Capítulo 6

Números racionais

Neste texto, faremos um estudo do conjunto dos números racionais a partir da idéia de fração. As operações e a relação de ordem serão trabalhadas nas duas representações: decimal e fracionária. Também apresentaremos as propriedades relativas às operações.

6.1 Introdução

Os números racionais aparecem pela primeira vez nas séries iniciais do Ensino Fundamental, com a idéia de "fração"; na quinta e na sexta séries do Ensino Fundamental o assunto é retomado sob o ponto de vista de um conjunto numérico com operações próprias e novos algoritmos. O que era o "pedaço de um todo" passa a ser tratado como número. É um assunto que requer uma abordagem cuidadosa para que o estudante possa fazer essa transição de modo natural. Muito importante também neste contexto são as diferentes representações de um número racional.

Historicamente, os números racionais já aparecem nos mais antigos registros. Em 2000 a.C. os babilônios já usavam frações, essencialmente como as usamos hoje; aos egípcios se credita o primeiro tratamento sistemático das frações (papiro de Rhind, cerca de 1700 a.C.) referente a frações unitárias (frações com numerador igual a 1). Os gregos possuíam notações especiais para as frações (escreviam somente o denominador das frações unitárias) e os romanos usavam em geral frações de denominador 12. Cálculos com frações constituíam a parte principal da instrução matemática nas escolas romanas. O modo atual de representar as frações provavelmente originou-se na civilização indiana.

No século VI, o denominador era escrito acima do numerador, sem o traço; por volta do ano 1000 de nossa era, os árabes introduziram o traço separando numerador de denominador. Em

1585, **Simon Stevin** apresentou ao ocidente a notação decimal como a conhecemos hoje, que se originou da representação de uma fração como soma de frações cujos denominadores são potências de 10 e cujos numeradores são os algarismos. Esta notação universalizou-se somente no século XVIII, apesar das vantagens que tem sobre a notação em forma de fração. Até hoje existem pequenas diferenças relativas à notação decimal; por exemplo, os americanos usam o ponto e nós usamos a vírgula para separar a parte inteira da parte fracionária: eles escrevem 2.1 e nós escrevemos 2,1 para representar dois inteiros e um décimo.

Assim como nos outros textos dessa disciplina, aconselhamos o leitor a estudá-lo com lápis e papel na mão; uma calculadora simples também pode ser útil.

6.2 A idéia da construção do conjunto dos números racionais

A idéia da construção do conjunto dos números racionais é semelhante àquela apresentada na construção do conjunto dos números inteiros: utilizar o que "falta" em $\mathbb{Z}$ para gerar novos números, formando um conjunto mais amplo, no qual o "defeito" de $\mathbb{Z}$ não aparece. Mas qual é o "defeito"? O que "falta" em $\mathbb{Z}$? Assim como em $\mathbb{N}$ nem sempre podemos subtrair, em $\mathbb{Z}$ nem sempre podemos dividir. Ou seja: as equações da forma $a + x = b$ com a e b naturais nem sempre têm solução em $\mathbb{N}$ (só têm solução em $\mathbb{N}$ quando $b \geq a$) e as equações da forma $bx = a$ com a e b inteiros nem sempre têm solução em $\mathbb{Z}$ (têm solução em $\mathbb{Z}$ quando $b \mid a$). Analogamente ao processo do capítulo 2, "acrescentamos" ao conjunto $\mathbb{Z}$ todas as soluções das equações da forma $bx = a$ com a e b inteiros. Vamos observar as equações desta forma:

$1x = 0$	$\underline{2x = 0}$	$\underline{3x = 0}$	$\cdots$	$\underline{(-1)x = 0}$	$\underline{(-2)x = 0}$	$\cdots$
$1x = 1$	$2x = 1$	$3x = 1$	$\cdots$	$\underline{(-1)x = 1}$	$(-2)x = 1$	$\cdots$
$1x = 2$	$\underline{2x = 2}$	$3x = 2$	$\cdots$	$\underline{(-1)x = 2}$	$\underline{(-2)x = 2}$	$\cdots$
$1x = 3$	$2x = 3$	$\underline{3x = 3}$	$\cdots$	$\underline{(-1)x = 3}$	$(-2)x = 3$	$\cdots$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$1x = -1$	$2x = -1$	$3x = -1$	$\cdots$	$\underline{(-1)x = -1}$	$(-2)x = -1$	$\cdots$
$1x = -2$	$\underline{2x = -2}$	$3x = -2$	$\cdots$	$\underline{(-1)x = -2}$	$\underline{(-2)x = -2}$	$\cdots$
$1x = -3$	$2x = -3$	$\underline{3x = -3}$	$\cdots$	$\underline{(-1)x = -3}$	$(-2)x = -3$	$\cdots$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$

As soluções das equações da primeira coluna são números inteiros, ou melhor, geram todos os números inteiros; as outras equações que têm solução inteira estão sublinhadas e correspondem às mesmas soluções da primeira coluna. Observe que não listamos equações do tipo $0x = a$ quando a é diferente de zero, uma vez que qualquer número inteiro multiplicado por zero resulta zero: equações deste tipo não têm solução no universo dos conjuntos numéricos. As equações que restam não admitem como solução um número inteiro; são estas soluções que iremos "acrescentar" ao conjunto $\mathbb{Z}$. Mas observe que em nossa listagem de possíveis equações temos equações com a mesma solução; por exemplo, $2x = 3$ e $(-2)x = -3$. Ambas têm a mesma solução, pois a primeira se obtém da segunda pela multiplicação de um mesmo número em ambos os membros, o que não altera a equação. Assim, não será preciso acrescentar todas as soluções correspondentes às equações da tabela. Vamos listar estas equações equivalentes em colunas:

$2x = 1$	$2x = 3$	$\cdots$	$(-2)x = 1$	$(-2)x = 3$	$\cdots$
$4x = 2$	$4x = 6$	$\cdots$	$(-4)x = 2$	$(-4)x = 6$	$\cdots$
$6x = 3$	$6x = 9$	$\cdots$	$(-6)x = 3$	$(-6)x = 9$	$\cdots$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$(-2)x = -1$	$(-2)x = -3$	$\cdots$	$2x = -1$	$2x = -3$	$\cdots$
$(-4)x = -2$	$(-4)x = -6$	$\cdots$	$4x = -2$	$4x = -6$	$\cdots$
$(-6)x = -3$	$(-6)x = -9$	$\cdots$	$6x = -3$	$6x = -9$	$\cdots$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$\cdots$

É claro que não podemos listar todas as possíveis equações, mas a tabela acima mostra-nos um padrão; todas as equações da primeira coluna têm a mesma solução, isto é, um número que multiplicado por 2 resulta 1. Este novo número será denotado $\frac{1}{2}$. Assim também acontece nas outras colunas. Cada uma delas vai gerar um novo número que não é inteiro. De modo geral, observando as duas tabelas, se a equação é $bx = a$ com a e b números inteiros e b diferente de zero, sua solução será denotada por $\frac{a}{b}$. O conjunto resultante da ampliação que acabamos de fazer é o conjunto dos números x que são soluções de uma equação da forma $bx = a$, com a e b inteiros e b diferente de zero. Este novo conjunto, chamado "conjunto dos números racionais" é denotado $\mathbb{Q}$.

Simbolicamente, representamos o conjunto $\mathbb{Q}$ por:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} / a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}.$$

Observação 1. Note que:

1) $\mathbb{Z} = \left\{ \frac{a}{1} / a \in \mathbb{Z} \right\} \subset \mathbb{Q}$, conclusão que resulta da ampliação que fizemos.

2) a natureza dos elementos de $\mathbb{Z}$ e do novo conjunto $\mathbb{Q}$ são diferentes. Por este motivo não poderíamos afirmar que $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. No entanto, como podemos identificar $\mathbb{Z}$ como um subconjunto de $\mathbb{Q}$, usamos $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. Veremos logo a seguir que a estrutura de $\mathbb{Z}$ (operações, propriedades e ordem) se mantém nesta nova representação.

Observação 2. Na representação $\frac{a}{b}$ de um número racional, a é o **numerador** e b é o **denominador.**

Observação 3. Note que um número racional $\frac{a}{b}$ é igual a zero quando seu numerador é igual a zero.

Tarefa

Pesquise qual a origem das palavras *numerador* e *denominador*.

Comentários:

1) **Sobre frações como parte de um todo.** De modo geral, o primeiro contato dos alunos com os números racionais se dá através da idéia de **fração**, como uma quantidade que representa uma parte do todo. O universo de trabalho neste nível é o conjunto dos números naturais, e "divisão" significa divisão exata (o algoritmo da divisão com resto zero).

