Capítulo 7

Polinômios

Seja $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Um polinômio p na incógnita x e com coeficientes em K (simbolicamente, $p \in K[x]$) é uma expressão da forma

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \tag{7.1}$$

em que os coeficientes $a_n, \ldots, a_0 \in K$, $a_n \neq 0$ e $n \in \mathbb{N}$. O número natural n é chamado de grau do polinômio p, e escreve-se $gr(p) = n$. O termo a_0 é denominado termo constante de p.

Observação 10. Os termos polinômio e função polinomial serão considerados como sinônimos e utilizados sem distinção no decorrer deste texto.

Uma função polinomial de grau 0 é uma função constante; uma função polinomial de grau 1 é uma função linear (ou, função afim); uma função polinomial de grau 2 é uma função quadrática.

Por simplicidade, a partir de agora iremos considerar nossos polinômios sobre $\mathbb{R}$, porém esta teoria pode ser estendida sem muita dificuldade para o corpo dos números complexos.

Definição 7.0.1. *Dados um número real k e o polinômio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, chama-se* valor numérico de p em k *ao valor:*

$$p(k) = a_n k^n + a_{n-1}k^{n-1} + \ldots + a_1 k + a_0 \ . \tag{7.2}$$

Exemplo 7.0.1. *Por exemplo, se considerarmos o polinômio $p(x) = x^2 + 7x + 10$,* *temos os seguintes valores numéricos para p:*

$$\begin{aligned} p(-6) &= (-6)^2 + 7(-6) + 10 = 4 \\ p(-5) &= (-5)^2 + 7(-5) + 10 = 0 \\ p(-4) &= (-4)^2 + 7(-4) + 10 = -2 \\ p(-2) &= (-2)^2 + 7(-2) + 10 = 0 \\ p(0) &= 0^2 + 7 \cdot 0 + 10 = 10 \end{aligned}$$

Definição 7.0.2. *Em particular, se k é um número real tal que $p(k) = 0$, dizemos que k é uma* raiz *ou* um zero *de p.*

Exemplo 7.0.2. *Portanto no exemplo anterior temos que $k_1 = -5$ e $k_2 = -2$ são raízes do polinômio $p(x) = x^2 + 7x + 10$.*

Definição 7.0.3. *O polinômio nulo (ou identicamente nulo) é um polinômio da forma $p(x) = 0x^n + 0x^{n-1} + \ldots + 0x + 0$, ou simplesmente, $p(x) = 0$. Por convenção, o grau deste polinômio será indefinido.*

Teorema 7.0.1. *Sejam p e q dois polinômios em K, dados por:*

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \tag{7.3}$$

$$q(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0 = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i \tag{7.4}$$

temos que $p = q \Leftrightarrow a_i = b_i$, para todo $i \in \{0, 1, 2, \cdots, n\}$.

Demonstração: Para todo $x \in \mathbb{R}$, temos:

$$a_i = b_i \Leftrightarrow a_i - b_i = 0 \Leftrightarrow (a_i - b_i)x^i = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} (a_i - b_i)x^i = 0 \Leftrightarrow \tag{7.5}$$

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i - \sum_{i=0}^{n} b_i x^i = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i \Leftrightarrow p(x) = q(x) \tag{7.6}$$

■

Este Teorema mostra que, quando escrevemos um polinômio p na forma

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \tag{7.7}$$

com $a_i \in K$, então os números $a_0, \ldots, a_n$ são determinados de modo único.

Dados dois polinômios

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \tag{7.8}$$

$$q(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0 = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i \tag{7.9}$$

chama-se *soma* de p com q o polinômio

$$(p+q)(x) = (a_n+b_n)x^n+(a_{n-1}+b_{n-1})x^{n-1}+\ldots+(a_1+b_1)x+(a_0+b_0) = \sum_{i=0}^{n}(a_i+b_i)x^i \ . \tag{7.10}$$

Teorema 7.0.2. *Se p, q e $p+q$ são polinômios não nulos, então o grau do polinômio $p+q$ é menor ou igual ao maior dos números $gr(p)$ e $gr(q)$;*

$$gr(p+q) \leq máx\{gr(p), gr(q)\} \ . \tag{7.11}$$

Teorema 7.0.3. *Se p, q e $p{\cdot}q$ são polinômios não nulos, então o grau do polinômio $p \cdot q$ é igual a soma dos graus de p e q;*

$$gr(p \cdot q) = gr(p) + gr(q) \ . \tag{7.12}$$

Para funções polinomiais o *Teorema Fundamental da Álgebra* garante a existência de zeros.

