TÓPICO

01 SITUAÇÕES DIDÁTICAS E A-DIDÁTICAS

OBJETIVO

· Descrever as características de situações didáticas e a-didáticas.

Sugere a Didática da Matemática iniciarmos uma lição propondo à classe uma discussão que envolva um bom problema de Matemática. A questão é discernir quando temos um problema interessante? Interessante para quem, apenas para o professor ou para os estudantes? Como formular uma situação-problema e dela extrair o maior número de ensinamentos e ainda promover a maior diversidade de experiências possíveis?

A aprendizagem em Matemática sempre foi objeto de investigação para inúmeros estudiosos, como, por exemplo, Jean Piaget, que identificou e categorizou determinados raciocínios peculiares da Matemática.

Por outro lado, encontramos ainda visões estreitas que admitem a necessidade apenas de um bom professor com domínio de conteúdo para que tudo transcorra às mil maravilhas. Brousseau (1996 , p. 63) adverte que:

> O esquema socrático pode ser aperfeiçoado se supusermos que o estudante é capaz de extrair o saber por meio de suas próprias experiências, de suas próprias interações com o meio, mesmo que este meio não esteja organizado com fins de aprendizagem. [...] O aluno aprende se adaptando ao meio que é um fator de contradição, de dificuldades, de desequilíbrios, em parte como a sociedade humana. Este saber flui por adaptação do aluno, se manifesta por meio de respostas novas que são a prova da aprendizagem.

A4 T1

Destacamos esse significativo trecho de Brousseau, com profundas raízes piagetianas, principalmente porque sublinha que o aluno aprende se adaptando ao meio. Quando nos referimos ao meio, consideramos implicitamente a tríade já comentada aluno-professor-saber matemático. A diferença é que temos que considerar onde se dão estas trocas, relações assimétricas e simétricas de poder.

Mas vamos observar a perspectiva que o pai da Didática da Matemática relaciona à concepção moderna de ensino quando menciona que:

> A concepção moderna de ensino vai então demandar ao professor provocar nos alunos as adaptações desejáveis, por meio da escolha judiciosa, de problemas que ele propõe. Estes problemas, escolhidos de modo que o aluno possa aceitar devem fazê-lo reagir, falar, refletir, evoluir de seu próprio movimento. [...] O aluno sabe que o problema escolhido pelo professor visa a aquisição de um conhecimento novo, mas ele deve saber também que este conhecimento é inteiramente justificado por uma lógica interna da situação. (BROUSSEAU, 1996, p. 64).

Como já mencionamos, a dificuldade reside na escolha de bons problemas que resultem no desequilíbrio e posterior equilíbrio dos aprendentes. Percebe-se que nem sempre o aluno aceita a responsabilidade por uma situação de aprendizagem. Em geral, os alunos pensam na situação apenas na frente do professor, em sala de aula, e permanecem na expectativa de o mestre oferecer-lhes a fórmula que resulta no gabarito e aniquila o interesse naquela situação em poucos minutos.

Neste sentido nos valemos da distinção apontada por D´Amore (2007 , p. 81) quando explica:

> Dizemos que uma situação didática, sobre certo tema relativo ao saber, possui dois componentes: (i) uma situação a-didática (ii) um contrato didático. Trata-se de um modelo teórico: se em um ambiente organizado para a aprendizagem de determinado assunto falta a intenção didática explícita do professor, tem-se uma situação a-didática. [..] A situação a-didática final de referência, a que caracteriza o saber, pode ser estudada de maneira teórica, mas na situação didática, tanto para o professor como para o estudante, existe uma espécie de ideal cuja direção busca-se convergir. O professor deve, sem descanso, ajudar o aluno a eliminar, o mais possível, todos os seus artifícios didáticos, para permitir-lhe o conhecimento pessoal e objetivo.

Assim, os didatas da Matemática diferenciam situações organizadas com a intenção didática e outras situações que, mesmo sem a intenção objetiva e mesma a presença do professor, a aprendizagem se processa. D´Amore destaca um aspecto importante, ainda que não seja fácil para o aprendiz que se vê diante de uma nova teoria: diferenciar e separar os artifícios didáticos da real situação que o aluno pressupõe que o mestre deseja que adquira.

Brousseau (1996, p. 65) acrescenta que:

> O contrato didático é regido pelo jogo e pela estratégia da situação didática. É o meio que o mestre possui de se colocar em cena. Mas a modificação da situação modifica o contrato didático que permitem então a obtenção de nova situação. De modo semelhante, os conhecimentos são expressos por regras da situação a-didática e por estratégias. A evolução destas estratégias requer a produção de conhecimentos que permitem ao seu modo a concepção de novas situações a-didáticas.

Percebemos os dois elementos principais apontados por Bruno D´Amore que constituem uma situação didática, a saber: uma situação a-didática e o contrato didático. Tais relações poderão ser mais ou menos eficientemente estabelecidas na dependência da ação didática do professor, uma vez que o significado do saber matemático escolar para o aluno é fortemente influenciado pela forma didática com que o conteúdo lhe é apresentado (FREITAS, 2002 , p. 66). Assim, se o mestre estimula em sala de aula um saber matemático sem instigar a necessidade individual de autonomia e gerenciamento da própria aprendizagem, as situações a-didáticas permanecem comprometidas.

