2.6 Equações e inequações

A resolução de equações e inequações em $\mathbb{R}$ decorre das propriedades das operações, das propriedades da relação de ordem e das propriedades do módulo. Começaremos com a resolução de algumas equações, especificando as propriedades utilizadas. Passaremos depois para a resolução das inequações. Sugerimos que você leia as próximas páginas munido de papel e lápis, pois nosso trabalho será bastante prático; muito do que vamos trabalhar agora você já conhece do ponto de vista operacional. No entanto, isto não basta. Além de conhecer os procedimentos de resolução é preciso saber o que os justifica. Por que ao mudar um número de membro ele muda de sinal? Por que passar dividindo? Estas "regras" tão conhecidas estão ancoradas nas propriedades do conjunto dos números reais, suas operações e sua ordem. Não são simples "arranjos" para achar o valor de x , como dizem nossos alunos. Não há nelas nenhuma mágica.

A experiência profissional mostra-nos que nossos alunos, na maioria das vezes, ficam absolutamente ávidos por métodos rápidos e precisos, aplicáveis continuamente, para a resolução de problemas de matemática. No entanto, o professor precisa sempre estimular o raciocínio lógico da classe, de tal modo que, na medida do possível, todo cálculo matemático faça algum sentido.

Para aplicar fórmulas, podemos recorrer a planilhas eletrônicas e programá-las para que estas mesmas façam os cálculos. Você pode resolver qualquer equação quadrática sem saber calcular a raiz quadrada do discriminante (delta). O computador faz isso por você.

Além disso, a utilização das equações e inequações estão estreitamente vinculadas à interpretação dos problemas que propomos aos alunos. Neste contexto, a leitura é fundamental para que a linguagem matemática ajude de fato, a traduzir a situação problema proposta.

Neste primeiro estudo trataremos de equações e inequações que envolvem expressões polinomiais. Seguiremos o "caminho escolar" destes assuntos: equações do primeiro grau (sexta série), do segundo grau, equações racionais, equações com módulo, inequações do primeiro grau, inequações do segundo grau. Neste momento não vamos abordar equações e inequações trigonométricas e logarítmicas; elas serão tratadas mais tarde, quando estudarmos as funções elementares.

Para usar uma terminologia absolutamente precisa deveríamos chamar estas equações de equações polinomiais do primeiro ou do segundo grau, mas não é errado utilizar da forma como está. Você observará, que quando se tratar das funções é obrigatório o uso do termo polinomial para referir-se às funções polinomiais do segundo grau, ou funções quadráticas.

2.6.1 Equações

Alguns livros do ensino fundamental definem uma equação como "uma igualdade entre duas expressões algébricas", sem, contudo, definir o que é uma "expressão algébrica". As tentativas de definir as equações (e também os polinômios) sem o suporte do conceito de função variam de geniais a matematicamente incorretas. Optamos por não definir formalmente, e de modo genérico, o que é uma equação. Vamos resolvê-las. Mas o que é resolver uma equação?

1) **Resolução de equações do tipo $ax + b = 0$, com a e b números reais dados, $a \neq 0$.**

   Uma equação deste tipo é chamada uma equação de primeiro grau. Resolvê-la é encontrar todos os valores de x que satisfaçam a igualdade. Sabemos que somente um valor de x satisfaz esta igualdade, isto é, todos os números reais x que multiplicados por a e somados com b resultem zero.

Sabemos mesmo? Você sabe?

   Nomenclatura:

   i) Geralmente x é chamado a "incógnita", termo derivado do latim que significa desconhecido.

   ii) a é chamado o coeficiente de x.

   iii) b é chamado o termo independente.

   Resolução detalhada: cada passo do procedimento da resolução está na coluna da esquerda; na coluna à direita aparece a justificativa de cada passo.

Procedimento	Justificativa
$ax+b=0$	
$[ax+b]+(-b)=0+(-b)$	Adicionando o mesmo valor aos dois membros, a igualdade se mantém. O valor adicionado é o oposto de b, que sabemos existir por A4.
$ax+[b+(-b)]=-b$	À esquerda da igualdade usamos a propriedade associativa da adição (A1); à direita usamos o fato de 0 ser o elemento neutro da adição (A3).
$ax+0=-b$	À esquerda usamos que a soma de um número com seu oposto é zero (A4).
$ax=-b$	Usamos o fato de 0 ser o elemento neutro da adição (A3).
$\frac{1}{a}ax=\frac{1}{a}.(-b)$	Multiplicando os dois membros de uma igualdade por um mesmo número, a igualdade se mantém; podemos multiplicar ambos os membros por $\frac{1}{a}$ (que é o inverso de a), pois como a é diferente de zero, ele admite inverso (M4).
$x=\frac{(-b)}{a}$	À esquerda da igualdade usamos que o produto de um número pelo seu inverso é 1 (M4), e $1.x=x$ pois 1 é o elemento neutro da multiplicação (M3). À direita usamos a operação de multiplicação de números reais.

Como você pode ver, cada passagem tem sua justificativa.

Pode parecer que estamos complicando o que é fácil! No entanto, ao explicar a resolução para os alunos, é interessante que eles não vejam como uma mágica de "passa pra lá, passa pra cá, muda de sinal"; a operação "passar para" não existe em matemática, nem os sinais "mudam" quando se "movimentam" (a propósito, os sinais e os números não andam como os animais...). A tentativa de "esclarecer" a resolução usando expressões consideradas "simples" pode ser desastrosa, dando margem a uma visão errônea da própria natureza da matemática. Quanto mais o professor conhecer o assunto, mais possibilidades (corretas!) de abordagem ele terá, o que pode resultar num trabalho mais eficiente. Além disso, o professor terá conhecimentos para identificar falhas, enganos e vantagens nas diversas abordagens dos livros didáticos.

2) **Resolução de equações do tipo $ax^2+bx+c=0$, com a,b,c números reais e $a \neq 0$.**

Uma equação da forma $ax^2+bx+c=0$ é chamada uma equação do segundo grau e os números reais a,b e c são os coeficientes da equação.

É claro que você já conhece esta equação, a famosa equação de segundo grau. Note que o coeficiente de x^2 deve ser diferente de zero, pois caso contrário teríamos uma equação de primeiro grau. As soluções desta equação são chamadas raízes da equação e são determinadas utilizando uma fórmula, conhecida, no Brasil, como fórmula de Baskhara (tarefa: pesquise a respeito da história desta fórmula):

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Mas como esta fórmula foi deduzida? Sua dedução utiliza a idéia de "completar quadrados". Acompanhe a dedução com atenção.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Primeiro multiplicamos a igualdade por $\frac{1}{a}$, uma vez que $a \neq 0$, obtendo $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$.

Lembrando que $(p+q)^2 = p^2 + 2pq + q^2$ e observando os dois primeiros termos da igualdade anterior fazemos

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}.$$

Então somamos e subtraímos $\frac{b^2}{4a^2}$, obtendo:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{(b^2 - 4ac)}{4a^2} = 0$$

Este é um procedimento de cálculo secular e pode ser trabalhado com os estudantes já no Ensino Médio; alguns defendem que até mesmo no Fundamental. O procedimento permite que os estudantes não se tornem tão dependentes da fórmula, além de poderem resolver outros problemas e a própria equação de segundo grau na forma canônica e não somente na forma normal. Procure a Coleção Contando a História da Matemática, da Editora Ática. No volume sobre esse assunto há uma discussão desse método de resolução.

