Capítulo 3

Relações

Capítulo 3
Relações

O objetivo deste capítulo é estudar o conceito de relação e suas propriedades. Faremos o estudo das relações de equivalência, das relações de ordem e das relações no plano $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

Introdução

Neste capítulo você vai estudar relações de modo geral e os tipos especiais de relações. Este assunto, assim como Conjuntos no Capítulo 1, será importante no desenvolvimento de conceitos matemáticos como funções e estruturas algébricas. No geral, utilizamos as relações para estudar objetos que podem ser números, conjuntos, funções etc. Vamos estudar dois tipos de relações: as relações de equivalência e as relações de ordem. Um terceiro tipo de relação será trabalhado no capítulo seguinte: as funções. Em particular, as relações de equivalência, classes de equivalência e conjuntos quociente são generalizações de situações que estamos habituados a utilizar desde os primeiros anos da educação básica. Também a relação de ordem generaliza a idéia de "$\leq$" nos conjuntos numéricos para conjuntos quaisquer. O estudo das relações no plano prepara o caminho para o estudo do próximo capítulo. Não se assuste se este for um capítulo muito "algébrico": os conceitos estudados aqui serão ferramentas úteis em diversas disciplinas do curso.

O conceito de relação

Utilizamos muito a idéia de relação no cotidiano:...é menor do que..., ...é paralela a..., ...é divisor de..., ...é irmão de... etc. Podemos começar estabelecendo que uma relação é uma associação entre dois objetos (como já dissemos, podem ser números, conjuntos, matrizes, etc.). Esta associação pode estar definida por uma lei (regra) ou não. Quando a associação é estabelecida por uma lei é fácil verificar se dois objetos estão ou não estão relacionados. Por exemplo, "menor do que" (denotado $<$) é uma relação definida no conjunto dos números naturais: 2 está relacionado com 5 pois $2<5$, mas 3 não está relacionado com 1 pois 3 não é menor do que 1. Outros pares que estão relacionados pela relação " $<$ " são 7 e 24 , 34 e 109 , 12345 e 23456 , etc. Os dois objetos envolvidos numa relação são elementos de dois conjuntos, que podem ser distintos ou não. No exemplo da relação " $<$ " vimos que 3 não está relacionado com 1, mas é claro que 1 está relacionado com 3 pois $1<3$. Assim, é importante estabelecer uma ordem no par de objetos (ou no par de conjuntos) que estamos associando. Lembre-se que definimos pares ordenados no final do Capítulo 1. Note também que dois números num par ordenado já satisfazem uma condição (um é o primeiro e outro, o segundo). Antes de definirmos formalmente uma relação, vamos dar alguns exemplos:

1) Relação de divisibilidade em $\mathbb{N}$: dados dois números naturais a e b , dizemos que a está relacionado com b quando a é divisor de b . Exemplos de pares relacionados: 2 e 46 , 7 e 49 , 13 e 65, etc..
2) Relação de inclusão em $P(\mathbb{N})$: dados dois subconjuntos A e B de $\mathbb{N}$, dizemos que A está relacionado com B quando $A \subset B$. Exemplos de conjuntos relacionados: $\{1\}$ e $\{1,2,3\}$, $\{2,4,6\}$ e $\{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é par}\}$, etc.
3) Dados os conjuntos $A=\{0,1,3\}$ e $B=\{2,5\}$, associamos 0 a 2 , 3 a 5 e 0 a 5 . Isto significa que a relação é dada pelos pares $(0,2),(3,5)$ e $(0,5)$. Note que neste caso a relação foi estabelecida sem uma lei ou regra.

Definição. Sejam A e B conjuntos. Uma relação R de A em B é um subconjunto de $A\times B$, ou seja, $R \subset A\times B$.

Observação 1. Quando A é igual a B , dizemos que R é uma *relação em* A (ou em B), ou seja, R é um subconjunto de $A\times A$ (ou $B\times B$).

Observação 2. Pela definição, uma relação é uma certa "lista" de pares ordenados, não ficando explícito o motivo (lei) de sua escolha. Por exemplo:

$$R_1 = \{(1,4),(21,87),(55,12)\} \text{ e } R_2 = \{(0,1),(1,3),(2,5),(3,7),(4,9)\}$$

são relações em $\mathbb{N}$, pois são subconjuntos de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. No entanto, você seria capaz de explicar a "lei" segundo a qual os pares estão relacionados, para cada uma das relações? No caso de R_1, não há lei explícita; só podemos afirmar que 1 está relacionado com 4, 21 está relacionado com 87 e 55 está relacionado com 12. No caso de R_2, podemos dizer que R_2 é o conjunto

$$R_2 = \{(x,y)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N} \,/\, x \text{ e } y \text{ são algarismos tais que } y = 2x+1\},$$

ou seja, R_2 é o conjunto de pares (x,y) que satisfazem a condição "x e y são algarismos tais que $y = 2x+1$".