É como se aquela situação-problema tivesse importância apenas na presença do professor. Por outro lado, diante de uma situação didática que exige a presença do professor de Matemática, notamos que a mesma é regida por um determinado tipo de contrato didático, ou seja, um conjunto de obrigações implícitas ou explícitas relativas a um saber entreposto professor e os alunos (FREITAS, 2002, p. 67).

Mais adiante acrescenta:

> Segundo essa concepção o professor deve atuar não a simples comunicação de um conhecimento, mas a devolução de um bom problema. A devolução aqui tem o significado de transferência de responsabilidade, uma atividade na qual o professor, além, de comunicar o enunciado, procura agir de tal forma que o aluno aceite o desafio de resolvê-lo como se o problema fosse seu, e não somente porque o professor quer (FREITAS, 2002, p. 68).

A noção de situação a-didática assume um importante papel na teoria desenvolvida por Brousseau, uma vez que esse tipo de situação é caracterizado pela oportunidade de sucesso do estudante, por meio de seus próprios méritos, que consegue sintetizar um conhecimento e empregá-lo de modo relativamente diferenciado da maneira pela qual foi ensinado. É bem conhecido aquele professor de Matemática que aceita somente determinada resposta que envolve a regra de Matemática ensinada dentro da sala de aula. Se um aluno manifesta outro modo de solução de uma situação-problema, o professor declara que a questão está errada. Nem mesmo compreende, em alguns casos, aquele raciocínio totalmente atípico. De fato, a estratégia fornecida pelo estudante envolve a lógica do aluno que se diferencia da lógica do professor.

Nesse caso, o professor cerceia e impede a evolução de situações de aprendizagem em que os estudantes não conseguem contar efetivamente com a presença do mestre. Para melhor compreender as correlações existentes entre situações didáticas, situações a-didáticas e a resolução de problemas, vamos nos debruçar sobre alguns problemas concretos.

Um exemplo é o que encontramos numa publicação do Institut Universitaire de Recherche et l´Enseignement des Mathematiques – IREM de Strasbourg (1973). Veja abaixo na Figura 1:

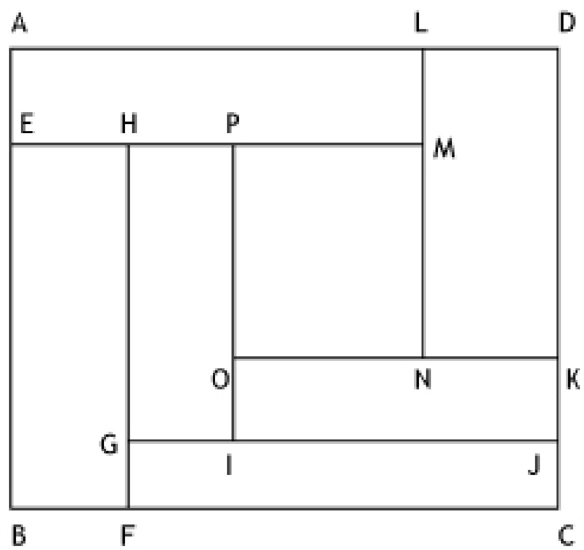


Figura 1: Situação problema proposto num manual de formação do IREM

A tarefa se distingue por relacionar de modo íntimo Geometria com Álgebra. Inicialmente o professor pode chamar o segmento $\overline{EB}=x$ sabendo por hipótese que $\overline{AB}=\overline{BC}=1$. Considerando que, segundo o enunciado, há sete retângulos que dividem a figura, o professor adverte que, apesar da figura poder não ser perfeita, teremos dentro do quadrado de lado $\overline{AB}=\overline{BC}=1$ sete retângulos de mesma área. Assim, o professor escreve $1^2=1=7\cdot\overline{BF}\cdot\overline{EB}=7\cdot\overline{BF}\cdot x \therefore \overline{BF}=\frac{1}{7x}$. Dessa forma, temos $\overline{BF}=\frac{1}{7x}$.

Na sequência o professor questiona como escrever o segmento $\overline{FC}$ em função de $\overline{EB}=x$. Um aluno se apresenta e argumenta que basta considerar que $\overline{BF}+\overline{FC}=1 \therefore \overline{FC}=1-\overline{BF}=1-\frac{1}{7x}=\frac{7x-1}{7x}$. Assim, com a sugestão do estudante, o mestre estabelece que $\overline{FC} = \frac{7x-1}{7x}$. E, de modo semelhante, podemos escrever $1^2 = 1 = 7 \cdot \overline{FG} \cdot \overline{FC}$? Sim, pois temos outro retângulo que foi construído no quadrado ABCD. Dessa forma, o professor escreve $\overline{FG} = \frac{1}{7 \cdot \overline{FC}} = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{\frac{7x-1}{7x}} = \frac{x}{7x-1}$. Mais uma vez o professor pergunta se é possível obter o segmento $\overline{GH} = x$. Contando com a participação de outro aluno e contando com a aquiescência da turma, escreve: $x = \overline{GH} + \overline{FG} \therefore \overline{GH} = x - \overline{FG} = x - \frac{x}{7x-1} = \frac{x(7x-2)}{7x-1}$.