Denotamos $b^2 - 4ac$ por Δ e, se $\Delta \geq 0$, o membro da esquerda da última igualdade pode ser visto como uma diferença de dois quadrados (Lembre-se do produto notável $p^2 - q^2 = (p+q).(p-q)$).:

Assim, nestas condições temos:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2 = 0$$
$$\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right).\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0$$

Lembrando as propriedades dos números reais, temos:

$$x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = 0 \text{ ou } x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = 0 \text{ e então}$$

$x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$, que são as soluções da equação.

Observação 33. Se $\Delta < 0$, não existem soluções reais para a equação. Neste caso as soluções serão *números complexos* dados por $x_1 = \dfrac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$ ou $x_2 = \dfrac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$

O símbolo i corresponde ao número complexo $\sqrt{-1}$. Você estudará o conjunto dos números complexos com mais detalhes nas disciplinas de Álgebra.

Observação 34. Se $\Delta = 0$, teremos duas soluções reais e iguais, $x_1 = x_2 = \dfrac{-b}{2a}$.

Observação 35. Pela dedução da fórmula, vimos que podemos calcular as soluções de uma equação do 2º grau sem utilizar a fórmula, somente com a idéia de completar quadrados. É claro que algumas equações podem dar um pouco de trabalho. Vejamos como exemplo a resolução de equação $x^2 - 5x + 6 = 0$. À direita indicaremos a justificativa do procedimento:

$x^2-4x+4-x+2=0$	$-5x=-4x-x$; $6=4+2$;estamos procurando um quadrado e é "fácil" lembrar que $(x-2)^2=x^2-4x+4$
$(x-2)^2-(x-2)=0$	$(x-2)^2=x^2-4x+4$ e a propriedade associativa
$(x-2).[(x-2)-1]=0$	Propriedade distributiva: colocamos $(x-2)$ em evidência
$(x-2).(x-3)=0$	$(x-2)-1=x-3$
$x-2=0$ ou $x-3=0$	P8: se o produto de dois números é zero, um deles é zero.
$x=2$ ou $x=3$	

As soluções da equação são $x=2$ ou $x=3$.

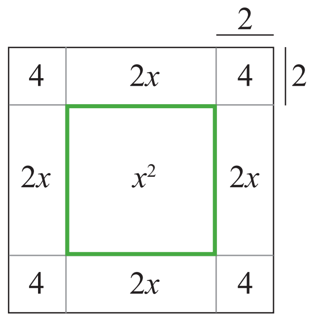
Observação 36. Este processo nos indica que, uma vez encontradas as soluções, é possível expressar a equação na forma $(x-2).(x-3)=0$. Um exercício da próxima lista de exercícios generaliza este fato para as equações de segundo grau.

Observação 37. Os livros didáticos costumam expressar as soluções em forma de conjunto, chamado o conjunto solução da equação. No exemplo anterior o conjunto solução é dado por $S=\{2,3\}$.

Equações de segundo grau: resolução geométrica

Como na equação de segundo grau a incógnita aparece ao quadrado e a área de um quadrado de lado x é $x \cdot x = x^2$, será possível relacionar esta equação a um problema de área? É possível encontrar as soluções de algumas equações de segundo grau construindo quadrados convenientes e utilizando a incógnita x (o valor que estamos procurando) como a medida do lado de um quadrado. Assim, conseguiremos encontrar as soluções se elas forem positivas, já que estamos considerando x uma medida. Como exemplo, vamos encontrar geometricamente (sem usar fórmula!) as soluções positivas de algumas equações:

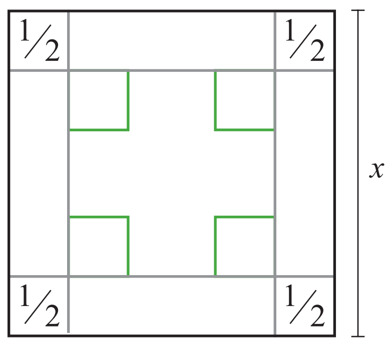
a) $x^2+8x-9=0$



$$x^2 + 8x = 9$$
$$8x = 4.(2x)$$
$$x^2 + 8x + 4.4 = 9 + 16 = 25 = (x+4)^2$$

25 é a área do quadrado de lado $(x+4)$ e é também a área do quadrado de lado 5. Logo, $x+4=5$, o que nos dá $x=1$, a raiz positiva da equação.

b) $x^2 - 2x - 3 = 0$



$$x^2 - 2x = 3 \quad \text{e} \quad 2x = 4.\left(\frac{1}{2}\right)x.$$

Foram "tirados" do quadrado quatro retângulos de dimensões $\frac{1}{2}$ e x; conseqüentemente, foram tirados duas vezes os quatro quadrados de lado $\frac{1}{2}$. A figura em cruz tem área $x^2 - 2x = 3$.

Para completar o quadrado do meio, acrescentamos os quatro pequenos quadrados de lado $\frac{1}{2}$ e teremos: $x^2 - 2x + 4.\left(\frac{1}{4}\right)$.
De $x^2 - 2x = 3$, temos $(x-1)^2 = 3 + 1 = 4 = 2^2$.

Logo, $x - 1 = 2$, o que nos dá $x = 3$, a raiz positiva da equação.

Observação 38. Você deve ter notado que as duas equações resolvidas geometricamente eram do tipo $ax^2+bx+c=0$, com $a=1$ e o termo independente $c<0$. Pergunta: o processo poderia ser feito também para equações com $c>0$?

2.6.2 Equações racionais

Algumas equações necessitam um certo trabalho antes de serem submetidas aos procedimentos de resolução já vistos. Não são equações de primeiro ou segundo graus, mas sua resolução depende dos procedimentos de resolução de tais equações. São chamadas de equações racionais, por envolverem frações. É importante lembrar que, em se tratando de uma fração, é necessário que seu **denominador seja diferente de zero**; assim, antes de resolver a equação devemos encontrar os valores de x que anulam o denominador e excluí-los.

Você conhece uma demonstração de que 1 = 2? Pesquise e descubra o porque de essa pergunta ser feita aqui.

Exemplos:

3) Resolver a equação $\frac{1}{x-2}=\frac{2}{x-5}$, $x\neq 2$ e $x\neq 5$.

Vamos resolvê-la.

$$\frac{1}{x-2}=\frac{2}{x-5},\quad x\neq 2 \text{ e } x\neq 5$$

Somando o oposto de $\frac{2}{x-5}$, temos:

$$\frac{1}{x-2}-\frac{2}{x-5}=0$$

Reduzindo ao mesmo denominador (frações equivalentes),

$$\frac{1.(x-5)-2.(x-2)}{(x-2).(x-5)}=0$$

A fração será igual a zero quando o numerador for igual a zero. Logo, basta resolver $x-5-2x+4=0$, ou seja, $-x=1$, que resulta $x=-1$. Antes de dar a resposta, devemos verificar se o valor encontrado é diferente de 2 e diferente de 5 , valores "proibidos" por tornarem zero o denominador. Como isto acontece, a solução é $x=-1$, isto é, $S=\{-1\}$.

