TÓPICOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR - SEMANA 1

NOÇÕES DE LÓGICA, NOÇÕES SOBRE CONJUNTOS E CONJUNTOS NUMÉRICOS

1) NOÇÕES DE LÓGICA

1.1) **Linguagem Matemática**

$=$	Igual
$\neq$	Diferente
$\approx$	Aproximadamente
$<$	Menor
$\leq$	Menor ou igual
$>$	Maior
$\geq$	Maior ou igual
$\cup$	União
$\cap$	Intersecção
$\supset$	Contém
$\subset$	Está contido
$\in$	Pertence
$\notin$	Não pertence
$\exists$	Existe
$\nexists$	Não existe
$\exists!$	Existe um único
$\forall$	Para todo
$a \vee b$	"a" ou "b"
$a \wedge b$	"a" e "b"
$\sim a$	Negação de "a"
$a \Rightarrow b$	Se acontecer "a" então acontece "b"
$a \Leftrightarrow b$	Se acontecer "a" então acontece "b" e reciprocamente

1.1) Proposição

Toda oração declarativa que pode ser classificada em verdadeira ou falsa.

Exemplos:

Linguagem Matemática	Língua Portuguesa	Verdadeira ou Falsa?
$2{,}3 \in \mathbb{N}$	2,3 pertence ao conjunto dos números naturais	Falsa
$\frac{1}{2} = 0{,}5$	$\frac{1}{2}$ é igual a 0,5	Verdadeira

1.2) Negação de uma proposição

Exemplo:

a: $2{,}3 \in \mathbb{N}$, portanto a proposição "a" é falsa

$\sim a$: $2{,}3 \notin \mathbb{N}$, portanto a negação da proposição "a" é verdadeira.

Observações:

Se uma proposição é verdadeira a sua negação é falsa.

Se uma proposição é falsa a sua negação é verdadeira.

1.3) Conectivo "e" (Símbolo: ∧)

Utilizado em proposições compostas. A proposição $a \wedge b$ será verdadeira apenas quando ambas as proposições ("a" e "b") forem verdadeiras.

Exemplo:

$a: Todo\ número\ par\ é\ divisível\ por\ 2; (Verdadeiro)$

$b: Todo\ número\ par\ é\ divisível\ por\ 4;\ (Falso. Há\ números\ pares\ que\ não\ são\ divisíveis\ por\ 4$

$, por\ exemplo\ 10).$

$c: Todo\ múltiplo\ de\ 6\ é\ par.\ \ (Verdadeiro)$

$d: Nenhum\ múltiplo\ de\ 3\ é\ par. (Falso.\ Há\ múltiplos\ de\ 3\ que\ são\ pares, por\ exemplo\ 6)$

- A proposição $a \wedge b$ é falsa, pois "b" é falsa;
- A proposição $a \wedge c$ é verdadeira, pois "a" e "c" são verdadeiras;
- A proposição $b \wedge c$ é falsa, pois "b" é falsa;
- A proposição $b \wedge d$ é falsa, pois "b" e "d" são falsas.

1.4) Conectivo "ou" (Símbolo: ∨)

Utilizado em proposições compostas. A proposição $a \vee b$ será verdadeira quando alguma das proposições "a" e "b" (ou ambas) forem verdadeiras.

Exemplo:

Sejam as mesmas sentenças "a", "b", "c", "d" do exemplo anterior.

- A proposição $a \vee b$ é verdadeira, pois "a" é verdadeira;
- A proposição $a \vee c$ é verdadeira, pois "a" e "c" são verdadeiras;
- A proposição $b \vee c$ é verdadeira, pois "c" é verdadeira;
- A proposição $b \vee d$ é falsa, pois "b" e "d" são falsas.

1.5) Implicação

Todo teorema é uma implicação da forma "$hipótese \Rightarrow tese$". Sendo assim, demonstrar um teorema significa que partindo da hipótese verdadeira conclui-se que a tese também é.

Linguagem matemática	Língua portuguesa	Demonstração
Sejam k_1 e k_2 números naturais: $n = 6k_1 \Rightarrow n = 2k_2$	Se n é múltiplo de 6 então n é múltiplo de 2 (par).	Hipótese: $k_1 \in \mathbb{N}$, $n = 6k_1$ Tese: $k_2 \in \mathbb{N}$, $n = 2k_2$ Partindo da hipótese vamos chegar na tese: $n = 6k_1 \Rightarrow n = 2.3k_1 \underset{3k_1 = k_2}{\xrightarrow[3k_1 \in \mathbb{N}]{}} n = 2k_2$ A implicação é verdadeira!

