Capítulo 4

Funções

Capítulo 4
Funções

Estudaremos o conceito de função (definição, nomenclatura e gráficos), suas propriedades (função injetora, sobrejetora, bijetora, par e ímpar), composição de funções e o conceito de função inversa.

Introdução

Neste capítulo vamos estudar as funções, um dos conceitos mais importantes da matemática, que estará presente ao longo de todo o curso, nas mais variadas disciplinas. Os conceitos trabalhados nos capítulos 1, 2 e 3 serão amplamente utilizados em nosso estudo das funções. Uma **função** é uma **relação** especial entre dois **conjuntos.** Estudaremos as funções reais, que estabelecem relações no conjunto dos **números reais**.

A idéia de função aparece pela primeira vez com os babilônios, cerca de 2000 a.C. Eles utilizavam tabelas como a descrita abaixo, associando a cada número inteiro maior do que ou igual a zero o seu quadrado.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n^2	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

René Descartes (1596 – 1650) pode ter sido o primeiro matemático a usar o termo “função” (1637): para ele, função significava uma potência de x, como x^2, x^3, etc. Em 1692, **Gottfried Wilhelm Leibniz** chamava função qualquer quantidade associada a uma curva. **Johann Bernoulli** em 1718 definiu função como sendo qualquer expressão envolvendo uma variável e quaisquer constantes. A notação $f(x)$ foi introduzida por volta de 1750 por **Leonhard Euler**; segundo ele, uma função não precisava ter uma expressão analítica, podendo ser representada por uma curva. Já no início do século XIX, **Joseph Louis Lagrange** restringia o significado de função a uma representação em série de potência. Mais recentemente (final do século XIX), o estudo de conjuntos feito por **George Cantor** e outros matemáticos levou à definição de função como a conhecemos hoje: um conjunto especial de pares ordenados de elementos, não necessariamente números. Todo o Cálculo Diferencial e Integral desenvolvido por **Isaac Newton** e **Leibniz** no século XVII e aperfeiçoado ao longo dos séculos por vários matemáticos gira em torno de dois conceitos fundamentais: o conceito de função e o conceito de limite. Antes da definição formal, vejamos:

4.1 Exemplos de situações que envolvem a idéia de função

1) Galileu (1564 – 1642) descobriu que o espaço percorrido por um corpo em queda livre é proporcional ao quadrado do tempo gasto para percorrê-lo. Mais precisamente, se o corpo é abandonado na posição de repouso, no tempo $t=0$, sendo t medido em segundos, então o espaço percorrido pelo corpo em t segundos é dado por $x=\dfrac{g\cdot t^2}{2}$ em que g é a aceleração da gravidade (g é aproximadamente $9{,}8\,m/s^2$) e x é medido em metros. Desta forma o espaço percorrido x depende do tempo da queda t. Diz-se que x é uma função de t. Além disso, diz-se que t é a variável independente e x é a variável dependente desta função.

2) A área de um círculo de raio r é dada por $A=\pi r^2$. Esta área depende do raio r; em outras palavras, a área A é uma função de r, sendo A a variável dependente e r a variável independente.

3) O volume de um paralelepípedo cujos lados medem x, y e z é expresso por $V=x\cdot y\cdot z$. Este volume é uma função das dimensões x, y e z, sendo estas as variáveis independentes da função volume, enquanto o volume V é a variável dependente.

4) Um micro empresário supõe que o custo de produção de certo artigo depende:

   1º) do material utilizado para a confecção (m);

2º) da mão-de-obra (mo);

3º) do custo do equipamento utilizado (e);

4º) da administração (a);

5º) da manutenção do equipamento (me).

Neste caso, o custo do produto é uma função destas cinco variáveis: $C = f\left(m, mo, e, a, me\right)$.

Mas afinal, o que é uma função?

Retomando o exemplo 1) da queda dos corpos, suponhamos que o tempo necessário para a ocorrência do fenômeno físico descrito, isto é, o tempo de queda do corpo seja 10 segundos. Então, a cada instante t , entre 0 e 10 segundos, corresponde um único valor de x, que é a distância do corpo à posição inicial. Este valor de x é dado por $x = \dfrac{g \cdot t^2}{2}$. Por exemplo, para $t = 5$ (e $g = 9,8\text{m/s}^2$), o valor de x é dado por $x = \dfrac{(9,8).5^2}{2} = \dfrac{245}{2} = 122,5\text{m}$. Assim, temos um tipo especial de relação que é denominado função.

Mais precisamente:

Definição. Sejam A e B conjuntos não-vazios. Uma função de A em B é uma relação f que a cada elemento de A associa um único elemento de B .

Notação: $f : A \to B$ (lê-se "f de A em B")

$x \mapsto y$ (lê-se "x é levado em y")

Observação 1. Pelo fato do elemento y estar associado a x, escrevemos também " $y = f(x)$ ". Esta é a notação mais utilizada de função, apesar de não indicar os conjuntos.

Observação 2. Como f é uma relação de A em B , lembremos que o conjunto A é chamado o domínio da função e o conjunto B é o contradomínio. O conjunto dos elementos de B que estão associados a algum elemento de A é a imagem da função f , $x \in A$

é chamado "variável independente" e $y \in B$ é chamado "variável dependente".

Notações:

- O Domínio de f será denotado $D(f)$
- A Imagem de f será denotada $\text{Im}(f)$

Observação 3. A imagem de f é o conjunto

$$\text{Im}(f) = \{b \in B \mid b = f(a), \text{para algum } a \in A\}$$

Nos textos didáticos é comum encontrarmos a expressão " $f(a)$ é a imagem de a ". Neste caso, $f(a)$ é a imagem do elemento a e não a imagem da função f , que é um conjunto.

Observação 4. Se o contradomínio de uma função f é o conjunto $\mathbb{R}$, dizemos que f é uma função real. Além disso, se o domínio da função f é também um subconjunto de $\mathbb{R}$, isto é, $D(f) \subset \mathbb{R}$, dizemos que f é uma função real de variável real. Estas funções serão objeto de estudo no próximo capítulo.

Observação 5. Freqüentemente, mas nem sempre, a regra que define y como função de x é dada por uma expressão analítica, como $y = 4x - 3$, $y = \log x$ etc. No entanto, a função pode estar perfeitamente definida sem que tenhamos uma "fórmula" explícita. Atenção para os exemplos, mais adiante.

Observação 6. Para caracterizar uma função não basta somente a lei que a cada elemento do domínio associa um elemento no contradomínio. É preciso, além disso, estar claro quais são estes conjuntos. Quando não se faz referência ao domínio da função, entende-se que é o conjunto de todos os elementos para os quais a expressão que define a função faz sentido.

Observação 7. De modo geral, usaremos letras minúsculas para denotar funções e variáveis. Por exemplo, se escrevermos $k(t)$, estamos nos referindo à função k de variável independente t . A variável dependente também será denotada por letras minúsculas. A respeito destas notações, lembramos que o uso da letra f para denotar a função, x para a variável independente e y para a variável dependente não é obrigatório, apesar de consagrado nos livros didáticos.

