Capítulo 1

Linguagem de conjuntos

Capítulo 1

Linguagem de conjuntos

Neste capítulo temos como objetivos estudar a linguagem de conjuntos e as operações entre eles, desenvolvendo os instrumentos necessários para que os estudantes utilizem a linguagem de conjuntos como representação de situações e conceitos matemáticos.

Introdução

Não se desanime com a sensação de estar aprendendo coisas que já estudou. O objetivo é realmente retomar conhecimentos já estudados, aprofundá-los e torná-los mais precisos. Serão trabalhados conhecimentos novos, assim você poderá ampliar seu saber.

Você se lembra do que é um conjunto? Se você já é professor, como você introduz este assunto? Discuta com seus colegas, formas de se introduzir este assunto e como desenvolver a compreensão dos seus estudantes.

Neste capítulo vamos estudar Conjuntos como uma linguagem essencial na construção dos conceitos matemáticos. Nosso estudo está inserido numa teoria mais ampla, a Teoria dos Conjuntos, desenvolvida no final do século XIX e início do século XX. Ao longo de seu desenvolvimento, a teoria dos conjuntos manteve um estreito relacionamento com a Filosofia, mais especificamente com a Lógica.

Os conceitos que apresentaremos neste capítulo serão utilizados durante todo o curso, uma vez que constituem ferramentas indispensáveis para a compreensão dos conteúdos de Álgebra, Cálculo, Geometria Analítica, Análise e outros. Não temos a pretensão de esgotar o estudo de Conjuntos: estaremos aqui desenvolvendo apenas o essencial para que você possa se sentir confortável com a linguagem, a notação e o tipo de raciocínio necessários para acompanhar os próximos capítulos e outras disciplinas. Veremos a representação dos conjuntos, as relações de pertinência e inclusão, cardinalidade, as operações entre conjuntos e o produto cartesiano.

1.1 Conjuntos e elementos

Converse sobre a noção de conceito primitivo. Faça uma pesquisa. Essa noção é derivada da Filosofia e tem implicações importantes para toda a ciência.

As noções de conjunto, elemento e a relação de pertinência entre elemento e conjunto são conceitos primitivos, que não se definem. A idéia de conjunto é intuitivamente a da linguagem comum, quando estamos pensando em alguns objetos situados coletivamente; podemos pensar num conjunto como uma coleção (ou classe) de objetos, sem repetição e não ordenado. Os objetos de um conjunto são chamados, em geral, de elementos ou membros do conjunto. A maneira mais simples de especificar um conjunto consiste em listar seus elementos entre chaves. Por exemplo: $\{1,3,5,7,9\}$ representa a coleção dos números naturais ímpares menores do que 10. Observe que $\{3,7,5,9,1\}$ e $\{1,1,3,5,5,9,7,7\}$ são o mesmo conjunto, uma vez que o segundo conjunto apresenta elementos repetidos. Não importa a ordem com que listamos os elementos, nem se repetimos um elemento; tudo que importa é: quais objetos são elementos do conjunto e quais não são. Em nosso exemplo, exatamente cinco objetos são elementos do conjunto e nenhum outro objeto o é.

Veja que usamos a palavra "elemento" para indicar que um objeto está em uma coleção (conjunto). Simbolicamente, a pertinência de um elemento a um conjunto é indicada pelo símbolo $\in$. Convenciona-se representar conjuntos com letras maiúsculas e seus elementos com letras minúsculas (no entanto, isto é apenas uma convenção e não uma regra geral). A notação "$x \in A$" (lê-se: x pertence ao conjunto A) significa que o objeto x é elemento do conjunto A. Denotando por A o conjunto do exemplo anterior, $A = \{1,3,5,7,9\}$, podemos escrever $3 \in A$ ou $7 \in A$. Quando um objeto não pertence a um conjunto usamos o símbolo $\notin$; ainda no exemplo, podemos escrever $2 \notin A$ (lê-se: 2 não pertence ao conjunto A).

Observação 1. "$x \in A$" também se lê como "x é membro de A" ou "x é elemento de A" ou "x está em A".

Observação 2. Os conjuntos numéricos são representados por letras especiais

- $\mathbb{N}$ - Conjunto dos números naturais
- $\mathbb{Z}$ - Conjunto dos números inteiros
- $\mathbb{Q}$ - Conjunto dos números racionais
- $\mathbb{R}$ - Conjunto dos números reais

Quando escrevemos "seja $x \in \mathbb{Z}$", isso significa "seja x um elemento do conjunto $\mathbb{Z}$" ou simplesmente "seja x um inteiro". Um asterisco $*$ indica que estamos considerando o conjunto sem o zero; por exemplo, $\mathbb{N}^*$ é o conjunto dos números naturais sem o zero e $x \in \mathbb{N}^*$ significa que x é um número natural não nulo. Para o conjunto $\mathbb{Z}$ temos ainda as notações:

$\mathbb{Z}_+$: conjunto dos números inteiros não negativos (notação: $x \geq 0$)

$\mathbb{Z}_+^*$: conjunto dos números inteiros positivos (notação: $x > 0$)

Usamos notações similares para os conjuntos $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$.

1.2 Representação de conjuntos

Há duas maneiras de se especificar um conjunto:

1) *Listar entre chaves os elementos ou alguns elementos do conjunto*

   Esta notação é apropriada para conjuntos com um número "pequeno" de elementos, como $\{1,3,5,7,9\}$ ou $\{-1,0,1\}$. Outra situação para a qual esta notação é adequada é quando fica evidente a regra de formação dos elementos do conjunto. Por exemplo, o conjunto dos números naturais menores do que 100 pode ser anotado por $\{0,1,2,3,4,5,...,100\}$. Neste caso usamos as reticências $(...)$. Um outro exemplo da utilização das reticências é a notação do conjunto dos números naturais pares: $\{0,2,4,6,8,10,...\}$. No entanto, deve-se tomar cuidado ao utilizar reticências. Por exemplo, o conjunto $\{3,5,7,...\}$ seria o conjunto dos números naturais ímpares? Ou seria o conjunto dos números naturais primos maiores do que 2? Com esta notação não podemos precisar qual dos dois conjuntos está sendo representado. Por este motivo, use reticências somente quando não houver qualquer possibilidade de confusão, ou seja, quando a regra de formação dos elementos estiver bem clara.

2) *Descrever a propriedade que caracteriza os elementos do conjunto*

   Um conjunto fica determinado quando conhecemos as propriedades características de seus elementos. Por exemplo, o conjunto de todos os números naturais maiores do que 20 pode ser anotado por $B = \{n \in \mathbb{N} / n > 20\}$. Observe que este é o conjunto dos objetos que satisfazem duas condições: são números naturais e são maiores do que 20. Lê-se: "B é o conjunto dos números naturais n $(n \in \mathbb{N})$ tais que (/) n é maior do que 20 $(n > 20)$".