Observação 3. Note que uma relação envolve dois conjuntos (que podem ser iguais ou não) e certa maneira de relacioná-los (que pode ser uma lei ou não). Quando uma relação é estabelecida por meio de uma lei, ou seja, por meio de uma *sentença aberta* (como $a\,|\,b$, $a = 2b+1$, $r\,//\,s$, etc.), a relação é o seu conjunto verdade. Por abuso de linguagem chamamos de *relação* a *sentença aberta* usada para defini-la. Por exemplo, a relação de divisibilidade do exemplo 1: a sentença aberta $a\,|\,b$ estabelece a relação em $\mathbb{N}$; a relação de fato é o conjunto de pares ordenados $R = \{(a,b)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N} \,/\, a\,|\,b\}$, mas, por abuso de linguagem, dizemos "a relação de divisibilidade em $\mathbb{N}$".

Notação. Sejam A e B conjuntos e R uma relação de A em B. Pela definição, um elemento de R é da forma (a,b) com $a\in \mathrm{A}$ e $b\in \mathrm{B}$. Usamos a notação $a\mathrm{R}b$ para indicar que $(a,b)\in R$ (ou seja, para indicar que a está relacionado com b).

Observação 4. Usaremos as duas notações: $a\mathrm{R}b$ e $(a,b)\in R$. Não se assuste se você encontrar as duas notações em um mesmo enunciado: a intenção é que você se habitue às duas.

Exemplos:

1) $\mathrm{R}\subset\mathbb{N}\times\mathbb{N}, \mathrm{R} = \{(a,b)/\, a \text{ é múltiplo de } b\}$; elementos relacionados: $23R1$, $18R3$, $18R9$, entre outros. Neste caso o conjunto R possui uma infinidade de elementos.

2) $A = \{2,3,4,19\}$, $B = \{1,3,5,12\}$, $R\subset A\times B$, $R = \{(x,y)/\, x<y\}$; os elementos relacionados são: $2R3$, $2R5$, $2R12$, $3R5$, $3R12$,

$4R5$, $4R12$. R é o conjunto finito expresso por:

$$R = \{(2,3),(2,5),(2,12),(3,5),(3,12),(4,5),(4,12)\}.$$

3.1 Domínio, contradomínio e imagem de uma relação

Definição. Dada uma relação R de A em B, chama-se domínio de R ao conjunto dos x que pertencem a A, tais que exista y pertencente a B e $(x,y)\in R$. É o conjunto dos primeiros elementos dos pares que pertencem a R. Dá-se o nome de contradomínio de R ao conjunto B.

Chama-se *imagem* da relação R de A em B ao conjunto dos y que pertencem a B tais que existe x pertencente a A e $(x,y)\in R$. É o conjunto dos segundos elementos dos pares que pertencem a R.

Notação. Denota-se o domínio de R por $D(R)$, o contradomínio de R por $C(R)$ e a imagem de R por $I(R)$.

Observação 5. $D(R)$ é subconjunto de A e $I(R)$ é subconjunto de B.

Exemplos:

3) No exemplo 4, tem-se $D(R)=\{2,3,4\}$, $C(R)=B=\{1,3,5,12\}$ e $I(R)=\{3,5,12\}$.

4) Sejam $A=\{1,2,3,4\}$ e $B=\{2,3,4,5,6\}$ e a relação R definida pela sentença "$mdc(x,y)=2$". Então $R=\{(2,2),(2,4),(2,6),(4,2),(4,6)\}$ e $D(R)=\{2,4\}$, $C(R)=\{2,3,4,5,6\}=B$ e $I(R)=\{2,4,6\}$.

3.2 Relação inversa

Definição. Dada uma relação R de A em B, chama-se relação inversa de R e denota-se R^{-1} ao conjunto dos pares $(y,x)\in B\times A$ tais que $(x,y)\in R$.

Simbolicamente, $R^{-1}=\{(y,x)\in B\times A \;/\; (x,y)\in R\}$.

Exemplo:

5) Considere os conjuntos $A=\{1,2,3\}$ e $B=\{1,2\}$, e a relação R de A em B definida por "$x \geq y$", isto é,

$$R=\{(1,1),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2)\}.$$

A relação inversa de R é um subconjunto de $B \times A$ dado por $R^{-1}=\{(1,1),(1,2),(2,2)(1,3),(2,3)\}$. Note que R é um subconjunto de $A \times B$ e R^{-1} é subconjunto de $B \times A$.

Exercícios propostos

1) Explicite a relação R de A em B, nos casos:

a) $A=\{1,2,3,-5\}$; $B=\{-1,-3,5,7,9\}$, $R=\{(a,b)/\, a=-b\}$

b) $A=\{x \in \mathbb{N} /\, x \text{ é divisor de } 80\}$; $B=\{x \in \mathbb{Z} /\, x \text{ é divisor de } 56\}$,

$R=\{(a,b) \in A \times B /\, b \text{ é divisor de } a\}$

2) Se $A=\{a,b,c\}$ e $B=\{0,1\}$, quantas relações de A em B podemos construir? Generalizar para A com n elementos e B com m elementos.