Exemplos:

1) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=3x+5$

f é a função que a cada número real associa seu triplo somado com 5. O domínio da função é o conjunto $\mathbb{R}$ e o contradomínio é $\mathbb{R}$. A imagem da função é o conjunto de valores reais resultantes das operações "o triplo do número mais 5". Assim, $\mathrm{Im}(f)=\{y\in\mathbb{R}\mid y=3x+5 \text{ para } x\in\mathbb{R}\}$.

Veja alguns valores do conjunto imagem:

$$f(0)=3\cdot 0+5=5$$
$$f(0{,}0004)=3\cdot 0{,}0004+5=5{,}0012$$
$$f(\sqrt{7})=3\cdot\sqrt{7}+5=3\sqrt{7}+5$$

Pergunta: existe um número real k tal que $f(k)=51$? Em outras palavras: 51 é a imagem de algum elemento do domínio?

Para responder a pergunta, façamos $f(k)=51$, ou seja, $3k+5=51$. Resolvendo a equação, vemos que para $k=\dfrac{46}{3}$ temos $f\left(\dfrac{46}{3}\right)=51$. Observe que para qualquer número real y é sempre possível encontrar um número real x tal que $f(x)=y$.

De fato:

$$3x+5=y$$
$$3x=y-5$$
$$x=\frac{y-5}{3}$$

Para este x, tem-se

$$f(x)=f\left(\frac{y-5}{3}\right)=3.\left(\frac{y-5}{3}\right)+5=y-5+5=y\ .$$

Isto significa que todo número real é imagem de um elemento do domínio da função. Provamos assim que $\mathrm{Im}(g)=\mathbb{R}$, ou seja, a imagem é o próprio contradomínio.

2) $h : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, h(n) = n^2 + 1$

h é a função que a cada número natural associa seu quadrado somado com 1. O domínio de h é o conjunto $\mathbb{N}$ e o contradomínio é $\mathbb{R}$. A imagem de h é o conjunto

$$\text{Im}(h) = \{y \in \mathbb{R} \mid y = n^2 + 1, \text{para } n \in \mathbb{N}\} = \{1, 2, 5, 10, 17, 26, ...\}.$$

Note que neste caso a imagem da função h é um subconjunto próprio do contradomínio.

3) $g(z) = \dfrac{1}{z}$

g é a função que a cada número real associa o seu inverso. Como só existem os inversos de números não-nulos, o domínio de g é o "maior" conjunto no qual é possível obter o inverso de um número, $\text{D}(f) = \mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R}^*$. A imagem de g é o conjunto

$$\text{Im}(g) = \left\{ \frac{1}{z} \mid z \in \mathbb{R}^* \right\}.$$

Pergunta: dado um número real y, é possível encontrar um número real não-nulo z tal que $g(z) = y$?

Análogo ao que foi feito no exemplo 1, se y é tal que $\dfrac{1}{z} = y$ para $z \neq 0$, então $y \neq 0$ e $z = \dfrac{1}{y}$ (basta multiplicar ambos os membros da igualdade $\dfrac{1}{z} = y$ por zy^{-1}). Assim, $g(z) = g\left(\dfrac{1}{y}\right) = \dfrac{1}{\frac{1}{y}} = y$ e teremos $\text{Im}(g) = \mathbb{R}^*$.

4) $t(s) = \dfrac{1}{s+3} + \dfrac{1}{s-1}$

Para determinar o domínio de t, devemos observar os valores reais para os quais é possível encontrar $\dfrac{1}{s+3} + \dfrac{1}{s-1}$. Como não existem números com denominadores zero, devemos excluir os valores que anulam o denominador: $s = -3$ e $s = 1$. Assim, $\text{D}(k) = \mathbb{R} - \{-3, 1\}$.

Qual é a imagem da função t ?

5) $k(t) = \dfrac{1}{t^2 - 2t - 12}$

Análogo ao exemplo anterior, para determinar o domínio de k, devemos observar os valores t para os quais é possível encontrar $\dfrac{1}{t^2 - 2t - 15}$. Fazendo $t^2 - 2t - 15 = 0$, obtemos $t = 5$ ou $t = -3$: estes valores anulam o denominador e devem ser excluídos. Assim, $\mathrm{D}(k) = \mathbb{R} - \{-3, 5\}$.

6) $f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{se } x \le 0 \\ x^2 - 4x + 3 & \text{se } x > 0 \end{cases}$

A função f é dada por duas sentenças: para os valores x menores ou iguais a 0, associa-se $x+3$; para valores x maiores do que zero, associa-se $x^2 - 4x + 3$. O domínio da função é $\mathbb{R}$ e sua imagem é o conjunto:

$$\mathrm{Im}(f) = \{x + 3 \mid x \in \mathbb{R} \text{ e } x \le 0\} \cup \{x^2 - 4x + 3 \mid x \in \mathbb{R} \text{ e } x > 0\}.$$

7) Para $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi(n)$ é a quantidade de números relativamente primos com n e menores do que n (função de Euler).

Este é um exemplo de função que não está expresso por uma "fórmula". Apesar disso, conhecemos a maneira de associar os elementos de $\mathbb{N}^*$ com elementos de $\mathbb{N}$. Por exemplo: $\varphi(6) = 2$, pois são dois os números relativamente primos com 6 e menores do que 6: 1 e 5.

Analogamente, $\varphi(19) = 18$, $\varphi(42) = 12$ etc. Para a função de Euler temos: $\mathrm{D}(\varphi) = \mathbb{N}^*$ e $\mathrm{Im}(\varphi) = \{\varphi(n) \mid n \in \mathbb{N}^*\}$.

Para calcular $\varphi(n)$, usamos a decomposição de n em fatores primos (teorema fundamental da aritmética):

$$n = p_1^{\alpha 1} \cdot p_2^{\alpha 2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha k}, \text{ com } p_1 < p_2 < \ldots < p_k$$

primos distintos e $\alpha_i \in \mathbb{N}$ para todo i. Fazemos

$$\varphi(n) = \varphi(p_1^{\alpha_1}) \cdot \varphi(p_2^{\alpha_2}) \cdot \ldots \cdot \varphi(p_n^{\alpha_n}) =$$
$$= (p_1^{\alpha_{1-1}}) \cdot (p_1 - 1) \cdot (p_2^{\alpha_{2-1}}) \cdot (p_2 - 1) \cdot (p_3^{\alpha_{3-1}}) \cdot (p_3 - 1) \cdot \ldots \cdot (p_1^{\alpha_{1-1}}) \cdot (p_1 - 1)$$

Por exemplo, para $n = 504 = 2^3.3^2.7$, temos que a quantidade de números relativamente primos com 504 e menores do que 504 é:

$$\varphi(504) = \varphi(2^3)\cdot\varphi(3^2)\cdot\varphi(7) = 2^2\cdot(2-1)\cdot(3-1)\cdot(7-1) = 4\cdot 6\cdot 6 = 144$$

8) $h(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R}-\mathbb{Q} \end{cases}$

A função h, dada por duas sentenças, associa 1 aos números racionais e 0 aos números irracionais. Seu domínio é $\mathbb{R}$ e sua imagem é $\text{Im}(h) = \{0,1\}$.

