Capítulo 2

Conjuntos Numéricos – Naturais e Inteiros

Capítulo 2
Conjuntos Numéricos – Naturais e Inteiros

Apresentar os conjuntos dos números naturais e inteiros. Dar uma visão de suas estruturas. Abordar as operações definidas e as propriedades aritméticas, sendo estas, na medida do possível, rigorosamente justificadas.

Neste capítulo, além de compreender definições e propriedades, você vai aprender a demonstrar grande parte das propriedades, justificando cada passagem.

Você verá que, neste capítulo, são poucos os exercícios propostos. Por que será?

Como já vimos no capítulo anterior, a humanidade passou por um percurso longo até chegar à formulação do sistema de numeração decimal. No continuar da caminhada até a formulação do conjunto dos números naturais, como conhecemos hoje, outro longo período de explorações, estudos, ensaios, tem lugar. A formulação axiomática do conjunto dos números naturais, isto é, uma formulação estrutural, formal, via os conceitos primitivos, axiomas, operações, propriedades, foi dada por Giuseppe Peano em 1889.

A estrutura elaborada por Peano teve como princípio o fato de que os números naturais podem ser ordenados de forma que cada elemento tem um sucessor.

No texto, a seguir, vamos levar algumas horas para conhecer um pouco sobre números naturais e sobre o conjunto dos inteiros, conteúdos que nossos antepassados levaram séculos para formalizar.

2.1 Conjunto dos números naturais

Como já sabemos, em 1889, Guiseppe Peano formaliza o conjunto dos números naturais. Eles surgiram com a necessidade de contagem. Tem por conceitos primitivos: o conceito do zero, de número natural e o conceito da relação *"é sucessor de"*.

São cinco os axiomas que formam a base da estrutura dos números naturais:

Axioma 1. Zero é um número natural.

Este axioma garante que o conjunto dos naturais é diferente do vazio, ou seja, o zero pertence ao conjunto dos naturais.

Axioma 2. Se a é um número natural, então a tem um único **sucessor** que também é um número natural (Representamos o sucessor de a por a^+).

Um número natural b é sucessor de a, se $b = a + 1$. Por exemplo: o número 6 é o sucessor de 5, pois $6 = 5 + 1$.

Axioma 3. Zero não é sucessor de nenhum número natural.

Axioma 4. Se dois números naturais têm sucessores iguais, então eles próprios são iguais. Em uma representação simbólica escrevemos: $a^+ = b^+ \Rightarrow a = b$.

Como conseqüência, temos: se a é diferente de b então o sucessor de a é diferente do sucessor de b. Em uma linguagem simbólica: $a \neq b \Rightarrow a^+ \neq b^+$.

Axioma 5. Se uma coleção S de números naturais contém o zero e também o sucessor de todo elemento de S, então S é o conjunto de todos os naturais.

Este último axioma é chamado *axioma da indução completa*. Ele nos diz que se temos um conjunto S de números que contém o zero e, para cada um dos elementos deste conjunto, seu sucessor também está no conjunto S, então este conjunto é o próprio conjunto dos números naturais. Assim, como zero está em S, seu sucessor 1 também está em S; repetindo o argumento segue que 2 (o sucessor de 1) está em S; repetindo o argumento sucessivamente concluímos que:

$0, 1, 2, 3, 4, \ldots$, ou seja, todos os naturais estão em *S*. Deste modo, segue que S é o conjunto de todos os naturais.

Para representar o conjunto dos números naturais utiliza-se o símbolo $\mathbb{N}$ e para representar o zero, o símbolo 0. Como já vimos, para representar o sucessor de um número a, usamos o símbolo a^+.

Pelo raciocínio desenvolvido acima, o axioma 5 nos permite obter um conjunto de números: $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...\}$ o qual é chamado conjunto dos números naturais e denotado por $\mathbb{N}$. Assim, temos que:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots\}.$$

Em síntese, a partir dos axiomas, temos as seguintes afirmações:

1) O zero pertence a $\mathbb{N}$. Usando linguagem simbólica: $0 \in \mathbb{N}$.
2) Se a pertence a $\mathbb{N}$ então o sucessor de a, a^+, pertence a $\mathbb{N}$. Em linguagem simbólica: $a \in \mathbb{N} \Rightarrow a^+ \in \mathbb{N}$.
3) Para todo número natural *a*, o sucessor de a é diferente de zero. Em linguagem simbólica: $(\forall a \in \mathbb{N})a^+ \neq 0$.
4) Sejam a e b dois números naturais; se o sucessor de a é igual o sucessor de b então a é igual a b. Na notação simbólica: $a^+ = b^+ \Rightarrow a = b$.
5) Se a é um número natural e $a \neq 0$, então existe um número natural b tal que $a = b^+$. Isto significa que todo número natural não nulo é sucessor de algum número natural.
6) Se para um subconjunto S dos números naturais (denotaremos por: $S \subset \mathbb{N}$) estão satisfeitas as condições:
   i) O zero pertence a S;
   ii) Para todo a pertencente a S, o sucessor de *a* pertence a S; então S é igual a $\mathbb{N}$.

Em linguagem simbólica:

$$(0 \in S) \wedge (\forall a \in S \Rightarrow a^+ \in S) \Rightarrow S = \mathbb{N}.$$

Com estes cinco axiomas, podemos estabelecer todos os fatos importantes de $\mathbb{N}$: operações, propriedades, enfim, toda "estrutura" do conjunto dos naturais, inclusive a relação de ordem "menor ou igual". Uma propriedade que decorre imediatamente dos axiomas é a seguinte: se um número natural a é diferente de 0, então este número é sucessor de algum número natural. Por exemplo: como 56 é diferente de zero, ele é o sucessor de algum número natural, que sabemos ser o 55. Este fato será utilizado na definição das operações adição e multiplicação.

Agora já conhecemos o conjunto dos números naturais:

$\mathbb{N} = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ \ldots\}$. Quando considerarmos o conjunto dos números naturais sem o elemento zero, isto é, se estivermos tratando de $\mathbb{N} - \{0\}$, indicaremos este conjunto por $\mathbb{N}^*$. Assim: $\mathbb{N}^* = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ \ldots\}$.

2.1.1 Que operações estão definidas no conjunto dos números naturais?

No conjunto dos números naturais duas operações são definidas: a adição e a multiplicação.

Estas operações são regras, leis, que a cada par de elementos (x, y), associa um elemento do conjunto $\mathbb{N}$.

Como é definida a adição em $\mathbb{N}$?

A definição formal da adição em $\mathbb{N}$ é baseada no conceito de sucessor.

A **adição** é uma função que leva cada par de números naturais (x, y) à soma $x + y$, ou seja, é a função representada por +, que associa ao elemento (x, y) de $\mathbb{N}\text{x}\mathbb{N}$ o elemento $x + y\ de\ \mathbb{N}$.

x e y são chamados parcelas

$$\text{Simbolicamente:}\quad \begin{array}{l} + : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ (x, y) \mapsto x + y \end{array}$$

$$\text{onde}\quad x + y = \begin{cases} x,\ \ se\ \ y = 0 \\ x + b^+ = (x+b)^+,\ \ se,\ \ y \neq 0\ \ e\ \ y = b^+\ . \end{cases}$$

Exemplo: Consideremos o par $(3,2)$ pertencente a $\mathbb{N}x\mathbb{N}$; segundo a definição dada, temos:

$$3+2=(3+1^{+})=(3+1)^{+}=(3+0^{+})^{+}=[(3+0)^{+}]^{+}=(3^{+})^{+}=4^{+}=5.$$

Portanto ao par de números naturais $(3,2)$ associamos o número 5. De forma simplificada, representamos por: $3+2=5$.