3.3 Propriedades das relações

As relações mais significativas em matemática são relações em um conjunto A que satisfazem determinadas propriedades. Faremos um estudo dessas propriedades para em seguida estabelecer os tipos especiais de relações. Em todas as propriedades que estudaremos a seguir estaremos considerando A um conjunto e R uma relação em A, ou seja, $R \subset A \times A$.

Propriedade Reflexiva: Dizemos que uma relação R em A é reflexiva quando aRa para todo $a \in A$.

Exemplos:

6) A relação de divisibilidade em $\mathbb{N}$ é reflexiva pois *todo* número natural é divisor dele próprio, ou seja, aRa para *todo* número natural a.

7) Seja U um conjunto e considere a relação definida em $P(U)$ (conjunto das partes de U) por $X\mathrm{R}Y$ quando $X \subset Y$. Esta é uma relação reflexiva, pois sabemos que todo conjunto é subconjunto de si próprio, ou seja, $X \subset X$ para todo $X \in \mathrm{P(U)}$.

Propriedade simétrica: Dizemos que uma relação R em A é simétrica quando, para quaisquer a e b em A, se aRb então bRa.

Exemplo:

8) A relação de igualdade "$=$" no conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ é uma relação simétrica, pois para quaisquer a e b reais, se $a = b$, então $b = a$. Note que não estamos afirmando que $a = b$ **para quaisquer *a* e *b* reais!** O que afirmamos é: dados dois números reais quaisquer, **se ocorre** $a = b$, então **também ocorre** $b = a$.

Propriedade transitiva: Dizemos que uma relação R em A é transitiva quando, para quaisquer a, b e c em A, se aRb e bRc, então aRc. Em outras palavras, a relação é transitiva quando, se a está relacionado com b e também b está relacionado com c, então a está relacionado com c.

Exemplos:

9) A relação "$<$" em $\mathbb{Z}$ é transitiva pois: para quaisquer a, b e c inteiros, se $a < b$ e $b < c$, podemos afirmar que $a < c$. Note que aqui também não estamos afirmando que sempre ocorre $a < b < c$; estamos afirmando que, ***sempre que*** *isso ocorre*, também acontece $a < c$. Em outras palavras, se os pares (a,b) e (b,c) estão na relação, para que a relação seja transitiva deve também conter o par (a,c).

10) A relação do exemplo 10 também é uma relação transitiva, pois se $A \subset B$ e $B \subset C$ tem-se $A \subset C$.

11) Voltemos à relação de divisibilidade em $\mathbb{N}$, $R = \{(a,b) / a \text{ é divisor de } b\}$. Já vimos que a relação R é reflexiva, pois todos os pares da forma (a,a) pertencem à relação, uma vez que todo número natural é divisor de si mesmo. A relação não é simétrica, pois, por exemplo, $(2,6)$ está na relação (2 é divisor de 6) e o par $(6,2)$ não pertence à relação (pois 6 não é divisor de 2). Observe aqui a importância do

Para refletir: considerando o zero como número natural, este fato também é válido para ele?

quantificador: a existência de um único par para o qual a propriedade falha é suficiente para que a relação não tenha a propriedade. Observemos também que a relação R é transitiva, pois sempre que a é divisor de b e também b é divisor de c, podemos concluir que a é divisor de c. De fato: se a é divisor de b, existe um $x \in \mathbb{N}$ tal que $b = a \cdot x$. Como também b é divisor de c, existe um $y \in \mathbb{N}$ tal que $c = b \cdot y$. Substituindo $b = a \cdot x$ na última igualdade, temos $c = by = (ax)y = a(xy)$, o que significa que a é divisor de c. Assim, a relação de divisibilidade em $\mathbb{N}$ é reflexiva, não é simétrica e é transitiva.

12) A relação "$<$" em $\mathbb{R}$ não é reflexiva, pois os pares (a,a) não pertencem à relação, uma vez que um número não é menor do que ele mesmo. Também não é simétrica, pois se $a < b$, não pode ocorrer também $b < a$. No entanto, a relação é transitiva, como visto no exemplo acima, para $\mathbb{Z}$.

13) Considere a relação $R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(2,3),(3,2),(1,3),(1,2)\}$ no conjunto $A = \{1,2,3\}$. Apesar de não termos explícita a "lei" que define a relação, conhecemos todos os seus pares e podemos decidir se R goza das propriedades. Podemos notar que R é reflexiva, pois *todos* os pares da forma (a,a) estão na relação: $(1,1),(2,2),(3,3)$. Notamos também que R não é simétrica, pois $(1,3) \in R$ e $(3,1) \notin R$. Para verificarmos se R é transitiva, devemos inicialmente listar todos os possíveis pares "encadeados" aRb e bRc, e verificar se ocorre aRc. Observemos o seguinte:

$(1,1) \in R$ e $(1,3) \in R$, também $(1,3) \in R$;