Observação 3. O símbolo " / " de "tal que" pode ser substituído por dois pontos (:) ou por ponto e vírgula (;).

Observação 4. A representação de um conjunto não é única; por exemplo, o conjunto dos números naturais que são divisores de 20 pode ser representado por $\{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$ ou $\{n \in \mathbb{N} / n \mid 20\}$ ou $\{n \in \mathbb{N} / n \text{ é divisor de } 20\}$.

Observação 5. Algumas vezes a propriedade que caracteriza o conjunto envolve a relação de pertinência. Neste caso, esta relação aparece no sentido de "percorre". Veja o exemplo:

$A = \{3n / n \in \mathbb{N}\}$; A é o conjunto dos números da forma $3n$, quando n "percorre" os naturais, ou seja, é o conjunto dos números $3 \cdot 0, 3 \cdot 1, 3 \cdot 2, 3 \cdot 3, \ldots$ Listando os elementos entre chaves teríamos $A = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, \ldots\}$, que é o conjunto dos múltiplos de 3.

Observação 6. Um conjunto desprovido de elementos é chamado conjunto vazio e anotado $\varnothing$ ou $\{\}$. Por exemplo:

i) é vazio o conjunto dos dias da semana que começam com a letra b.

ii) $A = \{x \in \mathbb{R} / x^2 = -1\}$ é o conjunto vazio, pois não existe um número real cujo quadrado é negativo.

Observação 7. Um conjunto com um único elemento é chamado conjunto unitário. Por exemplo, o conjunto das soluções reais da equação $x + 4 = 3$ é o conjunto $\{-1\}$.

1.3 Inclusão – subconjuntos

Observemos os conjuntos:

$$A = \{x \in \mathbb{N} \,/\, x \text{ é divisível por } 6\} \text{ e}$$
$$B = \{x \in \mathbb{N} \,/\, x \text{ é divisível por } 3\}.$$

Existe alguma relação entre eles? Números divisíveis por 6 são os elementos de A e números divisíveis por 3 são os elementos de B. Sabemos também que todo número divisível por 6 também é divisível por 3. Combinando estas duas informações vemos que todo elemento de A é também elemento de B.

Observemos outro par de conjuntos: M é o conjunto dos polígonos no plano e T é o conjunto dos triângulos no plano. Como todo triângulo é um polígono (de três lados), podemos concluir que todo elemento de T é também elemento de M.

A palavra inclusão tem muitos sentidos. Pense como o sentido social, por exemplo, se relaciona, ou não, com o sentido matemático que estamos discutindo. Procure os significados dessa palavra em um bom dicionário.

Os exemplos acima nos mostram a ocorrência de uma relação entre dois conjuntos: a relação de inclusão. Quando todo elemento de um conjunto X é também elemento de um conjunto Y, dizemos que X está contido em Y e escrevemos $X \subset Y$. Neste caso X é chamado um subconjunto de Y. Nos exemplos temos $A \subset B$ e $T \subset M$.

Outros exemplos:

1) Para $A = \{x \in \mathbb{Z} \,/\, 1 < x < 12\}$ e $B = \{x \in \mathbb{Z} \,/\, 2 \leq x < 9\}$, temos que $B \subset A$, pois todo número inteiro entre 2 e 9 também está entre 1 e 12.

2) Para $A = \{-1\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 - 1 = 0\}$, temos que $A \subset B$ pois, $B = \{-1\ ,\ 1\}$.

Observação 8. Quando não ocorre relação de inclusão?
Obervemos os conjuntos $X = \{x \in \mathbb{N} \,/\, x \text{ é divisível por } 5\}$ e
$Y = \{x \in \mathbb{N} \,/\, x \text{ é divisível por } 6\}$.
Existem elementos de X que não pertencem a Y. Por exemplo, o 15 (é divisível por 5 mas não é divisível por 6). Neste caso dizemos que X não está contido em Y. Assim, X não está contido em Y quando existe pelo menos um elemento de X que não pertence a Y.

(Note também que Y não está contido em X, uma vez que 24 é elemento de Y, é divisível por 6 e não é divisível por 5).

Observação 9. Há duas inclusões "extremas": $A \subset A$ (pois é claro que todo elemento de A pertence a A) e $\varnothing \subset A$. Esta última é curiosa: se quiséssemos mostrar que $\varnothing$ não está contido em A, teríamos que obter um objeto x tal que $x \in \varnothing$ mas $x \notin A$. Como $x \in \varnothing$ é impossível, pois $\varnothing$ não tem elementos, somos levados a concluir que não é possível mostrar que $\varnothing$ não está contido em A, ou seja, o conjunto vazio é um subconjunto de A. Se $B \subset A$ e B é diferente de $\varnothing$ e do próprio A, dizemos que B é um subconjunto próprio de A.

Pense bem sobre essa justificativa. Você consegue compreender sua validade? Perceba que nem sempre o conjunto vazio é elemento de um conjunto, mas sempre é subconjunto de qualquer conjunto. Esta demonstração segue um padrão muito usado. Procure descobrir que padrão é esse.

Propriedades da inclusão

A relação de inclusão tem algumas propriedades que nos serão úteis:

i) *Reflexiva*: Todo conjunto é subconjunto de si próprio, ou simbolicamente, $A \subset A$ para todo conjunto A (veja Observação 9).

ii) *Anti-simétrica*: Se $A \subset B$ e $B \subset A$, então $A = B$.

Esta propriedade é constantemente usada nos raciocínios matemáticos: quando se deseja mostrar que dois conjuntos são iguais, mostra-se que duas inclusões ocorrem. Na verdade esta propriedade contém, nela embutida, a condição de igualdade entre conjuntos: os conjuntos A e B são iguais se e somente se têm exatamente os mesmos elementos. Simbolicamente,

$$A = B \text{ se e somente se } A \subset B \text{ e } B \subset A.$$

Em outras palavras, $A = B$ se e somente se todo elemento de A é elemento de B e todo elemento de B é elemento de A. Assim, para mostrarmos que dois conjuntos A e B são iguais basta mostrar que $x \in A \Leftrightarrow x \in B$.

iii) *Transitiva*: Para A, B e C conjuntos, se $A \subset B$ e $B \subset C$, então $A \subset C$.

Observemos que se x é elemento de A, então será elemento de B e, como $B \subset C$, x será também elemento de C. Assim, todo elemento de A será elemento de C, ou seja, $A \subset C$.

Silogismo
Leia a discussão sobre silogismo nos sites indicados abaixo.

- http://www.simpozio.ufsc.br/Port/1-enc/y-micro/SaberFil/PeqLogica/2211y025,2.html
- http://www.paralerepensar.com.br/silogismos.htm

Consulte também seu material de Problemas – Sistematização e Representação.