Note que na definição, se y é diferente de zero, estamos usando o fato que ele é o sucessor de um número b (propriedade que decorre dos axiomas).

Como é definida a multiplicação em $\mathbb{N}$?

A multiplicação é definida como uma função que associa cada par (x,y) de números naturais ao número natural $x.y$. Ela é uma conseqüência da adição de parcelas iguais e é definida por:

$$\cdot : \mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$$
$$(x,y)\mapsto x.y$$

$$x.y=\begin{cases}0, \ \ se\ x=0\ \ e\\ b^{+}y=by+y,\ \ se,\ \ x\neq 0\ \ e\ x=b^{+}\end{cases}$$

Exemplo: $2.3=1^{+}.3=1.3+3=0^{+}.3+3=0.3+3+3=0+3+3=6$.

Propriedades da adição e da multiplicação em $\mathbb{N}$

As propriedades aqui apresentadas não serão demonstradas, uma vez que para demonstrá-las precisaríamos da construção formal do conjunto $\mathbb{N}$. Vamos considerá-las como axiomas.

Propriedades da adição em $\mathbb{N}$

Seja então a adição uma operação que a cada par (x,y) associa o número $x+y$, conforme a definição de "+" dada anteriormente e, x,y e z números naturais. As seguintes propriedades são válidas:

A1) **Propriedade associativa da adição**: $x+(y+z)=(x+y)+z$.

Você já tentou adicionar mais de dois números ao mesmo tempo?

Nós adicionamos os números aos pares. A propriedade associativa além de organizar a operação aos pares, garante que não importa a seqüência que tomamos as parcelas para adicionar.

A2) **Propriedade comutativa da adição**: $x + y = y + x$.

Isto é, podemos trocar as posições dos números que queremos adicionar e o resultado, no caso a soma, não se altera.

A3) **Propriedade do elemento neutro da adição**: Existe um elemento de $\mathbb{N}$ que satisfaz $x + 0 = 0 + x = x$.

Isto é: adicionando o zero a um número natural x qualquer, obtemos como soma o próprio valor de x. Por isso diz-se que o zero é elemento neutro da adição em $\mathbb{N}$.

Por exemplo: $7 + 0 = 7$ (por definição) e $0 + 7 = 7 + 0$ (pela propriedade comutativa). Logo: $0 + 7 = 7 + 0 = 7$.

A4) **Lei do cancelamento da adição**: se x, y e a são naturais, então $x + a = y + a$ se, e somente se, $x = y$.

A5) **Lei do anulamento**: $x + y = 0$ se e somente se $x = y = 0$.

Exercício resolvido

1) Efetue mentalmente as operações dadas abaixo. Em seguida, escreva a expressão numérica usada na resolução mental que você realizou.

a) $765 + 372$

$$[(700 + 300) + (60 + 70) + (5 + 2)] = 1000 + 130 + 7 = 1130 + 7 = 1137$$

Realizamos uma decomposição dos números:

$$765 + 372 = 700 + 60 + 5 + 300 + 70 + 2$$

$$765 + 372 = 700 + 60 + 5 + 300 + 70 + 2 =$$

(propriedade comutativa da adição)

$$= 700 + 300 + 60 + 70 + 5 + 2 =$$

(propriedade associativa da adição)

$$= [(700 + 300) + (60 + 70) + (5 + 2)]$$

$$= [1000 + 130] + 7 = 1130 + 7 = 1137\,.$$

b) $89 + 54$

Podemos usar duas estratégias:

i) $89 + 50 + 4 = (89 + 1) + 50 + 3 =$
$$= [(89 + 1) + 10] + 43 = 100 + 43 = 143$$

ii) $(80 + 50) + (9 + 4) = 130 + 13 = 143$

Propriedades aplicadas: comutativa e associativa da adição.

Escolhemos organizações da expressão numérica que consideramos mais convenientes para o processo cognitivo de efetuar as operações.

Exercício proposto

1) Efetue mentalmente, depois escreva a expressão numérica utilizada na operação e indique as propriedades manipuladas no processo.

a) $5709 + 697$

b) $350 + 528$

c) $9 + 88$

Quando efetuamos uma operação mental, usamos com muita naturalidade as propriedades comutativa e associativa da adição, entre outras. As propriedades são ferramentas que usamos no nosso dia-a-dia e não, somente, componentes da estrutura teórica dos conjuntos numéricos.

Propriedades da multiplicação em $\mathbb{N}$

Sejam x, y e z números naturais, e a multiplicação em $\mathbb{N}$, conforme definida anteriormente.

M1) **Propriedade comutativa da multiplicação:** $x.y = y.x$.

M2) **Propriedade do elemento neutro da multiplicação**: Existe $1 \in \mathbb{N}$ tal que $x.1 = 1.x = x$.

Por exemplo: $8.1 = 1.8 = 8$. Qualquer número natural x multiplicado por 1 tem como produto o próprio número x.

M3) **Propriedade associativa da multiplicação**: $(x.y).z = x.(y.z)$.

Uma vez que temos definidas as operações adição e multiplicação, podemos apresentar a propriedade distributiva. Esta envolve duas operações.

M4) **Propriedade distributiva** (também conhecida por "colocar em evidência"): sejam x, y e z números naturais. Então:

a) $(x + y).z = xz + yz$ (chamada distributiva à direita).

b) $x.(y + z) = xy + xz$ (chamada distributiva à esquerda).

Esta distinção entre distributiva à direita e distributiva à esquerda não é feita em geral. Normalmente tratamos de "propriedade distributiva."

E a subtração e a divisão em $\mathbb{N}$?

A subtração e a divisão não estão definidas como operação em $\mathbb{N}$ para quaisquer dois números do conjunto $\mathbb{N}$.

Vamos ver mais detalhadamente a seguir.

Para entendermos a subtração precisamos, antes, do conceito da Relação de ordem **"$\leq$"** definida em $\mathbb{N}$.

2.1.2 Definição da Relação de ordem

Sejam a e b pertencentes a $\mathbb{N}$; diz-se que $a \leq b$ quando existe um número natural x tal que $b = a + x$.

Observação: você pode pensar neste x como a quantidade que falta ao número a para atingir b.

Definição de diferença: Sejam a e b números naturais e $a \leq b$; dizemos que a diferença $b - a$ é o número x tal que $b = a + x$.

O elemento b é chamado de *subtraendo* e o elemento a é chamado de *minuendo*.

Notemos que a diferença $b - a$ somente está definida em $\mathbb{N}$ se $a \leq b$.

Isto quer dizer que a relação que associa ao par (a,b) o elemento $(b-a)$ não é uma função. Portanto a subtração não é uma operação em $\mathbb{N}$. Por exemplo: não há como calcular $2-3$ no universo dos números naturais.

Também em $\mathbb{N}$, definimos a relação "menor": se a e b são números naturais, a é menor do que b, se, e somente se, existe x diferente de zero, tal que $b = a + x$.

Simbolicamente: $a < b \Leftrightarrow \exists x \neq 0$ tal que $b = a + x$.

E a divisão em $\mathbb{N}$?

Em geral, tratamos a divisão em $\mathbb{N}$ com tal naturalidade que nem nos damos conta que ela não é definida em $\mathbb{N}$.

Nota: Os casos de divisibilidade e o algoritmo da divisão serão vistos no capítulo 3.

