhar a importância do futuro professor de Matemática adquirir e cultivar, ao longo de sua profissão, uma visão globalizante do saber matemático. Neste sentido, quando temos a missão de ensinar um conceito matemático, acreditamos ser essencial conhecer os aspectos que condicionaram sua gênese, os porquês do seu surgimento. Na Figura 2 abaixo, vemos o que chamamos de aspectos históricos (1).

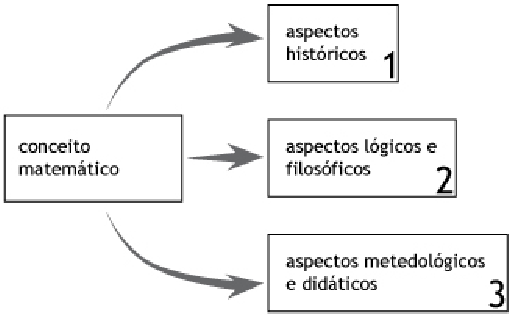


Figura 2: Preocupações do professor de Matemática

Sendo o professor de Matemática conhecedor dos embates e problemas que necessitaram ser ultrapassados pelos matemáticos profissionais do passado para a sistematização das ideias referentes ao conceito matemático, passamos a um segundo momento. Neste o professor precisar ater-se aos aspectos lógicos e filosóficos (2) que caracterizam a natureza e o papel que desempenha este conceito dentro da teoria em questão. Por fim, uma vez compreendida e construída pelo professor a visão que responde pela natureza e pelo campo de validade e aplicação deste conceito, é que o mestre passa a desenvolver uma preocupação com a *transposição didática* mais adequada para transformar o saber relacionado ao conceito em algo alcançável e compreensível pelos estudantes. Este último momento chamamos de aspectos metodológicos e didáticos (3). Assim, descrevemos a trajetória $1 \to 2 \to 3$.

Ao professor deve ficar claro que determinados saberes devem possuir um caráter provisório e que, num momento inicial, os alunos podem não possuir maturidade e/ou estruturas cognitivas que lhes possibilitem a aquisição daquele saber.

O professor sabe que *tipos de erro* os alunos devem cometer e vê tudo aquilo como uma etapa necessária para a aprendizagem. Num período ou série subsequente, o mesmo professor continua sua vigilância agora no sentido de sanar e aprimorar determinadas concepções equivocadas pelos seus estudantes.

Se houver uma troca de professor na escola durante o ano, o próximo professor dificilmente conhecerá os antigos erros e concepções errôneas dos alunos que precisam ser corrigidas. O caminho mais simples é, como alerta Brousseau (1996 p.127), colocar a culpa no professor do ano anterior. Mais adiante o mesmo autor declara:

> Os conhecimentos evoluem segundo processos complexos. Desejar explicar esta evolução unicamente por meio de interações efetivas no meio seria certamente um erro, pois, em breve, os estudantes podem interiorizar as situações que lhes interessam e operar com suas representações internas experienciais mentais importantes.

Desse modo, inevitavelmente os estudantes devem sentir mais dificuldades em uns conceitos do que em outros. A evolução dos processos cognitivos relacionados a alguns conceitos matemáticos passa por momentos de letargia, momentos de estagnação ou inércia. Momentos que alguns estudiosos da Psicologia Cognitiva chamam de acomodação.

O interessante é que, sem tais momentos de atividade, os estudantes não conseguem alcançar uma etapa subsequente. É como se fosse necessário enfrentar aquelas dificuldades, sentir aquela insegurança e incerteza.

VOCÊ SABIA?

É a modificação de um esquema ou de uma estrutura em função das particularidades do objeto a ser assimilado.

http://penta.ufrgs.br/~marcia/teopiag.htm#aco

Nesse sentido, passa a ser dever do professor possuir de modo claro a identificação *a priori* de todos os obstáculos à aprendizagem dos estudantes, o que nem sempre se constitui como uma simples tarefa. Arsac (1987, p. 307) acrescenta ainda que:

> Uma questão importante é a seguinte, do ponto de vista didático: a passagem ao estádio de demonstrações pode ter sido motivada por necessidades internas à própria Matemática, isto é, a demonstração pode ter aparecido inicialmente como um instrumento indispensável para certas ocasiões, ou é necessário se resignar a um forte apelo às informações transmitidas pelo docente e mesmo as exigências introduzidas indiretamente pelo contrato didático?

De fato, o questionamento de Arsac (1987) exige uma resposta, como dizem os matemáticos, não trivial. Reparamos como o mesmo faz menção ainda à noção de demonstração em Matemática. E esta pode agir como um obstáculo em sala de aula. Vejamos um exemplo comentado por Barbosa (2004, p. 16).

Teorema: Um segmento possui exatamente um único ponto médio. Para demonstrá-lo, Barbosa (2004) usa a seguinte proposição.

Proposição: ejam A, B, e C pontos distintos de uma mesma reta cujas coordenadas são, respectivamente, a, b e c. O ponto C está entre A e B se, e somente se o número c está entre a e b.