Esta propriedade é a base do raciocínio dedutivo, sob a forma que classicamente se chama de silogismo. Um exemplo de silogismo é o seguinte: todo ser humano é um animal, todo animal é um ser mortal, logo todo ser humano é mortal. Na linguagem de conjuntos: A, B e C são respectivamente o conjunto dos seres humanos, dos animais e dos mortais. Temos $A \subset B$ e $B \subset C$, logo $A \subset C$.

Exercícios propostos

1) Listar entre chaves os elementos dos conjuntos:

$A = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 - 5x + 6 - 0\}$

$B = \{x \,/\, x \text{ é letra da palavra abracadabra}\}$

$C = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 - 9 = 0 \text{ ou } 2x - 1 = 9\}$

$D = \{x \in \mathbb{R} \,/\, 3x + 1 = 9 \text{ e } 2\mathrm{x}^2 = x = 1 = 0\}$

$E = \{x \,/\, x \text{ é algarismo do número } 234543\}$

2) Representar os conjuntos:

a) Dos números naturais múltiplos de 5.

b) Dos números naturais divisores de 50.

c) Dos números naturais maiores estritamente do que 5 e menores estritamente do que 30 e que sejam divisíveis por 3.

d) Dos números inteiros x que satisfazem a igualdade $x^2 - 2x + 1 = 0$.

3) Em cada caso, verifique se A está contido em B:

$A = \left\{x \in \mathbb{N} \,/\, n = 4p,\ p \in \mathbb{N}\right\}$; $B = \left\{x \in \mathbb{N} \,/\, n = 4k,\ \mathrm{k} \in \mathbb{N}\right\}$

$A = \left\{n \in \mathbb{N} \,/\, \mathrm{n} \text{ é divisor de } 484\right\}$; $B = \left\{n \in \mathbb{N} \,/\, \mathrm{n} \text{ é divisor de } 242\right\}$

4) Determinar todos os possíveis conjuntos X que satisfazem simultaneamente as condições $X \subset \{1,2,3,4,5\}$ e $\{1,2\} \subset X$.

5) Dados os conjuntos $A = \{a,b,c,d\}$ e $B = \{b,d,e\}$, listar os conjuntos Y tais que $Y \subset A$ e $Y \subset B$.

6) Considere os subconjuntos de números naturais $M_a = \{na / n \in \mathbb{N}\}$ e $M_b = \{nb / n \in \mathbb{N}\}$, com a e b números naturais fixos. Determine sob que condições M_a é subconjunto de M_b.

1.4 Cardinalidade de um conjunto

Nos exemplos anteriores trabalhamos com conjuntos finitos como $\{1,3,5,7\}$ e infinitos, como $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$. Intuitivamente sabemos distinguir quando um conjunto é finito ou infinito, mas como caracterizá-los?

Um conjunto A é finito quando é possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre A e um subconjunto de números naturais da forma $B = \{1,2,3,...,n\}$, com $n \in \mathbb{N}$. Isso significa que cada elemento de A está associado a um único elemento de B cada elemento de B está associado a um único elemento de A. Veja o exemplo:

$$A = \{a,e,i,o,u\} \quad B = \{1,2,3,4,5\}$$

a —— 1
e —— 2
i —— 3
o —— 4
u —— 5

No exemplo acima cada elemento de A está associado a um único elemento de B e vice-versa; assim, A é finito e possui 5 elementos (o mesmo número de elementos de B). De modo geral, se existe uma correspondência dessa natureza entre um conjunto A e um conjunto $B = \{1,2,3,4,...,n\}$, podemos concluir que A é um conjunto *finito* com n elementos e podemos expressar A como $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_n\}$. Conseqüentemente, um conjunto é *infinito* quando não é finito, ou seja, quando não é possível estabelecer uma correspondência biunívoca com um conjunto $B = \{1,2,3,4,...,n\}$, *qualquer que seja* n.

A cardinalidade de um conjunto nada mais é do que a "quantidade" de elementos do conjunto. Quando A é um conjunto finito, sua cardinalidade é um número natural anotado por $|A|$. Quando A é um conjunto infinito, dizemos que sua cardinalidade é *infinita*.

Correspondência Biunívoca
Procedimento que domina toda a matemática(...). Esta consiste em atribuir a cada objeto de um conjunto um objeto de outro, e continuar assim até que um ou ambos os conjuntos se esgotem(...). A correspondência biunívoca resume-se numa operação de "fazer corresponder". (Fonte: http://www.somatematica.com.br/numeros.php).

No decorrer do curso vamos mostrar que existem diferenças entre cardinalidades infinitas, isto é, existem estudos, iniciados pelo matemático Georg Cantor (1845-1918), que mostram que conjuntos com infinitos elementos possuem cardinalidades diferentes. Este é um assunto interessante, que mexe com nossas crenças e intuições. Procure notícias sobre isso!

Observação 10. Evite dizer "número infinito de elementos". Se é *número, é finito.* Se um conjunto é infinito, podemos dizer que ele possui uma *infinidade* de elementos.

Observação 11. A cardinalidade do conjunto vazio é zero.

1.5 Conjunto das partes de um conjunto

Quantos subconjuntos tem um conjunto? Veja um primeiro exemplo.

Exemplo 1. Para $A = \{1, 2, 3\}$ os possíveis subconjuntos de A são:

$$A_1 = \varnothing;\ A_2 = \{1\};\ A_3 = \{2\};\ A_4 = \{3\};\ A_5 = \{1, 2\};$$
$$A_6 = \{1, 3\};\ A_7 = \{2, 3\};\ A_8 = \{1, 2, 3\}.$$

Observe que A possui pelo menos dois subconjuntos: $\varnothing$ e o próprio A (*veja Observação 9*). Note também que a quantidade de subconjuntos de A depende da cardinalidade de A: no exemplo $|A| = 3$ e A possui oito subconjuntos.

Exemplo 2. Para $A = \{a, b\}$ os subconjuntos de A são:

$$A_1 = \varnothing;\ A_2 = \{a\};\ A_3 = \{b\};\ A_4 = \{a, b\}.$$

Neste caso, $|A| = 2$ e A possui quatro subconjuntos.

Observação 12. Você já deve ter percebido que a quantidade de subconjuntos de A resulta de uma contagem que provém das diferentes maneiras de dispor os elementos de A em conjuntos, ou seja, quantos subconjuntos com um elemento, quantos subconjuntos com dois elementos, etc.

Pergunta: como isso se relaciona com os conceitos de análise combinatória? Vejamos no terceiro exemplo.

Exemplo 3. $A = \{a\}$ possui dois subconjuntos: $\varnothing$ e A.

Observando, ainda, um quarto exemplo:

Exemplo 4. O conjunto vazio possui um único subconjunto: ele mesmo.