Portanto $\overline{GH} = \frac{x(7x-2)}{7x-1}$. Passados alguns instantes, os alunos, por contra própria, começam a deduzir de modo semelhante que $1^2 = 1 = 7 \cdot \overline{GI} \cdot \overline{GH} \therefore \overline{GI} = \frac{1}{7\overline{GH}} = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{\frac{x(7x-2)}{7x-1}} = \frac{7x-1}{7x(7x-2)}$.

Notamos que todas as relações algébricas são extraídas a partir da disposição geométrica da figura que foi antecipadamente observada e que apresentava imperfeições. No entanto a noção da área do quadrado é sempre empregada para a obtenção de cada relação. Mais uma vez, obtemos $1^2 = 1 = 7 \cdot \overline{JK} \cdot \overline{JI}$ e $\overline{JI} + \overline{IG} = \overline{FC}$. Dessa forma, efetuando as devidas operações, chegamos a $\overline{JI} = \overline{FC} - \overline{IG} = \frac{7x-1}{7x} - \frac{7x-1}{7x(7x-2)} = \frac{(7x-1)(7x-3)}{7x(7x-2)}$. Assim teremos que $1 = 7 \cdot \overline{JK} \cdot \overline{JI} \therefore \overline{JK} = \frac{1}{7\overline{JI}} = \frac{1}{7 \cdot \frac{(7x-1)(7x-3)}{7x(7x-2)}} = \frac{x(7x-2)}{(7x-1)(7x-3)}$. Notamos que as relações continuam se complexificando a cada passo. É essencial o professor gerenciar a motivação da sua classe. Possivelmente algum aluno não esteja compreendendo aonde o mestre deseja chegar e é delicado lidar com este sentimento do aluno, tendo em vista que, para o professor, deve estar claro o seu objetivo de aprendizagem, todavia, para o aluno, tudo se reduz a uma simples desconfiança.

Entretanto, na condição em que consiga administrar bem a atenção da turma, o professor obterá que

A4 T1

$1=\overline{KD}+\overline{KJ}+\overline{JC}\therefore \overline{KD}=1-\overline{KJ}-\overline{JC}=1-\dfrac{x(7x-2)}{(7x-1)(7x-3)}-\overline{GF}$. Segue que

$$\overline{KD}=1-\overline{KJ}-\overline{JC}=1-\frac{x(7x-2)}{(7x-1)(7x-3)}-\overline{GF}=1-\frac{x(7x-2)}{(7x-1)(7x-3)}-\frac{x}{7x-1}.$$

No final da aula, o professor recomenda aos estudantes descrever os segmentos restantes $\overline{AE};\overline{AL};\overline{LD};\ \overline{KD}$, e assim por diante. O interessante é o professor saber que valores numéricos existem por trás desta situação. Na ocorrência de algum avanço das aprendizagens na sua ausência, possivelmente os alunos devem encontrar um valor determinado para o segmento $\overline{KD}$, pois note-se que $\overline{KD}=\dfrac{1-x}{6-7x}$. Portanto, devem obter que $x=\dfrac{1}{14}(7+\sqrt{19})$.

Assim, de acordo com o envolvimento da turma, devem ocorrer situações a-didáticas na busca destes valores. Neste momento, no ensino-aprendizagem deve haver condições para que o aluno realize ele mesmo suas aproximações, mobilize seus conhecimentos e seja capaz de explicitar seus procedimentos e raciocínios utilizados (FREITAS, 2002, p. 73).

Se, no decorrer do *contrato didático*, o professor trabalhou com situações-problema relativamente simples, com respostas suficientes para que a investigação possa se extinguir dentro da sala de aula, sentirá rejeições dos estudantes diante da tarefa investigativa que apresentamos.

Neste caso, de acordo com a evolução de situações *a-didáticas*, no momento de *devolução*, que se caracteriza como *um ato de ensino que produz a aceitação do estudante a responsabilidade de uma situação de aprendizagem* (BROUSSEAU, 1996), o professor cria uma expectativa de retorno das atividades propostas.

Transcrevemos, a título de ilustração, uma situação típica em sala de aula que caracteriza impossibilidade de situações *a-didáticas*. O trecho é destacado por Domingues (1995 , p. 15). O autor descreve o seguinte:

> Certa ocasião, no início de um ano letivo, ouvi casualmente uma conversa entre duas jovens estudantes. A mais velha havia passado para a 6 ª série e a mais nova para a 5ª série. Falavam sobre suas impressões a respeito das colegas, das aulas, das matérias e dos professores. A aluna da 6ª série ficara surpresa com as aulas de Geometria: ''Imagine'', dizia ela, ''que a professora chega, desenha dois triângulos iguais no quadro e depois passa o resto da aula procurando provar que eles são de fato iguais. Não entendo. Por que é preciso isso?''. ''E nas provas, como você vais se arranjar?'', perguntou-lhe a mais nova. ''Estudarei pelo livro...mas é tão difícil lembrar onde se devem pôr as letras....'' Neste mesmo dia, à tarde, ouvi como essa jovem, sentada junto a uma janela, estudava geometria: ''Para fazer a demonstração devemos superpor o triângulo ΔABC ao triângulo $\Delta A'B'C'$, repetia várias vezes. Sinto não ter ficado sabendo os resultados obtidos pela jovem em Geometria, mas certamente ele deve ter achado essa matéria difícil.