Vejamos agora as propriedades da relação "$\leq$".

Propriedades da relação "$\leq$":

A relação "**menor ou igual**" satisfaz as seguintes propriedades:

1. **Reflexiva:** para todo a natural, $a \leq a$.

   Demonstração.

   Sabemos que: se $a \leq b$, existe x pertencente a $\mathbb{N}$, tal que $b = a + x$. Tomemos $x = 0$, e teremos $a = a + 0$, isto é $a \leq a$.

■

2. **Anti-simétrica:** se a,b são naturais tais que $a \leq b$ e $b \leq a$, então $a = b$.

Demonstração.

Hipótese: $a \leq b$ e $b \leq a$.

Tese: $a = b$.

Por hipótese, $a \leq b$ e $b \leq a$. Logo existem x e y naturais tais que $a + x = b$ e $b + y = a$.

Mas,

$$a = a + 0 = b + y = (a + x) + y = a + (x + y) \Rightarrow a + 0 = a + (x + y).$$

Assim, pela lei do cancelamento da adição segue que $x + y = 0$, portanto, $x = y = 0$ (pela lei do anulamento); então segue que $a = b$.

■

3. **Transitiva:** sejam a, b e c números naturais: se $a \leq b$ e $b \leq c$ então $a \leq c$.

Demonstração.

Hipótese: $a \leq b$ e $b \leq c$.

Tese: $a \leq c$.

A partir da hipótese, temos que existem x e y naturais tais que: $b = a + x$ e $c = b + y$.

Logo, $c = b + y = (a + x) + y = a + (x + y)$. Como x e y são naturais $x + y = z$ é natural e $c = a + z$. Portanto (pela definição de $\leq$), $a \leq c$.

■

Definição. Uma relação definida num conjunto S satisfazendo as propriedades: Reflexiva, Anti-simétrica e Transitiva, é chamada uma *"Relação de ordem em S"*.

Acabamos de mostrar que as propriedades Reflexiva, Anti-simétrica e Transitiva são verdadeiras para a relação "**menor ou igual**", definida em $\mathbb{N}$. Logo a relação "menor ou igual" em $\mathbb{N}$ é uma relação de ordem em $\mathbb{N}$. Além disso, é uma relação de ordem *total*, o que significa que dados a e b naturais, $a \leq b$ ou $b \leq a$.

2.2 Conjunto dos números inteiros – uma ampliação dos números naturais

Consideramos a adição $a+x=b$, a, x e b naturais. Em particular, consideremos: $a=6$ e $b=1$. Assim $6+x=1$ ou então $x=1-6$. Como $1<6$, a diferença $1-6$ não está definida no conjunto dos naturais.

Esta dificuldade encontrada, isto é, a necessidade de se efetuar a subtração para quaisquer dois números naturais, foi um dos fatos que impulsionou o estudo que levou à formalização dos números inteiros.

O que se fez?

Ao conjunto dos números naturais acrescentaram-se todas as "diferenças" $b-a$ com b menor do que a, formando um novo conjunto. Os elementos deste novo conjunto serão diferenças $b-a$, com a e b naturais. Observemos as diferenças $b-a$ onde $a,\ b \in \mathbb{N}$:

0-0	0-1	0-2	...	0-a
1-0	1-1	1-2	...	1-a
2-0	2-1	2-2	...	2-a
3-0	3-1	3-2	...	3-a
⋮	⋮	⋮	...	⋮
b-0	b-1	b-2	...	b-a
⋮	⋮	⋮	...	⋮

Observe que algumas diferenças se repetem: 1-0; 2-1;... por exemplo. A primeira coluna representa o próprio conjunto $\mathbb{N}$ e a primeira linha gera os opostos dos elementos de $\mathbb{N}$, os números negativos. As outras diferenças todas são repetições.

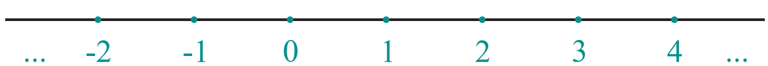
O conjunto das diferenças: $0-1$; $1-2$; $2-3$; $3-4$;… é representado pelo inteiro -1 (notação inspirada na diferença $0-1$).

Analogamente, o conjunto das diferenças: $0-2$; $1-3$; $2-4$;… é representado por -2. Assim sucessivamente, para cada seqüência de diferenças, associamos um elemento do conjunto dos inteiros.

Denotamos o novo conjunto por $\mathbb{Z}$ e o representamos por:

$$\mathbb{Z}=\{\ldots,-5,-4,-3,-2,-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ldots\}.$$

Geometricamente, representamos o conjunto dos números inteiros por pontos em uma reta; por exemplo:



Como $\mathbb{Z}$ é uma extensão de $\mathbb{N}$, o conjunto $\mathbb{N}$ está contido em $\mathbb{Z}$.

A representação de $\mathbb{Z}$ como pontos de uma reta facilita a compreensão das operações adição e subtração em $\mathbb{Z}$, que veremos a seguir.

Vejamos alguns subconjuntos de $\mathbb{Z}$, com sua respectiva representação, os quais são destacados em diferentes situações de aprendizagem:

- Inteiros não negativos: $\mathbb{Z}_+=\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ldots\}$.
- Inteiros positivos: $\mathbb{Z}_+^*=\mathbb{Z}_+-\{0\}=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ldots\}$.
- Inteiros não positivos: $\mathbb{Z}_-=\{0,-1,-2,-3,-4,-5,\ldots\}$.
- Inteiros negativos: $\mathbb{Z}_-^*=\mathbb{Z}_--\{0\}=\{-1,-2,-3,-4,-5,\ldots\}$.

2.2.1 Operações em $\mathbb{Z}$

Em $\mathbb{Z}$ estão definidas as operações de adição, a multiplicação e a subtração.

Adição:

$$+:\mathbb{Z}x\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$$
$$(a,b)\mapsto a+b$$

$a+b$ é a soma ou total e a e b são as parcelas.

Propriedades da adição em $\mathbb{Z}$

Apresentaremos, a seguir, as propriedades da adição em $\mathbb{Z}$; como fizemos para os naturais, elas serão abordadas como axiomas (isto é, serão aceitas sem demonstração).

A1) **Propriedade associativa da adição**:

Para todos a, b e c inteiros, temos $a+(b+c)=(a+b)+c$. Você alguma vez já refletiu sobre isto? Você somente pode efetuar uma operação de adição com mais de duas parcelas porque existe a propriedade associativa. Ou seja, cada vez que você efetua uma operação de adição com mais de duas parcelas você está usando a propriedade associativa da adição.

Assim, esta propriedade é importante pois permite somar mais de dois números.

Com esta propriedade, também descobrimos que basta sabermos somar a um número a inteiro qualquer o número 1 ou -1, para sermos capazes de resolver qualquer adição. Vejamos por exemplo:

a) $3+2=3+(1+1)=(3+1)+1=4+1=5$.

b) $3+(-2)=3+[(-1)+(-1)]=[3+(-1)]+(-1)=2+(-1)=1$.

A2) **Propriedade comutativa da adição:**

Para todos a, b pertencentes a $\mathbb{Z}$ temos $a+b=b+a$.

Lembre que "juntar" nem sempre é uma operação comutativa! Você poderia dar um exemplo onde a comutatividade não funciona? Pense, por exemplo, na Química.

A3) **Propriedade da Existência do elemento neutro:**

Existe um único elemento em $\mathbb{Z}$, denominado zero e denotado por 0, tal que $a+0=a$ para todo a pertencente a $\mathbb{Z}$.