Passaremos agora à demonstração propriamente dita do teorema.

Prova: (*Existência*) Sejam a e b as coordenadas das extremidades do segmento. Consideremos agora o número $c = \dfrac{a+b}{2}$. De acordo com um axioma III da Geometria Plana (BARBOSA, 2004, p. 14), existe C que possui como coordenada o ponto determinado pela relação $c = \dfrac{a+b}{2}$, determinado pelas coordenadas de extremidade do segmento. Assim, em virtude ainda do Axioma, escrevemos $\overline{AC}+\overline{CB}=\overline{AB}$. Vemos, então, que $\overline{AC}=|a-c|=\left|a-\frac{a+b}{2}\right|=\left|\frac{a}{2}-\frac{b}{2}\right|$ e $\overline{CB}=|c-b|=\left|\frac{a+b}{2}-b\right|=\left|\frac{a}{2}-\frac{b}{2}\right|$ e concluímos que $\overline{AC}=\overline{CB}$. Mas considerando que o número $c=\frac{a+b}{2}$ está entre os números a e b, segue-se, pela proposição, que C está entre os pontos A e B; assim C é o ponto médio de $\overline{AB}$.

(*Unicidade*) Seja C como obtido na prova da existência anterior, vamos admitir que exista um outro ponto C', outro ponto do segmento $\overline{AB}$ tal que $\overline{AC'}=\overline{BC'}$. Sejam a, b e c' as coordenadas dos pontos A, B e C' respectivamente, então teremos:

(i) $c'-a=b-c'$, no caso em que $a<c'<b$; e (ii) $a-c'=c'-b$, no caso em que $b<c'<a$. Em todos os casos concluímos que $c'=\frac{a+b}{2}=c$. E mais uma vez, por outro axioma (BARBOSA, 2004, p. 15), temos os pontos $C=C'$, como se queria demonstrar.

Sublinhamos que, de acordo com a *apresentação axiomática* da Geometria, é difícil demonstrar o resultado enunciado neste teorema sem passar por algumas ideias centrais empregadas pelo matemático e pesquisador cearense João Lucas Marques Barbosa. Outro aspecto interessante é que determinados rituais formais executados pelo professor, em certos casos, não possuem um significado constituído para os estudantes. Este teorema que discutimos é um exemplo.

Percebe-se que o autor buscou caracterizar a *existência* e a *unicidade* do objeto chamado de ponto *médio do segmento*. De fato, em Matemática, as noções de *existência* e a *unicidade* são basilares para a evolução e a sistematização das ideias desta ciência; a dificuldade é a obtenção de entendimento pelos estudantes de sua necessidade e importância.

Assim, caso esta trajetória seja a preferida pelo professor, podemos prever um obstáculo à compreensão dos alunos. Todavia, o obstáculo aqui é determinado a partir da ação didática do professor em sala de aula. Este tipo de obstáculo é chamado por alguns autores de *obstáculo de ordem metodológica*. Com respeito aos vícios e distorções introduzidas na formação do futuro professor que podem favorecer a reprodução no ambiente escolar de verdadeiros *obstáculos de ordem metodológica*, Robert e Penninckx (1999, p. 95) advertem:

> Embora tais alunos possuam o conhecimento, eles manifestam a tendência à reprodução de certos modelos. Por exemplo, eles se refugiam em quadros de predileção ou de métodos privilegiados e apresentam resistência às mudanças. Eles recorrem sistematicamente aos algoritmos, ao quadro numérico e/ou ao quadro analítico. Falamos de concepções condutoras de práticas redutoras.

Apesar das autoras Robert e Penninckx mencionarem a realidade acadêmica de formação na França, aqui no Brasil a situação não é diferente. Por exemplo, encontramos *concepções condutoras de práticas redutoras* em diversos momentos da formação do professor de Matemática. Um exemplo clássico é o ensino compartimentalizado dos conteúdos dentro da própria universidade.

De fato, que relações o licenciando é levado a descobrir entre Álgebra Linear e Geometria? Que relações o aluno começa a perceber entre a Álgebra aparentemente ingênua da escola básica e a famigerada disciplina de *Estruturas Algébricas*? Como os fundamentos da *Análise Real* auxiliam o aluno na compreensão de propriedades básicas dos números naturais, inteiros, racionais e reais?

Na prática, o currículo de Matemática é distribuído em gavetas e cabe, em muitos casos, ao estudante relacionar por conta própria a ligação dos conceitos da Matemática Avançada, que "aparentemente" não tem nenhuma aplicação escolar com a Matemática escolar. Pode parecer uma piada de mau gosto, mas nem mesmo o estudante consegue realizar a ligação conceitual entre função afim x progressões aritméticas ou função exponencial x progressões geométricas, que dirá as ligações e implicações necessárias entre a Matemática Avançada com a Matemática escolar.

Tal currículo conduz a um ensino desconexo e separado em caixinhas. E o estudante, de modo semelhante, aprenderá tudo de modo separado e sem as ligações conceituais necessárias. Ora, isto caracteriza um sério obstáculo didático que dificilmente mudará sem uma mudança radical nos pressupostos filosóficos dos cursos de graduação de professores.