Aparentemente a situação pitoresca e anedótica descrita por Domingues não é rara. Casos semelhantes ocorrem em todos os níveis, com destaque para a Geometria Plana, e continuam no ambiente acadêmico. Um aspecto delicado aqui é que o professor não pode esperar que o aluno declare com naturalidade que não sabe ou enfrenta muita insegurança diante das tarefas, talvez por medo ou devido ao constrangimento social do grupo ao qual pertence.

A partir do interessante diálogo entre as estudantes, vemos que muita coisa é simplesmente aceita pelo estudante, sem nenhuma atitude crítica. Neste sentido, D´Amore (2007, p. 105) acrescenta:

> Diante dos enunciados de problemas, os alunos se [...] acostumaram a não colocar em discussão a legitimidade e a pertinência das perguntas do professor, e isso lhes permite, por outro lado, funcionar de maneira econômica, tendo ‘‘de maneira natural’’ confiança no adulto. De acordo com essa lógica, todo problema tem solução, uma solução ligada aos dados presentes no enunciado.

Por outro lado, o professor de Matemática deveria optar por uma aprendizagem que evitasse esses automatismos. A observância e a importância de se considerar as múltiplas estratégias apresentadas pelos estudantes têm sido objeto de interesse no exame Enade, como observamos na ilustração abaixo, que reproduz uma situação didática do ensino de Álgebra.

Percebe-se ainda que o *erro matemático* também faz parte da discussão e requer uma visão formada a respeito, principalmente no que diz respeito ao papel formativo do estudante.

Questão 33

A professora Clara propôs a seus alunos que encontrassem a solução da seguinte equação do segundo grau:

$$x^2 - 1 = (2x + 3)(x - 1)$$

Pedro e João resolveram o exercício da seguinte maneira.

Resolução de Pedro:

$x^2 - 1 = (2x + 3)(x - 1)$
$x^2 - 1 = 2x^2 + x - 3$
$2 - x = x^2$
Como 1 é a solução dessa equação, então $S = \{1\}$

Resolução de João:

$x^2 - 1 = (2x + 3)(x - 1)$
$(x - 1)(x + 1) = (2x + 3)(x - 1)$
$x + 1 = 2x + 3$
$x = -2$
Portanto, $S = \{-2\}$

Pedro e João perguntaram à professora por que encontraram soluções diferentes. A professora observou que os outros alunos haviam apresentado soluções parecidas com as deles.

Entre as estratégias apresentadas nas opções a seguir, escolha a mais adequada a ser adotada por Clara visando a aprendizagem significativa por tarde dos alunos.

Figura 2: Exemplo de situação didática explorada pelo Enade/2008

A Indicar individualmente, para cada aluno que apresentou uma resolução incorreta, onde está o erro e como corrig-lo, a partir da estratégia inicial escolhida pelo aluno.

B Resolver individualmente o exercício para cada aluno, usando a fórmula da resolução da equação do 2º grau, mostrando que esse é o método que fornece a resposta correta.

C Pedir a Pedro e João que apresentem à classe suas soluções para discussão e estimular os alunos a tentarem compreender onde está a falha nas soluções apresentadas e como devem fazer para corrigi-las.

D Escrever a solução do exercício no quadro, usando a fórmula da resolução da equação do 2º grau, para que os alunos percebam que esse é o método que fornece a resposta correta.

E Pedir para que cada um deles comunique à classe como resolveu o exercício e, em seguida, explicar no quadro para a turma onde está a falha na resolução de cada um e como eles devem fazer para corrigi-la.

Figura 3: Possibilidades de resposta da questão.

A partir dessa questão proposta pelo Enade, sentimos que é impossível discutir as noções de situações didáticas de modo isolado, sem considerar a noção de situações de resolução de problemas de Matemática, entretanto nos deteremos em uma análise didático-metológica, tendo em vista que, em outra disciplina, voltaremos a abordar a noção de resolução de problemas e então evidenciaremos os esquemas cognitivos mobilizados ante cada tipo de tarefa.

TÓPICO

02 SITUAÇÕES DIDÁTICAS A NOÇÃO DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

OBJETIVO

· Aprofundar o estudo da função totiente.

VOCÊ SABIA?

Os autores Sternberg & Been-Zeev (1996, p. 31) explicam que existem três elementos para a descrição de um problema: a condição dada, o objetivo da condição, e operações exequíveis. Solução de problemas ocorre quando um solucionador encara um dado problema. Um problema vai ser caracterizado como problema matemático quando algum procedimento eminentemente matemático é exigido. Por fim, resolução de problemas de matemática ocorre quando um solucionador de problemas matemáticos reconhece uma situação encarada como desafio busca resolver.