Observação 8. Voltaremos a falar do conjunto-imagem de uma função quando estudarmos os gráficos de funções.

4.2 Igualdade de funções

Quando duas funções são iguais? Serão iguais as funções f e g definidas por $f(x) = x-1$ e $g(x) = \dfrac{x^2-1}{x+1}$?

Teorema. *Duas funções f e g são iguais se e somente se*

i) f *e* g *têm o mesmo domínio e*

ii) $f(x) = g(x)$ *para todo* x *do domínio de* f.

O teorema responde a nossa pergunta inicial: o domínio da função f é $\mathbb{R}$ e o domínio da função g é $\mathbb{R}-\{-1\}$; logo, as funções não são iguais, pois a condição (i) não é satisfeita. É tentador cancelar $x+1$ na expressão da função g. Mas lembre-se que somente podemos cancelar expressões seguramente não-nulas, ou seja,

$$\frac{x^2-1}{x+1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} = x-1$$

somente ocorre para $x \neq -1$. Lembre-se também que não basta a lei para caracterizar uma função.

Outros exemplos de funções

Nos próximos exemplos alguns conceitos estão expressos em forma de função: as operações, o determinante de uma matriz, as projeções, a distância. Estas funções serão estudadas com mais detalhes em disciplinas posteriores. Observe que na maioria dos exemplos o domínio ou o contradomínio, ou ambos, são produtos cartesianos, o que caracteriza as funções de mais de uma variável.

9) $a:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}, a(x,y)=x+y$ (operação adição em $\mathbb{R}$)
$m:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}, m(x,y)=x+y$ (operação multiplicação em $\mathbb{R}$)

10) Seja M o conjunto das matrizes quadradas 3×3.

$$k:M\to\mathbb{R}, k(A)=\det(A)$$

11) $F:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}\times\mathbb{R}, F(x,y)=(x,0)$ (projeção na primeira coordenada)

12) $G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\times\mathbb{R}, G(x)=(0,x)$ (inclusão)

13) $K:(\mathbb{R}\times\mathbb{R})\times(\mathbb{R}\times\mathbb{R})\to(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$

$K((x,y),(u,v))=(x+u,y+v)$ (adição de vetores)

14) $d:(\mathbb{R}\times\mathbb{R})\to\mathbb{R}, d(x,y)=|x-y|$ (distância entre dois pontos na reta)

15) $d:(\mathbb{R}\times\mathbb{R})\times(\mathbb{R}\times\mathbb{R})\to\mathbb{R}, d((x,y)(u,v))=\sqrt{(x-u)^2+(y-v)^2}$
(distância entre dois pontos no plano)

16) Seja A um conjunto não-vazio e $P(a)$ o conjunto das partes de A.

17) $h:P(A)\times P(A)\to P(A), h(X,Y)=X\cap Y$ (intersecção de conjuntos).

Exercícios propostos

1) Dada a função $f(x)=\dfrac{4x-3}{5x+6}$, determine:

a) o domínio de f

b) $f(2x)$ e $f(-2x)$

c) $f(-1)$

d) $f(2x + 1)$

e) x tal que $f(x) = 9$

f) $f(2x) + 1$

2) Determine o domínio das funções:

a) $t(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}} + \dfrac{1}{x}$

b) $m(x) = \dfrac{2}{x^2 - 3} + \dfrac{1}{\sqrt{25 - x^2}} - \sqrt[3]{x-5}$

c) $F(x) = x\sqrt[2]{x^2 - 40} + \dfrac{3x^5 - 2}{2\sqrt{6 - x^2}}$

3) Dê dois exemplos de relações em $\mathbb{R}$ que não são funções.

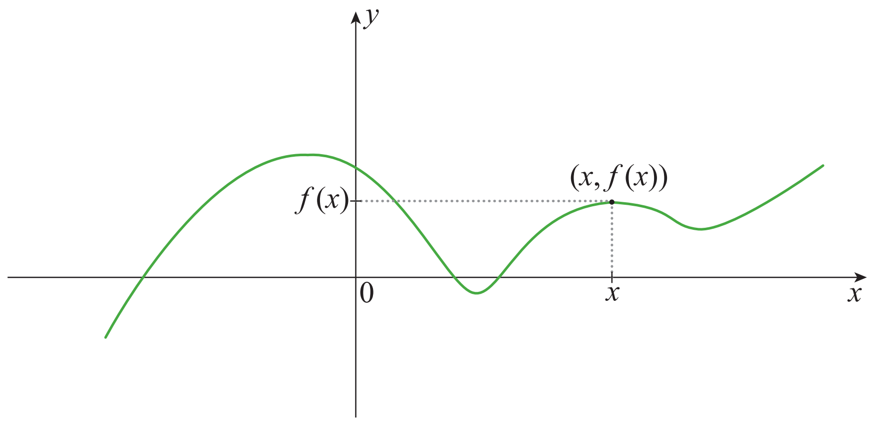
4) Seja $g(t) = \dfrac{1+t}{1-t}$. Determine $g\left(\dfrac{1}{1+t}\right)$ e $g\left(\dfrac{1}{1-t}\right)$.

4.3 Gráfico de uma função

O gráfico é o "retrato" de uma função. Facilita, entre outras coisas, a análise de relatórios ou perspectivas econômicas, cotação de moedas, pesquisas estatísticas etc. O gráfico permite visualizar melhor o comportamento da função, seu crescimento e seus máximos e mínimos.

Nosso estudo aqui se restringe às funções reais de uma variável real, isto é, funções cujo domínio é um subconjunto de $\mathbb{R}$ e cujo contradomínio é $\mathbb{R}$. Como uma função é uma relação especial, podemos aproveitar a idéia dos gráficos de relações já estudados; o gráfico de uma função é, em geral, uma curva ou reunião de partes de curvas, ou de pontos, representados no plano cartesiano. A variável independente é em geral marcada sobre o eixo horizontal (eixo das abscissas) e a variável dependente é marcada sobre o eixo vertical (eixo das ordenadas).

Definição. Seja $A \subset \mathbb{R}$ e $f : A \to \mathbb{R}$ uma função. O gráfico de f é o conjunto de todos os pontos do plano cujas coordenadas são $(x, f(x))$, com $x \in A$.