Note que nos exemplos estamos fazendo contagem de subconjuntos em conjuntos *finitos*. Observe agora um padrão:

- Se $|A| = 0$, teremos **um** subconjunto, $1 = 2^0$
- Se $|A| = 1$, teremos **dois** subconjuntos, $2 = 2^1$
- Se $|A| = 2$, teremos **quatro** subconjuntos, $4 = 2^2$
- Se $|A| = 3$, teremos **oito** subconjuntos, $8 = 2^3$

Assim, parece razoável inferir que se $|A| = n$, teremos 2^n subconjuntos. Esta afirmação é verdadeira. No entanto, você não deve esperar que apenas quatro exemplos possam justificar a veracidade da afirmação; para prová-la de fato, é necessário recorrer a argumentos da análise combinatória.

Pergunta: Quantos subconjuntos tem um conjunto infinito?

Quando a cardinalidade de um conjunto A é infinita, A terá também uma infinidade de subconjuntos: uma infinidade de conjuntos com um elemento, uma infinidade com dois elementos, etc.

Definição: O conjunto formado por todos os subconjuntos de um conjunto A é chamado conjunto das partes de A e denotado por $P(A)$.

Exemplos:

1) $A = \varnothing$, $P(A) = \{\varnothing\}$

   Observe que $P(A)$ é um conjunto unitário, cujo único elemento é o conjunto vazio.

2) $A = \{a, b\}$, $P(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

   Neste caso $P(A)$ possui quatro elementos: $\varnothing, \{a\}, \{b\}$ e o próprio A. Não se impressione com a quantidade de chaves que usamos! $P(A)$ é um conjunto onde cada elemento é também um conjunto. Na idéia de conjunto, nada impede que estes objetos sejam conjuntos.

Exercícios propostos

7) Determine $P(A)$ para:

a) $A = \{x \in \mathbb{N} / x^2 = 1\}$

b) $A = \{3, \{2, 5\}\}$

c) $A = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}\}$

8) Quantos são os subconjuntos de $K = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ que possuem três elementos?

1.6 Operações entre conjuntos

Assim como podemos operar com números, também podemos fazer operações com conjuntos. É claro que são objetos diferentes, mas você verá que são muitas as semelhanças, especialmente nas propriedades destas operações. Em nosso estudo estaremos considerando que os conjuntos envolvidos são subconjuntos de um conjunto U que chamaremos de *conjunto universo*. Com isso deixamos explícito que estamos atuando num determinado conjunto como referência (o nosso universo de trabalho).

1.6.1 União

Definição: Dados os conjuntos A e B, a união (ou reunião) de A e B é o conjunto dos elementos que pertencem a A ou pertencem a B. A notação para este conjunto é $A \cup B$ (lê-se "A união B").

Exemplos:

1) Para $A = \{1, 2, 7, 4\}$ e $B = \{2, 4, 9, 6, 43\}$ temos $A \cup B = \{1, 2, 4, 6, 7, 9, 43\}$.

2) Para $A = \{x \in \mathbb{Z} / -3 \le x < 10\}$ e $B = \{x \in \mathbb{Z} / 0 \le x < 19\}$, temos $A \cup B = \{x \in \mathbb{Z} / -3 \le x < 19\}$.

Observação 13. Simbolicamente escrevemos:

$$A \cup B = \{x \in U \,/\, x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

Note que o conectivo **ou** que aparece na representação de $A \cup B$ não é exclusivo, ou seja, um elemento de $A \cup B$ pode pertencer aos dois conjuntos (assim, quando um elemento x pertence à união de conjuntos A e B, x deve pertencer a pelo menos um dos conjuntos). Sugestão: veja os exemplos novamente.

Observação 14. Podemos visualizar a união de conjuntos através de figuras no plano que representam os conjuntos e a operação união. Estas figuras são chamadas "diagramas de Euler-Venn" e constituem um recurso didático para a abordagem das operações com conjuntos.

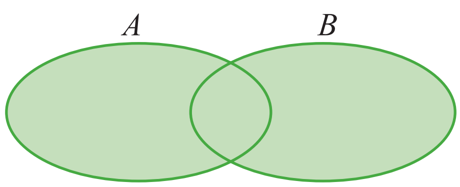

Figura 1.1 – A parte hachurada é o conjunto $A \cup B$

Tarefa de pesquisa

Por que estes diagramas têm o nome "Euler-Venn"?

1.6.2 Propriedades da união

As propriedades a seguir são válidas para quaisquer conjuntos A, B e C; todas podem ser provadas utilizando a definição de união e os conceitos vistos anteriormente. Note a semelhança com as propriedades da adição de números reais:

1) *Propriedade associativa:* $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

   Esta propriedade permite operar mais de dois conjuntos (note que a definição de união se refere somente a dois conjuntos); basta operar de dois em dois.

A prova da quinta propriedade está feita a seguir. Tente fazer a prova das outras a partir da definição e pensando sobre o raciocínio que a organiza.

2) *Propriedade Comutativa:* $A \cup B = B \cup A$

Assim como a adição de números reais, a ordem dos conjuntos não altera a união.

3) *Elemento neutro:* $A \cup \varnothing = A$

O $\varnothing$ está aqui fazendo o papel que o zero faz na adição: como $\varnothing$ não tem elementos, sua união com qualquer conjunto A resulta no próprio A.

4) $A \subset A \cup B$

Decorre diretamente da definição: os elementos de A são também elementos da união, uma vez que estão em A.

5) $A \cup B = B$ *se e somente se* $A \subset B$.

Prova: Inicialmente tomamos como hipótese $A \cup B = B$ e devemos mostrar que $A \subset B$.

De fato, seja $x \in A$; pela propriedade anterior (propriedade 4), temos que $x \in A \cup B$ e como, por hipótese, temos $A \cup B = B$ podemos concluir que $x \in B$. Logo, $A \subset B$.

Reciprocamente, tomamos $A \subset B$ como hipótese e devemos mostrar que $A \cup B = B$, ou seja, que (i) $A \cup B \subset B$ e também que (ii) $B \subset A \cup B$ (propriedade anti-simétrica da inclusão). Como (ii) já ocorre pela propriedade 4, basta provar (i).

De fato: (i) seja $x \in A \cup B$; então $x \in A$ ou $x \in B$. Como por hipótese $A \subset B$, podemos concluir que $x \in B$. Logo, $A \cup B \subset B$ e teremos $A \cup B = B$.

1.6.3 Intersecção

Definição: Dados os conjuntos A e B, a intersecção de A com B é o conjunto dos elementos que pertencem a A e também a B. A notação para este conjunto é $A \cap B$ (lê-se "A intersecção B").

Exemplos:

1) Para $A = \{10, 20, 25, 30\}$ e $B = \{2, 5, 10, 15, 20\}$, $A \cap B = \{10, 20\}$.

2) Se $A = \{n \in \mathbb{N} / n \mid 45\}$ e $B = \{n \in \mathbb{N} / n \mid 54\}$, $A \cap B = \{1, 3, 9\}$, ou seja, $A \cap B$ é o conjunto dos números naturais que são divisores de 45 e também de 54.