Como elaborar *situações-problema* que estimulem a habilidade do aluno de *generalizar conteúdos matemáticos*? Como instigar o exercício da *flexibilidade do processo mental* ante uma situação-problema? Como instrumentalizar o aluno com uma percepção adequada para perceber a possibilidade da *redução de passos de raciocínio*? Como estimular sempre o aprendiz para encontrar *o modo mais fácil, claro e econômico* para resolver problemas?

A trivialidade da resposta dessas questões é completamente descartada por psicólogos que trabalham analisando os fenômenos cognitivos que se manifestam diante da resolução de um problema matemático. Como nossa cultura valoriza o *ensino* em detrimento da *aprendizagem*, de modo geral, nós, professores, desconhecemos muitos destes fatores cognitivos que interferem de modo decisivo.

O desafio urge que equalizemos possíveis saídas e possibilidades vantajosas para os estudantes, no que diz respeito à aprendizagem. Como já discutimos no tópico anterior, do professor de Matemática é exigida a concepção de situações, com ou sem a sua presença, que possibilitem, por exemplo, a evolução de habilidades cognitivas tais como as que mencionamos no início desta secção.

É de suma importância a noção de situações *a-didáticas* uma vez que:

> Uma situação assim é definida como a-didática quando estão em jogo os estudantes e o objeto do conhecimento, mas não o professor (nessa ocasião particular). A situação sugere exigências e os alunos respondem a elas. Não existem obrigações didáticas e, portanto, aquilo que se faz não está ligado a estímulos por parte do professor. O estudante faz tentativas (sozinho ou em grupo), verifica que elas não funcionam ou são ineficazes; que a prova deve ser refeita várias vezes.[...] A demanda de efetuar aquela atividade matemática não foi proposta pelo professor, não seria necessária do ponto de vista escolar. Ao contrário é uma necessidade motivada pela atividade (D´AMORE, 2007, p. 234).

Mas como conceber situações-problema interessantes que despertem o interesse do estudante tanto em sala de aula com o grupo quanto em casa de modo individual? Que estratégia desenvolver para que o professor possa prever o direcionamento das aprendizagens ocorridas ao longo das interações por ele previstas, sob o seu controle, e as interações que ocorrem naturalmente com o grupo de estudantes que se relacionam com determinado conteúdo?

Cabe ao professor a formulação destas estratégias que, aos olhos dos estudantes, não se assemelhem a simples tarefas solitárias gabaritadas, e sim, a um jogo (espécie de aplicação) que requer o seu envolvimento e o envolvimento do grupo diante do desafio que se estabelece.

SAIBA MAIS!

Os jogos matemáticos não são as únicas formas lúdicas de trabalhar um conteúdo ou de evoluir o currículo, mas é uma das mais bem aceitas pelos alunos. A escolha de um jogo não deve ser aleatória, é necessário selecionar um conteúdo, relacionar conceitos, pensar em matérias, estudar contextos, observar os alunos e refletir sobre a eficácia do que é proposto. Com certeza, aplicar um jogo matemático que tenha relação direta com um conteúdo é muito trabalhoso, mas a resposta dos alunos é mais satisfatória do que a tradicional aula quadro e giz.

Muitos defensores se apresentam quando falamos de aplicação de jogos em sala de aula. Quando falamos então da dimensão lúdica da Matemática, ficam embriagados pelo termo ''lúdico'', quase em transe hipnótico. De fato, alguns desses incipientes do saber matemático possuem a crença ingênua de que a dimensão lúdica e o prazer eventual de situações que envolvem a referida dimensão é a salvação das almas aflitas no estudo da Matemática.

No entanto, questionamos se, no final do jogo, ocorre, por parte do professor, um balanço final da evolução das aprendizagens? Que habilidades foram impulsionadas, como, por exemplo, as que mencionamos no início desta seção?

VOCÊ SABIA?

Atividade lúdica é todo e qualquer movimento que tem como objetivo produzir prazer quando de sua execução, ou seja, divertir o praticante. A atividade lúdica também é conhecida como brincadeira.

Encontramos também outros dados interessantes que podem instigar nossa discussão sobre o uso do jogo na aula e de modo não planejado. Nesse sentido, Wiellewski (2005 , p. 72) menciona que o russo Vadim Andreevich Krutetskii (1917-1989) identificou em seus estudos três categorias básicas de constituição matemática da mente, que foram descritas da seguinte maneira:

- **Estilo analítico**: o pensamento é caracterizado pela predominância de um bem desenvolvido componente verbal-lógico em contraposição com um fraco desenvolvimento do componente visual-pictórico;

- **Estilo geométrico**: o pensamento é caracterizado pela predominância de um bem desenvolvido componente visual-pictórico em contraposição com um bem desenvolvido verbal-lógico;

- **Estilo harmônico**: é caracterizado por um equilíbrio relativo dos componentes verbal-lógico e visual-pictórico, ambos bem desenvolvidos.

Reflita: Diante de uma situação prática, que jogo o professor poderia propor no sentido de instigar de modo prioritário nos estudantes o estilo geométrico? Ou o estilo analítico?