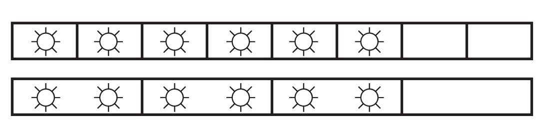
Alguns exemplos

a) $\frac{1}{2}$ maçã representa a quantidade correspondente a um dos pedaços que resulta da divisão da maçã em *duas* partes iguais.

b) $\frac{1}{3}$ de 30 balas representa a quantidade correspondente a *um* dos “pedaços” que resulta da divisão de 30 por *três*, ou seja, 10 balas.

c) $\frac{2}{5}$ de 100 reais representa a quantidade correspondente a dois dos pedaços que resulta da divisão de 100 reais por 5, ou seja, $2.(100 \div 5) = 2.20 = 40$ reais.

2) Sobre frações equivalentes. Os números racionais $\frac{3}{4}$ e $\frac{6}{8}$ provêm das equações $4x = 3$ e $8x = 6$ respectivamente. Como $8x = 6$ resulta da multiplicação por 2 em ambos os membros de $4x = 3$, $\frac{3}{4}$ e $\frac{6}{8}$ são *duas representações do mesmo número racional*. Note que $\frac{6}{8}$ se obtém de $\frac{3}{4}$ pela multiplicação por 2 do numerador e do denominador; $\frac{6}{8}$ e $\frac{3}{4}$ são *frações equivalentes.* Pensando em uma fração como parte de um todo, dividir o todo em 4 partes iguais e tomar 3 resulta na mesma quantidade obtida se dividirmos o todo em 8 partes iguais e tomarmos 6. Veja o clássico desenho que aparece nos livros didáticos:



Outras representações do número racional $\frac{3}{4}$ são: $\frac{-3}{-4}, \frac{12}{16}, \frac{9}{12}$, etc.

Você deve ter percebido que um número racional tem então uma infinidade de representações; podemos escolher trabalhar com aquela que for mais adequada, dependendo da situação. Por exemplo, se temos o número $\frac{5}{9}$ e necessitamos trabalhar com denominador 45, podemos substituir $\frac{5}{9}$ por $\frac{5.5}{5.9}=\frac{25}{45}$ pois $\frac{5}{9}=\frac{25}{45}$.

Exercícios propostos

1) Subtraindo-se um mesmo número do numerador e do denominador da fração $\frac{8}{12}$, obtém-se uma fração equivalente a $\frac{8}{12}$?

2) Desenhe um segmento de 12 cm de comprimento e marque os números de zero a 12. Associe cada uma das frações seguintes a um ponto do segmento: $\frac{3}{4}$ de 12, $\frac{5}{6}$ de 12, $\frac{7}{14}$ de 12, $\frac{2}{24}$ de 12 e $\frac{1}{4}$ de 12.

3) Que fração da hora é o minuto? Quantos minutos há em $\frac{3}{5}$ de hora?

4) Quantos meios litros há em 5 litros e meio?

5) Existe uma fração equivalente a um terço com denominador 10?

6) Soma-se 7 ao denominador da fração $\frac{2}{14}$. Quanto se deve somar ao numerador para obter uma fração equivalente?

6.3 Operações em $\mathbb{Q}$

Para definir as operações em $\mathbb{Q}$, usaremos as operações em $\mathbb{Z}$ e suas propriedades (capítulo 2), propriedades estas que não gostaríamos de "perder" no processo de ampliação. Considerar um número racional como solução de uma equação nos permite encontrar uma maneira de operar os novos números de modo que a estrutura de $\mathbb{Z}$ se mantém também em $\mathbb{Q}$. É como se fizéssemos o processo de operar "de trás para frente": considerando que as propriedades de $\mathbb{Z}$ se mantêm em $\mathbb{Q}$, como posso operar com os novos números?

6.3.1 Adição em $\mathbb{Q}$

Consideramos dois números racionais x e y. Como os elementos do conjunto $\mathbb{Q}$ são soluções de equações, temos que existem a, b, c e d inteiros, b e d não nulos, tais que

1) x é solução de $bx = a$

e

2) y é solução de $dy = c$.

Pergunta: qual a equação que tem $x + y$ como solução? Ou seja, para quais inteiros $p + q$, com $q \neq 0$, temos $q(x + y) = p$? Multiplicando ambos os membros da equação 1) por d e ambos os membros da equação 2) por b, e considerando que estão mantidas as propriedades associativa, comutativa e distributiva em $\mathbb{Q}$ (pois x e y são racionais), obtemos:

3) $bdx = ad$ e

4) $bdy = bc$

Adicionando membro a membro temos:

$$bdx + bdy = ad + bc$$
$$bd(x + y) = ad + bc$$

Assim, $x + y$ é solução da equação $bd(x + y) = ad + bc$. Os inteiros que estávamos procurando são $q = bd \neq 0$ (pois b e d são não nulos), e $p = ad + bc$, ou seja, $x + y$ é solução da equação $(bd)(x + y) = ad + bc$ e é representado em $\mathbb{Q}$ como $\frac{ad + bc}{bd}$. Isto nos indica como definir a adição em $\mathbb{Q}$:

Definição. Dados dois números racionais $\frac{a}{b}$ *e* $\frac{c}{d}$, com a, b, c *e* d inteiros, $b \neq 0$ *e* $d \neq 0$, definimos sua soma como:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}.$$

Observação 4. Nesta soma de frações não estranhe o fato de não precisarmos do *mmc* dos denominadores. Acompanhe os exemplos a seguir.

Exemplos

4) $\frac{3}{8}+\frac{13}{6}=\frac{3.6+8.13}{8.6}=\frac{18+104}{48}=\frac{122}{48}$.

Se a soma for feita com o *mmc* dos denominadores 8 e 6, teremos: *mmc* $(8,6)=24$ e as frações equivalentes com denominador 24 são $\frac{3.3}{8.3}=\frac{9}{24}$ e $\frac{13.4}{6.4}=\frac{52}{24}$.

Então $\frac{3}{8}+\frac{13}{6}=\frac{9}{24}+\frac{52}{24}=\frac{61}{24}$.

Como $\frac{61}{24}=\frac{122}{48}$, pois $61.2=122$ e $24.2=48$, obtemos o mesmo resultado.

5) $\frac{3}{17}+\frac{7}{17}=\frac{3.17+7.17}{17.17}=\frac{17.(3+7)}{17.17}=\frac{10}{17}$.

Observe que na última igualdade estamos usando o fato de que as frações $\frac{17.10}{17.17}$ e $\frac{10}{17}$ são equivalentes. Observe também que, como os denominadores das frações que queremos somar são iguais, basta somar os numeradores e considerar o mesmo denominador.

6) $3+\frac{6}{7}=\frac{3}{1}+\frac{6}{7}=\frac{3.7+1.6}{1.7}=\frac{27}{7}$.

(Observe que para efetuar o algoritmo da adição em $\mathbb{Q}$ precisamos representar o número inteiro 3 como $\frac{3}{1}$).

Um número como $3+\frac{6}{7}$ pode ser anotado por $3\frac{6}{7}$ e é chamado um número misto. De modo geral se q, a e b são inteiros, o número $q\frac{a}{b}$ representa a soma $q+\frac{a}{b}$.

Propriedades da adição em $\mathbb{Q}$

Assim como em $\mathbb{Z}$, a adição de números racionais é associativa e comutativa (propriedades A1 e A2). $\mathbb{Q}$ também possui as propriedades da existência do elemento neutro e da existência do oposto, que vamos detalhar a seguir. Assim, em relação à adição, $\mathbb{Q}$ admite as mesmas propriedades que $\mathbb{Z}$.

A3) Para todo número racional $\frac{a}{b}$ (com a e b inteiros e $b \neq 0$), existe o número racional $\frac{0}{1}$ tal que $\frac{a}{b} + \frac{0}{1} = \frac{a}{b}$.

Demonstração. O "candidato" a ser o elemento neutro da adição em $\mathbb{Q}$ é o número inteiro 0, que em $\mathbb{Q}$ é representado por $\frac{0}{1}$ (poderíamos ter escolhido qualquer outro denominador, mas 1 é o mais conveniente neste caso; lembre das frações equivalentes!). Vamos verificar que ele satisfaz a condição: $\frac{a}{b} + \frac{0}{1} = \frac{a.1 + b.0}{b.1} = \frac{a+0}{b} = \frac{a}{b}$. (Note que usamos as propriedades das operações em $\mathbb{Z}$ no numerador).

Anotaremos o elemento neutro $\frac{0}{1}$ por 0, como em $\mathbb{Z}$.

■

A4) Para todo número racional $\frac{a}{b}$ (com a e b inteiros e $b \neq 0$), existe um número racional $\frac{r}{s}$ tal que $\frac{a}{b} + \frac{r}{s} = 0$.