2) Resolver a equação $\dfrac{1}{x^2-5x+6}-\dfrac{1}{x-2}=0$.

Inicialmente devemos verificar os valores de x que anulam os denominadores, para que possamos excluí-los da solução:

(i) $x^2-5x+6=0$ quando $x=2$ ou $x=3$

(ii) $x-2=0$ quando $x=2$

Logo, devemos ter $x \neq 2$ e $x \neq 3$.

Escrevendo $x^2-5x+6=(x-2)\cdot(x-3)$, decorrente da Observação 30, temos

$$\frac{1}{(x-2)\cdot(x-3)}-\frac{1}{x-2}=0$$

Reduzindo ao mesmo denominador,

$$\frac{1-(x-3)}{(x-2)\cdot(x-3)}=0$$

Novamente, uma fração é igual a zero quando seu numerador é zero:

$$1-(x-3)=0$$

$$1-x+3=0\text{, ou seja, } x=4$$

Como $4 \neq 2$ e $4 \neq 3$, temos $S=\{4\}$.

Exercícios propostos

29) Resolva as equações:

a) $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}x+\dfrac{3}{4}=0$.

Resp. $S=\left\{\dfrac{-3\sqrt{2}}{4\sqrt{5}}\right\}$

b) $\dfrac{1}{x^2-7x-8}-\dfrac{1}{x-2}=0\cdot$

Resp. $S=\left\{4-\sqrt{22}, 4+\sqrt{22}\right\}$

30) Mostre que é única a solução da equação $ax+b=0$, com a e b números reais e $a \neq 0$.

31) Se um número real k é solução de ambas as equações $ax+b=0$ e $cx+d=0$, com $a \neq 0$ e $c \neq 0$, qual a relação entre os coeficientes a, b, c e d?

32) Considere a equação de segundo grau $ax^2+bx+c=0, a \neq 0$. Mostre que a soma das soluções é $\frac{-b}{a}$ e o produto das soluções é $\frac{c}{a}$.

33) Considere a equação $ax^2+bx+c=0$, com a, b e c números inteiros e $a \neq 0$. Mostre que: se o número racional $\frac{u}{v}$ é solução da equação, então $u|c$ e $v|a$.

34) Mostre que todo número racional $\frac{a}{b}$ com $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$ é solução de uma equação de primeiro grau com coeficientes inteiros.

35) Use o exercício 32 para encontrar uma equação de segundo grau que tenha soluções $u=-8$ e $v=-\frac{1}{2}$. Esta equação é única?

36) Se u e v são soluções da equação $ax^2+bx+c=0$, mostre que $ax^2+bx+c=a(x-u)\cdot(x-v)$.

2.7.3 Inequações

Para resolver inequações, usaremos principalmente as propriedades da relação de ordem em $\mathbb{R}$. Faremos inicialmente as inequações de primeiro grau, em seguida as inequações de segundo grau e por fim as inequações envolvendo módulo. Para estas últimas usaremos também as propriedades do módulo. A melhor maneira de aprender a resolver inequações é por meio de exemplos; é claro que não podemos fazer todos os exemplos possíveis! No entanto, selecionamos alguns mais significativos, cujas estratégias são mais gerais. Resolver uma inequação é encontrar todos os valores de x que satisfaçam uma desigualdade; não podemos esquecer que isto é diferente de encontrar valores que satisfaçam uma igualdade.

Aconselhamos que você leia este tópico acompanhado de papel e lápis.

Exemplos:

1) Resolver a inequação $3x-5>2$

Faremos a resolução detalhada, indicando a propriedade usada em cada passo do procedimento; a coluna da esquerda é a resolução e a da direita é a propriedade usada naquele passo.

Procedimento	Justificativa
$3x-5>2$	
$3x>7$	Somamos $+5$ (o oposto de -5) aos dois lados da desigualdade (PO5)
$\frac{1}{3}.3x>\frac{1}{3}.7$	Multiplicamos ambos os lados por $\frac{1}{3}$ (o inverso de 3); a desigualdade não se altera pois o número é positivo. (PO3)
$x>\frac{7}{3}$	Efetuamos a multiplicação

A solução da inequação será então o conjunto de todos os valores de x que são maiores do que $\frac{7}{3}$. Podemos escrever este conjunto de duas maneiras:

i) em forma de intervalo: $S=\left]\frac{7}{3},+\infty\right[$ ou

ii) $S=\left\{x\in\mathbb{R}\ /\ x>\frac{7}{3}\right\}$

Sempre que possível, usaremos a forma de intervalos.

2) Resolver a inequação $\sqrt{7}-5x\geq 8$

Especifique ao lado as propriedades utilizadas:

$$\sqrt{7}-5x\geq 8$$

$$-5x\geq 8-\sqrt{7}$$

$$5x\leq\sqrt{7}-8$$

$$x\leq\frac{\sqrt{7}-8}{5};$$

$$S=\left]-\infty,\frac{\sqrt{7}-8}{5}\right]$$

3) Resolver a inequação $2x+3 \leq 5x+1$

Especifique ao lado as propriedades utilizadas:

$$2x+3 \leq 5x+1$$
$$2x-5x \leq 1+(-3)$$
$$-3x \leq -2 \qquad \cdot\left(-\frac{1}{3}\right)$$
$$x \geq \frac{2}{3}$$
$$S = \left[\frac{2}{3}, +\infty\right)$$

Observação 39. Como você deve ter percebido, nos dois exemplos foram utilizadas as propriedades **PO3** e **PO5**; no exemplo 3 também foi utilizada a **PO4**. Veja outra maneira de resolver, utilizando a adição e a lei do cancelamento:

$$2x+3 \leq 5x+1$$
$$2x+2+1 \leq 2x+3x+1$$
$$2 \leq 3x$$
$$\frac{2}{3} \leq x$$
$$S = \left[\frac{2}{3}, +\infty\right]$$

Exemplos:

4) Resolver a inequação $(x-3)\cdot(x+1) > 0$

Podemos observar aqui que os valores procurados (os valores de x) devem ser tais que o produto $(x-3)\cdot(x+1)$ resulte maior do que zero, ou seja, positivo. Quando um produto de dois números reais é positivo? Uma propriedade nos diz que um produto de dois números reais é positivo quando os números são ambos positivos ou ambos negativos. Vamos analisar as duas possibilidades:

i) $(x-3) > 0$ e $(x+1) > 0$, isto é, $x > 3$ e $x > -1$.