Brousseau (1996) estudou uma diversidade de obstáculos que devem ser considerados no plano didático. Assim podemos ter:

- **Obstáculos epistemológicos**: os constatados por Bachelard, que se caracterizam como inerentes ao próprio conhecimento. São percebidos nas dificuldades pelas quais os matemáticos passam para superá-los ao longo da história, como atestam as pesquisas em Epistemologia e Historia da Matemática;

- **Obstáculos didáticos**:

> *são aqueles decorrentes de determinadas estratégias de ensino. São resultantes de uma transposição didática que o professor dificilmente pode negociar no contexto restrito da classe. O conhecimento de um obstáculo de tal natureza permite ao professor rever a abordagem anterior sobre o assunto para esclarecer melhor a dificuldade vivida pelo aluno* (GOUVÊA, 1998, p. 11);

- **Obstáculos psicológicos**: *são aqueles que surgem quando a aprendizagem está em contradição com as representações profundas do sujeito ou quando ela causa uma desestabilização inaceitável* (GOUVÊA, 1998, p. 11).

- **Obstáculos ontogênicos**: são aqueles que se originam de uma aprendizagem fora do desenvolvimento psíquico do sujeito e das limitações de uma maturidade conceitual.

Para concluir esta seção, vamos comentar algumas das características dos obstáculos e de que modo eles podem surgir a partir da relação entre: $aluno - saber$ matemático $- professor$. Para discutir alguns exemplos de obstáculos epistemológicos, recordamos as colocações de Kline (1976, p. 30) explica que:

> O primeiro e principal passo dado pelos gregos foi insistir em que a Matemática lidasse com conceitos abstratos. Para ver o que isto significa, recordamos que quando pensamos sobre números, inicialmente, idealizamos coleções de particulares de objetos, tais como: duas maçãs, três homens, etc. Gradualmente, e nem sempre conscientemente, pensamos sobre os números 2, 3, etc. e todos os outros sem a necessidade de os associarmos a outros objetos do mundo físico. Rapidamente, atingimos a um estágio elevado de adição, subtração e executamos outras operações com números sem mesmo possuir alguma coleção de objetos para compreender tais operações, cujos resultados se coadunam com a experiência.

A3 T1

Apesar de extenso, em linhas gerais, o matemático profissional Morris Kline se refere ao processo mental de abstração. De fato, observando suas explicações, notamos que inicialmente, ele faz referências a objetos percebidos empiricamente, objetos que nos circundam. No segundo momento, sua atenção recai sobre conjuntos de objetos colocados em relação a certos tipos de simbologias que culturalmente são chamadas de números. No terceiro momento, o processo abstrativo já se encontra num patamar tão elevado que não necessitamos ver os objetos para idealizar operações que os empreguem, e, neste nível, o que importa são as relações estabelecidas entre conjuntos em que, na condição em que tenhamos alguma coleção particular e material de objetos, tais relações se adéquam de modo perfeito.

Aqui evidenciamos um caráter que sempre provoca mal estar nos estudantes, o caráter abstrato dos conceitos matemáticos que requerem processos cognitivos especializados para a sua internalização. Neste contexto, alguns objetos possibilitam mais barreiras ao entendimento do que outros. Por exemplo, se um professor professa sua aula de Matemática segundo o tópico função polinomial do primeiro grau, certamente as dificuldades devem ser menores quando comparadas a sua aula relativa à função logarítmica. Assim, independentemente do professor, o segundo tópico proporciona maiores dificuldades à aprendizagem. Tais barreiras são chamadas, assim, de *obstáculos epistemológicos* porque são relacionadas ao próprio conteúdo.

Por outro lado, mesmo quando referenciamos o mesmo conteúdo, os professores devem promover distintos pontos de vista de abordar e compreender o mesmo objeto. Dessa forma, em relação ao mesmo conteúdo, sentimos mais dificuldades com um professor do que com o outro. Identificamos aqui um *obstáculo de natureza didática*.

Obstáculos psicológicos podem ocorrer na ocasião em que tencionamos ensinar um determinado conteúdo matemático, que reconhecidamente apresenta sempre algum pré-requisito e, por algum motivo, os alunos ainda não dispõem daquele modelo mental que os capacite a determinada aprendizagem. Podemos gerar obstáculos de natureza cognitiva se tentarmos ensinar a operação de divisão sem os alunos estarem familiarizados suficientemente com a operação de multiplicação.

Por fim, não se consegue ensinar a noção de limite, derivada ou integral para uma criança de 10 anos, uma vez que, do ponto de vista maturacional, ainda se apresenta incapacitada para tal aprendizado. Tal situação envolve um obstáculo de natureza *ontogenética*.

Este assunto é inesgotável e apresenta um enorme campo de aplicações. Na próxima aula, ainda discutiremos outros aspectos relacionados à noção de obstáculos epistemológicos.