Demonstração. Estamos procurando um número racional $\frac{r}{s}$ que somado com $\frac{a}{b}$ resulte zero; observemos que:

$$\frac{a}{b} + \frac{r}{s} = \frac{a.s + b.r}{b.s} = \frac{0}{1}.$$

Mas a última igualdade ocorre quando $a.s + b.r = 0$, ou seja, quando $a.s$ e $b.r$ são opostos. Como $\frac{a}{b}$ é o número dado, quais valores deverão tomar s e r para que $a.s = -(b.r)$? Fazendo $s = b$ e $r = -a$ obtemos: $a.b = -[b.(-a)]$, uma afirmação verdadeira pelas propriedades das operações em $\mathbb{Z}$ (verifique!). Assim, o oposto de $\frac{a}{b}$ em $\mathbb{Q}$ é $\frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}$. Note que $\frac{a}{-b}$ também pode ser o oposto de $\frac{a}{b}$, uma vez que $\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$ (por quê?).

■

6.3.2 Subtração em $\mathbb{Q}$

A subtração em $\mathbb{Q}$ é definida como em $\mathbb{Z}$: subtrair é somar o oposto.

Definição. Dados dois números racionais $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, com a, b, c e d inteiros, com $b \neq 0$ e $d \neq 0$, definimos sua diferença como:

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a}{b} + (-\frac{c}{d}) = \frac{ad - bc}{bd}.$$

Exemplos

7) $\frac{4}{9} - \frac{5}{6} = \frac{4}{9} + (-\frac{5}{6}) = \frac{4}{9} + (\frac{-5}{6}) = \frac{4.6 - 9.5}{9.6} = \frac{24 - 45}{54} = \frac{-21}{54} = -\frac{21}{54}.$

8) $7 - \frac{3}{8} = \frac{7}{1} - \frac{3}{8} = \frac{7.8 - 3.1}{1.8} = \frac{56 - 3}{8} = \frac{53}{8}.$

9) $\frac{7}{4} - \frac{5}{4} = \frac{7 - 5}{4} = \frac{2}{4}.$

Exercícios propostos

7) Uma piscina é enchida por duas torneiras. A primeira, sozinha, encheria a piscina em 2 horas, e a segunda, em 5 horas. Que fração do tanque é enchida pelas duas torneiras em uma hora?

8) Numa receita de biscoitos, os ingredientes são:

- um décimo de quilo de açúcar;
- um quinto de quilo de margarina;
- um quarto de quilo de farinha de trigo.

Qual o peso total dos ingredientes para uma receita? Quanto será necessário de cada ingrediente para duas receitas? Qual a massa total dos ingredientes para duas receitas?

9) A quadra de vôlei tem $20\frac{1}{2}$ metros de comprimento por $12\frac{3}{4}$ metros de largura. Quantos metros a mais tem o comprimento em relação à largura?

10) Quanto se deve subtrair de cada uma das frações $\frac{5}{3}, \frac{18}{13}, \frac{7}{4}, \frac{8}{5}$ para se obter um inteiro?

11) Lígia saiu de casa às 8 horas e 15 minutos. Levou meia hora para chegar à escola, teve 3 aulas de quatro quintos de hora e telefonou para sua mãe buscá-la na escola. A que horas Lígia telefonou, sabendo que ela ligou imediatamente após a terceira aula?

6.3.3 Multiplicação em $\mathbb{Q}$

Consideramos dois números racionais x e y. Da mesma forma como fizemos para a adição, temos que existem a, b, c e d inteiros, b e d não nulos, tais que:

1) x é solução de $bx = a$ e

2) y é solução de $dy = c$.

Pergunta: qual a equação que tem $x.y$ como solução? Ou seja, para quais inteiros p e q, com $q \neq 0$, temos $q(x.y) = p$? Multiplicando membro a membro as equações 1) e 2) e considerando que as propriedades associativa e comutativa se mantêm em $\mathbb{Q}$ (pois x e y são racionais), obtemos:

$$(bx).(dy) = a.c$$
$$bd(xy) = ac.$$

Esta é a equação cuja solução é $x.y$; o produto $x.y$ será representado em $\mathbb{Q}$ por $\frac{ac}{bd}$. Podemos então definir:

Definição. Dados dois números racionais $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, com a, b, c e d inteiros, b e d não nulos, definimos seu produto como:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Exemplos

10) $\frac{7}{11} \cdot \frac{4}{9} = \frac{7.4}{11.9} = \frac{28}{99}$.

11) $3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{1} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

12) $\frac{5}{1} \cdot \frac{7}{1} = \frac{5.7}{1} = \frac{35}{1} = 35$.

O exemplo 12 nos mostra que, ao multiplicarmos em $\mathbb{Q}$ dois números inteiros, o resultado é ainda um número inteiro.

Propriedades da multiplicação em $\mathbb{Q}$

Assim como em $\mathbb{Z}$, a multiplicação de números racionais é associativa e comutativa (propriedades M1 e M2). $\mathbb{Q}$ também possui a propriedade da existência de elemento neutro para a multiplicação. Além disso, com a ampliação, ganhamos uma nova propriedade: a existência do elemento inverso. Vamos detalhar a seguir estas duas propriedades:

M3) **Existência do elemento neutro.** Existe um número racional $\frac{r}{s}$ tal que $\frac{r}{s} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$, para todo número racional $\frac{a}{b}$.

Demonstração. É razoável pensar que o elemento neutro de $\mathbb{Q}$ para a multiplicação será o mesmo de $\mathbb{Z}$, como aconteceu na adição. Escolhemos para 1 a representação $\frac{1}{1}$. Lembre-se que existe uma infinidade de representações para o inteiro 1: $\frac{1}{1}, \frac{2}{2}, \frac{-5}{-5}, \cdots$. Toda fração da forma $\frac{k}{k}$ para k inteiro não nulo é uma representação do inteiro 1. Vamos verificar o que ocorre:

$$\frac{1}{1} \cdot \frac{a}{b} = \frac{1.a}{1.b} = \frac{a}{b}.$$

■

Observe que o inteiro 1 fez o seu papel de elemento neutro (em $\mathbb{Z}$) no numerador e no denominador. Assim, o elemento neutro de $\mathbb{Q}$ para a multiplicação é $\frac{1}{1}$ que anotaremos como 1.

A propriedade que vamos estabelecer a seguir não ocorre em $\mathbb{Z}$. Quando ampliamos $\mathbb{Z}$, "ganhamos" mais uma propriedade para a multiplicação, que irá fornecer a $\mathbb{Q}$ uma nova estrutura (diferente de $\mathbb{Z}$) e que nos permitirá definir uma nova operação (a divisão). A propriedade nos diz que, para todo número racional não nulo x, existe um racional y tal que $x.y = 1$; y é chamado o *inverso* de x.

Observe que este fato só ocorre em $\mathbb{Z}$ quando $x = y = 1$ ou $x = y = -1$.

M4) **Existência do elemento inverso.** Para todo número racional não nulo $\frac{a}{b}$, existe um número racional $\frac{c}{d}$ tal que $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = 1$.

Demonstração. Antes de iniciar a demonstração vamos fazer algumas "experiências":

1) Para o racional $\frac{5}{8}$: qual o número racional $\frac{c}{d}$ que multiplicado por $\frac{5}{8}$ resulta 1?

   Para que ocorra $\frac{5}{8} \cdot \frac{c}{d} = 1$, devemos ter $\frac{5.c}{8.d} = 1$, ou seja, as frações $\frac{5.c}{8.d}$ *e* $\frac{1}{1}$ são equivalentes. Mas as frações equivalentes a $\frac{1}{1}$ são aquelas cujo numerador é igual ao denominador; então teremos $5.c = 8.d$, com c e d números inteiros. Esta igualdade ocorre para $c = 8$ e $d = 5$. Assim, o inverso de $\frac{5}{8}$ em $\mathbb{Q}$ é o número $\frac{8}{5}$.

2) Para o racional $9 = \frac{9}{1}$, seu inverso será $\frac{1}{9}$, uma vez que $9 \cdot \frac{1}{9} = \frac{9}{9} = 1$.

Você já deve ter percebido o que está acontecendo. Vamos formalizar a idéia fazendo a demonstração, isto é, exibindo um número racional que multiplicado por $\frac{a}{b}$ resulte 1.

De fato: considere o racional não nulo $\frac{a}{b}$. Sabemos que a e b são inteiros e que $b \neq 0$; como o racional é não nulo, também teremos $a \neq 0$. Isto nos permite afirmar que $\frac{b}{a}$ é um número racional, também não nulo. Assim, $\frac{b}{a}$ é nosso candidato a ser o inverso de $\frac{a}{b}$. Vamos verificar:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{a.b}{b.a} = \frac{a.b}{a.b} = 1.$$

Desta forma, o inverso de $\frac{a}{b}$ é $\frac{b}{a}$.

■

Notação. Denotamos o inverso de $\frac{a}{b}$ por $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}$, isto é, $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$.

Observação 5. Note que o inverso de um número racional existe se, e somente se, o racional é não nulo!

Vamos agora definir uma nova operação em $\mathbb{Q}$: a divisão. Note que o Algoritmo da Divisão que estudamos no capítulo 3 não era uma operação em $\mathbb{Z}$, mas uma relação entre dois números inteiros.