Simbolicamente:

$$Gr(f) = \{(x, y) \in A \times B \mid y = f(x)\} = \{(x, f(x)) \mid x \in A\}$$

Observação 9. O gráfico é uma representação da função por desenho ou figura geométrica, mediante a associação, um a um, dos pares ordenados de números reais com pontos de um plano, usando um sistema de eixos coordenados (como foi feito para números reais e pontos de uma reta).

Exemplos:

17) Seja $A = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \le n \le 5\}$ e $f : A \to \mathbb{N}, f(n) = n - 1$

Como $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, é possível determinar todos os valores $f(n)$ e o gráfico é $Gr(f) = \{(1,0), (2,1), (3,2), (4,3), (5,4)\}$

x	$y = f(x)$
1	0
2	1
3	2
4	3
5	4

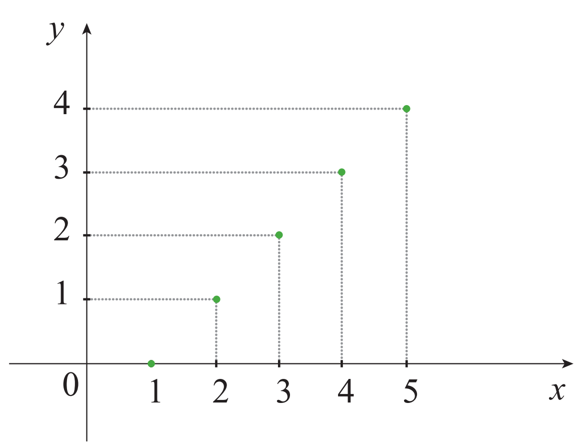


Figura 4.2

5) $f:[0,3]\to\mathbb{R}, f(x)=x-3$

Neste caso não é possível fazer uma tabela para todos os valores de x em $[0,3]$. Mostraremos mais adiante que esta função tem um gráfico que é um segmento de reta. Assim, basta conhecer dois de seus pontos.

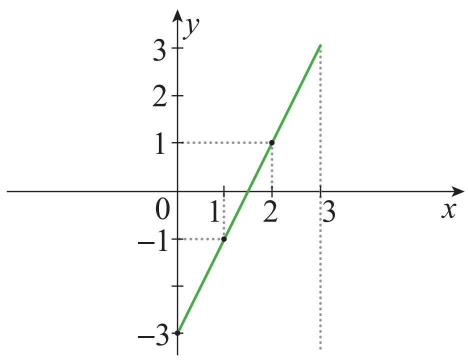


Figura 4.3

Observação 10. De modo geral, para construir o gráfico de uma função com lápis e papel, não basta encontrarmos alguns pontos dando alguns valores para a variável independente. No próximo capítulo estudaremos as funções elementares e faremos o esboço de seus gráficos utilizando as propriedades destas funções.

Observação 11. Um outro processo de construção de gráficos é a utilização de programas computacionais especificamente criados para este fim; se você já teve contato com estes programas na disciplina de Informática, agora pode usá-los livremente. No entanto, a utilização de imagens nada adianta se não soubermos analisar esta imagem. Para isso, também o conhecimento dos gráficos das funções elementares é importante.

4.4 Funções crescentes e funções decrescentes

Como o próprio nome diz, podemos investigar o crescimento ou decrescimento de uma função real num determinado subconjunto de $\mathbb{R}$. Veja o exemplo seguinte:

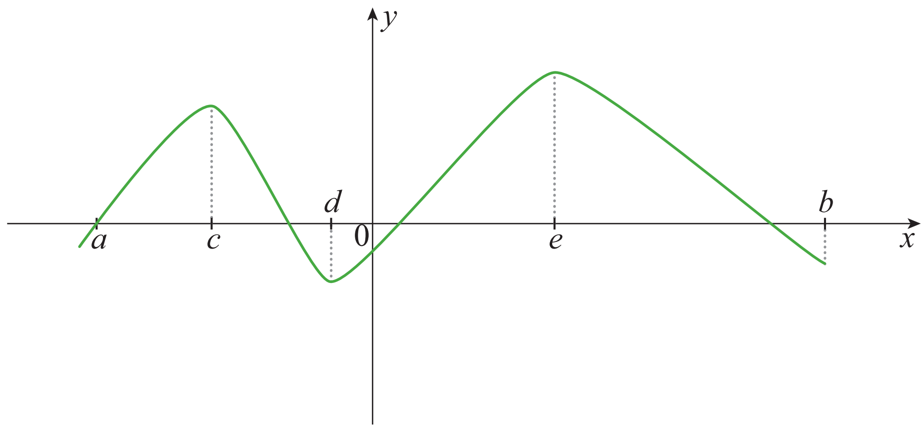


Figura 4.4

A função é crescente nos intervalos $[a,c]$ e $[d,e]$ e decrescente nos intervalos $[c,d]$ e $[e,b]$.

Definição.

i) Dizemos que uma função f é crescente no conjunto $A \subset \mathbb{R}$ se e somente se $x_1 < x_2$ implica $f(x_1) < f(x_2)$, para todos x_1 e x_2 em A.

ii) Dizemos que f é decrescente no conjunto $A \subset \mathbb{R}$ se e somente se $x_1 < x_2$ implica $f(x_1) > f(x_2)$, para todos x_1 e x_2 em A.

Simbolicamente:

i) f é crescente em $A \Leftrightarrow (\forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2))$

ii) f é decrescente em $A \Leftrightarrow (\forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2))$

Observação 12. Nas funções crescentes num intervalo I, à medida que os valores x aumentam em I, os valores $f(x)$ também aumentam. Nas funções decrescentes num intervalo J, à medida que os valores x aumentam em J, os valores $f(x)$ diminuem.

Exemplos:

19) $f(x) = 3x - 1,\ D(f) = \mathbb{R}$

Note que usamos as propriedades da relação de ordem.

Para x_1 e x_2 reais com $x_1 < x_2$, temos $f(x_1) = 3x - 1 < 3x_2 - 1 = f(x_2)$. Logo, f é crescente em todo seu domínio.

20) $f(x) = -x+4, \mathrm{D}(f) = \mathbb{R}$

Para x_1 e x_2 reais com $x_1 < x_2$, temos $-x_1 > -x_2$ e assim

$$f(x) = -x+4 > x_2+4 = f(x_2).$$

Logo, f é decrescente em todo o seu domínio.

21) $h(x) = \begin{cases} x+1 \text{ se } x \geq 0 \\ -x+1 \text{ se } x < 0 \end{cases}, \ \mathrm{D}(f) = \mathbb{R}$

No intervalo $[0,\infty)$, se $x_1 < x_2$, temos que

$$h(x_1) = x_1 - 1 < x_2 - 1 = h(x_2)$$

e h é crescente. No intervalo $(-\infty,0)$, se $x_1 < x_2$, temos que $h(x_1) = -x_1 + 1 > -x_2 + 1 = h(x_2)$ e h é decrescente.

Assim, h é crescente no intervalo $[0,\infty)$ e decrescente no intervalo $(-\infty,0)$.