Como você pode perceber, avaliar e identificar com que tipo de estudante o professor conta em sala de aula é uma tarefa difícil.

No âmbito da solução de problemas, Wiellewski (2005, p.85) relata que foi fornecida aos estudantes a seguinte expressão: $(C+D+E)\cdot(E+C+D)$. Alguns identificaram o seguinte padrão $(C+D+E)\cdot(E+C+D)=(C+D+E)\cdot(C+D+E)=(C+D+E)^2$, que se relacionava com a fórmula do quadrado de um binômio. Outro estudante compôs um algoritmo para resolver todos os problemas dessa categoria.

Em outra situação, foi dado o seguinte problema: *Prove que o quadrado da primeira fração mais a segunda é igual ao quadrado da segunda fração mais a primeira*. Um dos estudantes que participaram do estudo argumentou que as frações podem ser descritas por $\frac{x}{y}$ e $1-\frac{x}{y}$ de modo que sua soma é $\frac{x}{y}+1-\frac{x}{y}=1$ como requer o problema. Além disso, ele escreveu $\left(\frac{x}{y}\right)^2+\left(1-\frac{x}{y}\right)=\left(1-\frac{x}{y}\right)^2+\frac{x}{y}$ (*). Com isto, você acha que ele resolveu o problema? A identidade em (*) é verdadeira sempre?

É comum no dia-a-dia dos estudantes, encontrarmos respostas numéricas. Por exemplo, nesse último problema, nenhum número é mencionado e a solução anterior é a mais geral possível, mas pode acontecer de alunos preferirem verificar o que se pede para casos particulares que não propiciam a generalização do modelo envolvido.

Em outra parte do estudo, Wiellewski (2005, p. 114) destaca os problemas de natureza geométrica explorados por Krutetskii. Segundo a autora, foi apresentada a seguinte situação: *Cada lado de um quadrado foi aumentado em 3cm e, consequentemente, sua área foi aumentada em 39* cm^2 *. Encontre o lado do quadrado resultante*. Krutetskii evidenciou que os estudantes da 6ª série resolvem em poucos segundos por meio de $(x+3)^2 - x^2 = 39$ (Figura 4-I). Ele salientou ainda que quase todos os estudantes pesquisados que pertencem ao estilo geométrico o resolveram de uma maneira mais complicada. Primeiro fizeram o desenho.

Outro problema apresentados ao grupo foi o seguinte: *Agora, eu sou duas vezes tão velho quanto meu irmão era quando eu era tão velho quanto ele é agora. Nós dois juntos somamos 63. Quantos anos cada um de nós tem?* Esse problema geralmente é resolvido por sistemas de equações, no entanto um estudante apresentou uma resolução geométrica descrita na Figura 4.

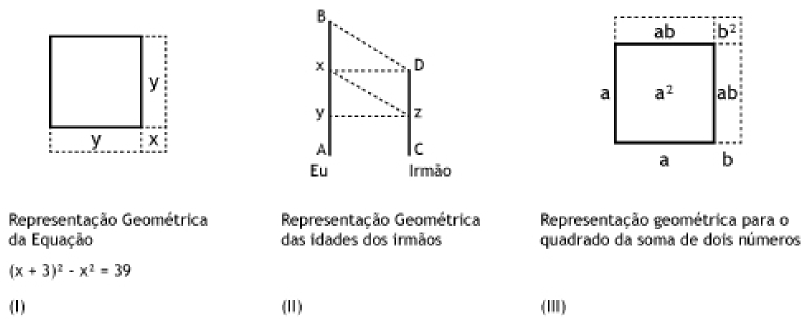


Figura 4: situações-problema desenvolvidas pelos estudantes

Em seguida argumentou: Bx é a diferença entre nossa idade. Quando eu tinha Ax, ele tinha Cz; ou seja, $Cz = \frac{AB}{2}$ (pela condição) e $Ay = \frac{AB}{2}$. Mas como $Bx = Dz$, isto significa que $By = 2 \cdot Bx$; AB=4 · B e CD=3 × B. Assim, concluímos que podemos ter 36 e 27 anos.

Krutetskii, conforme Wiellewski (2005, p. 116), destacou a atividade de uma aluna da 6ª série que interpretou geometricamente o quadrado da soma de dois números (Figura 4-III). Depois que conseguiu interpretar a fórmula, a criança declarou que só naquele momento realmente entendia aquela propriedade. *Após esse momento, a mesma estudante interpretou todas as outras fórmulas geometricamente*.

Mais adiante a autora destaca:

> Krutetskii constatou que o estudante de estilo geométrico sentia uma necessidade de interpretar um problema em um plano geral, contudo esse plano geral continuava sendo apoiado por imagens. Nem todos os esquemas visuais pictóricos utilizados por eles eram relativamente generalizados, muitos eram imagens visuais particulares e concretas (WIELLEWSKI, 2005, p. 117).

Na parte exploratória da pesquisa, Wiellewski apresentou o seguinte problema: *De todos os retângulos que têm o mesmo perímetro, qual o que tem maior área*? Wiellewski explica que o aluno participante do estudo sabia, de modo intuitivo, que se tratava do quadrado, porém sentia que precisava demonstrar. Desenhou, então, na sua resolução, um retângulo que vemos na Figura 5.