6.3.4 Divisão em $\mathbb{Q}$

Dados os números racionais, $\frac{a}{b}$ e $\frac{p}{q}$ com $\frac{p}{q} \neq 0$, definimos:

$$\frac{a}{b} \div \frac{p}{q} = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{p}{q}\right)^{-1} = \frac{a}{b} \cdot \frac{q}{p} = \frac{aq}{bp}.$$

Exemplos

13) $\frac{5}{13} \div \frac{7}{4} = \frac{5}{13} \cdot \frac{4}{7} = \frac{20}{91}$.

14) $\frac{1}{4} \div 3 = \frac{1}{4} . \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$.

15) $3 \div \frac{1}{2} = \frac{3}{1} \div \frac{1}{2} = \frac{3}{1} \cdot \frac{2}{1} = \frac{6}{1} = 6$.

Observação 6. A operação divisão não é associativa, não é comutativa e não possui elemento neutro. Note que, assim como subtrair é "somar o oposto", dividir é "multiplicar pelo inverso".

6.4 Frações irredutíveis

Você já sabe que cada número racional possui uma infinidade de representações na forma de frações. Mas uma delas é especial, e bastante conveniente em muitos casos: são as chamadas frações irredutíveis.

Definição. Sejam a e b números inteiros com b diferente de zero. Uma fração $\frac{a}{b}$ é irredutível quando $mdc\ (a,b)=1$.

O resultado a seguir nos diz que todo número racional possui uma representação na forma de fração irredutível.

Teorema. Todo número racional x pode ser expresso na forma $\frac{a}{b}$ com $mdc\ (a,b)=1$.

Demonstração.

Seja x um número racional na forma $\frac{r}{s}$, com r e s inteiros e $s \neq 0$. Como r e s são inteiros, existe o $mdc\ (r,s)$, que chamaremos d, e existem a e b inteiros, $b \neq 0$, tais que $r = d.a$, $s = d.b$ e mdc $(a,b)=1$. Então

$$\frac{r}{s}=\frac{d.a}{d.b}=\frac{d}{d}\cdot\frac{a}{b}=1\cdot\frac{a}{b}=\frac{a}{b}.$$

Logo a representação irredutível de $\frac{r}{s}$ é $\frac{a}{b}$.

■

Observação 7. A demonstração do teorema nos ensina como encontrar a representação irredutível de um número racional. Veja um exemplo: qual a representação na forma de fração irredutível do racional $\frac{32}{20}$? Fazemos inicialmente $mdc\ (32,20)=4$ (se você esqueceu como calcular o *mdc* volte ao capítulo 3). Então $32 = 4.8$ e $20 = 4.5$, com $mdc\ (8,5)=1$. Assim a fração irredutível equivalente a $\frac{32}{20}$ é $\frac{8}{5}$, ou seja, $\frac{32}{20}=\frac{8}{5}$.

6.5 Sobre a simplificação de frações

"Simplificar uma fração" é encontrar sua forma irredutível; de modo geral não calculamos o *mdc*; vamos eliminando os fatores comuns até que não seja mais possível. Por exemplo, para $\frac{32}{20}$, fazemos: $\frac{32}{20}=\frac{2.16}{2.10}=\frac{16}{10}=\frac{2.8}{2.5}=\frac{8}{5}$. Este procedimento está correto, pois o que fizemos foi "eliminar" o maior fator comum dos dois números (o *mdc*), resultando na fração irredutível. No entanto, simplificar uma fração não é um procedimento "obrigatório": não podemos dizer que um estudante errou a questão se sua resposta for $\frac{36}{14}$, um racional que não é irredutível. Se o professor deseja que o estudante "simplifique" a fração, ele deve dizer explicitamente: "dê a solução em sua forma irredutível". Não podemos esquecer que $\frac{36}{14}$ e $\frac{18}{7}$ são representações do mesmo número racional.

6.6 Sobre a nomenclatura das frações

É comum nos livros didáticos aparecerem nomes especiais para certos tipos de frações; vamos explicitar alguns deles:

1) Fração própria: $\frac{a}{b}$ quando $a < b$. Exemplos: $\frac{1}{5}, \frac{8}{14}, \frac{45}{123}$.
2) Fração imprópria: $\frac{a}{b}$ quando $b < a$. Exemplos: $\frac{4}{3}, \frac{7}{2}, \frac{456}{120}$.
3) Fração decimal: quando o denominador é potência de 10. Exemplos: $\frac{3}{10}, \frac{9}{100}, \frac{56}{1000}$.
4) Fração aparente: quando o numerador é múltiplo do denominador. Exemplos: $\frac{30}{5}, \frac{450}{50}, \frac{98}{7}$.
5) Fração unitária: quando o numerador é 1. Exemplos: $\frac{1}{10}, \frac{1}{110}, \frac{1}{56}$.

Exercícios propostos

12) Quanto é a terça parte de um meio?

13) Numa sala há 20 alunos. Hoje estão presentes três quartos dos alunos da classe e, dos presentes, dois quintos irão ao zoológico. Quantos alunos estão presentes hoje? Quantos irão ao zoológico?

14) Uma jarra tem a capacidade de dois terços de litro. Quando a jarra estiver cheia até sua metade com suco, quantos litros conterá?

15) Num mapa da cidade, 1 cm representa 10 quilômetros. Uma distância de $1\frac{3}{5}$ cm no mapa corresponde a quantos quilômetros?

16) Uma garrafa contém dois terços de litro. Quantos litros contêm 9 garrafas iguais a esta?

17) Qual o número que multiplicando por dois quintos resulta como produto sete oitavos?

18) Quantos centésimos tem um décimo?

19) Quantos cinco décimos há em 8 inteiros?

20) Um tanque contendo 750 litros de água está apenas com seis décimos de sua capacidade. Quantos litros de água haveria no tanque se estivesse cheio? Quanto falta para enchê-lo?

21) O que é mais barato: 6 laranjas por $0,34$ reais ou 8 laranjas por $0,41$ reais?

22) Se um piloto corre a 200 Km/h, quantos metros percorre num segundo, supondo que sua velocidade seja constante?

23) Dos $\frac{3}{4}$ restantes de um bolo, comi $\frac{2}{3}$. Que fração do bolo comi?

24) Que fração devo somar a $\frac{2}{3}$ para obter $\frac{8}{9}$?

25) Qual o número que multiplicado por $\frac{1}{3}$ resulta, como produto, $\frac{3}{5}$?

26) Quanto se deve subtrair de $\frac{2}{3}$ para se obter a terça parte de $\frac{3}{5}$?

27) Uma peça de fazenda, depois de molhada, encolheu $\frac{2}{15}$ de seu comprimento, ficando com 39 metros. Quantos metros tinha esta peça antes de encolher?

28) Imagine um recipiente de um litro ocupado até seus $\frac{2}{3}$ com guaraná. Supondo que se queira distribuir esse guaraná em copos, cuja capacidade é $\frac{1}{5}$ de litro, quantos copos ficarão cheios e que fração de copo sobrará?

29) Quantos oito décimos há em 16 inteiros?

30) A fortuna de João foi dividida da seguinte forma: um quinto para seu irmão mais velho, um sexto do restante para seu irmão mais novo e partes iguais para cada um de seus 12 filhos. Que fração da fortuna cada filho recebeu? Dê a resposta na forma irredutível.

31) Em um mapa, um centímetro representa dezesseis quilômetros. Qual a distância real representada por cinco centímetros e meio?

32) Mostre com exemplos que a divisão não é associativa e não é comutativa. Mostre também que não vale a propriedade distributiva da divisão em relação à adição.

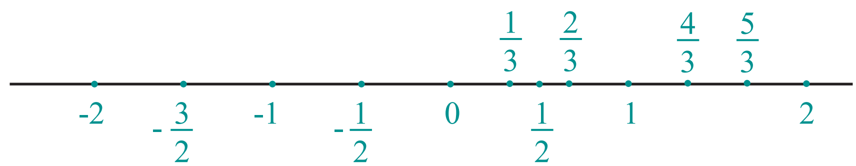
33) Expresse em frações irredutíveis cada uma das expressões:

a) $10^{-1} + 15^{-2} + 6.7^{-1} + (4.8)^{-1}$

b) $4^{-3} + 5.10^{-1} + 7.14^{-2} + (8+5)^{-1}$.

6.7 Relação de ordem em $\mathbb{Q}$

Como comparar números racionais? Por exemplo: quem é maior, $\frac{4}{5}$ ou $\frac{5}{6}$? Vamos marcar sobre a reta alguns números racionais:



As frações unitárias (com numerador igual a 1) são partes de um inteiro e estão entre zero e 1. Para outros racionais não inteiros, utiliza-se a mesma idéia dos múltiplos em $\mathbb{Z}$: $\frac{2}{3}$ é $2.\frac{1}{3}$ ou ainda, dois "pedaços" de $\frac{1}{3}$. Generalizando, um número $\frac{a}{b}$ corresponde a "a pedaços de $\frac{1}{b}$".

Nosso objetivo é ampliar a relação de ordem que já tínhamos em $\mathbb{Z}$, "acrescentando" os racionais não inteiros na reta, mantendo a ordem dos inteiros.