$(1,1) \in R$ e $(1,2) \in R$, também $(1,2) \in R$;

$(1,2) \in R$ e $(2,2) \in R$, também $(1,2) \in R$;

$(1,2) \in R$ e $(2,3) \in R$, também $(1,3) \in R$;

$(1,3) \in R$ e $(3,3) \in R$, também $(1,3) \in R$;

$(1,3) \in R$ e $(3,2) \in R$, também $(1,2) \in R$;

$(2,2) \in R$ e $(2,3) \in R$, também $(2,3) \in R$;

$(2,3) \in R$ e $(3,3) \in R$, também $(3,3) \in R$;

$(2,3) \in R$ e $(3,2) \in R$, também $(2,2) \in R$;

$(3,3) \in R$ e $(3,2) \in R$, também $(3,2) \in R$.

Com isto concluímos que, sempre que ocorrer aRb e bRc, também ocorre aRc. Logo, a relação é transitiva.

14) $A = \{x, y, z, t\}, R = \{(x,x),(y,y),(z,z),(x,y),(y,x),(t,z),(z,x)\}$
Observe que aqui os nossos objetos são x, y, z e t e a nossa relação R explicita como eles estão relacionados. A relação não é reflexiva, pois o par (t,t) não pertence à relação. Também não é simétrica, pois (t,z) pertence à relação e (z,t) não pertence. Podemos observar que ela não é transitiva, pois, para os "pares encadeados" $(t,z) \in R$ e $(z,x) \in R$, o par $(t,x) \notin R$.

15) $A = \{4,6\}, R = \{(4,4),(6,6)\}$. É claro que a relação R é reflexiva. Ela é também simétrica? Já vimos que uma relação ***não*** será simétrica se existir $(a,b) \in R$ e $(b,a) \notin R$. Como vemos, isto não ocorre com esta relação: para todos os pares (a,b) da relação, tem-se (b,a) também na relação. O "simétrico" de $(4,4)$ é o próprio $(4,4)$ e o mesmo acontece para o $(6,6)$. Logo, esta relação é simétrica. Será ela transitiva? Para verificar isto, deveríamos listar os "pares encadeados" aRb e bRc, e verificar se ocorre aRc. Mas onde estão os pares encadeados? Para que a relação *não fosse* transitiva, deveríamos encontrar na relação pares (a,b) e (b,c) de modo que (a,c) *não estivesse* na relação. Como podemos ver, não é possível encontrar pares para os quais a propriedade falha. Logo, a relação é transitiva.

Estas propriedades são válidas porque não é possível provar que elas não são válidas. Neste caso dizemos que as propriedades valem por vacuidade. É o mesmo caso do conjunto vazio ser subconjunto de todos os conjuntos.

Observação 7. Considere a relação $R = \{(1,1),(1,2),(2,3),(3,3),(2,2)\}$. Pergunta: R é reflexiva? Para esta pergunta não há resposta definitiva. Se considerarmos R uma relação no conjunto $A = \{1,2,3\}$, a resposta é *sim*. No entanto, se considerarmos R uma relação em $\mathbb{N}$, a resposta é *não*. Só podemos definir se uma relação R é reflexiva se conhecemos o domínio da relação R.

Exercícios propostos

3) Dê exemplo de uma relação no conjunto dos números naturais que seja reflexiva e transitiva, mas não seja simétrica.

4) Dê exemplo de uma relação no conjunto $A = \{3,6,9,12\}$ que seja simétrica, mas não seja reflexiva nem transitiva.

5) Determine todas as possíveis relações no conjunto $A = \{a,b\}$ $(a \neq b)$; identifique as relações que gozam da pro-

priedade simétrica. Generalize determinando quantas relações são possíveis num conjunto A com n elementos.

6) Considere a seguinte relação em $\mathbb{N}\times\mathbb{N}:(a,b)R(c,d)$ quando $a+d=b+c$. Mostre que esta relação é reflexiva, simétrica e transitiva. Observe que o conjunto sobre o qual a relação está definida é $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, ou seja, a relação é um subconjunto de $(\mathbb{N}\times\mathbb{N})\times(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$ e o par ordenado (a,b) está relacionado com o par ordenado (c,d) quando ocorre $a+d=b+c$. Por exemplo: $(2,6)R(1,5)$, pois $2+5=6+1$.

3.4 Relações de equivalência

Algumas relações gozam das propriedades reflexiva, simétrica e transitiva simultaneamente, o que as torna particularmente interessantes. Relações deste tipo são utilizadas para construir os conjuntos $\mathbb{Z}$ (exercício 6) e $\mathbb{Q}$, e para construir os conjuntos $\mathbb{Z}_n$, que serão estudados nas disciplinas de Álgebra.

Definição. Uma relação R em um conjunto A é chamada uma *relação de equivalência* se e somente se goza das propriedades reflexiva, simétrica e transitiva.

Notação. Uma relação de equivalência pode ser denotada pelo símbolo $\sim$; assim, escrevemos $a\sim b$ ao invés de aRb. Optamos por usar a notação usual aRb, mas você pode encontrar a notação $a\sim b$ em livros da bibliografia.