Analisando as duas desigualdades acima, vemos que $x > 3$ e $x > -1$, simultaneamente (note o conectivo *e*); isto significa que devemos

fazer a intersecção dos dois conjuntos, $A_1 =]3,+\infty[$ e $A_2 = (-1,+\infty)$.
Veja na reta:

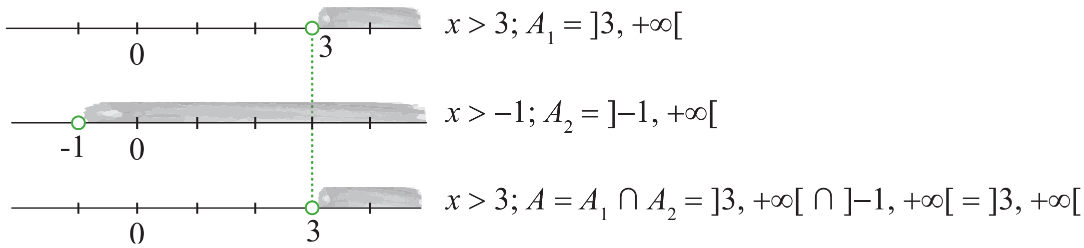


Figura 2.1

Esta primeira possibilidade nos deu um primeiro conjunto,

$$A =]3,+\infty[.$$

Vamos analisar agora a outra possibilidade:

ii) $x-3<0$ e $x+1<0$, isto é, $x<3$ e $x<-1$.

Analogamente ao que foi feito na possibilidade (i), fazemos:

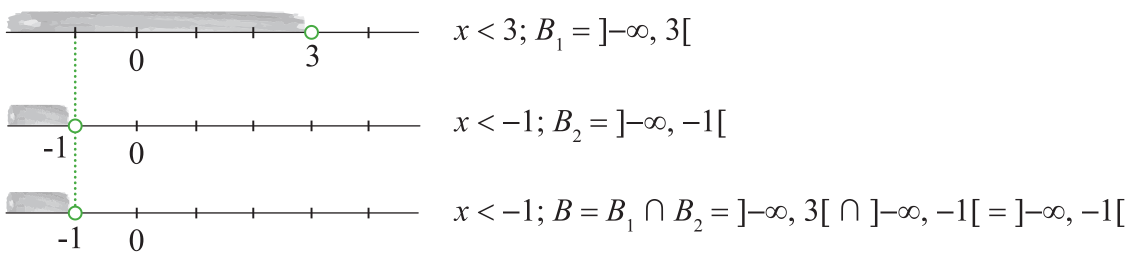


Figura 2.2

A segunda possibilidade nos deu o conjunto:

$$B =]-\infty,-1[.$$

Assim, os valores de x que satisfazem a desigualdade dada devem satisfazer (i) ou (ii), ou seja, serão os elementos de A, ou os elementos de B; isto significa que, para expressar o conjunto de todos os possíveis valores de x que satisfazem a desigualdade (isto é, o conjunto solução), devemos fazer a união destes dois conjuntos: $S = A \cup B$. Assim, a solução da inequação é: $S =]-\infty,-1[\cup]3,+\infty[$.

Generalização: O exemplo 4 nos sugere uma generalização para resolução de inequações do tipo $(x-u)(x-v)>0$, com $u \neq v$: sabemos que no membro da esquerda os números u e v são raízes de uma equação de segundo grau e estão diretamente ligados à solução da inequação. No exemplo 4: para $u=-1$, $v=3$ e $v>u$, temos que a solução da inequação é $S=]-\infty,-1[\cup]3,+\infty[$, isto é, os valores à esquerda de -1 ($x<-1$) ou à direita de 3 ($x>3$). Podemos então generalizar: a solução de $(x-u)(x-v)>0$ para $v>u$ é o conjunto $S=]-\infty,u[\cup]v,+\infty[$. No caso de $(x-u)(x-v)\geq 0$, os intervalos serão fechados em u e v: $S=]-\infty,u]\cup[v,+\infty[$.

Pergunta: qual é esta equação?

5) Resolver a inequação $2x^2+3x+3\leq 3$

A idéia aqui é aproveitarmos a estratégia do exemplo anterior, para melhorar um pouco uma inequação envolvendo x^2:

$$2x^2+3x+3\leq 3+(-3)$$
$$2x^2+3x+3+(-3)\leq 3+(-3)$$
$$2x^2+3x\leq 0$$

Escrevendo o membro da esquerda como produto (propriedade distributiva), temos $x(2x+3)\leq 0$.

Voltamos assim às considerações do exemplo anterior: quando um produto de números reais é menor do que ou igual a zero, ou seja, quando ele é negativo ou nulo? Quando tivermos um fator positivo (ou nulo) e outro negativo (ou nulo). Vamos estudar os dois possíveis casos:

i) $x\geq 0$ e $2x+3\leq 0$, ou seja, $x\geq 0$ e $x\leq -\dfrac{3}{2}$.

Vejamos agora, com o auxílio da reta, quais valores de x satisfazem simultaneamente estas condições:

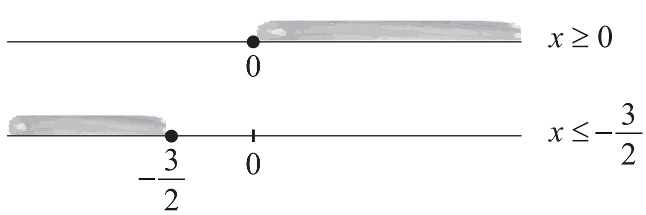


Figura 2.3

Como você pode observar, não há valores reais satisfazendo ambas as condições. Logo, para este primeiro caso, o conjunto-solução será o conjunto vazio: $S_1 = \varnothing$.

ii) $x \le 0$ e $2x+3 \ge 0$, ou seja, $x \le 0$ e $x \ge -\dfrac{3}{2}$.

Observando na reta:

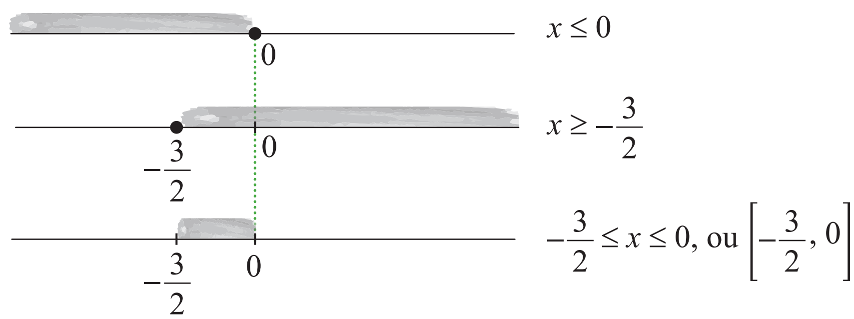


Figura 2.4

O conjunto-solução da inequação será então a união dos conjuntos obtidos em cada caso. Como no primeiro caso o conjunto é vazio, a solução será $S = \left[-\dfrac{3}{2}, 0\right]$.