Para provar que uma implicação é falsa basta mostrar um **contraexemplo**, ou seja, algum caso que satisfaz a hipótese mas não satisfaz a tese.

Exemplo:

Linguagem matemática	Língua portuguesa	Demonstração da falsidade da implicação
Sejam k_1 e k_2 números naturais: $n = 5k_1 \Rightarrow n = 2k_2 + 1$	Se n é múltiplo de 5 então n é ímpar.	Hipótese: $k_1 \in \mathbb{N}$, $n = 5k_1$ Tese: $k_2 \in \mathbb{N}$, $n = 2k_2 + 1$ Contraexemplo: 30 satisfaz a hipótese (múltiplo de 5) mas não satisfaz a tese pois não é ímpar. A implicação é falsa!

1.6) Equivalência

Ocorre em teoremas em que ocorrem as implicações "$hipótese \Rightarrow tese$" e "$tese \Rightarrow hipótese$" (ou seja, a recíproca é verdadeira).

Exemplo:

Linguagem matemática	Língua portuguesa	Demonstração da falsidade da implicação
Seja n um número natural: $n^2 < 9 \Leftrightarrow n < 3$	Sendo n é um número natural, temos que o quadrado de n é menor que 9 **se, e somente se,** n é menor que 3.	Na hipótese e na tese estamos nos referindo a um número $n \in \mathbb{N}$. Hipótese: $n^2 < 9$ — Tese: $n < 3$ $hipótese \Rightarrow tese$ $\begin{matrix} n \in \mathbb{N} \\ n^2 < 9 \end{matrix} \Rightarrow \sqrt{n^2} < \sqrt{9} \Rightarrow n < 3$ Implicação verdadeira! $tese \Rightarrow hipótese$ $\begin{matrix} n \in \mathbb{N} \\ n < 3 \end{matrix} \Rightarrow n^2 < 3^2 \Rightarrow n^2 < 9$ Implicação verdadeira!

1.7) Tabela verdade

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$	Exemplos
V	V	V	V	V	V	• 2 é par e 5 é impar (V); • 2 é par ou 5 é impar (V); • Se 2 é par, então 5 é impar (V); • 2 é par, se e somente se, 5 é ímpar (V).
F	F	F	F	V	V	• 2 é ímpar e 5 é par (F); • 2 é ímpar ou 5 é par (F); • Se 2 é ímpar, então 5 é par (V, convenção da premissa falsa); • 2 é ímpar, se e somente se, 5 é par (V, convenção da premissa falsa).
V	F	F	V	F	F	• 2 é par e 5 é par (F); • 2 é par ou 5 é par (V); • Se 2 é par, então 5 é par (F); • 2 é par, se e somente se, 5 é par (F).
F	V	F	V	V	F	• 2 é ímpar e 5 é ímpar (F); • 2 é ímpar ou 5 é ímpar (V); • Se 2 é ímpar, então 5 é par (V, convenção da premissa falsa); • 2 é ímpar, se e somente se, 5 é par (F).

2) NOÇÕES SOBRE CONJUNTOS

2.1) Noção intuitiva de conjunto

Podemos pensar num conjunto como uma coleção (ou classe) de objetos, sem repetição e não ordenado. Os objetos de um conjunto são chamados de elementos ou membros do conjunto.

Exemplo: $A = \{x \in \mathbb{N} |\ x \text{ é } par\ entre\ 3\ e\ 11\} = \{8, 4, 6, 10\}$

2.2) Pertinência

A notação $x \in A$ (lê-se “x pertence ao conjunto A”) significa que o objeto x é elemento do conjunto A. A negação de tal afirmação é $x \notin A$ (lê-se “x não pertence ao conjunto A”)

Exemplo: Se $A = \{x \in \mathbb{N} |\ x \text{ é } par\ entre\ 3\ e\ 11\}$, então $5 \notin A$.

2.3) Inclusão

Quando todo elemento de um conjunto A é também elemento de um conjunto B, dizemos que A está contido em B e escrevemos $A \subset B$. Neste caso temos que A é subconjunto de B.

Exemplo: Se $A = \{x \in \mathbb{N} |\ x \text{ é } par\ entre\ 3\ e\ 11\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N} |\ x \text{ é } par\}$, então A é subconjunto de B.