Observação 15. Simbolicamente escrevemos:

$$A \cap B = \{x \in U / x \in A \text{ e } x \in B\}.$$

O conectivo **e** indica que quando um elemento x pertence a $A \cap B$, x deve pertencer simultaneamente a A e a B.

Observação 16. O diagrama de Euler-Venn para a intersecção é:

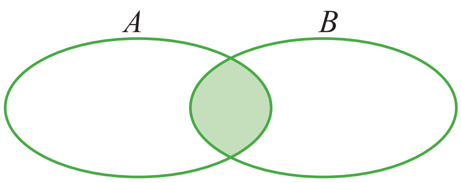

Figura 1.2 - A parte hachurada é o conjunto $A \cap B$

Observação 17. Quando a intersecção de dois conjuntos A e B é o conjunto vazio, dizemos que A e B são *conjuntos disjuntos.*

1.6.4 Propriedades da intersecção

As propriedades da intersecção que enunciaremos a seguir são válidas para quaisquer conjuntos A, B e C, subconjuntos de um conjunto U. Também aqui, note a semelhança com as propriedades das operações com números reais. (Continuaremos a numeração a partir das propriedades da união)

6) *Propriedade associativa:* $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

   Como na propriedade 1, esta propriedade nos permite fazer a intersecção de mais de dois conjuntos.

7) *Propriedade comutativa:* $A \cap B = B \cap A$

8) $A \cap \varnothing = \varnothing$

Para um elemento x pertencer ao conjunto $A \cap \varnothing$, ele deve pertencer simultaneamente a A e ao $\varnothing$. Como o conjunto vazio não tem elementos, também não haverá elementos em $A \cap \varnothing$.

9) $A \cap B = A$ se e somente se $A \subset B$.

Deixamos a prova desta propriedade como exercício (veja propriedade 4).

10) $A \cap B \subset A$

Se $x \in A \cap B$, então x é elemento de A e também de B. Isto garante a inclusão de $A \cap B$ em A (e também em B).

11) Sejam A, B e C conjuntos. Então

i) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

ii) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Para provar esta propriedade utilizamos a igualdade de conjuntos (propriedade anti-simétrica da inclusão) e as definições de união e intersecção. Deixamos como exercício.

1.6.5 Diferença

Definição: Dados os conjuntos A e B, a diferença de A e B é o conjunto dos elementos de A que não pertencem a B. A notação para este conjunto é $A - B$ e podemos escrever:

$$A - B = \{x \,/\, x \in A \text{ e } x \notin B\}.$$

Exemplos:

1) $A = \{1,3,5,7,9,11\}$ e $B = \{1,5,11\}$, $A - B = \{3,7,9\}$.

2) $\mathbb{N}$ e $B = \{2n \,/\, n \in \mathbb{N}\}$, $\mathbb{N} - B = \{2n+1 \,/\, n \in \mathbb{N}\}$.

3) $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ é o conjunto dos números reais que não são racionais, ou seja, é o conjunto dos números irracionais.

Observação 18. Note que os conjuntos $A-B$ e $B-A$ não são necessariamente iguais, assim como também não é comutativa a operação subtração de números reais. Em nosso primeiro exemplo $A-B=\{3,7,9\}$ e $B-A=\varnothing$.

Tarefa

É possível encontrar conjuntos A e B de modo que se tenha $A-B=B-A$?

Exercícios propostos

9) Determinar os conjuntos:

a) $\{x\in\mathbb{Q}/x>1\}\cap\left\{-2<x<\dfrac{37}{2}\right\}$

b) $\{\{1,2\},\{3\}\}\cap\{1,2,\{1,2\}\}$

c) $\{x\in\mathbb{N}/5\leq x\}\cup\{x\in\mathbb{N}/x\leq 5\}$

d) $\{x\in\mathbb{N}/x<0\}\cup\mathbb{N}$

e) $\{3,6,9,12,15,...\}\cap\{2,4,6,8,10,...\}$

10) Dados os subconjuntos de $\mathbb{N}$, $A=\{x/2\,|\,x\}$, $B=\{2n+1/n\in\mathbb{N}\}$ e $C=\{x/3\,|\,x\}$, determinar:

a) $A\cap B$

b) $\mathbb{N}\cap A\cap B$

c) $B\cap\mathbb{N}$

d) $A\cap C$

11) Construir subconjuntos A, B e C de $\mathbb{N}$ que satisfaçam simultaneamente as condições:

i) $A\subset B$

ii) $C\subset B$

iii) $A\cap C=\varnothing$

12) Indicar as condições que devem satisfazer os conjuntos A e B para que se verifique $A\cup B=B$.

13) Indicar as condições que devem satisfazer os conjuntos A e B para que se verifique $A \cap B = B$.

14) Prove que para quaisquer conjuntos A, B e C, se $A \subset B$ e $A \subset C$, então $A \subset (B \cap C)$.

15) Para $A = \{x \in \mathbb{N} / x = 4n, \text{ com } n \in \mathbb{N}\}$ e

$$B = \left\{x \in \mathbb{N}^* / \frac{20}{x} = n, \text{ com } n \in \mathbb{N}\right\},$$

qual o número de elementos de $A \cap B$?

16) Um subconjunto A de números naturais contém doze múltiplos de 4, sete múltiplos de 6, cinco múltiplos de 12 e oito números ímpares. Qual o número de elementos de A?

17) Numa pesquisa de mercado, foram entrevistadas várias pessoas acerca de suas preferências em relação a 3 produtos: W, X e Y. Os resultados da pesquisa indicaram que:

- 210 pessoas compram o produto W;
- 210 pessoas compram o produto X;
- 250 pessoas compram o produto Y;
- 20 pessoas compram os três produtos;
- 100 pessoas não compram nenhum dos três produtos;
- 60 pessoas compram os produtos W e X;
- 70 pessoas compram os produtos W e Y;
- 50 pessoas compram os produtos X e Y.

Pergunta-se:

a) Quantas pessoas foram entrevistadas?

b) Quantas pessoas compram apenas o produto W?

c) Quantas pessoas compram apenas o produto X?

d) Quantas compram apenas o produto Y?
(Sugestão: use diagramas)

18) Para conjuntos A e B finitos, prove que

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

19) Determinar os conjuntos A, B e C que satisfazem simultaneamente as seguintes condições:

a) $A \cup B \cup C = \{z, x, v, u, t, s, r, p, q\}$

b) $A \cap B = \{r, s\}$

c) $B \cap C = \{s, x\}$

d) $C \cap A = \{s, t\}$

e) $A \cup C = \{p, q, r, s, t, u, v, x\}$

f) $A \cup B = \{p, q, r, s, t, x, z\}$

20) Desenhar um diagrama de Euler-Venn representando quatro conjuntos A, B, C e D, de modo que se tenha $A \not\subset B$, $B \not\subset C$, $C \supset (A \cup B)$ e $D \subset (A \cap B)$.