Exemplos:

16) A relação de igualdade no conjunto dos números reais é uma relação de equivalência, pois é reflexiva ($a=a$ para todo a real), é simétrica (se $a=b$ então $b=a$) e é transitiva (se $a=b$ e $b=c$ então $a=c$).

17) Considere $A=\{1,2,3\}$ e a relação $R=\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1)\}$. R é uma relação de equivalência, pois goza das propriedades reflexiva, simétrica e transitiva.

18) Ainda no conjunto $A=\{1,2,3\}$, a relação $S=\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2)\}$, não é uma relação de equivalência, pois não é simétrica: $(1,2)\in S$ mas $(2,1)\notin S$.

19) A relação K de paralelismo de retas no plano é uma relação de equivalência. Denotemos por K a relação definida no conjunto das retas do plano: para r e s retas do plano, rKs quando $r\,//\,s$. K é reflexiva, pois toda reta é paralela a si própria; é simétrica, pois se r é paralela à s, então s é paralela à r; e é transitiva, pois se r é paralela à s e s é paralela à t, então r é paralela à t.

(O material das páginas 131 a 136 deste material, que consiste no item 3.5 do capítulo 3 do livro da disciplina "Introdução ao Cálculo", do curso de Licenciatura em Matemática da UFSC, será colocado como material complementar na nossa disciplina. Sua leitura não é obrigatória)

3.6 Relação de ordem

No capítulo anterior foi estudada a relação " $\leq$ " no conjunto $\mathbb{R}$. Os pares ordenados (a, b) em que a e b são números reais e satisfazem $a \leq b$ constituem a relação denominada relação de ordem em $\mathbb{R}$ (estamos habituados a dizer "menor ou igual a". Entretanto, o correto seria dizermos "menor do que ou igual a"). Dado um conjunto A (não-vazio), podemos definir uma relação em A com as mesmas características da relação " $\leq$ " em $\mathbb{R}$; isto nos permite estabelecer uma "ordem" no conjunto A, como estamos habituados a fazer em $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$, mesmo que os elementos de A não sejam números. Para caracterizar as relações de ordem, precisamos estabelecer uma propriedade que ainda não conhecemos: a propriedade anti-simétrica.

Definição. Seja A um conjunto não-vazio e R uma relação em A. Dizemos R é uma relação anti-simétrica quando para quaisquer x e y em A, se xRy e yRx, então $x = y$.

Exemplos:

24) " $\leq$ " é uma relação anti-simétrica em $\mathbb{Z}$ (e também em $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ pois se $a \leq b$ e $b \leq a$, teremos $a = b$.

25) A relação de divisibilidade em $\mathbb{N}$ é anti-simétrica. Podemos supor sem perda de generalidade que a e b são não-nulos (por quê?); então:

i) Se $a \mid b$, existe $x \in \mathbb{N}$ tal que $b = ax$

ii) Se $b \mid a$, existe $y \in \mathbb{N}$ tal que $a = by$

De (i) e (ii), temos que $a = by = (ax)\,y = a(xy)$. Como a é não-nulo, teremos $xy = 1$ (lembre da lei do cancelamento para a multiplicação em $\mathbb{N}$). Ora, se o produto de dois números naturais é 1, devemos ter $x = y = 1$. Isso prova que $a = b$.

Observação 9. Note que a relação de divisibilidade em $\mathbb{Z}$ não é anti-simétrica, pois se $xy = 1$ em $\mathbb{Z}$ podemos ter $x = y = 1$ ou $x = y = -1$, o que resultará $a = b$ *ou* $a = -b$.

26) Considere A um conjunto não-vazio. A relação de inclusão em $P(A)$ é anti-simétrica, pois para X e Y em $P(A)$, se $X \subset Y$ e $Y \subset X$, teremos $X = Y$ (veja as propriedades da inclusão no capítulo 1).

27) Considere $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $R = \{(1,3), (4,2), (4,4), (2,4)\}$; R não é anti-simétrica, pois temos $4R2$ e $2R4$, mas $2 \neq 4$.

Observação 10. Ao contrário do que pode parecer, "anti-simétrica" não é a negação de "simétrica". Podemos ter relações que não são nem simétrica, nem anti-simétrica, como no exemplo anterior.

Pergunta: uma relação pode ser simultaneamente simétrica e anti-simétrica?

Observação 11. Outra maneira de expressarmos a definição de relação anti-simétrica é a seguinte: "Uma relação R num conjunto A é anti-simétrica quando para a e b em A, se $a \neq b$, então não ocorre simultaneamente aRb e bRa".

Definição. Seja A um conjunto não-vazio. Uma relação R em A é uma relação de ordem, se e somente se goza das propriedades reflexiva, anti-simétrica e transitiva.

