CAPÍTULO I

Noções de Lógica

I. Proposição

1. Chama-se *proposição* ou *sentença* toda oração declarativa que pode ser classificada em verdadeira ou em falsa.

Observemos que toda proposição apresenta três características obrigatórias:

1ª) sendo oração, tem sujeito e predicado;

2ª) é declarativa (não é exclamativa nem interrogativa);

3ª) tem um, e somente um, dos dois valores lógicos: ou é verdadeira (V) ou é falsa (F).

Exemplos

São proposições:

a) Nove é diferente de cinco. ($9 \neq 5$)
b) Sete é maior que três. ($7 > 3$)
c) Dois é um número inteiro. ($2 \in \mathbb{Z}$)
d) Três é divisor de onze. ($3 | 11$)
e) Quatro vezes cinco é igual a vinte. ($4 \cdot 5 = 20$)

Dessas proposições, todas são verdadeiras exceto d.

Não são consideradas proposições as frases:

f) Três vezes cinco mais um. $(3 \cdot 5 + 1)$
g) A raiz quadrada de dois é número racional? $(\sqrt{2} \in \mathbb{Q}?)$
h) O triplo de um número menos um é igual a onze. $(3x - 1 = 11)$

A frase *f* não tem predicado, a frase *g* é interrogativa e a frase *h* não pode ser classificada em verdadeira ou falsa.

II. Negação

2. A partir de uma proposição *p* qualquer, sempre podemos construir outra, denominada *negação de p* e indicada com o símbolo $\sim p$.

Exemplos

a) p: Nove é diferente de cinco. $(9 \neq 5)$
$\sim$p: Nove é igual a cinco. $(9 = 5)$
b) p: Sete é maior que três. $(7 > 3)$
$\sim$p: Sete é menor ou igual a três. $(7 \leqslant 3)$
c) p: Dois é um número inteiro. $(2 \in \mathbb{Z})$
$\sim$p: Dois não é um número inteiro. $(2 \notin \mathbb{Z})$
d) p: Três é divisor de onze. $(3 \mid 11)$
$\sim$p: Três não é divisor de onze. $(3 \nmid 11)$
e) p: Quatro vezes cinco é igual a vinte. $(4 \cdot 5 = 20)$
$\sim$p: Quatro vezes cinco é diferente de vinte. $(4 \cdot 5 \neq 20)$

Para que $\sim p$ seja realmente uma proposição devemos ser capazes de classificá-la em verdadeira (*V*) ou falsa (*F*). Para isso vamos postular (decretar) o seguinte critério de classificação:

> A proposição $\sim p$ tem sempre o valor oposto de *p*, isto é, $\sim p$ é verdadeira quando *p* é falsa e $\sim p$ é falsa quando *p* é verdadeira.

Esse critério está resumido na tabela ao lado, denominada *tabela-verdade* da proposição $\sim p$.

p	$\sim$p
V	F
F	V

Assim, reexaminando os exemplos anteriores, temos que $\sim p$ é verdadeira no exemplo *d* e $\sim p$ é falsa nos demais.

EXERCÍCIOS

1. Quais das sentenças abaixo são proposições? No caso das proposições, quais são verdadeiras?

a) $5 \cdot 4 = 20$
b) $5 - 4 = 3$
c) $2 + 7 \cdot 3 = 5 \cdot 4 + 3$
d) $5(3 + 1) = 5 \cdot 3 + 5 \cdot 1$
e) $1 + 3 \neq 1 + 6$
f) $(-2)^5 \geqslant (-2)^3$
g) $3 + 4 > 0$
h) $11 - 4 \cdot 2$

2. Qual é a negação de cada uma das seguintes proposições? Que negações são verdadeiras?

a) $3 \cdot 7 = 21$
b) $3 \cdot (11 - 7) \neq 5$
c) $3 \cdot 2 + 1 > 4$
d) $5 \cdot 7 - 2 \leqslant 5 \cdot 6$
e) $\left(\frac{1}{2}\right)^7 < \left(\frac{1}{2}\right)^3$
f) $\sqrt{2} < 1$
g) $-(-4) \geqslant 7$
h) $3 \mid 7$

III. Proposição composta — Conectivos

A partir de proposições dadas podemos construir novas proposições mediante o emprego de dois símbolos lógicos chamados conectivos: conectivo $\wedge$ (lê-se: *e*) e o conectivo $\vee$ (lê-se: *ou*).