A4) **Propriedade da Existência do elemento oposto:**

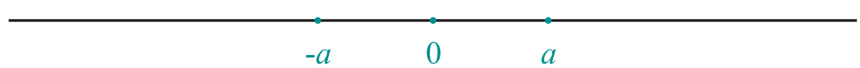
Para cada inteiro a, existe um único inteiro b tal que $a+b=0$.

Este número b é chamado "*oposto de* a" e denotado por $-a$.

Observe que o oposto de a é o único inteiro que satisfaz a equação $a + x = 0$.

Não confunda a notação $-a$ com o "sinal de menos". Poderíamos denotar o oposto por qualquer outro símbolo, por exemplo, a^*. A notação $-a$ é usada por ser mais conveniente.

Geometricamente, o oposto de um número inteiro a é aquele que, na reta, ocupa posição simétrica em relação ao zero.



a e seu oposto estão à mesma distância do zero, em sentidos opostos.

Exemplo: O oposto de -3 é 3 e vice versa.

Multiplicação em $\mathbb{Z}$

A multiplicação em $\mathbb{Z}$ deriva da adição em $\mathbb{Z}$ (soma de parcelas iguais).

Vejamos por exemplo: $4 + 4 + 4 = 3\text{x}4$

$$2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 5\text{x}2.$$

Definimos a multiplicação em $\mathbb{Z}$ pela função:

$$\cdot : \mathbb{Z}\text{x}\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$$
$$(a, b) \mapsto a.b$$

onde $a.b$ é o produto e a e b são os fatores.

Propriedades da multiplicação

M1) **Propriedade associativa da multiplicação:**

Para todos a, b e c inteiros temos $(a.b).c = a.(b.c)$.

Com esta propriedade, podemos multiplicar mais de dois números. Ela é útil também para a notação de potências, que é um caso de multiplicação de fatores iguais.

Por exemplo: $3.3.3.3.3 = 3^5$.

M2) **Propriedade comutativa da multiplicação:**

Para todos a, b inteiros, $a.b = b.a$.

M3) **Propriedade do elemento neutro da multiplicação:**

Existe um único elemento em $\mathbb{Z}$, denotado por 1, tal que $1.a = a$ para todo a inteiro.

D) **Propriedade distributiva:**

Para todos a, b e c inteiros, temos:

1) $a.(b+c) = a.b + a.c$; (distributiva a direita).

2) $(b+c).a = b.a + c.a$; (distributiva a esquerda).

Como já foi visto em $\mathbb{N}$, esta propriedade é também conhecida como "colocar em evidência". Por exemplo:

$$2.10^2 + 5.10 = 10.(2.10 + 5).$$

CM) **Propriedade do cancelamento da multiplicação:**

Para todos a, b e c inteiros, com $c \neq 0$, temos que,

$$\text{se } a.c = b.c \text{ então } a = b.$$

Vamos estudar, agora, outras propriedades importantes em $\mathbb{Z}$. Tenha sempre em mente que todas estas propriedades das operações nos conjuntos dos números naturais e inteiros serão úteis nos próximos capítulos: elas constituem a "caixa de ferramentas" necessária para a construção do conceito de divisibilidade do capítulo 3 e todas as suas conseqüências.

Todas as outras propriedades das operações em $\mathbb{Z}$ derivam destas, isto é, todas as outras propriedades podem ser provadas a partir das propriedades A1, A2, A3, A4, M1, M2, M3, D e CM, como será demonstrado mais adiante.

P1) **Lei do cancelamento da adição: Para todos inteiros** a, b e c, se $a+c=b+c$ então $a=b$.

Demonstração.

Hipótese: a, b e c são números inteiros e $a+c=b+c$.

Tese: $a=b$.

Sejam a, b e c inteiros e a $a+c=b+c$. Como c pertence a $\mathbb{Z}$, existe o oposto de c, ou seja, existe o número inteiro $-c$. Somando o oposto de c aos dois membros da igualdade $a+c=b+c$, obtemos:

$$(a+c)+(-c)=(b+c)+(-c),$$

Usando a propriedade associativa A1, obtemos

$$a+[c+(-c)]=b+[c+(-c)];$$

como $c+(-c)=0$ (pela condição do oposto), temos $a+0=b+0$ e pela propriedade do elemento neutro (A3), segue que $a=b$.

■

P2) **Para todo inteiro** a, **tem-se** $a.0=0.a=0$.

Demonstração.

Hipótese: a é um número inteiro qualquer.

Tese: $a.0=0.a=0$.

De fato: seja a um número inteiro. Pela propriedade do elemento neutro da adição temos que:

$$0+a.0=a.0=a.(0+0),$$

Mas pela propriedade distributiva, $a.(0+0)=a.0+a.0$. Logo,

$$0+a.0=a.0=a.(0+0)=a.0+a.0.$$

Agora, aplicando a propriedade do cancelamento da adição temos: $0=a.0$. De modo análogo prova-se que $0.a=0$.

■

P3) **Para todo inteiro** a, **tem-se** $(-1).a=-a$.

Demonstração.

Hipótese: a é um número inteiro qualquer.

Tese: $(-1).a = -a$.

Seja a um número inteiro. Sabemos que o oposto de a é o único inteiro que satisfaz a equação $a + x = 0$. Como $0.a = 0$ (por P_2), segue que

$$0 = 0.a = [1 + (-1)].a = 1.a + (-1).a = a + (-1).a ,$$

Conseqüentemente, o oposto de a é $(-1).a$, ou seja $-a = (-1).a$.

■

P4) **Para todos a, b inteiros, se $a.b = 0$ então $a = 0$ ou $b = 0$.**

Demonstração.

Para provar um "*ou*" numa proposição do tipo *Se p então (q ou r)*, supomos que q não ocorra (negamos q) e concluímos que r ocorre.

Hipótese: a, b inteiros e $a.b = 0$.

Tese: $a = 0$ ou $b = 0$.

Sejam $a\, e\, b$ inteiros e $a.b = 0$ (hipótese). Então, por P2, temos $a.b = a.0$ e $a.b = b.0$.

Se $a \neq 0, e\ a.b = a.0$, pela lei do cancelamento da multiplicação, temos $b = 0$.

Se $b \neq 0, e\ a.b = 0$, então $a.b = 0.b$ e pela lei do cancelamento da multiplicação, $a = 0$.

Logo, sempre que um fator for não nulo, o outro será, necessariamente, nulo.

■

Subtração em $\mathbb{Z}$

Dados $a\ e\ b$ pertencentes a $\mathbb{Z}$, definimos a diferença $a - b$ por

$$a - b = a + (-b).$$

Note que "subtrair" é "somar o oposto".

Assim, a **subtração** em $\mathbb{Z}$ é uma função que associa cada par (a, b) ao número $a + (-b)$, ou seja:

$$\begin{aligned} -: \mathbb{Z} \mathrm{x} \mathbb{Z} &\to \mathbb{Z} \\ (a, b) &\mapsto a + (-b) \end{aligned}$$

A subtração não é associativa, nem comutativa, nem tem elemento neutro.

2.2.2 Proposições em $\mathbb{Z}$

Os resultados a seguir, que chamaremos "proposições", decorrem das operações e das propriedades já demonstradas.

Proposição 1. *Para todos* a, b *inteiros tem-se que* $(a-b)+b=a$.

Demonstração.

Hipótese: a, b são números inteiros

Tese: $(a-b)+b=a$.