22) $g(x) = 7, \mathrm{D}(g) = \mathbb{R}$

g não é uma função crescente, nem decrescente, em qualquer intervalo de seu domínio; de fato, para x_1 e x_2 reais tais que $x_1 < x_2$, tem-se $f(x_1) = 7 = f(x_2)$.

4.5 Funções injetoras

Comecemos com um exemplo: considere a função que a cada aluno matriculado na UFSC associa a sua data de nascimento. Certamente há pelo menos dois alunos da UFSC com a mesma data de nascimento, isto é, existem elementos distintos do domínio que possuem a mesma imagem. Isto não acontece se tomarmos a função que a cada aluno da UFSC associa seu número de matrícula: alunos diferentes têm diferentes números de matrícula, ou seja, elementos diferentes do domínio possuem imagens diferentes. Quando acontece esta última situação, dizemos que a função é injetora.

Alguns autores dizem que a função é **injetiva** ou um a um. A propriedade também é chamada de injetividade.

Definição. Seja $f : A \to B$ uma função. Dizemos que f é injetora se e somente se para quaisquer x_1 e x_2 do domínio tais que $x_1 \neq x_2$, tem-se $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Simbolicamente,

$$f \text{ é injetora} \Leftrightarrow \forall\, x_1, x_2 \in A, \text{ se } x_1 \neq x_2, \text{ então } f(x_1) \neq f(x_2)\ .$$

Ou, equivalentemente:

$$f \text{ é injetora} \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in A, se f(x_1) = f(x_2)\ , \text{então } x_1 = x_2$$

Exemplos:

23) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 3x - 1$.

Sejam x_1 e x_2 reais e suponhamos que $f(x_1) = f(x_2)$. Então,

$$3x_1 - 1 = 3x_2 - 1$$

$$3x_1 = 3x_2$$

$$x_1 = x_2$$

Assim, f é injetora.

24) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, h(x) = x^2 - 1$.

Sejam x_1 e x_2 reais. Se $h(x_1) = h(x_2)$, então:

$$(x_1)^2 - 1 = (x_2)^2 - 1$$

$$(x_1)^2 = (x_2)^2$$

Observe que não podemos concluir daí que $x_1 = x_2$, uma vez que podemos ter, por exemplo, $(-1)^2 = 1^2$ e $-1 \neq 1$. Assim, a função h não é injetora.

Observação 13. Para mostrar que uma função não é injetora, basta exibir elementos diferentes do domínio que possuem a mesma imagem: $x_1 \neq x_2 e f(x_1) = f(x_2)$.

Observação 14. É possível, por meio do gráfico, verificar se uma função é injetora ou não. Uma função será injetora se e somente se qualquer paralela ao eixo das abscissas corta o gráfico da função em no máximo um ponto.

4.6 Funções sobrejetoras

Considere a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(t) = 2t - 9$. Qual a imagem de g?

Seja y um número real qualquer. É possível encontrar um número real t tal que $g(t) = y$?

Se $y = 2t - 9$, então $t = \dfrac{y+9}{2}$ e $g(t) = y$. Assim, todo número real é imagem de algum elemento do domínio. A imagem da função é o próprio contradomínio $\mathbb{R}$ e a função é chamada sobrejetora.

Alguns autores dizem que a função é **sobrejetiva.** A propriedade também é chamada de sobrejetividade.

Definição. Seja $f : A \to B$ uma função. Dizemos que f é sobrejetora se e somente se a imagem de f for igual ao seu contradomínio, ou seja, $\forall y \in B, \exists x \in A \mid f(x) = y$.

Exemplos:

25) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{1}{2}x + 1$ é sobrejetora.

De fato: seja $y \in \mathbb{R}$. Se $y = \dfrac{1}{2}x + 1$, então

$$x = 2y - 2e f(x) = f(2y-2) = \frac{1}{2}(2y-2) + 1 = y \; .$$

Logo, f é sobrejetora.

26) $g[0,1] \to [0,1], g(x) - x^2$ é sobrejetora.

De fato: seja $y \in [0,1]$, ou seja, $0 \leq y \leq 1$. Sendo y um número positivo (ou nulo), existe $\sqrt{y}$ e, além disso, $0 \leq \sqrt{y} \leq 1$. Então, se $x = \sqrt{y}$, temos $g(x) = g(\sqrt{y}) = (\sqrt{y})^2 = \mid y \mid = y$. Logo, g é sobrejetora.

27) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, h(x) = x$ não é sobrejetora.

Existe pelo menos um número real, por exemplo, -5, que não é imagem de nenhum elemento do domínio (o módulo de um número é sempre positivo ou nulo!). A imagem da função é $[0, \infty)$.

Observação 15. Uma função f não é sobrejetora quando existe pelo menos um elemento do contradomínio que não é imagem de ne-

Lembre-se que a negação do quantificador "todo" é o quantificador "existe pelo menos um", no sentido de "existe pelo menos um valor x para o qual a definição não se aplica".

nhum elemento do domínio. Note que uma função do domínio na imagem, $f: \mathrm{D}(f) \to \mathrm{Im}(f)$, é sempre sobrejetora.

Observação 16. Uma função terá a propriedade de ser injetora ou não dependendo de seu domínio, bem como de seu contradomínio. O mesmo acontece para a propriedade de ser sobrejetora.

Por exemplo:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 6x^2 - \sqrt{5}$ **não é injetora** mas

$g: [0, \infty) \to \mathbb{R}, g(x) = 6x^2 - \sqrt{5}$ é injetora.

Por quê?

$h: [0, \infty) \to \mathbb{R}, h(x) = \sqrt{x}$ não é sobrejetora

$s: [0, \infty) \to [0, \infty), s(x) = \sqrt{x}$ é sobrejetora.

Por quê?

Aqui, novamente vale lembrar a **Observação 6**: não basta somente a regra (a lei) de associação dos elementos. É preciso também estar claro quais são os conjuntos domínio e contradomínio. Dependendo dos conjuntos estabelecidos, a função pode ser injetora ou não, sobrejetora ou não.

4.7 Funções bijetoras

A função $g: [0,1] \to [0,1], g(x) = x^2$ é injetora e sobrejetora, como já foi visto.

Dizemos neste caso que g é uma função bijetora ou que é uma bijeção do intervalo $[0,1]$.

Definição. Uma função $f: A \to B$ é bijetora se e somente se é injetora e sobrejetora.

Exemplos:

28) $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, h(x) = 3x - 1$ é bijetora.

i) é injetora, pois, dados a e b em $\mathbb{R}$ com $h(a) = h(b)$, tem-se $3a - 1 = 3b - 1$, o que significa $a = b$.

ii) é sobrejetora, pois, dado qualquer número real y, existe $x = \frac{y+1}{3}$ tal que $h(x) = y$.