Generalização: O exemplo 5 nos permite generalizar a resolução de inequações do tipo $(x-u)(x-v) < 0$, para $u \neq v$. Para as raízes $u = -\dfrac{3}{2}$ e $v = 0$, a solução da inequação $(x-0)(2x+3) \le 0$ é o conjunto $S = \left[-\dfrac{3}{2}, 0\right]$, isto é, os valores de x que estão "entre" u e v, com $u < v$. Assim, a solução da inequação do tipo $(x-u)(x-v) < 0$ para $u < v$ será o conjunto $S =]u, v[$. No caso de $(x-u)(x-v) \le 0$, a solução será o intervalo $S = [u, v]$.

Observação 40. As generalizações dos exemplos 4 e 5 nos serão úteis para resolver outros tipos de inequações e para o estudo da função quadrática. Lembre-se que não há como "padronizar" soluções de todas as possíveis inequações; teremos que utilizar as propriedades para sermos capazes de resolver qualquer tipo de inequação, mesmo que não tenha sido resolvido antes! Inequações do tipo

$$ax^2+bx+c \ge 0,\ ax^2+bx+c > 0,\ ax^2+bx+c \le 0,\ ax^2+bx+c < 0,$$

podem ser "transformadas" fatorando o trinômio

$$ax^2+bx+c=a(x-u)\cdot(x-v),$$

com u e v raízes da equação $ax^2+bx+c=0$. As possíveis soluções são:

Inequação	Solução
$(x-u)(x-v)\geq 0,\ u<v$	$S=]-\infty,u]\cup[v,+\infty[$
$(x-u)(x-v)>0,\ u<v$	$S=]-\infty,u[\cup]v,+\infty[$
$(x-u)(x-v)\leq 0,\ u<v$	$S=[u,v]$
$(x-u)(x-v)<0,\ u<v$	$S=]u,v[$

Pergunta: Em nosso resumo, por que não aparece o número a, da fatoração $ax^2+bx+c=a(x-u)\cdot(x-v)$?

Exemplos:

6) Resolver a inequação $\dfrac{7-2x}{4x+1}<2$

Somos tentados a multiplicar a expressão "em cruz", a fim de obter uma inequação já conhecida. No entanto, "multiplicar em cruz" significa formalmente multiplicar ambos os membros da desigualdade por $4x+1$, mas devemos lembrar as propriedades da relação de ordem (**PO3** e **PO4**): quando multiplicamos ambos os membros de uma desigualdade por um número **positivo**, a desigualdade se mantém. Mas se o número é **negativo**, a desigualdade se altera. Como não sabemos se $4x+1$ é positivo ou negativo (depende do valor de x), não podemos multiplicar os membros da desigualdade e conservá-la. Nosso procedimento será outro. Veja:

$\dfrac{7-2x}{4x+1}<2$ somando (-2) aos dois membros, obtemos

$$\frac{7-2x}{4x+1}+(-2)<2+(-2)$$

$$\frac{7-2x}{4x+1}-2<0$$

Reduzindo ao mesmo denominador:

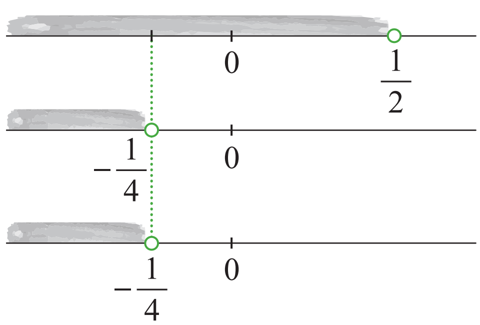
$$\frac{(7-2x)-2(4x+1)}{4x+1}<0$$

$$\frac{-10x+5}{4x+1}<0$$

Quando um quociente é menor do que zero, ou seja, é negativo? Quando numerador e denominador têm sinais opostos. Estudemos os dois casos:

i) $-10x+5>0$ e $4x+1<0$, isto é, $x<\frac{1}{2}$ e $x<-\frac{1}{4}$

Na reta:



$x<\frac{1}{2};\ A_1=]-\infty,\frac{1}{2}[$

$x<-\frac{1}{4};\ A_2=]-\infty,-\frac{1}{4}[$

$x<-\frac{1}{4};\ A=A_1\cap A_2=]-\infty,-\frac{1}{4}$

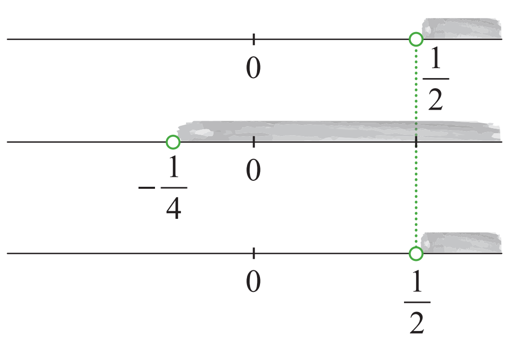
Figura 2.5

Logo, o estudo do primeiro caso nos forneceu o conjunto:

$$A=\left]-\infty,-\frac{1}{4}\right[.$$

ii) $-10x+5<0$ e $4x+1>0$, isto é, $x>\frac{1}{2}$ e $x>-\frac{1}{4}$.

Na reta:



$x>\frac{1}{2};\ B_1=]\frac{1}{2},+\infty[$

$x>-\frac{1}{4};\ B_2=]-\frac{1}{4},+\infty[$

$x>\frac{1}{2};\ B=B_1\cap B_2=]\ \frac{1}{2},+\infty[$

Figura 2.6

Logo, o estudo do segundo caso nos forneceu o conjunto:

$$B = \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[.$$

Como pode ocorrer (i) ou (ii), os valores de x do conjunto A ou os do conjunto B satisfazem a desigualdade. Isto nos sugere que o conjunto-solução da inequação é a união dos conjuntos A e B:

$$S = A \cup B \left]-\infty, -\frac{1}{4}\right[\cup \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[.$$

7) Resolver a inequação $\dfrac{1}{x+1} \geq \dfrac{3}{x-2}$

Inicialmente devemos ter $x \neq -1$ e $x \neq 2$. Continue resistindo à tentação de "multiplicar em cruz": este procedimento não funciona com inequações! Observe a resolução:

$\dfrac{1}{x+1} \geq \dfrac{3}{x-2}$ somando $\left[-\left(\dfrac{3}{x-2}\right)\right]$ nos dois membros, obtemos

$$\frac{1}{x+1} - \frac{3}{x-2} \geq 0$$

Reduzindo ao mesmo denominador:

$$\frac{(x-2)-3(x+1)}{(x+1)(x-2)} \geq 0$$

$$\frac{x-2-3x-3}{(x+1)(x-2)} \geq 0$$

$$\frac{-2x-5}{(x+1)(x-2)} \geq 0$$

Quando um quociente de números reais é maior do que ou igual à zero? Quando numerador e denominador são ambos positivos ou são ambos negativos. Além disso, o numerador pode ser nulo (o denominador não pode!). Note também que não é conveniente realizar as operações do denominador. Vamos analisar os dois casos, como no exemplo 4:

i) $-2x-5\geq 0$ e $(x+1)\cdot(x-2)>0$

A solução da primeira inequação é $x\leq -\frac{5}{2}$, ou $B=\left]-\infty,-\frac{5}{2}\right]$; pela Obs. 40, a solução da inequação $(x+1)\cdot(x-2)>0$ é o conjunto

$$A=]-\infty,-1[\cup]2,+\infty[.$$

Assim, os valores de x que satisfazem simultaneamente as duas inequações estão na intersecção dos conjuntos A e B. Veja na reta:

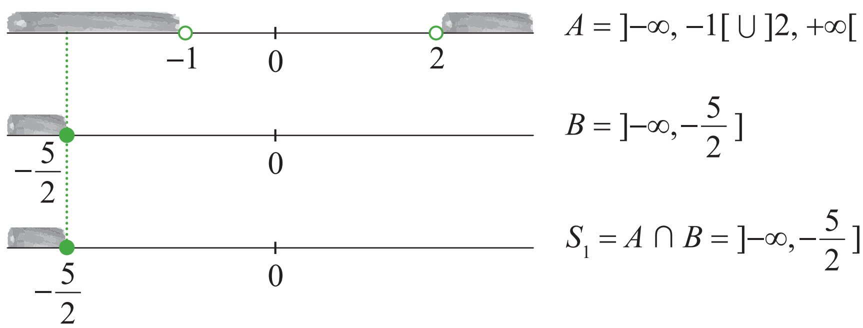


Figura 2.7

Vamos analisar o segundo caso.

ii) $-2x-5\leq 0$ e $(x+1)\cdot(x-2)>0$

Análogo ao que foi feito para (i), a solução da primeira inequação é

$x\geq -\frac{5}{2}$, ou $B=\left[-\frac{5}{2},+\infty\right[$.

Pela Obs. 40 a solução da inequação $(x+1)(x-2)<0$ é $A=]-1,2[$.

Analisando o conjunto dos valores de x que satisfazem simultaneamente as condições, temos:

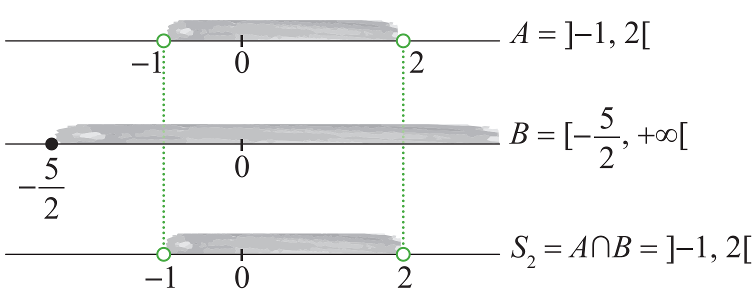


Figura 2.8

O caso (i) nos forneceu o conjunto $S_1 = \left]-\infty, \frac{5}{2}\right]$ e o caso (ii) nos forneceu o conjunto $S_2 =]-1,2[$. Então concluímos que o conjunto-solução da inequação será $S = S_1 \cup S_2 = \left]-\infty, -\frac{5}{2}\right[\cup \left]-1,2\right[$. Observe que os valores "proibidos" $x=-1$ e $x=2$ não pertencem ao conjunto solução.

8) Resolver a inequação: $|x+2|<4$

Temos agora uma inequação que envolve módulo. De acordo com a idéia geométrica do módulo, procuramos os pontos x cuja distância até -2 é menor do que 4, ou seja, os valores de x que satisfazem simultaneamente as inequações $x+2<4$ e $x+2>-4$. A PM6 nos informa que: "Se $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}_+$ e $|x|<a$, então $-a<x<a$". Como $x+2 \in \mathbb{R}$ e $4 \in \mathbb{R}_+$, podemos concluir que $-4<x+2<4$. Temos aqui duas escolhas: podemos resolver diretamente, usando as propriedades da relação de ordem, ou podemos resolver as duas inequações separadamente e fazer a intersecção das soluções parciais.

Primeiro modo:

$-4<x+2<4$ somando (-2) em todos os membros, temos

$$(-4)+(-2)<x+2+(-2)<4+(-2)$$

$$-6<x<2$$

Logo, a solução é $S=]-6,2[$.

Segundo modo:

Separando em duas inequações:

a) $-4<x+2$, de onde obtemos $x>-6$, ou $S_1=]-6,+\infty[$ e

b) $x+2<4$, de onde obtemos $x<2$, ou $S_2=]-6,2[$.

A solução será a intersecção $S=S_1 \cap S_2 =]-6,2[$.

9) Resolver a inequação $|3x+1|>1$

Também neste caso temos uma propriedade que nos auxilia, a **PM7**:

"Se $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}_+$ e $|x|>a$, então $x>a$ ou $x<-a$".

Como $(3x+1)\in\mathbb{R}$, $1\in\mathbb{R}_+$ e $|3x+1|>1$, concluímos que $3x+1>1$ ou $3x+1<-1$. São estes os dois casos que vamos analisar:

a) $3x+1>1$ tem como solução $B=]0,+\infty[$.

b) $3x+1<-1$ tem solução $A=\left]-\infty,-\dfrac{2}{3}\right[$.

A solução é a união das soluções parciais, porque neste caso estamos procurando os valores de x que satisfazem pelo menos uma das duas inequações: $3x+1>1$ ou $3x+1<-1$. Portanto a solução da inequação é: $S=A\cup B=\left]-\infty,-\dfrac{2}{3}\right[\cup\,]0,+\infty[$.

Observação 41. Nos exemplos 8 e 9 aprendemos como resolver inequações do tipo $|E|>K$ e $|E|<K$, quando E é uma expressão do tipo $ax+b$ e K é um número real positivo. No caso da expressão quadrática ax^2+bx+c, o procedimento é análogo:

1º) para $|ax^2+bx+c|<k$, utilizamos a PM6 e fazemos $-k<ax^2+bx+c<k$. Neste caso temos que resolver as duas inequações, $-k<ax^2+bx+c$ e $ax^2+bx+c<k$; não podemos resolver diretamente. Para cada inequação, aplicamos o resumo da Obs. 40 e sua solução será a intersecção das soluções parciais.

2º) para $|ax^2+bx+c|>k$ utilizamos a PM7 e fazemos $ax^2+bx+c>k$ ou $ax^2+bx+c<-k$.

Também utilizamos a Obs. 40 e a solução da inequação será a união das soluções parciais.

Exemplo:

10) Resolver a inequação $|x^2+x-2|<\dfrac{1}{2}$

Pela Obs. 41 fazemos $-\dfrac{1}{2}<x^2+x-2<\dfrac{1}{2}$, e resolvemos as duas inequações.

i) $-\dfrac{1}{2}<x^2+x-2$ ou $x^2+x-2>-\dfrac{1}{2}$

$$x^2+x-2+\frac{1}{2}>0 \quad\Rightarrow\quad \frac{2x^2+2x-4+1}{2}>0$$

Como $2>0$, temos $2x^2+2x-3>0$ (veja exemplo 7).