A relação de ordem em $\mathbb{Q}$ será definida levando em conta o fato de que já conhecemos os números inteiros positivos: $\mathbb{Z}_+^* = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

Definição. Um número racional $\frac{a}{b}$ é positivo quando $a.b$ é um número inteiro positivo.

Observação 8. Lembre-se dos resultados já estudados no capítulo 2:

i) O produto $a.b$ é positivo quando $a > 0$ e $b > 0$ ou quando $a < 0$ e $b < 0$.

ii) O produto $a.b$ é negativo quando $a > 0$ e $b < 0$ ou $a < 0$ e $b > 0$.

iii) O produto $a.b$ é zero quando $a = 0$ ou $b = 0$.

Fazendo uma analogia com os inteiros, temos:

- Um número racional $\frac{a}{b}$ é não positivo quando $a.b < 0$ ou $a.b = 0$.

- Um número racional $\frac{a}{b}$ é negativo quando $a.b < 0$.
- Um número racional $\frac{a}{b}$ é não negativo quando $a.b > 0$ ou $a.b = 0$.

Podemos então definir em $\mathbb{Q}$ o conjunto dos "racionais positivos", $\mathbb{Q}_+^* = \left\{ \frac{a}{b} / a.b > 0 \right\}$. Os axiomas de ordem são os seguintes:

AO1) As operações de adição e multiplicação são fechadas em $\mathbb{Q}_+^*$, ou seja: se x e y são racionais positivos, então $x + y$ e $x.y$ são racionais positivos.

AO2) Se x é um número racional, então $x \in \mathbb{Q}_+^*$ ou $-x \in \mathbb{Q}_+^*$ ou $x = 0$ (este "ou" é exclusivo).

Observação 9. Note que a igualdade dos racionais $\frac{-a}{b}$ e $\frac{a}{-b}$ nos permite escrever qualquer número racional $\frac{a}{b}$ com denominador positivo. Assim, o conjunto dos números racionais pode ser expresso por $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} / a, b \in \mathbb{Z} \text{ e } b > 0 \right\}$. Considerando esta representação do conjunto $\mathbb{Q}$, podemos dizer que um número racional $\frac{a}{b}$ é positivo quando $a > 0$.

Definição. Dados dois números racionais x e y definimos:

i) $x \le y$ quando $y - x \in \mathbb{Q}_+$ ($y - x$ é não negativo).

ii) $x < y$ quando $y - x \in \mathbb{Q}_+^*$ ($y - x$ é positivo).

Observação 10. Como expressar relação $x \le y$ fazendo $x = \frac{a}{b}$ e $y = \frac{c}{d}$, com $b > 0$ e $d > 0$?

Acompanhe com atenção:

$x \le y$ quando $y - x \in \mathbb{Q}_+$

$\frac{a}{b} \le \frac{c}{d}$ quando $\frac{c}{d} - \frac{a}{b} = \frac{bc - ad}{bd} \in \mathbb{Q}_+$

$\dfrac{bc-ad}{bd} \in \mathbb{Q}_+$ quando $bc - ad \geq 0$ em $\mathbb{Z}$, ou seja, $ad \leq bc$.

Logo, podemos dizer que $\dfrac{a}{b} \leq \dfrac{c}{d}$ quando $ad \leq bc$.

Exemplo: $\dfrac{3}{4} \leq \dfrac{5}{6}$ pois $3.6 = 18 \leq 4.5 = 20$.

Observação 11. Outra maneira de comparar as frações é reduzi-las ao mesmo denominador, usando as frações equivalentes. Por exemplo, podemos escrever $\dfrac{3}{4}$ e $\dfrac{5}{6}$ como $\dfrac{9}{12}$ e $\dfrac{10}{12}$; então $\dfrac{9}{12} \leq \dfrac{10}{12}$, pois $9 \leq 10$, ou seja, $\dfrac{3}{4} \leq \dfrac{5}{6}$.

Observação 12. Assim como em $\mathbb{Z}$, podemos definir a relação < da seguinte maneira:

Para x e y racionais, $x < y$ se e somente se $x \leq y$ e $x \neq y$.

Isto é equivalente a: $x < y$ quando $y - x \in \mathbb{Q}_+^*$.

6.7.1 Propriedades da relação de ordem

Valem em $\mathbb{Q}$ as mesmas propriedades da relação de ordem em $\mathbb{Z}$:

Proposição 1. A relação $\leq$ em $\mathbb{Q}$ as possui as seguintes propriedades:

i) Reflexiva: $x \leq x$, para todo número racional x.

ii) Anti-simétrica: se $x \leq y$ e $y \leq x$ então $x = y$, para quaisquer números racionais x e y.

iii) Transitiva: se $x \leq y$ e $y \leq z$, então $x \leq z$, para quaisquer números racionais x, y e z.

Demonstração. O procedimento é o mesmo da demonstração em $\mathbb{Z}$. Faça como exercício.

Proposição 2. Para quaisquer números racionais x, y, z e w, tem-se:

a) $x \leq y$ se, e somente se, $x + z \leq y + z$.

b) Se $x \leq y$ e $0 \leq z$ então $xz \leq yz$.

c) Se $x \leq y$ e $z < 0$ então $yz \leq xz$.

d) Se $x \leq y$ e $z \leq w$ então $x + z \leq y + w$.

e) $x \leq y$ se, e somente se, $-y \leq -x$.

Demonstração. Como o procedimento também aqui é o mesmo feito em $\mathbb{Z}$, faça a demonstração como exercício.

Observação 13. Quais das afirmações da Proposição 2 continuam verdadeiras se substituirmos $\leq$ por $<$? a), b) e c) afirmam que $\leq$ é compatível com as operações de adição e multiplicação em $\mathbb{Q}$ e o mesmo ocorre para a relação <. As afirmações d) e c) também continuam verdadeiras para <.

Proposição 3. Para quaisquer x e y racionais não nulos, tem-se:

1) i) Se $x > 0$ então $x^{-1} > 0$.

ii) Se $x < 0$ então $x^{-1} < 0$.

Demonstração.

i) Se $x > 0$ e $x.x^{-1} = 1 > 0$, x^{-1} deve ser positivo, uma vez que o produto de dois racionais é positivo quando ambos são positivos ou ambos são negativos.

ii) Analogamente, se $x < 0$ e $x.x^{-1} = 1 > 0$, x^{-1} deve ser negativo.

■

2) i) Se $0 < x < 1$ então $x^{-1} > 1$.

ii) Se $x > 1$ então $x^{-1} < 1$.

Demonstração.

i) Se $0 < x < 1$, teremos $x > 0$ e por (1) $x^{-1} > 0$. Multiplicando ambos os membros da desigualdade $x < 1$ por x^{-1}, obtemos $x.x^{-1} < 1.x^{-1}$, ou seja, $x^{-1} > 1$.

ii) Se $x > 1$, temos $x > 0$ e por (1) $x^{-1} > 0$. Multiplicando ambos os membros da desigualdade $x > 1$ por x^{-1}, obtemos $x.x^{-1} > 1.x^{-1}$, ou seja, $x^{-1} < 1$. Como $x^{-1} > 0$, podemos concluir que $0 < x^{-1} < 1$.

■

3) i) Se $0 < x < y$ então $0 < y^{-1} < x^{-1}$.

ii) Se $x < y < 0$ então $y^{-1} < x^{-1} < 0$.

Demonstração.

i) Se x e y são positivos, então por (1), x^{-1} e y^{-1} também são positivos. Multiplicando ambos os membros da desigualdade $x < y$ pelo número positivo $(x^{-1}.y^{-1})$ obtemos:

$$x^{-1}.y^{-1}.x < x^{-1}.y^{-1}.y$$
$$(x^{-1}.x).y^{-1} < x^{-1}.(y^{-1}.y)$$
$$1.y^{-1} < x^{-1}.1$$
$$y^{-1} < x^{-1}$$
$$0 < y^{-1} < x^{-1}.$$

ii) Se x e y são negativos, também x^{-1} e y^{-1} são negativos (por 1). Logo, o produto $x^{-1}.y^{-1}$ é positivo. Multiplicando ambos os membros da desigualdade $x < y$ por $(x^{-1}.y^{-1})$, obtemos:

$$x^{-1}.y^{-1}.x < x^{-1}.y^{-1}.y$$
$$(x^{-1}.x).y^{-1} < x^{-1}.(y^{-1}.y)$$
$$1.y^{-1} < x^{-1}.1$$
$$y^{-1} < x^{-1}$$
$$y^{-1} < x^{-1} < 0\,.$$

■

6.8 Valor absoluto (ou módulo)

A definição é a mesma dos inteiros: para x um número racional,

$$|x| = \begin{cases} x \ se \ x \geq 0 \\ -x \ se \ x < 0 \end{cases}.$$

As propriedades que valiam em $\mathbb{Z}$ também valem em $\mathbb{Q}$. Além disso, se x é um número racional na forma $\frac{a}{b}$, temos que $|\frac{a}{b}| = \frac{|a|}{|b|}$. Prove!