2.4) Cardinalidade

A cardinalidade de um conjunto nada mais é do que a “quantidade” de elementos do conjunto. Quando A é um conjunto finito, sua cardinalidade é um número natural, caso contrário dizemos que o conjunto tem cardinalidade infinita.

Exemplo: Se $A = \{x \in \mathbb{N} |\ x \text{ é } par\ entre\ 3\ e\ 11\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N} |\ x \text{ é } par\}$, então A tem cardinalidade 4 e B tem cardinalidade infinita.

2.5) Conjunto das partes

O conjunto formado por todos os subconjuntos de um conjunto A é chamado conjunto das partes de A e denotado por P(A). Se A é um conjunto de cardinalidade n, então há 2^n subconjuntos no conjunto das partes de A.

Exemplo: Se $A = \{8, 4, 6, 10\}$, então

$$P(A) = \{\emptyset, \{8\}, \{4\}, \{6\}, \{10\}, \{8,4\}, \{8,6\}, \{8,10\}, \{4,6\}, \{4,10\}, \{6,10\}, \{8,4,6\}, \{8,4,10\}, \{8,6,10\}, \{4,6,10\}, \{8,4,6,10\}\}$$

2.6) União de conjuntos

Dados os conjuntos A e B, a união (ou reunião) de A e B é o conjunto dos elementos que pertencem a A ou pertencem a B. A notação para este conjunto é $A \cup B$ (lê-se “A união B”).

Exemplo: Se $A = \{x \in \mathbb{N} |\ x \text{ é } par\ entre\ 3\ e\ 11\}$ e $C = \{x \in \mathbb{N} |\ x \text{ é } múltiplo\ de\ 3\ menor\ que\ 10\}$, então

$A \cup C = \{4, 6, 8, 10, 3, 9\}$

2.7) Intersecção de conjuntos

Dados os conjuntos A e B, a intersecção de A com B é o conjunto dos elementos que pertencem a A e também pertencem a B. A notação para este conjunto é $A \cap B$ (lê-se “A intersecção B”).

Exemplo: Se $A = \{x \in \mathbb{N} |\ x \text{ é } par\ entre\ 3\ e\ 11\}$ e $C = \{x \in \mathbb{N} |\ x \text{ é } múltiplo\ de\ 3\ menor\ que\ 10\}$, então

$A \cap C = \{6\}$

2.8) Diferença de conjuntos

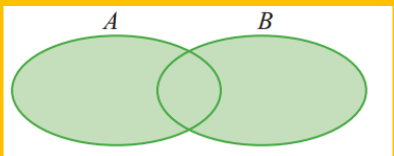
Dados os conjuntos A e B, a diferença de A e B é o conjunto dos elementos de A que não pertencem a B. A notação para este conjunto é $A - B$ e podemos escrever: $A - B = \{x | x \in A \; e \; x \notin B\}$

Exemplo: Se $A = \{x \in \mathbb{N} |\ x \text{ é } par\ entre\ 3\ e\ 11\}$ e $C = \{x \in \mathbb{N} |\ x \text{ é } múltiplo\ de\ 3\ menor\ que\ 10\ \}$, então

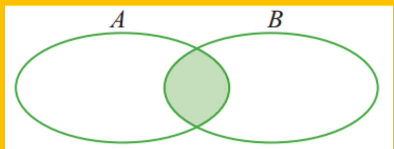
$A - C = \{4{,}8{,}10\}$ e $C - A = \{3, 9\}$

2.9) Diagrama de Euler-Venn

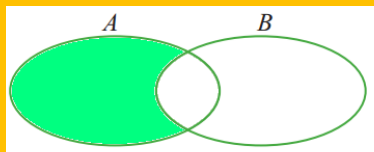
Os “diagramas de Euler-Venn” constituem um recurso didático para a visualização das operações com conjuntos.



A parte hachurada é o conjunto $A \cup B$



A parte hachurada é o conjunto $A \cap B$



A parte hachurada é o conjunto $A - B$

2.10) Complementar de um conjunto

Pensando em um conjunto universo, o complementar de A é o conjunto de todos os elementos que não pertencem a A. A notação para tal conjunto é A^C.