As raízes da equação $2x^2+2x-3=0$ são

$$u=\frac{-1-\sqrt{7}}{2} \quad \text{e} \quad v=\frac{-1+\sqrt{7}}{2};$$

pela Obs. 40, a solução parcial é

$$S_1=\left]-\infty,\frac{-1-\sqrt{7}}{2}\right[\ \cup\ \left]\frac{-1+\sqrt{7}}{2},+\infty\right[.$$

ii) $x^2+x-2<\dfrac{1}{2}$

$$x^2+x-2-\frac{1}{2}<0$$

$$2x^2+2x-5<0 \qquad \text{(veja exemplo 6)}$$

As raízes da equação $2x^2+2x-5=0$ são

$$u=\frac{-1-\sqrt{11}}{2} \quad \text{e} \quad v=\frac{-1+\sqrt{11}}{2};$$

a solução parcial é

$$S_1=\left]\frac{-1-\sqrt{11}}{2},\frac{-1+\sqrt{11}}{2}\right[.$$

A solução da inequação será a intersecção das soluções parciais; para melhor visualização na reta chamaremos

$$a_1=\frac{-1-\sqrt{7}}{2},\ a_2=\frac{-1+\sqrt{7}}{2},\ b_1=\frac{-1-\sqrt{11}}{2},\ b_2=\frac{-1+\sqrt{11}}{2}$$

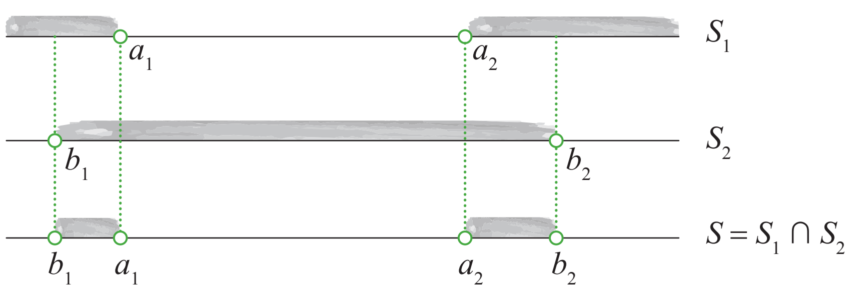


Figura 2.9

$$S=S_1\cap S_2=\left]\frac{-1-\sqrt{11}}{2},\frac{-1-\sqrt{7}}{2}\right[\ \cup\ \left]\frac{-1+\sqrt{7}}{2},\frac{-1+\sqrt{11}}{2}\right[.$$

Tarefa

Resolva como exercício: $\left|x^2+2x-8\right|>\dfrac{1}{3}$.

Resposta:

$$S=\left]-\infty,\frac{-1-\sqrt{28}}{3}\right[\cup\left]\frac{-1-\sqrt{22}}{3},\frac{-1+\sqrt{22}}{3}\right[\cup\left]\frac{-1+\sqrt{28}}{3},+\infty\right[$$

Exemplos:

11) Resolver a inequação $|x+4|\leq|2x-6|$

Para resolver esta inequação, utilizamos inicialmente a definição de módulo:

Seja $a\in\mathbb{R}$; indicamos por $|a|$ o módulo (ou valor absoluto) de a, definido por:

$$|a|=\begin{cases}a \text{ se } a\geq 0\\ -a \text{ se } a>0\end{cases}$$

Como $x+4$ e $2x-6$ são números reais, podemos escrever:

$$|x+4|=\begin{cases}x+4 \text{ se } x+4\geq 0\\ -(x+4) \text{ se } x+4<0\end{cases}$$

$$|2x-6|=\begin{cases}2x-6 \text{ se } 2x-6\geq 0\\ -(2x-6) \text{ se } 2x-6<0\end{cases}$$

Ou ainda:

$$|x+4|=\begin{cases}x+4 \text{ se } x\geq -4\\ -x-4 \text{ se } x<-4\end{cases}$$

$$|2x-6|=\begin{cases}2x-6 \text{ se } x\geq 3\\ -2x+6 \text{ se } x<3\end{cases}$$

Observe que temos dois valores que são decisivos em nossa análise: $x=-4$ e $x=3$; vamos chamar estes valores de “marcadores”. À medida que x percorre a reta e passa pelos marcadores, obtemos as soluções parciais de nossa inequação. Para ilustrar este fato, vamos colocá-lo em um quadro; a reta superior representa a reta e cada coluna, a partir da segunda, representa um intervalo entre os marcadores:

x	$x<-4$ $\quad$ -4	$-4\le x<3$ $\quad$ 3	$3\le x$
$\|2x-6\|$	$-2x+6$	$-2x+6$	$2x-6$
$\|x+4\|$	$-x-4$	$x+4$	$x+4$
$\|x-4\|\le\|2x-6\|$ (resolução)	$-x-4\le-2x+6$ $x\le 10$	$x+4\le-2x+6$ $x\le\dfrac{2}{3}$	$x+4\le 2x-6$ $x\ge 10$
Solução parcial	$x<-4$ e $x\le 10$	$-4\le x<3$ e $x\le\dfrac{2}{3}$	$x\ge 3$ e $x\ge 10$
Conjunto	$]-\infty,-4[$	$[-4,\frac{2}{3}]$	$[10,+\infty[$

Nas duas primeiras linhas temos a situação de $|2x-6|$ e $|x+4|$ em relação aos marcadores.

Na 2ª coluna, quando $x<-4$, temos

$$|2x-6|=-2x+6 \text{ e } |x+4|=-x-4,$$

resultando na inequação $-x-4\le-2x+6$, cuja solução é $]-\infty,-4[$, dentro do intervalo considerado.

Na 3ª coluna, para $-4\le x<3$, temos

$|2x-6|=-2x+6$ e $|x+4|=x+4$;

a inequação é $x+4\le-2x+6$ e sua solução é $\left[-4,\dfrac{2}{3}\right]$ no intervalo considerado.

Na 4ª coluna, para $x\ge 3$, $|2x-6|=2x-6$ e $|x+4|=x+4$; a inequação é $x+4\le 2x-6$ e sua solução é $[10,+\infty[$, no intervalo considerado.

A solução da inequação será a união dos conjuntos obtidos como soluções parciais, pois para todo número real x tem-se $x<-4$, $-4\le x<3$ ou $x\ge 3$:

$$S=]-\infty,-4[\cup\left[-4,\frac{2}{3}\right]\cup[10,+\infty[=\left]-\infty,\frac{2}{3}\right]\cup[10,+\infty[.$$

12) Resolver a inequação $5<|x-2|<10$

Para resolver, podemos separar em duas inequações: $5<|x-2|$ e $|x-2|<10$. Note que estamos procurando valores de x que satisfaçam a ambas, ao mesmo tempo. Geometricamente, buscamos os pontos x cuja distância a 2 está entre 5 e 10. Vamos resolvê-las:

i) $5<|x-2|$

Como no exemplo 9, fazemos $x-2>5$ *ou* $x-2<-5$.

- De $x-2>5$, temos $x>7$ e o conjunto-solução é $B=]7,+\infty[$.
- De $x-2<-5$, temos $x<-3$ e o conjunto-solução é $A=]-\infty,-3[$.

A solução de $5<|x-2|$é, portanto,$S_1=A\cup B=]-\infty,-3[\cup]7,+\infty[$.

ii) $|x-2|<10$

Como no exemplo 8, podemos fazer $-10<x-2<10$. Somando 2 a ambos os termos, obtemos $-8<x<12$. A solução é $S_2=]-8,12[$.