3. Conectivo $\wedge$

Colocando o conectivo $\wedge$ entre duas proposições p e q, obtemos uma nova proposição, $p \wedge q$, denominada *conjunção* das sentenças p e q.

Exemplos

1º) p: $2 > 0$
q: $2 \neq 1$
p $\wedge$ q: $2 > 0$ e $2 \neq 1$

2º) p: $-2 < -1$
q: $(-2)^2 < (-1)^2$
p $\wedge$ q: $-2 < -1$ e $(-2)^2 < (-1)^2$

3º) p: um quadrado de lado a tem diagonal $2a$
q: um quadrado de lado a tem área a^2
p $\wedge$ q: um quadrado de lado a tem diagonal $2a$ e área a^2

4º) p: $2 \mid 5$ (2 é divisor de 5)
q: $3 \mid 5$ (3 é divisor de 5)
p $\wedge$ q: $2 \mid 5$ e $3 \mid 5$ (2 e 3 são divisores de 5)

Vamos postular um critério para estabelecer o valor lógico (V ou F) de uma conjunção a partir dos valores lógicos (conhecidos) das proposições p e q:

A conjunção $p \wedge q$ é verdadeira se p e q são ambas verdadeiras; se ao menos uma delas for falsa, então $p \wedge q$ é falsa.

Esse critério está resumido na tabela ao lado, em que são examinadas todas as possibilidades para p e q. Essa tabela é denominada tabela-verdade da proposição $p \wedge q$.

p	q	p $\wedge$ q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Reexaminando os exemplos anteriores, temos:

1º) p: $2 > 0$ (V)
q: $2 \neq 1$ (V)
então:
p $\wedge$ q: $2 > 0$ e $2 \neq 1$ (V)

2º) p: $-2 < -1$ (V)
q: $(-2)^2 < (-1)^2$ (F)
então:
p $\wedge$ q: $-2 < -1$ e $(-2)^2 < (-1)^2$ (F)

3º) p: um quadrado de lado a tem diagonal $2a$ (F)
q: um quadrado de lado a tem área a^2 (V)
então:
p $\wedge$ q: um quadrado de lado a tem diagonal $2a$ e área a^2 (F)

4º) p: $2 \mid 5$ (F)
q: $3 \mid 5$ (F)
então:
p $\wedge$ q: $2 \mid 5$ e $3 \mid 5$ (F)

4. *Conectivo* ∨

Colocando o conectivo ∨ entre duas proposições p e q, obtemos uma nova proposição, $p \vee q$, denominada *disjunção* das sentenças p e q.

Exemplos

1º) p: $5 > 0$ (cinco é maior que zero)
q: $5 > 1$ (cinco é maior que um)
p ∨ q: $5 > 0$ ou $5 > 1$ (cinco é maior que zero ou maior que um)

2º) p: $3 = 3$ (três é igual a três)
q: $3 < 3$ (três é menor que três)
p ∨ q: $3 \leqslant 3$ (três é menor ou igual a três)

3º) p: 10 é número primo
q: 10 é número composto
q ∨ q: 10 é número primo ou número composto

4º) p: $3^4 < 2^6$
q: $2^2 < (-3)^5$
p ∨ q: $3^4 < 2^6$ ou $2^2 < (-3)^5$

Vamos postular um critério para decidir o valor lógico (V ou F) de uma disjunção a partir dos valores lógicos (conhecidos) das proposições p e q:

> A disjunção $p \vee q$ é verdadeira se ao menos uma das proposições p ou q é verdadeira; se p e q são ambas falsas, então $p \vee q$ é falsa.