6.9 Densidade

Dados dois números racionais diferentes, é sempre possível encontrar outro número racional entre eles; na verdade, é possível encontrar uma infinidade de números racionais entre eles! Vamos observar algumas situações:

$$\frac{1}{2} < \frac{2}{3} \quad .$$

O ponto médio entre $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{3}$ é o número racional

$$z_1 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{12} .$$

Assim, $\frac{1}{2} < \frac{5}{12} < \frac{2}{3}$.

Considerando agora os racionais $\frac{5}{12}$ e $\frac{2}{3}$, achamos o ponto médio entre eles:

$$z_2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5}{12} + \frac{2}{3} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{13}{12} = \frac{13}{24} .$$

Assim, $\frac{5}{12} < \frac{13}{24} < \frac{2}{3}$.

Considerando agora os racionais $\frac{13}{24}$ e $\frac{2}{3}$, achamos o ponto médio entre eles, que será $\frac{29}{48}$ (faça as contas!). Continuando com este procedimento, encontramos uma infinidade de números racionais entre $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{3}$. Note que esta situação não acontecia nos inteiros: entre um número inteiro a e seu consecutivo $a+1$, não é possível encontrar nenhum número inteiro. Por causa desta particularidade, dizemos que o conjunto dos números racionais é "denso" na reta, ou seja, entre dois números racionais existe uma infinidade de outros números racionais. Vamos generalizar:

Note que a idéia de "consecutivo" não se aplica a números racionais.

Proposição 4. Sejam x e y números racionais com $x < y$. Então existe um número racional z tal que $x < z < y$.

Demonstração.

Sejam $z = \frac{1}{2}(x+y)$; $z < y$, pois:

$x < y$ (somando y a ambos os membros da desigualdade)

$x + y < y + y$

$x + y < 2y$ (multiplicando ambos os membros por $\frac{1}{2}$)

$\frac{1}{2}(x + y) < y$

$z < y$.

Analogamente provamos que $x < z$.

■

Exercícios propostos

34) J. J. Sylvester (1814 – 1897) propôs o seguinte método para escrever um número racional x, $0 < x < 1$, como soma das frações unitárias:

i) Achar a maior fração unitária que seja menor que a fração dada.

ii) Subtrair essa fração unitária da fração dada.

iii) Achar a maior fração unitária menor que a diferença obtida em ii.

iv) Subtrair desta diferença a fração unitária obtida em (iii).

v) Continuar o processo até que uma das diferenças seja uma fração unitária.

Aplicar este processo às frações treze vinte avos, quatro quinze avos, nove vinte e quatro avos e sete cinqüenta e dois avos.

35) Em um mapa, um centímetro representa dezesseis quilômetros. Qual a distância real representada por cinco centímetros e meio?

36) Ache duas frações ordinárias positivas, respectivamente iguais a um meio e quatro quintos, de maneira que a soma de seus termos (numerador e denominador) coincida e seja a menor possível.

37) Ache um número racional igual a $\frac{1001}{715}$ cuja soma do numerador com o denominador seja 48.

38) Ache um número racional igual a $\frac{399}{1463}$ cuja diferença entre seu denominador e seu numerador seja 184.

39) Ache dois números racionais de denominadores 5 e 7, cuja soma é igual a $\frac{26}{35}$.

40) Ache dois números racionais de denominadores 3 e 11, cuja diferença é igual a $\frac{6}{33}$.

41) Existem dois números racionais de denominadores 7 e 11, com numeradores positivos, cuja soma é $\frac{30}{77}$?

42) Determine $r \in \mathbb{Z}$ de modo que as seguintes frações representem um inteiro:

a) $\frac{10r}{2r-1}$ b) $\frac{33r}{3r-1}$.

43) Sendo n um número inteiro, mostre que são irredutíveis as frações:

a) $\frac{n-1}{n-2}$, $n \neq 2$ b) $\frac{n-1}{2n-1}$

c) $\frac{2n+1}{2n(n+1)}$, $n \neq 0$, $n \neq -1$.

44) a) Seja x um número racional tal que $0 < x < 1$. Mostre que existe $r \in \mathbb{N}^*$ para o qual tem-se $\frac{1}{r+1} \leq x < \frac{1}{r}$.

b) Ache r conforme a parte (a) nos seguintes casos: $a = \frac{7}{22}$; $a = \frac{47}{60}$.

6.10 A representação decimal

Em sua obra "De Thiend" (O décimo) de 1585, Simon Stevin tinha por objetivo mostrar através da representação decimal "como efetuar, com facilidade nunca vista, todos os cálculos necessários entre os homens, por meio de inteiros sem frações".

Já sabemos que os números racionais em sua forma fracionária possuem algoritmos próprios para as operações. A vantagem da representação decimal (isto é, o uso de $0,5$ ao invés de $\frac{1}{2}$, por exemplo) é aproveitar os algoritmos das operações já conhecidas para números inteiros, com alguns cuidados especiais. Por exemplo, ao somar $\frac{1}{2}+\frac{3}{5}$ representamos $\frac{1}{2}$ por $0,5$ e $\frac{3}{5}$ por $0,6$ e "armamos a conta" como se fossem números inteiros, colocando vírgula em baixo de vírgula.

$$\begin{array}{r} 0,5 \\ +\,0,6 \\ \hline 1,1 \end{array}\ .$$

Um procedimento similar é feito para a multiplicação e a divisão. Para podermos usufruir plenamente dessas facilidades, precisamos saber como "transitar" entre as representações fracionária e decimal confortavelmente. Inicialmente vamos responder duas perguntas:

1) Como encontrar uma representação decimal de um número racional que está na forma fracionária?

2) Como encontrar uma forma fracionária de um número em representação decimal?

Respostas das perguntas:

Vamos exemplificar a situação com a fração $\frac{7}{25}$; aprendemos que para responder a primeira pergunta basta dividir 7 por 25 e "continuar a conta", "abaixando" zeros quando for preciso.

$$\begin{array}{r|l} 70 & \underline{25} \\ 200 & 0,28 \\ 00 & \end{array}$$

Mas em que se baseia este processo? A resposta está no Algoritmo da Divisão em $\mathbb{Z}$; a "continuação da conta" é a repetição do Algoritmo multiplicando o resto por 10. Observe:

$$7 = 0 \times 25 + 7\ .$$

Multiplicamos o resto 7 por 10 (pois nosso sistema é decimal) e novamente usamos o Algoritmo para 7×10 e 25:

$$7\times 10 = 2\times 25 + 20\,. \tag{1}$$

Mais uma vez multiplicamos o resto 20 por 10 e usamos o Algoritmo para 20×10 e 25:

$$20\times 10 = 8\times 25\,. \tag{2}$$

Paramos o processo, pois o resto é zero. As igualdades (1) e (2) nos darão a representação decimal. Observe o procedimento:

Por (2) temos que $20 = \dfrac{8\times 25}{10}$.

Substituindo em (1) temos que $7\times 10 = 2\times 25 + \dfrac{8\times 25}{10}$;

Multiplicando ambos os membros por $\dfrac{1}{10}$ obtemos:

$$7 = \frac{1}{10}\times 2\times 25 + \frac{1}{10}\times \frac{8\times 25}{10};$$

Usando as propriedades das operações em $\mathbb{Q}$, temos

$$7 = 25\times \frac{2}{10} + 25\times \frac{8}{100}$$

$$7 = 25\times\left(\frac{2}{10} + \frac{8}{100}\right);$$

Multiplicando ambos os membros por $\dfrac{1}{25}$, temos

$$\frac{7}{25} = \frac{2}{10} + \frac{8}{100}, \text{ ou}$$

$$\frac{7}{25} = \frac{2}{10} + \frac{8}{10^2}\,. \tag{3}$$

A igualdade (3) expressa o número $\dfrac{7}{25}$ como uma soma de frações cujos denominadores são potências de 10 (são chamadas frações decimais), a base de nosso sistema de numeração: sete vinte e cinco avos é igual a dois décimos mais oito centésimos. Note também que as frações do membro da direita possuem algarismos em seus numeradores, e estes algarismos constituem os algarismos que "aparecem depois da vírgula" na conta inicial. Como a parte inteira é zero, temos que

$$\frac{7}{25} = 0 + \frac{2}{10} + \frac{8}{10^2}.$$

A representação para a expressão do membro da direita é $0,28$. Concluímos então que para expressar um número racional em sua forma decimal usamos uma versão do Algoritmo da Divisão em $\mathbb{Z}$ para o numerador como dividendo e o denominador como divisor; isto sempre será possível, pois o denominador é sempre não nulo (lembre-se da hipótese do Algoritmo da Divisão: o número que faz o papel de divisor deve ser não nulo). Se b é um número negativo, usamos o processo para $|b|$; por exemplo, a representação decimal de $-\frac{7}{25}$ é $-0,28$.