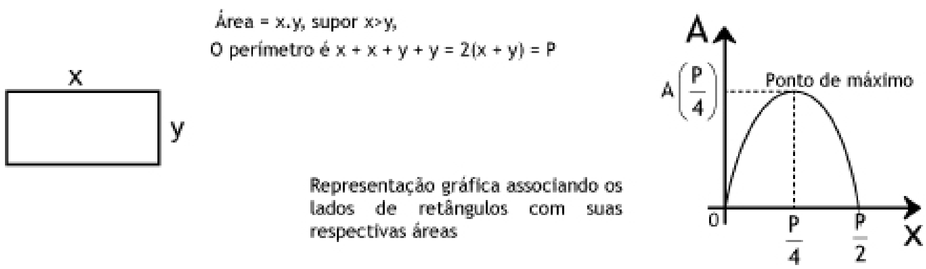


Figura 5: Argumentação desenvolvida pelo aluno (WIELLEWSKI, 2005, p. 136).

Entretanto tentou resolver o problema de forma abstrata. Pensou na variação dos lados do retângulo. Para manter o mesmo perímetro, ele disse: "se aumenta 1 em y, diminui 1 em x". Em seguida, escreveu: "Se aproximar x de y, em 1 unidade temos: $(x-1)$ e $(y+1)$. $\acute{A}rea=(x-1)(y+1)=xy+x-(y+1)$. Se, após aumentar y para y+1 e diminuir x para x-1, estes valores forem iguais, então teremos a área $\acute{A}rea=(x-1)(y+1)=xy+x-(y+1)=xy+1$. A área aumenta de uma unidade.

Wiellewski (2005, p. 137) continua descrevendo que o aluno não conseguiu obter uma prova matemática. Após outras tentativas de resolução sem sucesso, ele procedeu da seguinte forma:

$\acute{A}rea=x\cdot\left(\frac{P}{2}-x\right)=x\cdot\left(\frac{2(x+y)}{2}-x\right)=-x^2+\frac{Px}{2}$, e quando

$A=0$ quando x=0 ou quando $-x+\frac{P}{2}=0\leftrightarrow x=\frac{P}{2}\therefore P=4x$. Como se trata de um retângulo, os lados são todos iguais quando se tem maior área. Durante a resolução, *ele mencionava que o problema poderia ser resolvido pelo conceito de função, no entanto ele não se recordava do procedimento. Por isso tentou outros processos de* *resolução antes de resgatar esse por meio de função na qual recorreu à representação gráfica* (WIELLEWSKI, 2005, p. 137).

A partir das considerações da autora e de algumas das demonstrações discutidas anteriormente, observamos claramente que, quando limitamos nosso ensino ao emprego de fórmulas e estimulamos apenas o *raciocínio algorítmico*, o esforço do professor de Matemática diminui de modo considerável. Como em ocasiões, por exemplo, em que o professor trabalha com seus alunos o cálculo da inversa de funções do tipo $y = \frac{1}{2}x + 3$, que pode conter 30 questões com o uso do mesmo procedimento e, mesmo assim, o estudante não sabe dizer o que é uma função inversa.

A4
T2

Entretanto, quando buscamos uma abordagem de resolução de problemas mais interessante, inúmeras exigências surgem no horizonte de preocupação. Como vimos, as características idiossincráticas de cada estudante não podem ser ignoradas. Uma outra dificuldade é a formulação de problemas realmente interessantes, tanto para o professor como para os aprendizes.

Nesse sentido, Milauskas (1994 , p. 90) aconselha:

> Quando você se dispõe a criar bons problemas para seus alunos de geometria, é preciso ter certas coisas em mente. Tente encontrar problemas de enunciado simples, mas que tenham algo diferente ou uma solução nova. Problemas reais talvez sejam motivadores, mas outros totalmente irreais, inusitados ou incomuns também poderão sê-lo. Esses problemas espicaçam a curiosidade e convidam à resolução. Bons problemas às vezes contêm informações estranhas ou insuficientes. Às vezes o mais importante não é o problema em si, mas sim o raciocínio, a análise e as técnicas necessárias para a sua solução. Também é preciso considerar a maneira como o problema é colocado.

Notamos uma forte preocupação com o ensino de Geometria. E de fato não é uma mera coincidência ou simples preferência da autora. Em países como Espanha, Portugal, França, Inglaterra, por exemplo, já encontramos um *currículo de formação de professores de Matemática* com a presença de Didática do ensino de Geometria ou Didática do ensino de Álgebra, diferentemente de nossa realidade curricular nordestina, que promove uma formação compulsória de *Psicologia da Aprendizagem* e *Psicologia do Desenvolvimento*. O aluno egresso de um curso de licenciatura não conhece as características de um *esquema cognitivo* mobilizado para resolver uma operação específica com frações.