Sejam a e b inteiros. Pela definição de subtração temos que

$$(a-b)+b=[a+(-b)]+b.$$

Mas $[a+(-b)]+b=a+[(-b)+b]$ pela propriedade associativa da adição; assim, $a+[(-b)+b]=a+0=a$ (propriedade do oposto e propriedade do elemento neutro da adição). Logo $(a-b)+b=a$.

■

Proposição 2. *O oposto da soma de dois inteiros é igual à soma dos opostos dos dois inteiros. Ou seja, se* a *e* b *são números inteiros,*

$$-(a+b)=(-a)+(-b).$$

Demonstração.

Hipótese: a e b são números inteiros.

Tese: $-(a+b)=(-a)+(-b)$.

De fato, usando propriedades já conhecidas temos que:

$$-(a+b)=(-1).(a+b)=(-1).a+(-1).b=(-a)+(-b).$$

(na primeira igualdade usamos P3, na segunda igualdade usamos a propriedade distributiva e, na terceira, usamos novamente P3).

■

Para provar uma igualdade, uma estratégia é sair de um membro da igualdade e chegar ao outro membro, por meio de deduções lógicas e fazendo uso de resultados teóricos. Aplicaremos esta estratégia nesta demonstração.

Proposição 3. *O oposto do produto de dois números inteiros é igual a um dos números multiplicado pelo oposto do outro. Ou seja:*

$$-(a.b)=(-a).b=a.(-b).$$

Faremos a demonstração em duas partes: primeiramente mostraremos que (-a) b = -(ab) e depois que a(-b) = -(ab); com isto teremos provado a igualdade -(ab) = (-a)b = a(-b).

Demonstração.

Mostremos que $(-a).b = -(a.b)$. De fato,

$$(-a).b = [(-1).a].b = (-1).(a.b) = -(ab).$$

Na primeira e terceira igualdades usamos P3 e, na segunda igualdade, usamos a propriedade associativa da multiplicação.

De forma análoga, prova-se que : $a.(-b) = -(a.b)$.

Assim, temos que: $(-a).b = a.(-b) = -(a.b)$.

■

Proposição 4. *O oposto do oposto de um número inteiro é o próprio número ou seja,* $-(-a) = a$.

Demonstração.

Hipótese: a é um número inteiro.

Tese: $-(-a) = a$.

De fato. Seja a um número inteiro. Sabemos que o oposto de $-a$ é o único inteiro x que satisfaz a equação $-a + x = 0$. Como $-a + a = 0$, segue que o oposto de $-a$ *é* a, ou seja, $-(-a) = a$.

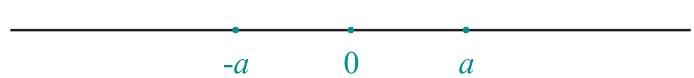
■

Exemplos: Seja a um número inteiro qualquer.

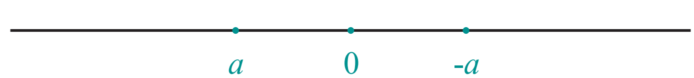
- se a é maior do que zero, o oposto de $a, -a$, é menor do que zero; ou seja: $-a$ é um inteiro negativo.
- se a é menor do que zero, o oposto de $a, -a$, é maior do que zero; ou seja: $-a$ é um inteiro positivo.

Vejamos sobre a reta numérica:

1) se $a > 0$,



2) se $a < 0$,



Por exemplo: Se $a=-2$, temos que $-2+2=0$. Logo o oposto de -2 *é* 2, ou seja, $-(-2)=2$.

Proposição 5. *O produto do oposto de* a *pelo oposto de* b *é o produto* $a.b$.

Demonstração.

Hipótese: a *e* b são inteiros, $-a$ é o oposto de a e $(-b)$ é o oposto de b.

Tese: $(-a).(-b)=a.b$.

Usando a proposição 3 duas vezes consecutivas temos que:

$$(-a).(-b)=-[a.(-b)]=-(-ab).$$

Mas, pela proposição 4, $-(-ab)=a.b$. Logo, $(-a).(-b)=a.b$.

■

Estabelecido P4 como axioma, pode-se provar a "lei do cancelamento para a multiplicação em $\mathbb{Z}$". Agora já temos elementos para efetivar essa demonstração.

Proposição 6. *Sejam* a,b e c *inteiros e* $c\neq 0$. *Se* $a.c=b.c$ *então* $a=b$.

Demonstração.

Hipótese: a,b,c inteiros, $ac=bc$ e $c\neq 0$, $ac=bc$.

Tese: $a=b$.

Sejam a,b e c inteiros tais que $ac=bc$ *e* $c\neq 0$; queremos provar que $a=b$. De fato, somando aos dois membros da igualdade $ac=bc$ o termo $(-bc)$, temos:

$$ac+(-bc)=bc+(-bc).$$

Como $bc+(-bc)=0$, podemos escrever

$$ac+(-bc)=bc+(-bc)=0.$$

Pela proposição 3, temos que $(-bc)=(-b).c$; substituindo esse resultado na igualdade acima e usando a propriedade distributiva obtemos $[a+(-b)]c=0$; como $c\neq 0$, segue por P4 que $a+(-b)=0$. Então $a=-(-b)=b$. Pela proposição 4, $a=b$.

■

Proposição 7. *O oposto de* $a-b$ *é* $b-a$*, ou seja,* $-(a-b)=b-a$.

Demonstração.

Hipótese: a e b são números inteiros.

Tese: $-(a-b)=b-a$.

De fato,

$$(a-b)+(b-a)=[a+(-b)]+[b+(-a)]=$$

$$=a+[(-b)+b]+(-a)=a+0+(-a)=a+(-a)=0.$$

Logo, pela propriedade do oposto, segue que o oposto de $(a-b)$ é $(b-a)$, ou seja,

$$-(a-b)=b-a.$$

■

Proposição 8. *Para todos* a,b *e* c *pertencentes a* $\mathbb{Z}$, $a.(b-c)=ab-ac$.

Demonstração.

De fato:

$$a.(b-c)=a[b+(-c)]=a.b+a.(-c)=ab+(-ac)=ab-ac.$$

■

Na primeira igualdade, usamos a definição de subtração, na segunda igualdade, usamos a propriedade distributiva, na terceira igualdade, usamos a Proposição 3 e, na quarta igualdade, usamos a definição de subtração.

Exercício proposto

2) Resolva a equação seguinte, explicando cada passo

$$x+45=3x-7.$$

2.2.3 Relação de ordem em $\mathbb{Z}$

Vamos retomar os subconjuntos de $\mathbb{Z}$:

- $\mathbb{Z}_+=\{0,1,2,3,4,5,\ldots\}$, inteiros não negativos ($\mathbb{N}$).
- $\mathbb{Z}_+^*=\mathbb{Z}_+-\{0\}$, inteiros positivos.

- $\mathbb{Z}_- = \{0, -1, -2, -3, -4, -5, \ldots\}$, inteiros não positivos.
- $\mathbb{Z}_-^* = \mathbb{Z}_- - \{0\}$, inteiros negativos.

Relação de ordem "menor ou igual" em $\mathbb{Z}$

Definição. Dados a e b inteiros, dizemos que "*a é menor ou igual a b*", se e somente se $(b-a)$ pertence a $\mathbb{Z}_+$.

Em linguagem simbólica escrevemos:

$$a \le b \Leftrightarrow (b-a) \in \mathbb{Z}_+ .$$

Observação 1. Pode-se ler também: "*b é maior ou igual a a*" e denota-se por $b \ge a$.

Habitualmente usamos a expressão "menor ou igual a" mas a expressão gramaticamente correta seria "menor do que ou igual a".