Esse critério está resumido na tabela ao lado, denominada tabela-verdade da proposição $p \vee q$.

p	q	p ∨ q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Revendo os exemplos anteriores, temos:

1º) p: $5 > 0$ (V)
q: $5 > 1$ (V)
então:
p ∨ q: $5 > 0$ ou $5 > 1$ (V)

2º) p: $3 = 3$ (V)
q: $3 < 3$ (F)
então:
p ∨ q: $3 \leqslant 3$ (V)

3º) p: 10 é número primo (F)
q: 10 é número composto (V)
então:
p ∨ q: 10 é número primo ou composto (V)

4º) p: $3^4 < 2^6$ (F)
q: $2^2 < (-3)^5$ (F)
então:
p ∨ q: $3^4 < 2^6$ ou $2^2 < (-3)^5$ (F)

EXERCÍCIO

3. Classifique em verdadeira ou falsa cada uma das seguintes proposições compostas:

a) $3 > 1$ e $4 > 2$
b) $3 > 1$ ou $3 = 1$
c) $2|4$ ou $2|(4 + 1)$
d) $3(5 + 2) = 3 \cdot 5 + 3 \cdot 2$ e $3|7$
e) $\frac{1}{2} < \frac{3}{4}$ ou $5|11$
f) $(-1)^6 = -1$ e $2^5 < (-2)^7$
g) $\sqrt{16} = 6$ ou mdc $(4, 7) = 2$

IV. Condicionais

Ainda a partir de proposições dadas podemos construir novas proposições mediante o emprego de outros dois símbolos lógicos chamados *condicionais*: o condicional *se ... então ...* (símbolo: →) e o condicional *... se, e somente se, ...* (símbolo: ↔).

5. *Condicional →*

Colocando o condicional → entre duas proposições p e q, obtemos uma nova proposição, $p \to q$, que se lê: "se p, então q", "p é condição necessária para q", "q é condição suficiente para p".

No condicional $p \to q$, a proposição p é chamada *antecedente* e q é chamada *conseqüente*.

Exemplos

1º) p: dois é divisor de quatro $(2 | 4)$
q: quatro é divisor de vinte $(4 | 20)$
$p \to q$: se dois é divisor de quatro, então quatro é divisor de vinte $(2 | 4 \to 4 | 20)$

2º) p: dois vezes cinco é igual a dez $(2 \cdot 5 = 10)$
q: três é divisor de dez $(3 | 10)$
$p \to q$: se dois vezes cinco é igual a dez, então três é divisor de dez $(2 \cdot 5 = 10 \to 3 | 10)$

3º) p: cinco é menor que dois $(5 < 2)$
q: dois é número inteiro $(2 \in \mathbb{Z})$
$p \to q$: se cinco é menor que dois, então dois é número inteiro $(5 < 2 \to 2 \in \mathbb{Z})$

4º) p: um meio é menor que um terço $\left(\frac{1}{2} < \frac{1}{3}\right)$
q: três é igual a cinco $(3 = 5)$
$p \to q$: se um meio é menor que um terço, então três é igual a cinco $\left(\frac{1}{2} < \frac{1}{3} \to 3 = 5\right)$

Vamos postular um critério de classificação para a proposição $p \to q$ baseado nos valores lógicos de p e q:

O condicional $p \to q$ é falso somente quando p é verdadeira e q é falsa; caso contrário, $p \to q$ é verdadeiro.

Esse critério está resumido na tabela ao lado, denominada tabela-verdade da proposição $p \to q$.

p	q	$p \to q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Revendo os exemplos dados, temos:

1º) p é *V* e q é *V*, então $p \to q$ é *V*.
2º) p é *V* e q é *F*, então $p \to q$ é *F*.
3º) p é *F* e q é *V*, então $p \to q$ é *V*.
4º) p é *F* e q é *F*, então $p \to q$ é *V*.

6. Condicional $\leftrightarrow$

Colocando o condicional $\leftrightarrow$ entre duas proposições p e q, obtemos uma nova proposição, $p \leftrightarrow q$, que se lê: "p se, e somente se, q", "p é condição necessária e suficiente para q", "q é condição necessária e suficiente para p" ou "se p, então q e reciprocamente".