Exemplos:

28) "$\leq$" é uma relação de ordem em $\mathbb{R}$ (já provado no capítulo anterior):

i) reflexiva: $x \leq x$, para todo $x \in \mathbb{R}$;

ii) anti-simétrica: se $x \leq y$ e $y \leq x$, temos $x = y$

iii) transitiva: se $x \leq y$ e $y \leq z$, temos $x \leq z$.

29) A relação de divisibilidade em $\mathbb{N}$ é uma relação de ordem:

i) reflexiva: $a \mid a$ para todo $a \in \mathbb{R}$, pois $a = a.1$

ii) anti-simétrica: se $a \mid b$ e $b \mid a$, já vimos que $a = b$

iii) transitiva: se $a \mid b$ e $b \mid c$, então $a \mid c$

30) A relação de inclusão do exemplo 27 é uma relação de ordem, pois além de ser anti-simétrica é também reflexiva e transitiva.

Ordem total e ordem parcial

Lembremos a primeira propriedade PO1 da relação de ordem "$\leq$" em $\mathbb{R}$: dados dois números reais x e y, ou $x \leq y$ ou $y \leq x$. Isto significa que todos os elementos de $\mathbb{R}$ estão relacionados pela relação de ordem $\leq$. Já para a relação de ordem "divisibilidade em $\mathbb{N}$" isto não ocorre: 2 e 3 são números naturais e não estão relacionados, pois 2 não é divisor de 3, nem 3 é divisor de 2. Estas duas situações estão explícitas na definição a seguir:

Definição. Se R é uma relação de ordem em um conjunto não-vazio E, dizemos que E é um conjunto ordenado ou parcialmente ordenado pela relação R. Além disso, se para quaisquer a e b em E tem-se aRb ou bRa, a relação R é uma relação de ordem total sobre E e dizemos que E é totalmente ordenado pela relação R.

Observação 12. Se R é uma relação de ordem total, o "ou" de aRb *ou* bRa é exclusivo, pois pela propriedade anti-simétrica, aRb e bRa implica $a = b$. Note que uma relação de ordem total em um conjunto nos permite estabelecer uma organização dos elementos do conjunto no seguinte sentido: dados a e b quaisquer, com $a \neq b$, temos aRb ou bRa; se ocorre aRb (e então não ocorre bRa) e se c é um terceiro elemento distinto de a e distinto de b, então deve ocorrer aRc ou cRa e bRc ou cRb.

Exemplos:

31) $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ são totalmente ordenados pela relação "$\leq$".

32) $\mathbb{N}$ não é totalmente ordenado pela relação de divisibilidade.

33) Seja $E = \{2, 4, 8, \ldots, 2^n, \ldots\}$ o conjunto da potências naturais de 2 e R a relação em E "*x é um múltiplo de y*". Esta é uma relação de ordem em E (prove!) e é uma ordem total. De fato, dados dois elementos quaisquer de E, $x = 2^s$ e $y = 2^t$, para s e t naturais, teremos: se $s \leq t$, então y é múltiplo de x; se $t \leq s$ então x é múltiplo de y.

34) Considere um conjunto não-vazio A; a relação de inclusão definida em $P(A)$ é uma relação de ordem (prove!) mas não é uma ordem total. De fato, se X e Y são subconjuntos disjuntos de A, eles não são comparáveis pela relação de inclusão.

Exercícios propostos

14) Verifique se as relações a seguir são relações de ordem:

a) Em $\mathbb{N}^*$, a relação $aRb \Leftrightarrow mdc(a,b)=a$

b) Em $\mathbb{R}$, a relação $aRb \Leftrightarrow a<b$

c) Em $\mathbb{R}$, a relação $aRb \Leftrightarrow b=a+1$

d) Em $\mathbb{Z}_4$, a relação $[a]R[b] \Leftrightarrow a \leq b$

15) Das relações de ordem do exercício anterior, determine quais são de ordem total.

3.7 Um exemplo especial: relações no plano

Inicialmente vamos lembrar que uma relação S de A em B é um subconjunto do produto cartesiano $A \times B$ ($S \subset A \times B$). Quando A e B são subconjuntos do conjunto dos números reais $\mathbb{R}$, podemos representar geometricamente as relações S de A em B no plano cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Assim, vamos reunir a definição de "relação" e a "representação do produto cartesiano" para representar geometricamente no plano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ relações especiais. O interessante destas relações é que elas podem resultar em regiões do plano cartesiano (diferente dos gráficos de funções), como veremos nos exemplos.

No capítulo 2 estudamos todas as propriedades do conjunto $\mathbb{R}$, inclusive a idéia de sua representação como pontos de uma reta. Para representarmos as relações $S \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, usaremos os dois eixos coordenados que são duas retas perpendiculares; os elementos x do domínio são marcados na reta horizontal e os elementos y do contradomínio na reta vertical. Os pares (x, y) são marcados utilizando retas paralelas aos eixos coordenados. Veja a figura:

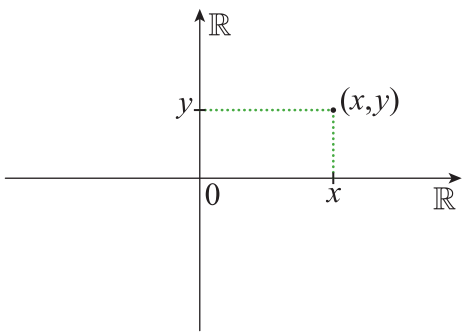

Figura 3.1

O conjunto dos pares (x, y) assim obtidos representará a relação S. Faremos agora uma série de exemplos de representações de relações no plano $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Em cada exemplo identificaremos (ou você será solicitado a determinar) domínio e imagem da relação.