Observação 2. "a é menor ou igual a b", se e somente se existe $x \in \mathbb{Z}_+$ tal que $b = a + x$.

De fato, tomemos $x = (b-a) \in \mathbb{Z}_+$. Então,

$$a + x = a + (b-a) = a + [b + (-a)] = b + [a + (-a)] = b + 0 = b .$$

Reciprocamente, se existe $x \in \mathbb{Z}_+$ tal que $b = a + x$, teremos que $x = (b-a) \in \mathbb{Z}_+$. Por definição, teremos $a \le b$.

Propriedades da relação "$\le$" em $\mathbb{Z}$

Sejam a, b e $c \in \mathbb{Z}$.

O1) **Propriedade Reflexiva:** Para todo $a \in \mathbb{Z}$ tem-se $a \le a$.

Demonstração.

Hipótese: $a \in \mathbb{Z}$.

Tese: $a \le a$.

De fato, $a - a = 0 \in \mathbb{Z}_+ \Leftrightarrow a \le a$.

■

O2) **Propriedade anti-simétrica:** Para todos $a, b \in \mathbb{Z}$, *se* $a \leq b$ *e* $b \leq a$ *então* $a = b$.

Demonstração.

Hipótese: $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \leq b$ e $b \leq a$.

Tese: $a = b$.

Por hipótese, temos que:

i) $a \leq b \Leftrightarrow b - a \in \mathbb{Z}_+$

ii) $b \leq a \Leftrightarrow a - b \in \mathbb{Z}_+$

Sabemos que $-(a-b)+(a-b)=0$ (Proposição 7) e que $a-b$ e seu oposto estão em $\mathbb{Z}_+$ (hipótese). Pela lei do anulamento isto só acontece se $a-b=0$, donde (pela definição de subtração) $a+(-b)=0$. Somando b em ambos os membros da igualdade temos que $a+(-b)+b=0+b$ e, aplicando as propriedades do elemento neutro da adição e do elemento oposto, obtemos $a+0=b$. Portanto: $a=b$.

■

O3) **Propriedade transitiva:** Para todos a, b *e* $c \in \mathbb{Z}$, *se* $a \leq b$ *e* $b \leq c$ *então* $a \leq c$.

Demonstração.

Hipótese: a, b e $c \in \mathbb{Z}$; $a \leq b$ e $b \leq c$.

Tese: $a \leq c$.

De fato: Por hipótese:

$a \leq b \Leftrightarrow b - a \in \mathbb{Z}_+$

$b \leq c \Leftrightarrow c - b \in \mathbb{Z}_+$.

Logo: $(b-a)+(c-b) \in \mathbb{Z}_+$, portanto:

$$c - a = c - a + (b - b) = [b + (-a)] + [c + (-b)] = [(b - a) + (c - b)] \in \mathbb{Z}_+$$

donde, por definição de "menor ou igual", temos $a \leq c$.

■

As propriedades reflexiva, anti-simétrica e transitiva caracterizam a relação "$\leq$" como uma relação de ordem em $\mathbb{Z}$.

Definição. Sejam a e b inteiros. Dizemos que "*a é menor do que b*" ou que "*b é maior do que a*" se e somente se $b-a\in\mathbb{Z}_+^*$. Em linguagem simbólica:

$$a<b \Leftrightarrow b-a\in\mathbb{Z}_+^* \text{ e } b>a \Leftrightarrow b-a\in\mathbb{Z}_+^*.$$

Observações importantes: Considerando a um número inteiro, temos:

1) $a>0 \Leftrightarrow 0<a \Leftrightarrow a-0\in\mathbb{Z}_+^* \Leftrightarrow -(-a)\in\mathbb{Z}_+^* \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 0+[-(-a)]\in\mathbb{Z}_+^* \Leftrightarrow 0-(-a)\in\mathbb{Z}_+^* \Leftrightarrow -(-a)\in\mathbb{Z}_+^* \Leftrightarrow -a<0$

   Ou seja, $-a\in\mathbb{Z}_-^*$

2) $a<0 \Leftrightarrow a=-(-a)<0 \overset{Por\,1}{\Leftrightarrow} -a>0.$

Proposição 9. *Sejam a,b e c números inteiros. Então*

i) $a\le b \Leftrightarrow a+c\le b+c$, *para todo* $c\in\mathbb{Z}$

ii) $a\le b$ *e* $c>0$ *então* $ac\le bc$

iii) $a\le b$ *e* $c\le 0$ *então* $bc\le ac$.

Demonstração de (i).

Por hipótese, $a\le b \Leftrightarrow b-a\in\mathbb{Z}_+$. Agora notemos que:

$$(b+c)-(a+c)=b+c+[-(a+c)]=(b+c)+(-a)+(-c)=[b+(-a)]+[c+(-c)]=$$
$$=(b-a)+0=(b-a)\in\mathbb{Z}_+$$

Assim, $b+c\ge a+c$.

Reciprocamente se $(b+c)-(a+c)\in\mathbb{Z}_+$ e como $(b+c)-(a+c)=b-a$, temos que $(b-a)\in\mathbb{Z}_+$. Logo $a\le b$.

■

Demonstração de (ii).

Por hipótese $a\le b$ *e* $c\ge 0$; *então* $b-a\in\mathbb{Z}_+$ *e* $c\in\mathbb{Z}_+$.

Logo, $bc-ac=(b-a).c\in\mathbb{Z}_+$ (pois o produto de dois números naturais resulta um número natural) e portanto $ac\le bc$.

■

Demonstração de (iii).

Por hipótese, se $a \leq b$ *então* $b - a \in \mathbb{Z}_+$. Como $c \leq 0$ tem-se que $c \in \mathbb{Z}_-$, $-c \in \mathbb{Z}_+$

Logo $(b-a).(-c) = b(-c) - a(-c) \in \mathbb{Z}_+$. Assim, usando as propriedade convenientes temos: $-bc + ac \in \mathbb{Z}_+$, ou seja,

$$ac - bc \in \mathbb{Z}_+.$$

Portanto, $bc \leq ac$.

■

Proposição 10. *Sejam a e b números inteiros. Se* $a \leq b$ *então* $(-b) \leq (-a)$.

Demonstração.

Sejam a *e* b inteiros tais que $a \leq b$; somando $-b$ em ambos os membros da desigualdade temos:

$a + (-b) \leq b + (-b)$.

Assim, $a + (-b) \leq 0$. Somando $-a$ em ambos os membros desta última desigualdade temos $-a + a + (-b) \leq 0 + (-a)$. Como $-a + a = 0$, *e* $0 + (-a) = -a$, podemos concluir:

$$(-b) \leq (-a).$$

■

Proposição 11. *(Regra de sinais) Sejam* a *e* b *números inteiros. Então,*

i) *Se* $a \leq 0$ *e* $0 \leq b$ *então* $ab \leq 0$

ii) *Se* $a \leq 0$ *e* $b \leq 0$ *então* $ab \geq 0$

Demonstração de (i).

Se $a \leq 0$ *e* $0 \leq b$ *então* $a \in \mathbb{Z}_-$ *e* $b \in \mathbb{Z}_{+;}$ também $(-a) \in \mathbb{Z}_+$.

Logo $(-a)b \in \mathbb{Z}_+$ *e* $-(ab) \in \mathbb{Z}_+$. Pela propriedade do elemento neutro da adição temos:

$0 + [-(ab)] = 0 - ab \in \mathbb{Z}_+$. Portanto $ab \leq 0$.