Exemplo: Se $D = \{x \in \mathbb{N} |\ x \text{ é } par\}$, então $D^C = \{x \in \mathbb{N} |\ x \text{ é } ímpar\}$

2.11) Produto cartesiano

O produto cartesiano de A por B (notação: $A \times B$) é o conjunto cujos elementos são “pares ordenados” de modo que o primeiro seja elemento de A e o segundo seja elemento de B

Exemplo: Se $A = \{4, 6, 8, 10\}$ e $B = \{3, 6, 9\}$, então

$$A \times B = \{(4,3), (6,3), (8,3), (10,3), (4,6), (6,6), (8,6), (10,6), (4,9), (6{,}9), (8,9), (10,9)\}$$

3) CONJUNTOS NUMÉRICOS

3.1) Números naturais

Conjunto criado para explicar as quantidades utilizadas para contagem. Embora o zero não seja um número natural, pois nenhuma contagem natural lhe dá origem, iremos considerá-lo como fazendo parte deste conjunto, visto possuir as mesmas propriedades algébricas dos restantes números naturais.

O conjunto dos números naturais é infinito (há um menor elemento (zero), mas não há um maior elemento). As operações de soma e multiplicação são fechadas, ou seja, a soma de dois números naturais resulta em outro número natural e o mesmo ocorre com a multiplicação.

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

3.2) Números inteiros

Conjunto que engloba todos os números naturais e seus opostos (simétricos). A exceção é o zero, que não tem oposto. Se a é um número natural, então –a é o oposto de a.

O conjunto dos números inteiros é infinito (não há um maior elemento nem um menor elemento). As operações de soma, subtração e multiplicação são fechadas, ou seja, a soma de dois números inteiros resulta em outro número inteiro e o mesmo ocorre com a subtração e com multiplicação.

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

3.3) Números racionais

Conjunto que engloba todos os números que podem ser escritos como uma razão de dois números inteiros, sendo o denominador não nulo.

O conjunto dos números inteiros é infinito (não há um maior elemento nem um menor elemento) e é denso (entre dois números racionais quaisquer sempre há outro número racional). As operações de soma, subtração, multiplicação e divisão são fechadas, ou seja, a soma de dois números racionais resulta em outro número racional e o mesmo ocorre com a subtração, com multiplicação e com a divisão. Todo número racional pode ser representado na forma de fração ou na forma decimal.

$$\mathbb{Q} = \{x \,|x = \frac{a}{b}, a \in \mathbb{Z}\, e\, b \in \mathbb{Z}^*\}$$

Exemplos: $\frac{2}{20} = \frac{1}{10} = 0{,}1 \in \mathbb{Q}$ $\frac{1}{9} = 0{,}1111\ldots \in \mathbb{Q}$ $\pi = 3{,}141592654358979\ldots \notin \mathbb{Q}$

3.4) Números irracionais

Conjunto dos números que não podem ser escritos como uma razão de dois números inteiro. A representação decimal de um número racional é infinita e não-periódica,

Exemplos: $\pi = 3{,}141592654358979\ldots \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ $\sqrt{2} = 1{,}414212562\ldots \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$

3.5) Números reais

Conjunto que engloba todos os números racionais e irracionais.

O conjunto dos números reais é infinito, denso e fechado nas operações de soma, subtração, multiplicação e divisão.

3.6) Relação de ordem

Cada número real pode ser considerado como um ponto na reta numérica (reta real). Dados dois números reais quaisquer, o número que estiver posicionado mais à direita na reta real é o maior.

Exemplos: $\sqrt{2} > 1{,}414212562$ $-\frac{260}{11} < -23$

3.7) Módulo

Utilizando o modelo da reta retal, o módulo de um número real é a distância desse número (do ponto associado a este número) até a origem (o ponto associado ao zero). A notação para o módulo do número real a é |a|.

Exemplos: $|-34{,}56| = 34{,}56$ $|\pi| = \pi$

3.8) Intervalo

Um intervalo de números reais é um "pedaço" da reta real. Para determinar as extremidades do intervalo utilizamos os colchetes "para dentro" caso tal extremo pertença ao intervalo ou colchetes "para fora" ou parênteses caso tal extremo não pertença ao intervalo. Para informar que um intervalo é ilimitado superior ou inferiormente, a notação ∞ (infinito) é utilizada. Todo intervalo é um conjunto de cardinalidade infinita.

Exemplos:

$[2, 7]$ é o conjunto de todos os números reais entre 2 e 7, incluindo ambos os extremos

$\left(-\frac{1}{2}, \sqrt{13}\right]$ é o conjunto de todos os números reais entre $-\frac{1}{2}$ e $\sqrt{13}$, incluindo apenas o maior extremo

$(-\infty\,,\ 2{,}5)$ é o conjunto de todos os números reais menores que 2,5