21) A união é uma operação que pode ser estendida a mais de dois conjuntos: para conjuntos $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$, denotamos a união como $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$. É possível também uma generalização para uma infinidade de conjuntos; para uma família de conjuntos A_i com $i \in J$, onde J é um conjunto infinito de índices, a união dos conjuntos A_i é denotada por $\bigcup_{i \in J} A_i$. Assim, $x \in \bigcup_{i \in J} A_i$ se e somente se $x \in A_i$, para algum $i \in J$. Determine agora o conjunto resultante da união infinita da seguinte família de conjuntos: $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i$, $B_i = \{2i\}$, para $i \in \mathbb{N}$.

23) Dados os conjuntos A e B, desenhe os diagramas de Venn-Euler dos conjuntos, considerando os casos (i) A e B disjuntos; (ii) $A \subset B$; (iii) $A \cap B \neq \varnothing$; (iv) $B \subset A$:

a) $A - B$

b) $A \cup (A - B)$

c) $A - (A - B)$

d) $B \cap (A - B)$

24) Considere os conjuntos $A=\{0,1,3,5,7\}$ e $B=\{2,4,5,8\}$. Determine:

a) $A-B$

b) $(A-B)\cup(B-A)$

c) $(A\cup B)-(B\cap A)$

1.7 Complementar de um conjunto

Considere um conjunto A; o complementar de A (ou complemento de A) é o conjunto dos elementos que não pertencem a A. Se, por exemplo, $A=\{0,1\}$, o complementar de A teria como elementos o -5 , $\sqrt{17}$, o planeta Urano, os dias da semana, todos os números primos, enfim, qualquer objeto que não fosse 0 e não fosse 1 seria elemento do complementar de A. Esta situação tão ampla não parece muito interessante! Para evitar isto, a idéia de "complementar de um conjunto" terá como referência um conjunto "maior", que contém o conjunto A. Assim, devemos pensar em "complementar de A em relação a um conjunto B, com $A\subset B$".

Notações:

- Indicamos o complementar de A em relação a um conjunto B como $C_BA=\{x\in B\,/\,x\notin A\}$.
- Quando B é o conjunto universo, denotamos o complementar de A por A^c; então $A^c=\{x\,/\,x\notin A\}$.

Observação 19. Note que $x\in A^c$ se e somente se $x\notin A$. E $x\notin A^c$ se e somente se $x\in A$; assim, $A\cap A^c=\varnothing$. Consequentemente, para o conjunto universo U, temos $\varnothing^c=U$ e $U^c=\varnothing$.

Exemplos:

1) $A=\{x\in Z\ /\ 2\mid x\}\subset\mathbb{Z};\ A^c=\{x\in\mathbb{Z}\ /\ x \text{ é ímpar}\}$

2) $A=\{x\in\mathbb{Z}/2\mid x\}$ e $B=\{x\in\mathbb{Z}/-6<x<20\}$;

$C_BA=\{-5,-3,-1,1,3,5,7,9,11,12,13,15,17,19\}$, ou

$C_BA=\{2n+1/\,n\in\mathbb{Z}\ \text{ e } -3\le n\le 19\}$.

Propriedades da complementação

Para A e B subconjuntos de um conjunto U, temos as seguintes propriedades (continuaremos a numeração a partir das propriedades da intersecção):

12) $(A^c)^c = A$

Sabemos da Obs. 19 que $x \in (A^c)^c$ se e somente se $x \notin A^c$. Mas $x \notin A^c$ se e somente se $x \in A$. Logo, a igualdade é verdadeira.

13) $A - B = A \cap B^c$

Lembrando a definição de intersecção e da diferença, note que:

$$A \cap B^c = \{x \,/\, x \in A \text{ e } x \in B^c\} = \{x \,/\, x \in A \text{ e } x \notin B\} = A - B$$

14) (i) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

(ii) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

Estes resultados são conhecidos como "Leis de De Morgan", devido ao seu autor (tarefa: pesquise quem foi De Morgan). Vamos demonstrar (i) (para lembrar como demonstrar a igualdade de conjuntos veja Propriedade Anti-simétrica da Inclusão):

$$x \in (A \cap B)^c \Leftrightarrow x \notin A \cap B \Leftrightarrow x \notin A \text{ ou}$$

$$x \notin B \Leftrightarrow x \in A^c \text{ ou } x \in B^c \Leftrightarrow x \in (A^c \cup B^c)$$

Deixamos a demonstração de (ii) como exercício.

15) $A \subset B$ se e somente se $B^c \subset A^c$.

Deixamos a demonstração como exercício; você pode fazer separadamente as duas implicações:

$$A \subset B \Rightarrow B^c \subset A^c \text{ e } B^c \subset A^c \Rightarrow A \subset B.$$

16) Se $A \cap B = \varnothing$, então $B \subset A^c$.

Devemos mostrar que todo elemento de B é elemento de A^c. Seja $x \in B$; como $A \cap B = \varnothing$, x não é elemento de A. Logo, $x \in A^c$ e, assim, $B \subset A^c$.

Exercícios propostos

25) Desenhe o diagrama de Venn-Euler do complementar de A em relação a um conjunto universo U.

26) Considere subconjuntos A e B de um conjunto U; definimos a *diferença simétrica* de A e B e anotamos $A \vartriangle B$ como sendo o conjunto $A \vartriangle B = (A - B) \cup (B - A)$. Usando esta definição:

a) Faça o diagrama de Venn-Euler de $A \vartriangle B$.

b) Calcule $\{a, b, c, d\} \vartriangle \{c, d, e, f\}$ considerando U o conjunto das letras do alfabeto português.

c) Prove que $A \vartriangle A = \varnothing$ para todo conjunto A.

d) Prove que $A \vartriangle \varnothing = A$ para todo conjunto A.

e) Prove que $A \vartriangle B = (A \cup B) - (A \cap B)$.

27) Dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$, $C = \{3, 4, 5, 6\}$ num universo $U = \{x \in \mathbb{N} / 0 < x < 10\}$, calcule:

a) $(A - B)^c$

b) $(A \cap C)^c$

c) $(A \cup B)^c$

d) $(B \vartriangle C)^c$

28) Prove que $A \subset B$ se e somente se $A - B = \varnothing$.

29) Determine os elementos dos conjuntos A e B, subconjuntos de U, sabendo que $A \vartriangle B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A^c = \{2, 3, 5, 7\}$, $B^c = \{1, 4, 7\}$ e $U = \{x \in \mathbb{N} / 0 < x \leq 8\}$.