Exemplos

1º) p: $2 \mid 12$
q: $2 \cdot 7 \mid 12 \cdot 7$
$p \leftrightarrow q$: $2 \mid 12 \leftrightarrow 2 \cdot 7 \mid 12 \cdot 7$

2º) p: $\frac{3}{2} = \frac{6}{4}$
q: $3 \cdot 4 \neq 6 \cdot 2$
$p \leftrightarrow q$: $\frac{3}{2} = \frac{6}{4} \leftrightarrow 3 \cdot 4 \neq 6 \cdot 2$

3º) p: $6 = 12 : 3$
q: $3 \cdot 6 = 18$
$p \leftrightarrow q$: $6 = 12 : 3 \leftrightarrow 3 \cdot 6 = 18$

4º) p: $4 \leqslant 3$
q: $4 \cdot 5 \leqslant 3 \cdot 5$
$p \leftrightarrow q$: $4 \leqslant 3 \leftrightarrow 4 \cdot 5 \leqslant 3 \cdot 5$

Vamos postular para o condicional $p \leftrightarrow q$ o seguinte critério de classificação:

> O condicional $\leftrightarrow$ é verdadeiro somente quando p e q são ambas verdadeiras ou ambas falsas; se isso não acontecer, o condicional $\leftrightarrow$ é falso.

Assim a tabela-verdade da proposição $p \leftrightarrow q$ é a que está ao lado.

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Revendo os exemplos dados, temos:

1º) p é *V* e q é *V*, então $p \leftrightarrow q$ é *V*.
2º) p é *V* e q é *F*, então $p \leftrightarrow q$ é *F*.
3º) p é *F* e q é *V*, então $p \leftrightarrow q$ é *F*.
4º) p é *F* e q é *F*, então $p \leftrightarrow q$ é *V*.

EXERCÍCIOS

4. Classifique em verdadeira ou falsa cada uma das proposições abaixo.

a) $2 - 1 = 1 \rightarrow 5 + 7 = 3 \cdot 4$

b) $2^2 = 4 \leftrightarrow (-2)^2 = 4$

c) $5 + 7 \cdot 1 = 10 \rightarrow 3 \cdot 3 = 9$

d) mdc $(3, 6) = 1 \leftrightarrow 4$ é número primo

e) $2 | 8 \rightarrow$ mmc $(2, 8) = 2$

f) $6 \leqslant 2 \leftrightarrow 6 - 2 \geqslant 0$

g) $\frac{3}{5} < \frac{2}{7} \rightarrow 3 \cdot 7 = 2 \cdot 5$

5. Admitindo que p e q são verdadeiras e r é falsa, determine o valor (V ou F) de cada proposição abaixo.

a) $p \rightarrow r$

b) $p \leftrightarrow q$

c) $r \rightarrow p$

d) $(p \vee r) \leftrightarrow q$

e) $p \rightarrow (q \rightarrow r)$

f) $p \rightarrow (q \vee r)$

g) $\sim p \leftrightarrow \sim q$

h) $\sim p \leftrightarrow r$

6. Sendo a proposição $p \rightarrow (r \vee s)$ falsa e a proposição $(q \wedge \sim s) \leftrightarrow p$ verdadeira, classifique em verdadeira ou falsa as afirmações p, q, r e s.

V. Tautologias

7. Seja v uma proposição formada a partir de outras ($p, q, r, \ldots$) mediante o emprego de conectivos ($\vee$ ou $\wedge$) ou de modificador ($\sim$) ou de condicionais ($\rightarrow$ ou $\leftrightarrow$). Dizemos que v é uma *tautologia* ou *proposição logicamente verdadeira* quando v tem o valor lógico V (verdadeira) independentemente dos valores lógicos de p, q, etc.

Assim a tabela-verdade de uma tautologia v apresenta só V na coluna de v.

Exemplos

1º) $(p \wedge \sim p) \rightarrow (q \vee p)$ é uma tautologia, pois:

p	q	$\sim p$	$p \wedge \sim p$	$q \vee p$	$(p \wedge \sim p) \rightarrow (q \vee p)$
V	V	F	F	V	V
V	F	F	F	V	V
F	V	V	F	V	V
F	F	V	F	F	V

2º) $\sim(p \wedge q) \leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$ é uma tautologia, pois:

p	q	p ∧ q	∼(p ∧ q)	∼p	∼q	∼p ∨ ∼q	∼(p ∧ q) ↔ (∼p ∨ ∼q)
V	V	V	F	F	F	F	V
V	F	F	V	F	V	V	V
F	V	F	V	V	F	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

VI. Proposições logicamente falsas

8. Seja *f* uma proposição formada a partir de outras (p, q, r, ...) mediante o emprego de conectivos ($\vee$ ou $\wedge$) ou de modificador ($\sim$) ou de condicionais ($\rightarrow$ ou $\leftrightarrow$). Dizemos que *f* é uma *proposição logicamente falsa* quando *f* tem o valor lógico *F* (falsa) independentemente dos valores lógicos de p, q, etc.