Este processo nos mostra também como encontrar a representação fracionária de um número em representação decimal. Por exemplo, a representação fracionária de $4,375$ é :

$$4,375 = 4 + \frac{3}{10} + \frac{7}{10^2} + \frac{5}{10^3} = \frac{4\times 10^3 + 3\times 10^2 + 7\times 10 + 5}{10^3} = \frac{4375}{10^3}.$$

Note que o numerador da fração após a segunda igualdade é a representação decimal do inteiro 4375.

Experimente agora encontrar a representação decimal de $\frac{2}{3}$.

$$\begin{array}{l|l} 20 & 3 \\ \cline{2-2} \;\;20 & 0,666... \\ \;\;\;\;20 & \\ \;\;\;\;\;\;2 & \end{array}$$

Observe que os restos se repetem, dando origem a uma seqüência de algarismos "6" após a vírgula. A conta "continua" indefinidamente, e este fato é representado pelas reticências. Neste caso, dizemos que a representação decimal é uma "dízima periódica"; o algarismo (ou algarismos) que se repete é chamado o "período", que em nosso caso é o 6. Na prática não usamos esta representação: na maioria das vezes truncamos o número e "paramos" em duas ou três casas decimais. Lembre-se sempre que, quando se faz isso, estamos trabalhando com outro número; substituir $0,666666...$ por $0,666$ é substituir o número $\frac{2}{3}$ pelo número $\frac{666}{10^3} = \frac{333}{500}$.

Na maioria das situações reais, esta substituição pode ser irrelevante, mas um pequeno erro sempre existe. Observe também que, quando não há resto zero, os valores dos restos devem começar a se repetir, uma vez que são limitados pelo divisor (lembre-se do Algoritmo da Divisão em $\mathbb{Z}: \ 0 \leq r < \ |b|$). Não corremos o risco dos restos serem todos diferentes!

Agora, vamos responder a segunda pergunta: como encontrar a representação fracionária de um número expresso por uma dízima periódica? Vamos exemplificar com o número $0,55555...$

Usando o que já sabemos, podemos escrever:

$$0,55555... = \frac{5}{10} + \frac{5}{10^2} + \frac{5}{10^3} + \frac{5}{10^4} + ...$$

A soma no membro à direita é infinita, ou seja, tem uma infinidade de parcelas. É possível encontrar um número como resultado desta soma? Sim, neste caso é sempre possível. A justificativa para este fato baseia-se na idéia de "limite", um conceito fundamental em matemática que você irá estudar na disciplina de Cálculo. Observe que as parcelas da soma vão diminuindo:

$$\frac{5}{10} > \frac{5}{10^2} > \frac{5}{10^3} > \frac{5}{10^4} > ...$$

Observe também que cada parcela é a anterior multiplicada por $\frac{1}{10}$. Podemos então pensar na seqüência das parcelas $\frac{5}{10}, \frac{5}{10^2}, \frac{5}{10^3}, \frac{5}{10^4}, ...$ como uma **progressão geométrica** (abrevia-se PG) infinita, decrescente, de razão $\frac{1}{10} < 1$ e primeiro termo igual a $\frac{5}{10}\cdot$ Progressões desta natureza admitem uma soma de todos os seus termos; chamando o primeiro termo de a_1 e a razão de q, a soma é dada pela fórmula

$$S = \frac{a_1}{1-q}.$$

Não esqueça: esta soma só é possível para progressões geométricas infinitas e *decrescentes*, isto é, com *razão menor do que* 1.

No exemplo anterior temos:

$$0,5555... = \frac{5}{10} + \frac{5}{10^2} + \frac{5}{10^3} + \frac{5}{10^4} + ... = \frac{\frac{5}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{\frac{5}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{5}{10} \times \frac{10}{9} = \frac{5}{9}.$$

Vamos fazer mais alguns exemplos, estudando casos em que o período não aparece imediatamente após a vírgula, ou quando o período tem mais de um algarismo.

Exemplos

16) $1,27777... = 1 + \frac{2}{10} + \frac{7}{10^2} + \frac{7}{10^3} + \frac{7}{10^4} + ... =$

$$= 1 + \frac{2}{10} + (\frac{7}{10^2} + \frac{7}{10^3} + \frac{7}{10^4} + ...).$$

A soma entre parênteses é a soma dos termos de uma PG infinita, decrescente, de razão $\frac{1}{10}$ e primeiro termo igual a $\frac{7}{10^2}$. Usando a fórmula $S = \frac{a_1}{1-q}$, obtemos:

$$1,27777... = 1 + \frac{2}{10} + \frac{7}{10^2} + \frac{7}{10^3} + \frac{7}{10^4} + ... = 1 + \frac{2}{10} + (\frac{7}{10^2} + \frac{7}{10^3} + \frac{7}{10^4} + ...) =$$

$$= 1 + \frac{2}{10} + \frac{\frac{7}{10^2}}{1 - \frac{1}{10}} = 1 + \frac{2}{10} + \frac{7}{10^2} . \frac{10}{9} = 1 + \frac{2}{10} + \frac{7}{90} = \frac{90 + 2 \times 9 + 7}{90} = \frac{115}{90} = \frac{23}{18}$$

17) $0,121212... = \frac{1}{10} + \frac{2}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{2}{10^4} + ...$

O período neste caso é 12; note que se agruparmos dois em dois os termos do membro à direita, ficamos com:

$$0,121212... = \frac{1}{10} + \frac{2}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{2}{10^4} + ... = \left(\frac{1}{10} + \frac{2}{10^2}\right) + \left(\frac{1}{10^3} + \frac{2}{10^4}\right) + ...$$

Efetuando as adições dos parênteses, temos:

$$0{,}121212\ldots=\frac{1}{10}+\frac{2}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\frac{2}{10^4}+\ldots=\frac{12}{10^2}+\frac{12}{10^4}+\frac{12}{10^6}\ldots$$

Esta nova soma que aparece à direita é a soma dos termos de uma PG infinita, decrescente, com primeiro termo igual a $\frac{12}{10^2}$. E a razão? Para sabermos a razão, devemos verificar qual o número que, multiplicado por um termo, resulta no termo seguinte. Neste caso, temos que $\frac{12}{10^2}\times\frac{1}{10^2}=\frac{12}{10^4}$, o que significa que a razão é $\frac{1}{10^2}$. Usando a fórmula da soma da PG, $\left(\frac{12}{10^2},\frac{12}{10^4},\frac{12}{10^6},\ldots\right)$ obtemos:

$$\frac{12}{10^2}+\frac{12}{10^4}+\frac{12}{10^6}\ldots=\frac{\frac{12}{10^2}}{1-\frac{1}{10^2}}=\frac{12}{10^2}\times\frac{10^2}{99}=\frac{12}{99}=\frac{4}{33}.$$

18) $1,4232323=1+\frac{4}{10}+\frac{2}{10^2}+\frac{3}{10^3}+\frac{2}{10^4}+\frac{3}{10^5}+\ldots$

Separando as duas primeiras parcelas da soma, agrupamos as outras parcelas duas a duas e ficamos com:

$$1,4232323=1+\frac{4}{10}+\left(\frac{2}{10^2}+\frac{3}{10^3}\right)+\left(\frac{2}{10^4}+\frac{3}{10^5}\right)+\ldots$$

Procedendo como no exemplo anterior, podemos identificar uma PG efetuando a soma dos termos entre parênteses:

$$1,4232323=1+\frac{4}{10}+\frac{23}{10^3}+\frac{23}{10^5}+\frac{23}{10^7}+\ldots$$

A PG tem primeiro termo igual a $\frac{23}{10^3}$ e razão igual a $\frac{1}{10^2}$; usando a fórmula, temos:

$$1,4232323=1+\frac{4}{10}+\frac{23}{10^3}+\frac{23}{10^5}+\frac{23}{10^7}+\ldots=1+\frac{4}{10}+\frac{\frac{23}{10^3}}{1-\frac{1}{10^2}}=$$

$$=1+\frac{4}{10}+\frac{23}{10^3}\times\frac{10^2}{99}=1+\frac{4}{10}+\frac{23}{990}=\frac{990+4\times 99+23}{990}=\frac{1409}{990}\ .$$

19) $0{,}999\ldots = \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \frac{9}{10^4} + \frac{9}{10^5} + \ldots$

Este caso é como no exemplo inicial: a soma é de uma PG infinita, decrescente, cujo primeiro termo é $\frac{9}{10}$ e a razão é $\frac{1}{10}$. Temos então:

$$0{,}999\ldots = \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \frac{9}{10^4} + \frac{9}{10^5} + \ldots = \frac{\frac{9}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{9}{10} \times \frac{10}{9} = 1.$$

Note que acabamos de descobrir uma nova representação para o número 1: uma representação decimal em dízima periódica. Isto nos sugere que também os outros números inteiros podem ter uma representação desta forma. De fato, todos os números racionais podem ser representados por dízimas periódicas. Veja mais exemplos e faça as contas se não estiver convencido!