30) Considere os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{Z} / x = 6n + 3, n \in \mathbb{Z}\}$ e $B = \{x \in \mathbb{Z} / x = 3n,\ n \in \mathbb{Z}\}$. Determine:

a) $A \cap B$

b) $A \cup B$

c) $B - A$

31) Considere os seguintes conjuntos: $A = \{1, 2, \{1, 2\}\}$ $B = \{\{1\}, 2\}, C = \{1, \{1\}, \{2\}\}$. Classifique as afirmações abaixo em V ou F, justificando:

a) $A \cap B = \{2\}$

b) $B \cap C = \{\{1\}\}$

c) $B - C = A \cap B$

d) $B \subset A$

e) $A \cap P(A) = \{\{1, 2\}\}$, onde $P(A)$ é o conjunto das partes de A.

1.8 Produto cartesiano

Considere os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 5\}$. Vamos construir um novo conjunto, denotado por $A \times B$, cujos elementos são "pares ordenados" formados por elementos de A e de B, isto é, todos os possíveis pares de números de modo que o primeiro seja elemento de A e o segundo seja elemento de B:

$$A \times B = \{(1,1), (1,5), (2,1), (2,5), (3,1), (3,5)\}$$

O conjunto formado é chamado "produto cartesiano de A por B". Note que o nome "par ordenado" significa que a ordem em que os elementos aparecem no par é importante; por exemplo, o par $(1, 2)$ é diferente do par $(2,1)$ e $(1, 2)$ não pertence ao conjunto $A \times B$. O conjunto $B \times A$ seria dado por $B \times A = \{(1,1), (1,2), (1,3), (5,1), (5,2), (5,3)\}$, que é um conjunto diferente de $A \times B$.

Conjuntos de pares ordenados são úteis para descrever várias situações em Matemática e em outras áreas; você deve lembrar de como construía gráficos de funções, da descrição de curvas no plano, ou de como procurar uma rua no mapa de uma cidade.

Genericamente, dados os conjuntos A e B, o produto cartesiano de A por B é o conjunto $A \times B = \{(a,b) / a \in A \text{ e } b \in B\}$. A expressão "$a \in A$ e $b \in B$" aí aparece no sentido de "a percorre A e b percorre B" (veja a observação 4). Isto significa que usamos **todos** os elementos de A e **todos** os elementos de B, construindo todos os possíveis pares ordenados.

Mais exemplos:

1) $A=\{n\}$ e $B=\{13,17,19,23,29\}$,

$A\times B=\{(n,13),(n,17),(n,19),(n,23),(n,29)\}$

2) $A=\{a,b,c\}$ e $B=\{2n / n\in\mathbb{N}\}$,

$A\times B=\{(x,2n) / x=a, x=b \text{ ou } x=c \text{ e } n\in\mathbb{N}\}$

Observação 20. Em um par ordenado (a,b), a é a primeira coordenada e b é a segunda coordenada.

Observação 21. Quando os conjuntos são iguais, o produto cartesiano $A\times A$ também é denotado por A^2; $A^2=\{(a,b) / a\in A \text{ e } b\in A\}$.

Observação 22. O que acontece quando um dos conjuntos de um produto cartesiano é o conjunto vazio? Como o conjunto vazio não tem elementos, não podemos construir pares ordenados e consequentemente temos que $A\times\varnothing=\varnothing\times A=\varnothing$, qualquer que seja o conjunto A.

Observação 23. Às vezes podemos descrever um conjunto de pares ordenados mesmo que não estejam explícitos os conjuntos que o compõem; por exemplo, o conjunto

$$L=\{(a,b)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N} / a \text{ é divisor de } b \text{ e } b<7\}$$

é um *subconjunto próprio* do conjunto cartesiano $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}$ (veja Observação 9) e seus pares ordenados são especificados por meio de uma *relação* entre as coordenadas; o conjunto L será dado por:

$$L=\{(1,0),(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,0),(2,2),(2,4),\\ (2,6),(3,0),(3,3),(3,6),(4,0),(4,4),(5,0),(5,5),(6,0),(6,6)\}$$

Para escrever o conjunto, tomamos todas as possibilidades para a segunda coordenada b, ou seja, $0,1,2,3,4,5,6$ e para a primeira coordenada tomamos os possíveis divisores desses números.

Subconjuntos de produtos cartesianos serão estudados na unidade *Relações*.

1.8.1 Representação gráfica do produto cartesiano

Você deve lembrar de como desenhava gráficos de funções reais, usando dois eixos perpendiculares para neles representar o domínio (eixo horizontal) e contra-domínio (eixo vertical) da função e localizando os pontos $(x, f(x))$ por meio de retas paralelas aos eixos. No caso de funções reais, domínio é subconjunto de $\mathbb{R}$, contra-domínio é $\mathbb{R}$ e o plano (identificado como $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$) determinado pelos dois eixos é chamado plano cartesiano (tarefa: descubra a origem da palavra "cartesiano"). O gráfico da função é o conjunto dos pontos $(x, f(x))$, que é um subconjunto do plano $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

Podemos generalizar esta idéia para qualquer par de conjuntos A e B. Tracemos dois eixos perpendiculares nos quais representamos o conjunto A no eixo horizontal (primeiro conjunto) e o conjunto B no eixo vertical (segundo conjunto); os pares ordenados (a,b) podem ser representados pelas intersecções de retas paralelas aos dois eixos pelos pontos que representam os elementos de A e de B. Veja a figura 1.3.

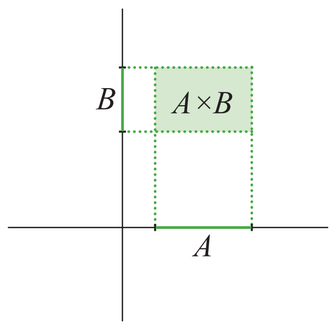

Figura 1.3

O fato de podermos representar o conjunto $A\times B$ como pontos de um plano é que permite sua utilização para descrever sistemas de localização, principalmente mapas. Introduzir o produto cartesiano por meio de mapas tornou-se um recurso muito útil, que pode ser observado em muitos livros didáticos.

1.8.2 Igualdade de pares ordenados

Se pensarmos num par ordenado (a,b) como a posição de um objeto no plano, podemos perguntar: quando um objeto localizado em (x,y) estará na posição (a,b)? É razoável responder: quando as coordenadas de (x,y) coincidirem com as coordenadas (a,b). Podemos então definir:

Definição: Dois pares ordenados (a,b) e (x,y) são iguais se e somente se $a = x$ e $b = y$.

Exemplo:

Determine os valores de t para que o par $(t,0)$ pertença ao conjunto $S = \{(x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \,/\, y = x^2 - 4\}$.