Como os valores de x devem satisfazer (i) e (ii) simultaneamente, devemos fazer a intersecção das soluções parciais. A solução é:

$$S=S_1\cup S_2=\left(]-\infty,-3[\cup]7,+\infty[\right)\cap]-8,12[=]-8,-3[\cup]7,12[.$$

Exercícios propostos

Resolver as inequações:

37) $\dfrac{6x-4}{5}<\dfrac{4x-1}{3}$

Resp. $S=\left]-\dfrac{7}{2},+\infty\right[$

38) $2x-5\leq x-1\leq 3x+2$

Resp. $S=\left[-\dfrac{3}{2},4\right]$

39) $(5x-2)\cdot(2x-8)>0$

Resp. $S=\left]-\infty,\dfrac{2}{5}\right[\cup]4,+\infty[$

40) $\dfrac{3x-5}{2x+1} \leq 0$

Resp. $S = \left]-\dfrac{1}{2}, \dfrac{5}{3}\right]$

41) $\dfrac{2}{x+1} \leq \dfrac{5}{2x-1}$

Resp. $S = [-7, -1[\cup \left]\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$

42) $|6-2x| < 1000$

Resp. $S =]-497, 503[$

43) $|9-2x| \geq |4x|$

Resp. $S = \left[-\dfrac{9}{2}, \dfrac{3}{2}\right]$

44) $\left|\dfrac{5}{2x-1}\right| \geq \left|\dfrac{1}{x-2}\right|$

Resp. $S = \left]-\infty, \dfrac{1}{2}\right[\cup \left]\dfrac{1}{2}, \dfrac{11}{7}\right] \cup [3, +\infty[$

45) $|2x-3| + |x+4| \leq |3x|$

Resp. $S = \left]-\infty, -\dfrac{7}{2}\right]$

46) $|x^2 + 3x + 3| \leq 5$

Resp. $S = \left[\dfrac{-3-\sqrt{17}}{2}, \dfrac{-3+\sqrt{17}}{2}\right]$

47) $|x| + 3x - 2 \leq |2x+1|$

Resp. $S = \left]-\infty, \dfrac{3}{2}\right]$

2.6.4 Equações irracionais

Equações irracionais são aquelas que envolvem radicais. O procedimento de resolução pode variar, mas, de modo geral, nos interessa chegar a uma equação conhecida, de primeiro ou segundo grau. Também devemos observar as limitações do radicando quando o índice é par, uma vez que $\sqrt[2n]{a}$ é um número real se e somente se $a \geq 0$. Esta condição nos leva às inequações. Faremos alguns exemplos e discutiremos certos detalhes interessantes de inequações deste tipo.

Exemplos:

17) Resolver a equação $x-1 = \sqrt{x+11}$

Observe que, para resolver a equação, o primeiro passo é "elevar os dois membros ao quadrado", a fim de eliminarmos o radical. No entanto, este procedimento de "elevar ao quadrado" não nos dá uma equação equivalente à original. Até agora, todos os nossos procedimentos de resolução resultaram em equações equivalentes, ou seja, se fizéssemos o processo inverso, chegaríamos à equação original (confira na resolução de primeiro grau). Note que: se $a = b$, então $a^2 = b^2$, mas a recíproca deste fato não é verdadeira. Basta observar que $(-2)^2 = 4 = 2^2$, mas $-2 \neq 2$. Por este motivo, ao elevarmos ao quadrado os dois membros, "perdemos" a equação original; este fato pode nos levar a soluções "fantasmas", ou seja, valores que não são soluções da equação original. Para evitar isto, basta observar um detalhe: na equação aparece a raiz quadrada *positiva* de um número (veja Obs. 15). Então, para valer a igualdade, o número à esquerda tem que ser positivo (é claro que podemos incluir o zero). Assim, além da condição $a \geq 0$ para $\sqrt{a}$, devemos acrescentar mais uma condição (ou restrição) à equação. Vamos agora resolvê-la:

Condições: $x+1 \geq 11$ e $x-1 \geq 0$, isto é, $x \geq -11$ e $x \geq 1$

$x-1 = \sqrt{x+11}$

$(x-1)^2 = (\sqrt{x+11})^2$

$x^2 - 2x + 1 = x + 11$

$x^2 - 2x - x + 1 - 11 = 0$

$x^2 - 3x - 10 = 0$; as soluções são $x = 5$ e $x = -2$.

$x=5$ e $x=-2$ satisfazem a condição $x \geq -11$, mas $x=-2$ não satisfaz a segunda condição $x \geq 1$. Assim, $x=-2$ não é solução e a equação tem uma única solução $x=5$; o conjunto solução é $S=\{5\}$.

2) Resolver a equação $\sqrt{1-\frac{1}{x}}=\sqrt{1-x}, x \neq 0$

As condições iniciais são $1-\frac{1}{x} \geq 0$ e $1-x \geq 0$. Resolvendo as inequações $1-\frac{1}{x} \geq 0$ e $1-x \geq 0$, teremos a solução $K=]-\infty,1]$, o que significa que os valores encontrados devem pertencer ao conjunto K (Faça os detalhes desta resolução).

Elevando ambos os membros ao quadrado, temos:

$$1-\frac{1}{x}=1-x$$
$$-\frac{1}{x}=-x$$
$$\frac{1}{x}=x$$

$x^2=1$; logo, as soluções possíveis são $x=1$ ou $x=-1$.

Como as soluções são $x=1$ e $x=-1$ e ambas satisfazem as condições iniciais, ou seja, pertencem ao conjunto $K=]-\infty,1]$, o conjunto solução da equação é $S=\{-1,1\}$.

3) Resolver a equação $\sqrt{5+\sqrt{1+5x}}=3$.

As condições iniciais são $1+5x \geq 0$ e $5+\sqrt{1+5x} \geq 0$. Resolvendo a inequação $1+5x \geq 0$, encontramos o conjunto $\left]-\frac{1}{5},+\infty\right[$. Para valores de x neste conjunto a expressão $5+\sqrt{1+5x}$ é sempre positiva. Portanto os valores encontrados devem pertencer ao conjunto $K=\left]-\frac{1}{5},+\infty\right[$.

Elevando ambos os membros da equação dada ao quadrado:

$$5+\sqrt{1+5x}=9 \qquad +(-5)$$
$$\sqrt{1+5x}=4$$

Observe que nos dois membros os números são positivos e $1+5x \geq 0$ já foi considerado. Devemos estar sempre atentos!

Elevando novamente ao quadrado:

$1+5x=16$

$5x = 15$; logo, a solução possível é $x = 3$.

Como $3 \in K$, $x=3$ é solução e $S=\{3\}$.

Exercícios propostos

Resolva as equações:

48) $2\sqrt{5x-1}=3\sqrt{3x-2}$

49) $\sqrt{5x-6}=2+\sqrt{5x-3}$

50) $\sqrt{a+x}+\sqrt{b+x}$, a e b números reais.