20) $1{,}9999\ldots = 2$

21) $2{,}9999\ldots = 3$

22) $3{,}49999\ldots = 3{,}5$

23) $7{,}379999\ldots = 7{,}38$

Exercícios propostos

45) Escreva a representação fracionária irredutível dos seguintes números racionais:

a) $0{,}0305$

b) $-34{,}796$

c) $5{,}4444$

d) $0{,}0001$

e) $1{,}20202020\ldots$

f) $3{,}41898989\ldots$

g) $-5{,}097777\ldots$

h) $34{,}59999\ldots$

46) Dê a representação decimal infinita:

a) $0,54$ b) $42,123$

c) $1,59$ d) $2,01$

47) Na divisão de $4,5$ por $2,345$, temos que "igualar as casas depois da vírgula" antes de começar a dividir, preenchendo as casas que faltam por zeros; depois "cortamos as vírgulas e dividimos como inteiros. Dê uma justificativa para este procedimento.

48) Na multiplicação de $8,97$ por $0,567$, o resultado terá cinco casas decimais. Explique por quê.

49) Mostre que:

a) $\dfrac{56}{100} = 0,56$ b) $\dfrac{456}{10} = 45,6$

c) $\dfrac{34}{10^5} = 0,00034$

O que você conclui?

6.10.1 Existência da representação decimal finita

Já vimos que todo número racional admite uma representação decimal infinita periódica, as chamadas dízimas periódicas, mas nem todo número racional admite uma representação decimal finita. Como saber, sem fazer a conta, que um número racional admite uma representação decimal finita? Observemos alguns exemplos:

24) Como você já deve ter notado (exercício 49), frações cujo denominador é uma potência de 10 admitem uma representação decimal finita; por exemplo,

$$\frac{9}{10} = 0,9; \quad \frac{234}{100} = 2,34; \quad \frac{12}{10^4} = 0,0012; \quad \frac{231}{10^5} = 0,00231; \ \textit{etc.}$$

25) Observe atentamente as frações com representação decimal finita:

$$\frac{21}{16}=1,3125; \quad \frac{345}{4}=86,25; \quad \frac{1}{32}=0,03125; \quad \frac{4351}{64}=67,984375$$

O que têm elas em comum? Os denominadores são potências de 2. Neste caso, haverá uma representação decimal finita, ou seja, se a fração apresentar uma potência de 2 no denominador, existirá uma representação finita.

26) Agora observe as frações seguintes e suas representações decimais finitas:

$$\frac{59}{25}=2,36; \quad \frac{298}{125}=2,384; \quad \frac{1}{5}=0,2; \quad \frac{73}{625}=0,1168.$$

Podemos notar aqui que os denominadores são potências de 5. Se a fração apresentar uma potência de 5 em seu denominador, ela terá uma representação decimal finita.

Vamos reunir as nossas investigações em um teorema:

Teorema. Um número racional $\frac{a}{b}$ em sua forma irredutível admite uma representação decimal finita quando o denominador b não apresentar outros fatores além de 2 e 5. A representação será somente infinita periódica quando o denominador b apresentar pelo menos um fator primo diferente de 2 e diferente de 5.

Observação 14. Note que o teorema só pode ser usado para frações irredutíveis! Por exemplo, $\frac{91}{26}$ apresenta o fator 13 no denominador ($26=2\times 13$) e, mesmo assim, possui uma representação decimal finita, pois a fração não é irredutível: $\frac{91}{26}=\frac{7}{2}$ e o denominador 2 é uma potência de 2. Logo, a fração admite uma representação decimal finita.

Observação 15. Falamos que a vantagem da representação decimal é usar os mesmos algoritmos das operações dos inteiros; no entanto, é preciso que fique claro que *isso é possível para representações decimais finitas*. Não sabemos como somar $0,8888...$ com $0,7777...$, por exemplo. Para efetuar esta soma, devemos usar a representação fracionária dos números $0,8888... = \frac{8}{9}$ e $0,7777... = \frac{7}{9}$. Somando-os nesta nova representação obtemos $\frac{8}{9} + \frac{7}{9} = \frac{15}{9} = \frac{5}{3}$, cuja representação decimal é $1,666...$

6.11 Potências em $\mathbb{Q}$

A idéia de potência de um número que aprendemos em $\mathbb{Z}$ permanece a mesma no conjunto dos racionais, independente da representação utilizada. Mas a existência de inversos em $\mathbb{Q}$ nos permite definir potências de expoentes negativos. Veja alguns exemplos:

27) $\left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{4}{3} \times \frac{4}{3} = \frac{4 \times 4}{3 \times 3} = \frac{4^2}{3^2}$.

28) $(0,56)^3 = 0,56 \times 0,56 \times 0,56 = 0,175616$.

29) $(1,2222...)^3 = \left(1 + \frac{2}{9}\right) \times \left(1 + \frac{2}{9}\right) \times \left(1 + \frac{2}{9}\right) = \frac{11}{9} \times \frac{11}{9} \times \frac{11}{9} = \frac{1331}{729}$.

(lembre-se da obs. 14: só sabemos operar em representação fracionária ou em representação decimal finita!).

30) $\left(\frac{5}{8}\right)^{-2} = \left[\left(\frac{5}{8}\right)^{-1}\right]^2 = \left(\frac{8}{5}\right)^2 = \frac{8^2}{5^2} = \frac{64}{25}$.

Observação 16. Note que no exemplo 30 (de potência negativa) usamos o inverso; um número elevado à potência -2 é igual ao inverso do número elevado à potência 2.

Definição. Seja n um número inteiro, $n \geq 0$ e $\frac{a}{b}$ um número racional não nulo. Então:

i) $\left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1$.

ii) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.

iii) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left[\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}\right]^n = \left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n}$.

Se n é um número inteiro positivo, então $-n$ é um número negativo.

6.11.1 Propriedades das potências em $\mathbb{Q}$

As propriedades das potências em $\mathbb{Q}$ permanecem as mesmas que em $\mathbb{Z}$; entretanto, agora podemos usar potências inteiras:

Proposição 5. Dados os números racionais x e y e os números inteiros n e m, tem-se:

a) $x^n . x^m = x^{n+m}$

b) $(x^n)^m = x^{n.m}$

c) $(x.y)^n = x^n . y^n$

d) $\dfrac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$

Demonstração. a), b) e c) demonstram-se por indução, como em $\mathbb{Z}$ (capítulo 5). Demonstra-se d) usando b) e a definição de divisão.

6.12 Existência de números que não são racionais

O conjunto dos números racionais possui quase todas as propriedades que precisamos para resolver os problemas básicos de matemática. Mas existem situações em que o conjunto dos números racionais não é suficiente. Basta lembrar que, para calcular a medida da diagonal de um quadrado de lado 1 pelo Teorema de Pitágoras, temos:

$$d^2 = 1^2 + 1^2$$
$$d^2 = 2 .$$

Note que não é possível encontrar um número racional cujo quadrado é 2. De fato, suponhamos que seja possível encontrar um número racional $\dfrac{a}{b}$, em sua forma irredutível, cujo quadrado é 2.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2 .$$

Pela propriedade das potências, temos:

$$\frac{a^2}{b^2} = 2 .$$

Multiplicando ambos os lados por b^2 obtemos

1) $a^2 = 2b^2$.

Como a e b são números inteiros, a igualdade nos informa que $2 \mid a^2$.

Mas 2 é primo; neste caso, temos que 2 também é divisor de a, ou seja, a é um número par, da forma $a = 2k$. Substituindo em 1), obtemos

$$(2k)^2 = 2b^2$$
$$4k^2 = 2b^2.$$

Pela lei do cancelamento da multiplicação temos que:

$$2k^2 = b^2.$$

Neste caso, também teremos que $2 \mid b^2$ e como 2 é primo, 2 é divisor de b.

Mas isto é uma contradição, pois o número $\frac{a}{b}$ está em sua forma irredutível (ou seja, não admite fatores comuns) e 2 não pode ser um fator de a e também de b. Esta contradição teve origem em nossa suposição da existência de um número racional cujo quadrado é 2. Logo, este fato não pode ocorrer, ou seja, não existe um número racional cujo quadrado é 2. Em outras palavras, o número cujo quadrado é 2 não é um número racional.

Isto nos mostra que existe um campo numérico mais amplo que o conjunto dos números racionais e você já o conhece: o conjunto dos números reais, que acrescenta ao conjunto dos números racionais os números irracionais, ou seja, aqueles números que não podem ser expressos como razão de inteiros. Este conjunto você irá estudar com detalhes na disciplina de Introdução ao Cálculo.

Exercícios propostos

50) Verifique se os números racionais a seguir admitem uma representação decimal finita, sem efetuar a divisão:

a) $\frac{57}{6}$

b) $\frac{78}{26}$

c) $\frac{45}{256}$

51) Ao dividirmos dois números racionais em representação decimal finita, o quociente também apresentará representação decimal finita?

52) Mostre que não existe um número racional cujo quadrado é 5 (sugestão: item 6.12 do texto). Em seguida, mostre que não existe um número racional cujo quadrado é um número primo p.