Resolução: Podemos escrever o conjunto S como

$$S = \{(x\ ,\ x^2 - 4)\ /\ x \in \mathbb{Z}\}.$$

Para que o par $(t,0)$ pertença ao conjunto S, devemos ter $(t,0) = (x, x^2 - 4)$, ou seja, $t = x$ e $x^2 - 4 = 0$. Isto significa $t^2 - 4 = 0$ e, portanto, $t = 2$ ou $t = -2$. Nenhum outro valor de t satisfaz a condição. Assim, os valores de t para que $(t,0) \in S$ são $t = 2$ ou $t = -2$ (o que significa que os pares $(2,0)$ e $(-2,0)$ são elementos de S).

1.8.3 Propriedades do produto cartesiano

Sejam A, B e C conjuntos. Valem as seguintes propriedades:

1) Se A é diferente de B, tem-se $A \times B \neq B \times A$. (veja o primeiro exemplo)
2) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

Você pode verificar intuitivamente a igualdade dos conjuntos através da representação gráfica:

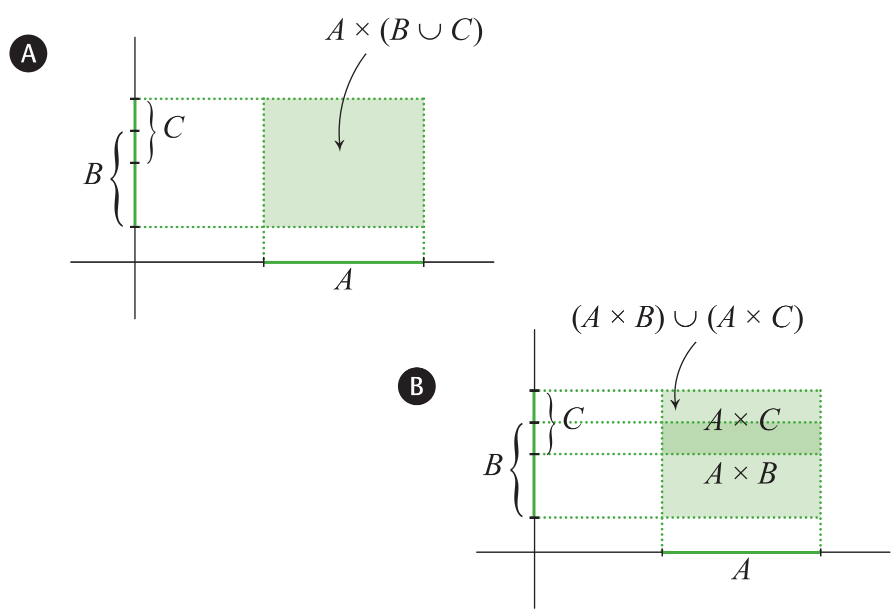

Figura 1.4 - (A) $A \times (B \cup C)$ e (B) $(A \times B) \cup (A \times C)$

Analogamente temos também $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$. Faça a representação gráfica como exercício.

Exercícios

32) Dados $A=\{3,4,5\}$ e $B=\{1,2,3,4\}$ escreva os conjuntos:

a) $A\times B$

b) $B\times A$

c) $(A\times A)\cup(B\times B)$

d) $(A\times B)\cup(B\times A)$

e) $(A\times B)\cap(B\times A)$

f) $(A\times A)\cap(B\times B)$

33) Se A tem dois elementos e B tem seis elementos, quantos elementos tem $A\times B$? Você pode generalizar?

34) Determine x e y de modo que sejam iguais os pares ordenados:

a) $(2x-1,5)$ e $(x,y+1)$

b) $(x+y,1)$ e $(3,x-y)$

c) $(y-2,2x+1)$ e $(x-1,y+2)$

35) Da mesma forma como foi feito para a união e intersecção de conjuntos, o produto cartesiano pode ser estendido a mais de dois conjuntos. Para três conjuntos temos:

$$A\times B\times C=\{(a,b,c)\,/\,a\in A, b\in B \text{ e } c\in C\}$$

O conjunto $A\times B\times C$ é o conjunto das ternas ordenadas (a,b,c) com $a\in A$, $b\in B$ e $c\in C$. Um exemplo de conjunto desta natureza é o espaço tridimensional $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, onde cada coordenada representa uma dimensão: comprimento, largura e altura.

Também podemos definir para uma família de n conjuntos $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$:

$$A_1\times A_2\times A_3\times\ldots\times A_n=\{(a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n)/\,a_i\in A_i,\ \text{para } 1\le i\le n\}$$

Os elementos deste conjunto são chamados de “*n*-uplas” ordenadas (costuma-se falar “ênuplas”).

O conjunto $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ é um exemplo para o caso $n=3$.

Agora faça o exercício. Descreva o produto cartesiano dos conjuntos:

a) $A=\{1,2,3\}, B=\{2,5\}, C=\{7\}$

b) $A_i=\{n\in\mathbb{N}\,/\,n \text{ é divisor de } i\}$ para $1\le i\le 8$ (A_i é o conjunto dos divisores de 1, A_2 é o conjunto dos divisores de 2, A_3 é o conjunto dos divisores de 3 etc.).

Tarefa de pesquisa

1) Você já sabe que produtos cartesianos são úteis para descrever posições de objetos. Em geografia você aprendeu que a localização de pontos na Terra é feita através de duas coordenadas: latitude e longitude. Produza um texto explicando detalhadamente o que é latitude e o que é longitude. Dê as coordenadas de sua cidade natal e de mais quatro cidades de sua escolha.

2) A localização de estrelas também é feita através de coordenadas. Produza um texto explicando detalhadamente um sistema de coordenadas estelares (existe mais de um!). Você vai encontrar este tema em livros de introdução à astronomia e em *sites* da internet.

Resumo

Neste capítulo você estudou Conjuntos, a linguagem universal da Matemática. Os tópicos trabalhados foram:

1) Conjuntos e elementos: relação de pertinência e representação de conjuntos.
2) Inclusão – Subconjuntos: propriedades da inclusão e subconjuntos especiais do conjunto $\mathbb{R}$.
3) Cardinalidade de um conjunto: número de elementos de um conjunto.
4) Conjunto das partes de um conjunto: conjunto formado por todos os seus subconjuntos.
5) Operações entre conjuntos: União, Intersecção, Diferença e propriedades dessas operações.
6) Complementar de um conjunto: relação com a inclusão e propriedades.
7) Produto cartesiano de conjuntos: representação, igualdade de pares ordenados, propriedades.

Bibliografia comentada

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; MORGADO, A. C. *A matemática do ensino médio*. Rio de Janeiro: SBM, 1996. (Coleção do Professor de Matemática)

O primeiro capítulo do livro trata de Conjuntos, com comentários sobre lógica e recomendações ao professor, além de exercícios.

CASTRUCCI, B. *Elementos de teoria dos conjuntos*. Grupo de Estudos do Ensino de Matemática (G.E.E.M.), São Paulo: distribuição da Livraria Nobel, 1972.

Um livro mais clássico (e mais antigo). Contém também todo o conteúdo deste capítulo, com muitos exercícios.