■

Demonstração de (ii).

Se $a \le 0$ *e* $b \le 0$ *então* $0 - a \in \mathbb{Z}_+$ *e* $0 - b \in \mathbb{Z}_+$; assim, $-a \in \mathbb{Z}_+$ *e* $-b \in \mathbb{Z}_+$. Portanto $(-a).(-b) \in \mathbb{Z}_+$ *e* $a.b \in \mathbb{Z}_+$. Logo, $0 \le a.b$.

■

Observação: Se $a \ge 0$ *e* $b \ge 0$, ou seja, se a *e* $b \in \mathbb{Z}_+$ então a *e* b pertencem a $\mathbb{N}$; mas $\mathbb{N}$ é fechado em relação à multiplicação, isto é, o produto de quaisquer dois números naturais é um número natural. Então $ab \ge 0$.

Proposição 12. *(Lei da tricotomia) Dado* $a \in \mathbb{Z}$, *uma e somente uma das opções ocorre:*

i) $a > 0$ ou

ii) $a = 0$ ou

iii) $a < 0$ (ou exclusivo).

Proposição 13. *Sejam* a, b *e* c *números inteiros. Se* $a \le b$ *e* $c \le d$ *então* $a + c \le b + d$.

Demonstração. Faça como exercício.

Exercício proposto

3) Resolva a inequação seguinte, explicando cada passo:

$$2x - 22 \le 3x + 7.$$

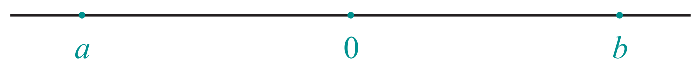
2.2.4 Valor absoluto em $\mathbb{Z}$

Definição. Seja $a \in \mathbb{Z}$. Definimos o valor absoluto de a, ou módulo de a, como:

$$|a| = \begin{cases} a \text{ se } 0 \le a & \text{e} \\ \text{-}a \text{ se } a < 0 \end{cases}$$

Por exemplo: $|-17| = -(-17),$ *pois* $-17 < 0; |157| = 157,$ *pois* $157 > 0$.

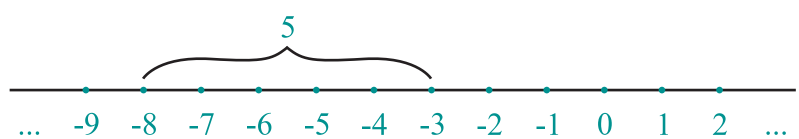
Observação 1. o valor absoluto de um número inteiro é a distância dele até a origem.



Para a e b como acima temos $|b| = b$ e $|a| = -a$.

Observação 2. $|a-b|$ é a distância de a até b . Exemplos:

$$|3-5| = |-2| = 2; \ |-8-(-3)| = |-5| = 5; \ |2-(-1)| = 3$$



Propriedades do valor absoluto

Propriedade 1. $0 \leq |a|$, para todo $a \in \mathbb{Z}$; também $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$.

Demonstração.

Se $0 \leq a$ temos que , então $0 \leq a = |a|$. Também, temos que,

$$|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0 \ ou \ -a = 0 \Leftrightarrow a = 0 .$$

Se $a < 0$, $|a| = -a$. Pela proposição 9, item (iii), se $a < 0$ então $-a > 0$. Portanto , $|a| = -a > 0$.

■

Propriedade 2. Para todo a inteiro, tem-se $|a| = |-a|$.

Demonstração.

Se $0 \leq a$ temos por definição que $|a| = a$; além disso, $-a \leq 0$. Assim, $|-a| = -(-a) = a$. Portanto, $|a| = a = |-a|$.

Se $a < 0$, temos que $|a| = -a$ e $0 \leq -a$; portanto, $|-a| = -a$. Assim, $|a| = -a = |-a|$.

■

Propriedade 3. Para todo a inteiro tem-se $-|a| \leq a \leq |a|$.

Demonstração.

Se $0 \leq a$ então, $|a| = a \geq 0$. Multiplicando por (-1) , $|a| = a \geq 0$, obtemos que

$-|a| = -a \leq 0$. Portanto, $-|a| = -a \leq 0 \leq a = |a|$, ou seja, $-|a| \leq 0 \leq |a|$.

Se $a < 0$, então $|a| = -a,\ 0 < -a,\ e\ -|a| = a$. Portanto

$$-|a| = a < 0 < -a = |a|.$$

■

Propriedade 4. $|a.b| = |a|.|b|$, para todos $a\ e\ b$ inteiros.

Demonstração.

Se $a \geq 0,\ b \geq 0$ então $ab \geq 0$. Logo $|ab| = ab = |a|.|b|$

Se $a \geq 0,\ b \leq 0,\ |a| = a,\ |b| = -b\ e\ ab \leq 0$.

Assim, $|a|.|b| = a.(-b) = -(ab)$. Mas,

$|a.b| = -(ab)$. Portanto: $|a.b| = |a|.|b|$.

Se $a \leq 0,\ b \leq 0$ temos $|a| = -a.\ |b| = -b\ e\ 0 \leq ab$.

Também $|a|.\ |b| = (-a).(-b) = ab$.

Mas, $|ab| = ab$. Logo $|ab| = |a|.|b|$.

■

Propriedade 5 (Desigualdade triangular). $|a+b| \leq |a| + |b|$, para todos $a\ e\ b$ inteiros.

Demonstração.

Observemos que $a \leq |a|$ e $b \leq |b|$; logo, pela Proposição 13, $a + b \leq |a| + |b|$. De forma análoga, temos que $(-a)+(-b) \leq |-a| + |-b|$. Agora, consideremos dois casos:

i) Se $(a+b) < 0$ então

$$|a+b| = -(a+b) = -a + (-b) \leq |-a| + |-b| = |a| + |b|.$$

A última igualdade segue da Propriedade 2 de valor absoluto.

ii) Se $(a+b) > 0$ então $|a+b| = a + b \leq |a| + |b|$.

Portanto por i) e ii) temos que: $|a+b| \leq |a| + |b|$.

■

Agora que já conhecemos as operações e principais propriedades dos conjuntos dos números naturais e inteiros, vamos conhecer mais uma característica de cada um destes conjuntos.

2.2.5 Princípio da Boa ordem em $\mathbb{N}$

O que é este princípio?

O princípio da boa ordem afirma que: "Todo subconjunto não vazio de números naturais possui um menor elemento".

Ou ainda, se S é um subconjunto não vazio de $\mathbb{N}$, então S tem um menor elemento.

Exemplo: Considere os subconjuntos de $\mathbb{N}$, $A \subset \mathbb{N}$, $B \subset \mathbb{N}$ e $C \subset \mathbb{N}$:

$$A = \{2, 3, 4, \ldots\}$$

$$B = \{8, 12, 16, 20\}$$

$$C = \{215, 315, 415, 515, \ldots\}$$

- O menor elemento de A $é$ 2.
- O menor elemento de B $é$ 8.
- O menor elemento de C $é$ 215.

Definição. Dizemos que a é o menor elemento de um subconjunto não vazio S de $\mathbb{N}$ quando para todo b pertencente a S, tem-se que a é menor ou igual a b.

As duas proposições abaixo são conseqüências do Princípio da Boa Ordem (PBO):

Proposição 14. *Se* $a \in \mathbb{N}$ e $0 \le a \le 1$, *então* $a = 0$ *ou* $a = 1$.

Demonstração.