29) $g:[0,1] \to [0,1], g(x) = x^3$ é bijetora.

i) é injetora, pois para a e b em $[0,1]$ tais que $a^3 = b^3$, temos $a = b$ (prove!).

ii) é sobrejetora, pois para qualquer y em $[0,1]$ existe $x = \sqrt[3]{x}$, x no intervalo $[0,1]$ (por que?) tal que $g(x) = y$.

4.8 Composição de funções

Neste tópico estudaremos um procedimento de construir novas funções a partir de funções dadas, procedimento este conhecido como "composição de funções". Começaremos com um exemplo:

Sejam $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções dadas por $f(x) = 2x$ e $g(x) = x^2 - 3x$. Como f é sobrejetora (prove!), faz sentido aplicar a função g a $f(x)$, uma vez que $\text{Im}(f) = \text{D}(g) = \mathbb{R}$.

Então, $g(f(x)) = g(2x) = (2x)^2 - 3(2x) = 4x^2 - 6x$. Dizemos que a função h, $h:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, h(x) = 4x^2 - 6x$, resulta da composição de g e f (nesta ordem). Escrevemos $h = g \circ f$. Em outras palavras, a função que associa $x \in \mathbb{R}$ a $g(f(x)) \in \mathbb{R}$ é chamada função composta de g com f e denotada por $g \circ f$.

É sempre possível determinar a função composta de duas funções? Tomemos por exemplo $f(x) = 2x$ e $g(x) = \sqrt{x}$. Será possível calcular $g \circ f(-3)$?

Vejamos: $g \circ f(-3) = g(f(-3)) = g(-6) = \sqrt{-6}$, que não é um número real! Isto ocorre porque $f(-3)$ não pertence ao domínio de g, que é $[0,\infty)$. Concluímos que $g \circ f$ existe para aqueles valores de x tais que $f(x) \geq 0$. De modo geral, para que possamos definir a função composta de g com f, é preciso que $\text{Im}(f) \subset \text{D}(g)$.

Definição. Sejam $f: A \to B$ e $g: E \to F$ funções tais que $\mathrm{Im}(f) \subset E$. A função que associa a cada $x \in A$, $g(f(x)) \in F$, é chamada função composta de g com f e é denotada por $g \circ f$. A função $g \circ f: A \to F$ é definida por $g \circ f(x) = g(f(x))$.

Exemplos:

30) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 3x$ e $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = 2x + 1$

Como f é sobrejetora (prove!), temos que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{D}(g) = \mathbb{R}$. Logo, a função composta de g com f é:

$$g \circ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x) = 2(3x) + 1 = 6x + 1$$

Podemos também determinar a composta de f com g?

Como g é sobrejetora (prove!), temos que $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{D}(f)$. Logo, a função composta de f com g é dada por:

$$f \circ g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \text{ com}$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x+1) = 3 \cdot (2x+1) = 6x + 3$$

Como você pode observar, $f \circ g$ e $g \circ f$ são funções diferentes!

31) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x$ e $g: [0, \infty) \to \mathbb{R}, g(x) = \sqrt{x}$

Neste caso temos $\mathrm{Im}(g) = \mathbb{R}$ e $\mathrm{D}(g) = [0, \infty)$. Como $\mathrm{Im}(f)$ não está contida no domínio de g, não é possível definir a composta de g com f, $g \circ f$. No entanto, como $\mathrm{Im}(g) = [0, \infty) \subset \mathbb{R} = \mathrm{D}(f)$, podemos definir a composta de f com g:

$$f \circ g: [0, \infty) \to \mathbb{R}, (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = 2\sqrt{x}.$$

Para podermos definir a composta de g com f (a função $g \circ f$), devemos fazer uma restrição ao domínio da função f para que sua imagem seja um conjunto de números positivos; ao fazer isso, estamos definindo uma nova função

$$h: [0, \infty) \to \mathbb{R}, h(x) = 2x, \ \mathrm{Im}(h): [0, \infty) \subset [0, \infty) = \mathrm{D}(g)$$

e, portanto, $(g \circ h)(x) = g(h(x)) = g(2x) = \sqrt{2x}$.

32) Considere as funções $f(x)=x^2+5$ e $g(x)=\sqrt{x-6}$

Qual deve ser o domínio da função f para que seja possível definir $g\circ f$ *?*

Como $g\circ f$ só poderá ser definida quando $\mathrm{Im}(f)\subset \mathrm{D}(g)$, devemos inicialmente determinar $\mathrm{D}(g)$ dado por

$$\mathrm{D}(g)=\{x\in\mathbb{R}\mid x-6\geq\}=[6,\infty).$$

Assim, para que $\mathrm{Im}(f)\subset \mathrm{D}(g)$ devemos ter $f(x)=x^2+5\geq 6$. Resolvendo a inequação, temos que os valores de x que resultam em $f(x)=x^2+5\geq 6$ constituem o conjunto $A=(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$. Tomando o domínio de f como o conjunto $A=(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$, é possível definir $g\circ f$. Assim, para $f:A\to\mathbb{R}$ e $g:[6,\infty)\to\mathbb{R}$, temos $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x^2+5)=\sqrt{(x^2+5)-6}=\sqrt{x^2-1}$.

Exercícios propostos

5) Sejam $f(x)=\dfrac{1}{3x^2}$ e $g(x)=x^2+2$. Determine, se possível, as funções $g\circ f$ e $f\circ g$.

6) Se $f(x)=\sqrt{x^2-4}$ e $g(x)=\dfrac{x+1}{|x+5|}$, determine condições para que se possa definir $g\circ f$ e $f\circ g$.

Propriedades da composição de funções

A composição de funções pode ser vista como uma "operação" de funções. Neste sentido, algumas propriedades dessa operação podem ser úteis.

No que segue, f, g e h denotam funções compatíveis para a definição de compostas.

P1) A composição de funções em geral não é comutativa, ou seja, $g\circ f\neq f\circ g$. (Procure um exemplo para o qual a igualdade ocorre)

Esta propriedade nos permite compor mais de duas funções, respeitando as restrições da definição.

P2) A composição de funções é associativa, ou seja,

$$h \circ (f \circ g) = (h \circ f) \circ g\,.$$

P3) A função identidade ($A \subset \mathbb{R}$ e $\mathrm{Id} : A \to \mathbb{R}, \mathrm{Id}(x) = x$) funciona como um "elemento neutro" da composição, ou seja: para $f : A \to \mathbb{R}$ e $\mathrm{Id} : A \to A, \mathrm{Id} \circ f = f \circ \mathrm{Id} = f$.

De fato, $\mathrm{Id} \circ f$, $f \circ \mathrm{Id}$ e f têm o mesmo domínio A e ainda:

$$[(\mathrm{Id}) \circ f](x) = \mathrm{Id}(f(x)) = f(x), \forall x \in \mathrm{D}(f) \text{ e}$$

$$[f \circ (\mathrm{Id})](x) = f(\mathrm{Id}(x)) = f(x), \forall x \in \mathrm{D}(f)$$

Logo, $\mathrm{Id} \circ f = f \circ \mathrm{Id} = f$.