Exemplos:

35) $S \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}, S = \{(x, y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \,/\, y = x - 2\}$

$D(S) = \mathbb{R}; I(S) = \mathbb{R}$

Geometricamente:

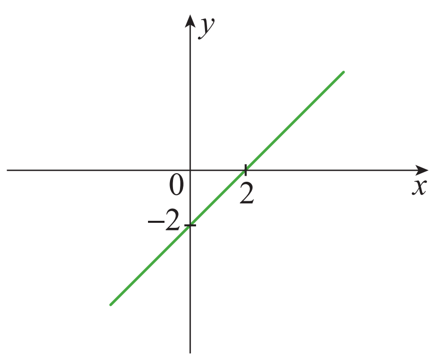

Figura 3.2

36) $S \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}, S = \{(x, y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \,/\, y < x\}$

$D(S) = \mathbb{R}; I(S) = \mathbb{R}$

Geometricamente:

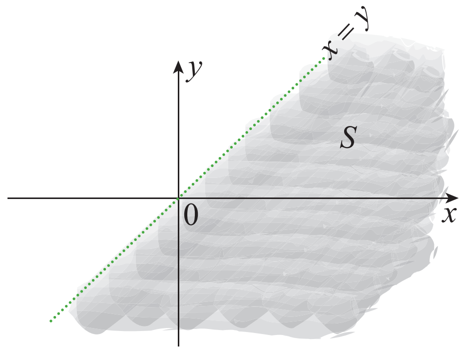

Figura 3.3

37) $S \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}, S = \{(x, y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \,/\, x \geq -y\}$

$D(S) = \mathbb{R}; I(S) = \mathbb{R}$

Geometricamente:

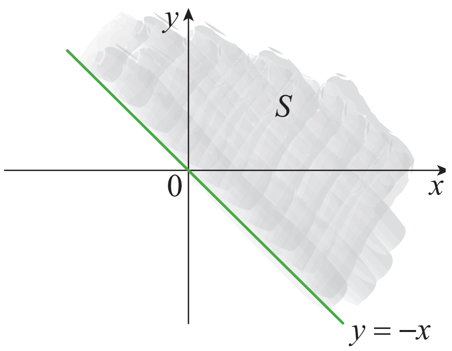

Figura 3.4

38) $S \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}, S = \{(x, y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \,/\, y \leq x + 1\}$

$D(S) = \mathbb{R}; I(S) = \mathbb{R}$

Geometricamente:

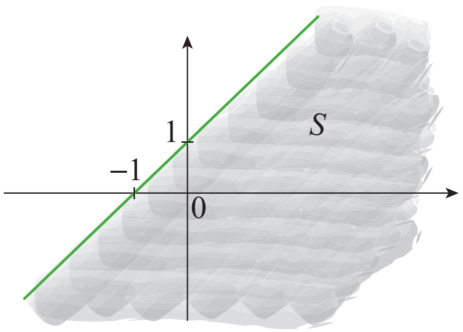

Figura 3.5

39) $S = [0,1] \times [0,1]$

$S \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ é o conjunto dos pares ordenados cujas coordenadas percorrem o intervalo [0, 1]:

$S = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,/\, x \in [0,1] \text{ e } y \in [0,1]\}$

$D(S) = [0,1]; I(S) = [0,1]$

Geometricamente:

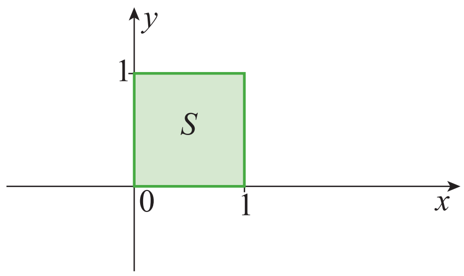

Figura 3.6

40) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,/\, x^2 + y^2 = 4\}$

S é o conjunto dos pares ordenados cuja soma dos quadrados das coordenadas é igual a 4. Isto lembra alguma coisa? Parece uma circunferência? Sim, geometricamente S é uma circunferência de centro na origem e raio 2.