Vamos fazer a demonstração por contradição. Suponhamos que exista um número inteiro a diferente de zero e diferente de um nestas condições, isto é, $0 \le a \le 1$. Então o conjunto $S = \{x \in \mathbb{Z} : 0 < x < 1\}$ é não vazio e é um subconjunto de $\mathbb{N}$. Pelo PBO existe $m \in S$ tal que m é o menor elemento de S, ou seja, $m \le x$ para todo $x \in S$. Como $m \in S$, temos que $m > 0$ e $m < 1$.

Multiplicando ambos os membros da última desigualdade por m, temos $m.m < 1.m$, isto é, $0 < m^2 < m$. Como $m < 1$, podemos escrever:

$0 < m^2 < m < 1$, e daí $0 < m^2 < 1$. Mas, se ocorre esta desigualdade, podemos concluir que $m^2 \in S$.

Assim, $m^2 \in S$ *e* $m^2 < m$, sendo m o menor elemento de S! Isto é uma contradição pois m é estritamente menor do que todo elemento de S. Logo, como nossa suposição levou-nos a uma contradição, o fato que havíamos suposto não pode ocorrer. Isto significa que não é possível existir um número inteiro a tal que $0 < a < 1$. Assim, se ocorrer $0 \leq a \leq 1$ deve necessariamente ocorrer a igualdade, ou seja, $a = 0$ *ou* $a = 1$.

■

Proposição 15. *Se* $a, b \in \mathbb{N}^*$, *existe* $n \in \mathbb{N}^*$ *tal que* $na > b$.

Exemplo: Note que se $a > b$, qualquer n serve; o mesmo acontece se $a = b$. Vejamos um exemplo para $a < b$.

Se $a = 2$ *e* $b = 7$, existe um $n = 4$ tal que $2.4 = 8 > 7$.

Note que n não é único.

Demonstração da Proposição 15.

Hipótese: $a, b \in \mathbb{N}^*$.

Tese: existe $n \in \mathbb{N}^*$ tal que $na > b$.

Sejam a *e* $b \in \mathbb{N}^*$; devemos exibir um número natural n tal que $na > b$.

De fato: seja $S = \{m \in \mathbb{N}^* : ma > b\}$. Note que $S \neq \varnothing$, pois $(b+1) \in S$ desde que

$$(b+1)a = (ba + a) > b.$$

Logo, pelo Princípio da Boa Ordem, existe um $n \in S$ tal que $n \leq x$ para todo $x \in S$.

Ou seja, existe $n \in \mathbb{N}^*$ tal que $na > b$ *e* $n \leq m$ para todo $m \in \mathbb{N}^*$ tal que $ma > b$.

Conseguimos assim exibir um número n que satisfaz $na > b$.

■

2.2.6 Princípio do Menor Inteiro em $\mathbb{Z}$ (PMI)

Para enunciar o PMI em $\mathbb{Z}$ vamos precisar de algumas definições:

Definição. (conjunto limitado inferiormente) Seja A um subconjunto de números inteiros. Dizemos que A é *limitado inferiormente* quando existe um inteiro k, tal que $k \le a$ para todo a pertencente a A.

Definição. (elemento mínimo) Seja a_0 um elemento pertencente ao conjunto A. Dizemos que a_0 *é mínimo de* A quando $a_0 \le a$, para todo $a \in A$.

Denotamos o mínimo de A por $\min A = a_0$.

Pode-se provar que o elemento mínimo é único.

Princípio do Menor Inteiro em $\mathbb{Z}$: Se $A \subset \mathbb{Z}$, $A \ne \varnothing$ e A é limitado inferiormente, então A possui **mínimo**.

Conseqüências:

1) $a-1$ é o maior inteiro menor do que a, para todo $a \in \mathbb{Z}$.

2) Para todos $a,b \in \mathbb{Z}$, se $a \le b \le a+1$, então $b = a$ *ou* $b = a+1$.

O primeiro resultado mostra que, no conjunto dos números inteiros, é possível identificar qual o maior número menor que um número dado. Por exemplo, para $a = 78$, $a-1 = 77$ é o número "mais próximo" de 78 e menor do que ele. Outra conseqüência deste resultado é que, se a *e* b são inteiros e $a < b$, então $a \le b-1$. O segundo resultado mostra que entre dois inteiros consecutivos não há número inteiro algum; por exemplo, não há inteiros entre 54 e seu sucessor, $54+1=55$.

Exercícios propostos

4) Explique qual propriedade ou definição foi usada em cada passagem da demonstração abaixo: "Para todos a,b *e* c inteiros tem-se: $a(b-c) = ab - ac$".

Demonstração.

$$a.(b-c) = a.[b+(-c)] = a.b + a.(-c) = a.b + [-(a.c)] = ab - ac.$$

5) Determine um número natural que, quando multiplicado por 21, resulta um número formado apenas com algarismos 4.

6) Seja A um subconjunto limitado inferiormente, e não vazio de $\mathbb{N}$. Mostre que o menor elemento de A é único.

7) Mostre que: Para todos a,b pertencentes a $\mathbb{N}$, se $a \leq b \leq a+1$, então $b = a$ ou $b = a+1$. (Sugestão: Use a Proposição 14)

8) Prove a Proposição 13: *Se* $x < y$ *e* $z < t$ *então* $x + z < y + t$.

9) Prove que se $0 < a \leq b$ *e* $0 < x < y$ *então* $0 < ax < by$.

Resumo

Neste capítulo, apresentamos os conjuntos dos números naturais e dos números inteiros (chamados conjuntos numéricos), bem como as operações de adição e multiplicação em $\mathbb{N}$ com as respectivas propriedades: associativa, comutativa, elemento neutro, cancelamento e anulamento.

Também discutimos a subtração e a divisão em $\mathbb{N}$. Vimos que a diferença, $a - b$ está definida em $\mathbb{N}$ quando $a \geq b$. A divisão em $\mathbb{N}$, $a \div b$ está definida se b é um divisor de a.

Também definimos a Relação "menor ou igual" em $\mathbb{N}$. Mostramos que a relação "menor ou igual", em $\mathbb{N}$, define uma relação de ordem, isto é, satisfaz as propriedades: reflexiva, anti-simétrica e transitiva.

Estudamos o "Princípio da boa ordem" em $\mathbb{N}$: "Todo subconjunto não vazio de números naturais possui um menor elemento".

Similarmente, em $\mathbb{Z}$, estudamos as operações de adição, multiplicação e subtração e suas propriedades; para a adição: associativa, comutativa, elemento neutro e elemento oposto. As propriedades da multiplicação estudadas foram: associativa, comutativa e elemento neutro. Estudamos, também, a propriedade distributiva, relacionada às duas operações.

Ainda estudamos a relação "menor ou igual", em $\mathbb{Z}$. Mostramos que a relação "menor ou igual" em $\mathbb{Z}$ define uma relação de ordem, isto é, satisfaz as propriedades: reflexiva, anti-simétrica e transitiva.

Também estudamos a definição de valor absoluto e suas propriedades; e outras proposições importantes em $\mathbb{N}$, e em $\mathbb{Z}$. Finalizando estudamos o "Princípio do Menor Inteiro" em $\mathbb{Z}$: "Se $A \subset \mathbb{Z}$, $A \neq \varnothing$ e A limitado inferiormente, então A possui elemento mínimo".

Bibliografia comentada

DOMINGUES, Hygino H. **Fundamentos de Aritmética**. São Paulo: Atual, 1991.

Este livro é ótima referência como bibliografia básica. Trata do conteúdo estudado neste capítulo com muita clareza e propriedade, além de propor exercícios variados.