Questões problemáticas sobre a formação serão retomadas ainda neste curso. Por ora, vamos nos deter em um ponto delicado comentado por Milaukas (1994). De fato, não é muito simples arranjar aplicação para todo conteúdo colocado em sala de aula. Isso exigiria um tempo dobrado do professor de Matemática para a elaboração de sua aula, a qual não pode ser uma mera repetição do livro, o que na maioria das vezes acaba acontecendo.

Mais adiante, Milauskas (1994, p. 91) aconselha que:

> O professor deve exercer um controle sobre onde e como um problema é utilizado. Talvez haja a necessidade de pistas e atividades preliminares. Talvez seja conveniente permitir que os alunos trabalhem em grupo. Um determinado problema pode ser mais adequado a uma discussão em classe do que a ser feito como tarefa de casa.

Milauskas seleciona alguns problemas interessantes e sugere "pistas" ou "sugestões". Exibimos alguns deles a seguir. Observe cada um para responder aos questionamentos que levantamos:

i) No que diz respeito ao exercício (I), o que você definiria para discutir com o estudante em caráter de sugestão ou pista? Que raciocínio você valorizaria de modo prioritário – *analítico-verbal* ou *geométrico-pictórico* – no momento de atribuir uma nota?

ii) Em (II), a autora apresenta as argumentações fornecidas pelos estudantes que tentaram resolver o problema. Existe outra solução para a mesma situação? Você é o tipo do professor que valoriza o esboço do desenho dos objetos da Geometria Espacial que estão essencialmente no espaço tridimensional?

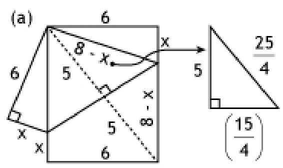
iii) Por fim, na questão (III), em sua opinião, o esboço do desenho do cubo está claro para o estudante ou é apenas um detalhe sem importância?

a) Uma folha de papel retangular de 6 polegadas por 8 polegadas é dobrada de maneira que os vértices opostos se toquem. Ache o comprimento da dobra.

b) Uma folha de papel de 8 polegadas por 12 polegadas é dobrada de maneira que um vértice toque o ponto médio do lado não adjacente maior. Ache o comprimento da dobra.

Solução ou pista comentada pela autora

Note que a dobra é a mediatriz do segmento da reta unindo os vértices. Tente geometria analítica para uma variação, ou use triângulos semelhantes.

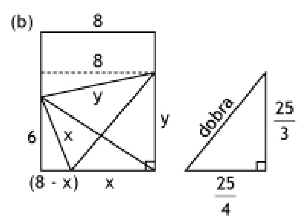


(i)

$x^2 + 6^2 = (8 - x)^2$

Logo, $x = \frac{7}{4}$

$8 - x = \frac{25}{4}$



$6^2 + (8 - x)^2 = x^2 \quad x = \frac{25}{4}$

$(y - 6)^2 + 8^2 = y^2 \quad y = \frac{25}{3}$

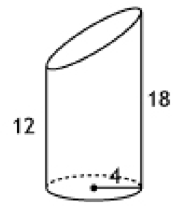
Respostas: a) $\frac{15}{2}$ b) $\frac{125}{12}$

Figura 6: Exercício I proposto por Milauskas (1994, p. 91)

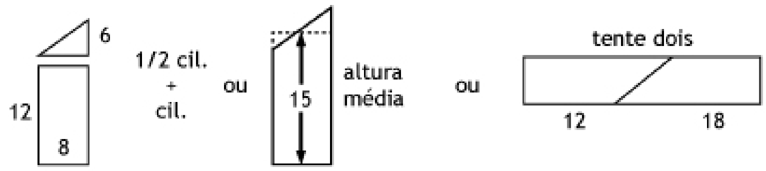
(II)

Um cilindro é seccionado obliquamente, como mostra a figura. A altura vai de 12cm a 18 cm e o raio mede 4cm

a) Ache o volume.
a) Ache a área lateral.
a) Ache a área total. (Nota: a área de uma elipse é πRr.)



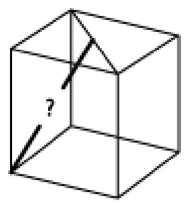
Aqui estão algumas das soluções propostas pelos alunos:



Resposta: V = 240 π AL = 120π AL = 156π

Figura 7: Exercício II proposto por Milauskas (1994, p. 91)

Cada aresta do cubo da ilustração mede 6cm. Ache a distância do ponto médio de uma das diagonais das faces ao vértice mais distante do cubo.



Sugestão da autora

Trace mais duas diagonais das faces, de modo a formar um triângulo equilátero de lado $6\sqrt{2}$. Assim, a distância pedida é $3\sqrt{6}$.

Figura 8: Exercício III proposto por Milauskas (1994, p. 92)

Nenhuma das perguntas feitas anteriormente pode ser descartada. Nelas o amparo ao raciocínio fornecido pela figura é essencial. Recordamos aquele tipo de professor que, quando ensina Geometria Espacial, nunca perde tempo desenhando figuras na lousa.

A faculdade intuitiva daquele estudante está sendo exigida no momento em que ele busca estabelecer relações entre o enunciado e o objeto que busca desenhar na folha de papel. A mesma figura poderá servir para explicar o seu raciocínio para os colegas, no momento do debate em sala de aula.