$D(S) = [-2, 2]; I(S) = [-2, 2]$

Geometricamente:

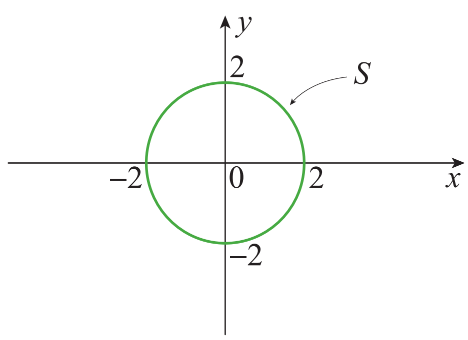

Figura 3.7

41) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x^2 + y^2 \geq 1\}$

S é o conjunto dos pares ordenados exteriores à circunferência $x^2 + y^2 = 1$, incluindo a borda. Como exercício, determine o domínio e a imagem desta relação.

Geometricamente:

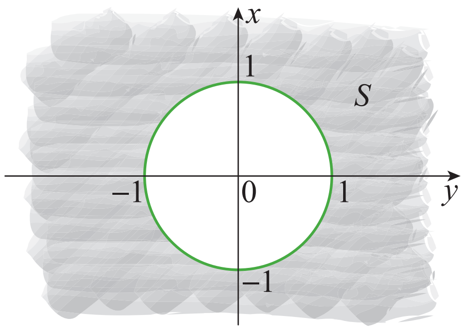

Figura 3.8

42) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / (x-1)^2 + y^2 < 9\}$

S é o conjunto dos pares ordenados interiores à circunferência de centro em $(1,0)$ e raio 3; os pares ordenados da borda não estão na relação.

$D(S) =]-2, 4[$; para encontrarmos a imagem, devemos observar quais pontos do eixo vertical (eixo y) estão relacionados. Como o raio é 3, notamos que são os pontos do intervalo

$]-3, 3[$.

Geometricamente:

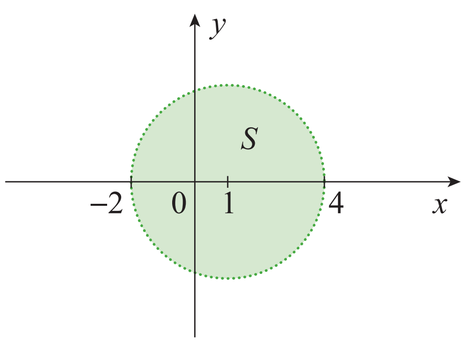

Figura 3.9

43) $S = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,/\, -1 \le x < 2 \text{ e } -\frac{3}{2} < y < 1 \right\}.$

$$D(S) = [-1,2[;\quad I(S) = \left]-\frac{3}{2},1\right[$$

Geometricamente:

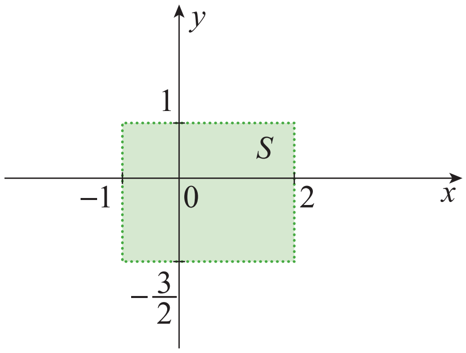

Figura 3.10

44) $S = \left\{ (x,y) \in [-1,3] \times [1,4] \,/\, y = x + \frac{2}{5} \right\}$

Determine o domínio e a imagem como exercício.

Geometricamente:

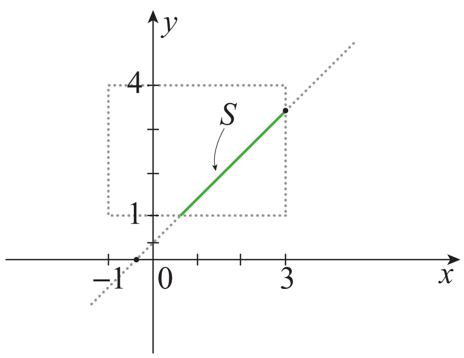

Figura 3.11

Observação 13. Como você pode ver, geometricamente as relações em $\mathbb{R}$ podem ser curvas no plano ou regiões. Você trabalhará com regiões no plano nas disciplinas de Cálculo.

Exercícios propostos

16) Represente geometricamente as seguintes relações no plano cartesiano:

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,/\, x \in [1, 2] \text{ e } y \in \mathbb{R}\}$$

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,/\, x \in \mathbb{R} \text{ e } y \in]-1, 1[\}$$

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,/\, x < 1 \text{ e } y \in \mathbb{R}\}$$

17) Determine domínio e imagem das relações do exercício 16.

Resumo

Neste capítulo você estudou relações, um conceito que nos prepara para o estudo de funções. Os tópicos trabalhados foram:

1) Relações: definição e exemplos.
2) Propriedades das relações: reflexiva, simétrica e transitiva.
3) Relação de Equivalência: aquela que goza das propriedades reflexiva, simétrica e transitiva.
4) Classes de equivalência e conjunto quociente determinados por uma relação de equivalência.
5) Relação de ordem: aquela que goza das propriedades reflexiva, anti-simétrica e transitiva.
6) Relações em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (ou relações no plano cartesiano).