Assim, a tabela-verdade de uma proposição logicamente falsa *f* apresenta só *F* na coluna de *f*.

Exemplos

1º) $p \wedge \sim p$ é proposição logicamente falsa, pois:

p	∼p	p ∧ ∼p
V	F	F
F	V	F

2º) $(p \vee \sim q) \leftrightarrow (\sim p \wedge q)$

p	q	∼p	∼q	p ∨ ∼q	∼p ∧ q	(p ∨ ∼q) ↔ (∼p ∧ q)
V	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	V	F	F
F	V	V	F	F	V	F
F	F	V	V	V	F	F

VII. Relação de implicação

9. Dadas as proposições p e q, dizemos que "p implica q" quando na tabela de p e q não ocorre *VF* em nenhuma linha, isto é, quando não temos simultaneamente p verdadeira e q falsa.

Quando p implica q, indicamos $p \Rightarrow q$.

Observações

1ª) Notemos que p implica q quando o condicional $p \rightarrow q$ é verdadeiro.

2ª) Todo teorema é uma implicação da forma

$$\text{hipótese} \Rightarrow \text{tese}$$

Assim, demonstrar um teorema significa mostrar que não ocorre o caso de a hipótese ser verdadeira e a tese falsa.

Exemplos

1º) $2 | 4 \Rightarrow 2 | 4 \cdot 5$
significa dizer que o condicional "se *2* é divisor de *4*, então *2* é divisor de $4 \cdot 5$" é verdadeiro.

2º) p é positivo e primo $\Rightarrow$ mdc $(p, p^2) = p$
quer dizer que o condicional "se p é número primo e positivo, então o máximo divisor comum de p e p^2 é p" é verdadeiro.

VIII. Relação de equivalência

10. Dadas as proposições p e q, dizemos que "p é equivalente a q" quando p e q têm tabelas-verdades iguais, isto é, quando p e q têm sempre o mesmo valor lógico.

Quando p é equivalente a q, indicamos: $p \Leftrightarrow q$.

Observações

1ª) Notemos que p equivale a q quando o condicional $p \leftrightarrow q$ é verdadeiro.

2ª) Todo teorema, cujo recíproco também é verdadeiro, é uma equivalência.

$$\text{hipótese} \Leftrightarrow \text{tese}$$

Exemplos

1º) $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$

p	q	$p \rightarrow q$	$\sim q$	$\sim p$	$\sim q \rightarrow \sim p$
V	V	V	F	F	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V

2º) $2 \mid 8 \Leftrightarrow \text{mdc}(2, 8) = 2$ significa dizer que é verdadeiro o bicondicional "*2* é divisor de *8* se, e somente se, o máximo divisor comum de *2* e *8* é *2*".

EXERCÍCIOS

7. Verifique, por meio das tabelas-verdades, a validade das equivalências abaixo.

a) da conjunção

$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$
$(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$
$p \wedge p \Leftrightarrow p$
$p \wedge v \Leftrightarrow p$
$p \wedge f \Leftrightarrow f$

b) da disjunção

$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$
$(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$
$p \vee p \Leftrightarrow p$
$p \vee v \Leftrightarrow v$
$p \vee f \Leftrightarrow p$

c) da conjunção relativamente à disjunção

$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
$p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$
$p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$

d) da negação

$\sim(\sim p) \Leftrightarrow p$
$\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$
$\sim(p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$

em que *p*, *q*, *r* são proposições quaisquer, *v* é uma tautologia e *f* uma proposição logicamente falsa.

IX. Sentenças abertas, quantificadores

11. Há expressões como:

a) $x + 1 = 7$
b) $x > 2$
c) $x^3 = 2x^2$

que contêm variáveis e cujo valor lógico (verdadeira ou falsa) vai depender do valor atribuído à variável.

Nos exemplos citados temos:

a) $x + 1 = 7$ é verdadeira se trocarmos x por 6 e é falsa para qualquer outro valor dado a x;

b) $x > 2$ é verdadeira, por exemplo, para $x = 0$;

c) $x^3 = 2x^2$ é verdadeira se trocarmos x por 0 ($0^3 = 2 \cdot 0^2$) ou 2($2^3 = 2 \cdot 2^2$) e é falsa para qualquer outro valor dado a x.