4.9 Função inversa

Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 3x - 1$. Existe uma função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = \mathrm{Id}(x) = x$, para todo $x \in \mathbb{R}$? Vejamos:

i) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x - 1) = x$

ii) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 3 \cdot g(x) - 1 = x$

Da igualdade (ii) obtemos

$$3 \cdot g(x) - 1 = x$$
$$3 \cdot g(x) = x + 1$$
$$g(x) = \frac{x+1}{3}$$

Verificamos que também a igualdade (i) é verdadeira para $g(x)$:

$$g(3x-1) = \frac{3x - 1 + 1}{3} = \frac{3x}{3} = x$$

A função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = \dfrac{x+1}{3}$ é chamada de função inversa da função f e é denotada por f^{-1}.

Pergunta: para toda função f é possível encontrar f^{-1}?

Observemos a função $f:\mathbb{R}\to[0,\infty), f(x)=x^2$. Procuramos uma função g tal que $(f\circ g)=(x)=x$ e $(g\circ f)=(x)=x$, ou seja:

i) $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x^2)=x$

ii) $(f\circ g)(x)=f(g(x))=[g(x)]^2=x$

Da igualdade (ii) obtemos $g_1(x)=\sqrt{x}$ ou $g_2(x)=-\sqrt{x}$, duas opções para $g(x)$ (lembre-se que já vimos isto na parte de Equações). O domínio destas funções é $[0,\infty)=\mathrm{Im}(f)$, mas elas devem satisfazer (i). Como $g_1\cdot(x^2)=\sqrt{x^2}=|x|$ e $g_2\cdot(x^2)=-\sqrt{x^2}=-|x|$, nenhuma das duas opções para g satisfaz a condição exigida. Logo, não é possível encontrar a função inversa de f.

Definição. Seja $f:A\to B$ uma função. Se existe $g:B\to A$ tal que $(f\circ g)(x)=x, \forall x\in B$ e $(g\circ f)(x)=x, \forall x\in A$, então a função g é chamada função inversa de f e é denotada por f^{-1}.

Observação 17. Como uma função é uma relação, podemos olhar para uma função $f:A\to B$ como uma relação de A em B, isto é, $f=\{(x,y)\in A\times B \mid y=f(x)\}=\{(x,f(x)) \mid x\in A\}$.

Como sempre existe a relação inversa de uma relação (veja a unidade "Relações"), a pergunta então é: sob que condições a relação inversa g de B em A é uma função? Em outras palavras, que característica deve ter a função f para que sua inversa exista?

Lembrando: a relação inversa g é dada por $g=\{(y,x)\in B\times A \,/\, (x,y)\in f\}$, ou seja, $(y,x)\in g$ se e somente se $(x,y)\in f$.

Observe no exemplo anterior qual era o "problema" da função f que "impedia" a existência da inversa: o fato de dois elementos diferentes do domínio terem a mesma imagem, uma vez que $x^2=(-x)^2$. Ao tentar calcular a função g, acabamos ficando com duas possibilidades, sendo que nenhuma delas "servia" para a inversa. A função inversa f^{-1} deve "fazer o caminho de volta da f", no sentido de "desfazer o que foi feito por f". Para isso, é necessário que cada elemento da imagem de f se origine de um único elemento do domínio; se isto não acontece, ao "fazer o caminho de volta" a candidata a inversa acaba por encontrar duas imagens para um único elemento de seu domínio (que é a imagem de f), o que a impede de ser uma função. Assim, uma das condições para que exista f^{-1} é que a função f deve ser injetora.

Observemos agora a função $h:(0,1)\to\mathbb{R}, h(x)=2x$. Ao "fazer o caminho de volta", a candidata a inversa deve "partir" de $\mathbb{R}$ e "voltar" ao intervalo $(0,1)$. Mas existem elementos de $\mathbb{R}$ que não são imagem de nenhum elemento de $(0,1)$ pela função h. Logo, esta candidata não será uma função, uma vez que, para ser função, todos os elementos de seu domínio devem ter uma imagem, isto é, a lei deve valer para todos os elementos do domínio.

Note que se considerarmos o conjunto imagem de h, todos os elementos deste conjunto estão associados a algum elemento do domínio. Conclusão: outra condição, além de ser injetora, para que a inversa de uma função f exista é que f seja sobrejetora. O teorema a seguir caracteriza as funções que admitem inversa.

Teorema. *Seja $f:A\to B$ uma função. Se f é bijetora, então existe $f^{-1}:B\to A$. Reciprocamente, se existe f^{-1}, então f é bijetora.*

Demonstração:

$(\to)$ **Hipótese:** f é bijetora

Tese: existe f^{-1}

Mostraremos que a relação inversa de f é uma função. Seja g a relação inversa de f,

$$g=\{(x,y)\in A\times B \mid (x,y)\in f\}$$

i) Seja $y\in B$ qualquer. Como f é sobrejetora, existe $x\in A$ tal que $f(x)=y$, ou seja, $(x,y)\in f$. Logo, $(x,y)\in g$. Assim, todo elemento de B está relacionado com algum elemento de A.

ii) Seja $y\in B$. Suponhamos que este y admita duas imagens x_1 e x_2 em A, isto é, $(y,x_1)\in g$ e $(y,x_2)\in g$. Então $(x_1,y)\in f$ e $(x_2,y)\in f$, ou seja, $f(x_1)=y=f(x_2)$. Como f é injetora, devemos ter $x_1=x_2$ e assim todo elemento y de B está relacionado com um único elemento de A. Logo, g é uma função e g é a inversa f^{-1} de f.

$(\leftarrow)$ **Hipótese:** existe f^{-1}

Tese: f é bijetora

i) provemos que f é injetora:

Sejam x_1 e x_2 em A tais que $f(x_1) = f(x_2) = y$, ou seja, $(x_1, y) \in f$ e $(x_2, y) \in f$. Então $(y, x_1) \in f^{-1}$ e $(y, x_2) \in f^{-1}$. Como f^{-1} é função, devemos ter $x_1 = x_2$. Logo, f é injetora.

ii) provemos que f é sobrejetora:

Seja $y \in B$. Como f^{-1} é função, existe um único $x \in A$ tal que $(y, x) \in f^{-1}$. Então $(x, y) \in f$, ou seja, existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Logo, f é sobrejetora.

De (i) e (ii) temos que f é bijetora.

■

Observação 18. Quando existe a inversa de uma função f, dizemos que f é **inversível**.

Observação 19. Quando $f : A \to B$ é inversível, para $x \in A$ e $y \in B$, $f(x) = y$ se e somente se $f^{-1}(y) = x$.

Observação 20. $\mathrm{D}(f^{-1}) = \mathrm{Im}(f)$ e $\mathrm{Im}(f^{-1}) = \mathrm{D}(f)$.