Orações que contêm variáveis são chamadas *funções proporcionais* ou *sentenças abertas*. Tais orações não são proposições pois seu valor lógico (V ou F) é discutível, dependem do valor dado às variáveis.

Há, entretanto, duas maneiras de transformar sentenças abertas em proposições:

1ª) atribuir valor às variáveis
2ª) utilizar quantificadores.

12. O quantificador universal

O quantificador universal, usado para transformar sentenças abertas em proposições, é indicado pelo símbolo $\forall$, que se lê: "qualquer que seja", "para todo", "para cada".

Exemplos

1º) $(\forall x)(x + 1 = 7)$, que se lê:
"qualquer que seja o número x, temos $x + 1 = 7$". **(Falsa)**

2º) $(\forall x)(x^3 = 2x^2)$, que se lê:
"para todo número x, $x^3 = 2x^2$". **(Falsa)**

3º) $(\forall a)$ $((a + 1)^2 = a^2 + 2a + 1)$, que se lê:
"qualquer que seja o número a, temos $(a + 1)^2 = a^2 + 2a + 1$". **(Verdadeira)**

4º) $(\forall y)(y^2 + 1 > 0)$, que se lê:
"para todo número y, temos $y^2 + 1$ positivo". **(Verdadeira)**

13. O quantificador existencial

O quantificador existencial é indicado pelo símbolo $\exists$, que se lê: "existe", "existe pelo menos um", "existe um".

Exemplos

1º) $(\exists\ x)(x + 1 = 7)$, que se lê:
"existe um número x tal que $x + 1 = 7$". **(Verdadeira)**

2º) $(\exists\ x)(x^3 = 2x^2)$, que se lê:
"existe um número x tal que $x^3 = 2x^2$". **(Verdadeira)**

3º) $(\exists\ a)(a^2 + 1 \leqslant 0)$, que se lê:
"existe um número a tal que $a^2 + 1$ é não positivo". **(Falsa)**

4º) $(\exists | m)(m(m + 1) \neq m^2 + m)$, que se lê:
"existe pelo menos um número m tal que $m(m+1) \neq m^2 + m$". **(Falsa)**

14. Algumas vezes utilizamos também outro quantificador: $\exists |$, que se lê: "existe um único", "existe um e um só", "existe só um".

Exemplos

1º) $(\exists | x)(x + 1 = 7)$, que se lê:
"existe um só número x tal que $x + 1 = 7$". **(Verdadeira)**

2º) $(\exists | x)(x^3 = 2x^2)$, que se lê:
"existe um só número x tal que $x^3 = 2x^2$". **(Falsa)**

3º) $(\exists | x)(x + 2 > 3)$, que se lê:
"existe um só número x tal que $x + 2 > 3$". **(Falsa)**

EXERCÍCIO

8. Transforme as seguintes sentenças abertas em proposições verdadeiras usando quantificadores:

a) $x^2 - 5x + 4 = 0$
b) $(a + 1)(a - 1) = a^2 - 1$
c) $\frac{y}{3} + \frac{y}{4} \neq \frac{y}{7}$
d) $\sqrt{m^2 + 9} \neq m + 3$
e) $-(-x) = x$
f) $5a + 4 \leqslant 11$
g) $\sqrt{x^2} = x$
h) $\frac{a^2 - a}{a} = a - 1$

X. Como negar proposições

Já vimos o que é a negação de uma proposição simples, no item II deste capítulo.

Vamos destacar aqui resultados obtidos no exercício 7, os quais constituem processos para negar proposições compostas e condicionais.

15. *Negação de uma conjunção*

Tendo em vista que $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$, podemos estabelecer que a negação de $p \wedge q$ é a proposição $\sim p \vee \sim q$.

Exemplos

1º) p: $a \neq 0$
q: $b \neq 0$
$p \wedge q$: $a \neq 0$ e $b \neq 0$
$\sim(p \wedge q)$: $a = 0$ ou $b = 0$

2º) p: $2 | 4$
q: $3 | 9$
$p \wedge q$: $2 | 4$ e $3 | 9$
$\sim(p \wedge q)$: $2 \nmid 4$ ou $3 \nmid 9$

16. *Negação de uma disjunção*

Tendo em vista que $\sim(p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$, podemos estabelecer que a negação de $p \vee q$ é a proposição $\sim p \wedge \sim q$.