Observação 21. Se uma função $f : A \to B$ é injetora, a função $f_1 : A \to \mathrm{Im}(f)$ será inversível. Em outras palavras, se restringirmos o contradomínio de uma função injetora à sua imagem, ela será inversível.

Exemplo:

33) $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$ não é inversível, mas

$$h : [0, \infty) \to [0, \infty), h(x) = x^2$$

é inversível e sua inversa é $h^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

Exercícios resolvidos

1) Encontre a inversa da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x^3 - 1$.

Resolução: $y = 2x^3 - 1, \;\; y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$

$$y+1=2x^3$$
$$x^3=\frac{y+1}{2}$$
$$x=\sqrt[3]{\frac{y+1}{2}}=f^{-1}(y)$$

Assim, a função inversa de f é a função:

$$f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f^{-1}(x)=\sqrt[3]{\frac{x+1}{2}}$$

Note que podemos usar qualquer letra para identificar a variável independente. Podemos então escrever:

$$f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f^{-1}(x)=\sqrt[3]{\frac{x+1}{2}}$$ ou então

$$f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f^{-1}(t)=\sqrt[3]{\frac{t+1}{2}}.$$

2) Encontre a inversa da função $f:(-\infty,0]\to[5,+\infty)$, $f(x)=3x^2+5$.

Resolução: $y=f(x)\Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$

$$y=3x^2+5$$
$$x^2=\frac{y-5}{3}$$
$$x=\pm\sqrt{\frac{y-5}{3}}$$

Como $x<0$, tomamos $x=-\sqrt{\frac{y-5}{3}}$. A inversa de f será então:

$$f^{-1}:(5,+\infty)\to(-\infty,0],\ f^{-1}(x)=\sqrt{\frac{x-5}{3}}.$$

Observação 22. Muitas vezes sabemos que a função é inversível, mas não conseguimos a expressão da inversa devido à dificuldade (ou até impossibilidade) de "isolar" a variável independente em função da variável dependente. Por exemplo: usando as idéias do

Cálculo podemos mostrar que $f(x)=x^5+x+1=y$ é inversível. Você consegue "isolar" x em função de y?

Propriedades da função inversa

P1) A inversa de uma função é única.

Demonstre como exercício.

P2) Se f é inversível, então f^{-1} é inversível e $(f^{-1})^{-1}=f$ (ou ainda: a inversa da inversa de uma função é a própria função).

Demonstre como exercício.

P3) Se $f:A\to B$ e $h:B\to C$ são inversíveis, então $h\circ f:A\to C$ é inversível e $(h\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ h^{-1}$.

Demonstração:

Para provarmos esta propriedade, devemos provar inicialmente que a composta de duas funções bijetoras é bijetora.

i) $h\circ f$ é injetora:

Sejam x_1 e x_2 em A tais que $(h\circ f)(x_1)=(h\circ f)(x_2)$. Então $h(f(x_1))=h(f(x_2))$. Como h é injetora, devemos ter $f(x_1)=f(x_2)$; como também f é injetora, temos $x_1=x_2$ e $h\circ f$ é injetora.

ii) $h\circ f$ é sobrejetora:

Seja $z\in C$; como h é sobrejetora, existe $y\in B$ tal que $h(y)=z$. Como também f é sobrejetora, temos que existe um $x\in A$ tal que $f(x)=y$. Assim, existe $x\in A$ tal que $(h\circ f)(x)=h(f(x))=h(y)=z$ e $h\circ f$ é sobrejetora. Complete a demonstração como exercício.

■

P4) O gráfico de f^{-1} é simétrico ao gráfico de f em relação à bissetriz do primeiro e terceiro quadrantes.

Como exemplo, esboce os gráficos de $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=3x-1$ e de sua inversa $f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f^{-1}(x)=\dfrac{x+1}{3}$.

Exercícios propostos

7) Verifique a propriedade P3 para as funções
$f:(0,\infty)\to(0,\infty),\ f(x)=\dfrac{2}{5x}$ e $g:(0,\infty)\to(-3,\infty),\ g(x)=4x^2-3$.

8) Um fazendeiro tem $100\,\text{m}$ de cerca para construir um galinheiro retangular. Chamando x o comprimento de um lado do galinheiro, descreva a área em função de x. Use o resultado para achar a maior área possível e os comprimentos dos lados que dão esta área.

9) Suponha agora que o fazendeiro da questão (8) decida construir a cerca, mas aproveitando a parede de um celeiro, de modo que ele terá de cercar apenas 3 lados. Se t é o comprimento de um lado perpendicular à parede do celeiro, ache a área cercada como função de t. Ache também a maior área possível e os comprimentos dos lados que dão esta área.

10) A área de um retângulo pode ser função de seu perímetro?

11) Seja $f(x)=x^2-3x+2$. Encontre o valor de x tal que $f(x)=0,5$.

12) Mostre que a operação "adição de números naturais" é uma função: $f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N},\ f(a,b)=a+b$ (lembre que: $(a,b)=(c,d)$ se e somente se $a=c$ e $b=d$).

13) Determine o domínio das funções:

a) $f(x)=\dfrac{4x-5}{3x-1}$

b) $g(x)=\dfrac{x-8}{x^2-7x+6}$

c) $h(x)=\dfrac{2x+5}{\sqrt{3x+5}}$

14) Classifique as funções seguintes em: (I) injetora, (II) sobrejetora, (III) bijetora, (IV) não injetora e (V) não sobrejetora:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2x+1$

b) $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=1-x^2$

c) $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+,\ h(x)=|x-1|$

d) $m:\mathbb{N}\to\mathbb{N},\ m(x)=-3x+2$

e) $n:\mathbb{R}\to\mathbb{Z},\ n(x)=[x]$ (maior inteiro)

f) $p:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}^*,\ p(x)=\dfrac{1}{x}$

g) $q:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ q(x)=x^3$

h) $r:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ r(x)=|x|\cdot(x-1)$

15) Determine o menor valor de b em $B=\{x\in\mathbb{R}/x\geq b\}$ de modo que a função f de $\mathbb{R}$ em B definida por $f(x)=x^2-4x+6$ seja sobrejetora.

16) Determine o maior valor de a em $A=\{x\in\mathbb{R}/x\leq a\}$ de modo que a função f de A em $\mathbb{R}$ definida por $f(x)=2x^2-3x+4$ seja injetora.

17) Os conjuntos A e B têm respectivamente m e n elementos. Considera-se uma função $f:A\to B$. Qual a condição sobre m e n para que f possa ser injetora? E para f ser sobrejetora? E bijetora?

18) Quantas funções injetoras podemos definir de $A=\{a,b\}$ em $B=\{c,d,e,f\}$?

19) Quantas funções sobrejetoras podemos definir de $A=\{a,b,c\}$ em $B=\{d,e\}$?