Exemplos

1º) p: o triângulo *ABC* é isósceles
q: o triângulo *ABC* é equilátero
$p \vee q$: o triângulo *ABC* é isósceles ou equilátero
$\sim(p \vee q)$: o triângulo *ABC* não é isósceles e não é equilátero

2º) p: $a = 0$
q: $b = 0$
$p \vee q$: $a = 0$ ou $b = 0$
$\sim(p \vee q)$: $a \neq 0$ e $b \neq 0$

17. Negação de um condicional simples

Já que $\sim(p \rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \sim q$, podemos estabelecer que a negação de $p \rightarrow q$ é a proposição $p \wedge \sim q$.

Exemplos

1º) p: $2 \in \mathbb{Z}$
q: $2 \in \mathbb{Q}$
$p \rightarrow q$: $2 \in \mathbb{Z} \rightarrow 2 \in \mathbb{Q}$
$\sim(p \rightarrow q)$: $2 \in \mathbb{Z}$ e $2 \notin \mathbb{Q}$

2º) p: $5^2 = (-5)^2$
q: $5 = -5$
$p \rightarrow q$: $5^2 = (-5)^2 \rightarrow 5 = -5$
$\sim(p \rightarrow q)$: $5^2 = (-5)^2$ e $5 \neq -5$

18. Negação de proposições quantificadas

a) Uma sentença quantificada com o quantificador universal, do tipo $(\forall x)(p(x))$, é negada assim: substitui-se o quantificador pelo existencial e nega-se $p(x)$, obtendo: $(\exists x)(\sim p(x))$.

Exemplos

1º) sentença: $(\forall x)(x + 3 = 5)$
negação: $(\exists x)(x + 3 \neq 5)$

2º) sentença: $(\forall x)(x(x + 1) = x^2 + x)$
negação: $(\exists x)(x(x + 1) \neq x^2 + x)$

3º) sentença: $(\forall x)(\sqrt{x^2 + 1} = x + 1)$
negação: $(\exists x)(\sqrt{x^2 + 1} \neq x + 1)$

4º) sentença: Todo losango é um quadrado.
negação: Existe um losango que não é quadrado.

b) Uma sentença quantificada com o quantificador existencial, do tipo $(\exists x)(p(x))$, é negada assim: substitui-se o quantificador pelo universal e nega-se $p(x)$, obtendo: $(\forall x)(\sim p(x))$.

Exemplos

1º) sentença: $(\exists x)(x = x)$
negação: $(\forall x)(x \neq x)$

2º) sentença: $(\exists a)\left(a + \frac{1}{2} \geqslant \frac{1}{3}\right)$

negação: $(\forall a)\left(a + \frac{1}{2} < \frac{1}{3}\right)$

3º) sentença: $(\exists a)\left(\frac{1}{a} \in \mathbb{R}\right)$

negação: $(\forall a)\left(\frac{1}{a} \notin \mathbb{R}\right)$

EXERCÍCIOS

9. Diga qual é a negação de cada proposição abaixo.

a) mdc $(2, 3) = 1$ ou mmc $(2, 3) \neq 6$

b) $\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$ ou $3 \cdot 10 \neq 6 \cdot 5$

c) $\frac{3}{7} \geqslant 1$ e $-3 \geqslant -7$

d) $2^2 = 4 \rightarrow \sqrt{4} = 2$

e) $(-3)^2 = 9 \rightarrow \sqrt{9} \neq -3$

f) $2 \leqslant 5 \rightarrow 3^2 \leqslant 5^2$

g) $(\forall x)(x > 2 \rightarrow 3^x > 3^2)$

h) $(\exists x)(\sqrt{x} < 0)$

i) Todo número inteiro primo é ímpar.

j) Todo triângulo isósceles é equilátero.

k) Existe um losango que não é quadrado.

l) Existe um número cuja raiz quadrada é zero.

m) Todo triângulo que tem três ângulos congruentes tem três lados congruentes.

10. Classifique em V ou F as negações construídas no exercício anterior.