Teorema 7.0.4 (Teorema Fundamental da Álgebra)**.** *Seja $p \in \mathbb{C}[x]$ um polinômio não constante. Então existe um número complexo z_0 tal que $p(z_0) = 0$.*

Demonstração: A demonstração deste resultado pode ser encontrada em livros de Cálculo de uma variável complexa ou Análise Complexa como por exemplo página 119 do (SOARES, 2009). ■

Como consequência direta do Teorema Fundamental da Álgebra temos o seguinte teorema.

Teorema 7.0.5. *Todo polinômio de grau $n \geq 1$ possui pelo menos uma raiz real ou complexa.*

Observe que estes resultados garantem que todo polinômio possui pelo menos uma raiz complexa, como vamos focar nossos estudos em polinômios sobre $\mathbb{R}$, podemos neste caso ter polinômios que não possuem raízes reais. Ainda sobre as raízes de um polinômio vale destacar o seguinte teorema.

Teorema 7.0.6. *Seja p um polinômio não nulo em K, escrito na forma*

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \tag{7.13}$$

então p tem no máximo n raízes em K.

Teorema 7.0.7. *Sejam $p(x)$, $g(x)$ polinômios sobre o corpo K, i.e., polinômios em $K[x]$, e suponhamos que $gr(g) \geq 0$. Então, existem polinômios $q(x)$ e $r(x)$ tais que*

$$p(x) = q(x)g(x) + r(x) \ , \tag{7.14}$$

em que $gr(r) < gr(g)$. Essas condições permitem determinar os polinômio q e r de modo único.

Demonstração: A demonstração deste teorema pode ser encontrada na página 58 do (LANG, 1972). ∎

Exemplo 7.0.3. *Como um exemplo para a divisão de polinômios, façamos a divisão do polinômio $p_1(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$ pelo binômio $g_1(x) = x + 1$:*

$$
\begin{array}{rl|l}
- & x^3 - 4x^2 + x + 6 & x + 1 \\ \cline{3-3}
 & x^3 + x^2 & x^2 - 5x + 6 \\ \cline{2-2}
- & 0 - 5x^2 + x + 6 & \\
 & -5x^2 - 5x & \\ \cline{2-2}
- & 0 + 6x + 6 & \\
 & 0 + 6x + 6 & \\ \cline{2-2}
 & 0 &
\end{array}
$$

note que o quociente da divisão é $q_1(x) = x^2 - 5x + 6$, e o resto desta divisão é $r(x) = 0$ (zero). Como o resto é zero concluímos que $p_1(x)$ é divisível por $g_1(x)$. Portanto $p_1(x) = q_1(x)g_1(x)$, ou seja, $x^3 - 4x^2 + x + 6 = (x^2 - 5x + 6)(x + 1)$.

Como consequência do teorema anterior, temos o seguinte corolário, que nos garante que no exemplo anterior -1 é uma raiz do polinômio $p_1(x)$.

Corolário 7.0.1. *Seja p um polinômio não-nulo sobre K. Seja $\alpha \in K$ tal que $p(\alpha) = 0$. Então, existe um polinômio $q(x)$ sobre K tal que*

$$p(x) = (x - \alpha)q(x) \ . \tag{7.15}$$

Como consequência deste Corolário, todo polinômio de grau $n \geq 1$ pode ser escrito como produto de n fatores de grau 1.

Teorema 7.0.8 (Teorema da Decomposição)**.** *Todo polinômio* $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$*, com* $a_n \neq 0$*, pode ser escrito de forma fatorada*

$$p(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2)\ldots(x - r_n) \tag{7.16}$$

onde $r_1, r_2, \cdots, r_n$ *são as raízes do polinômio.*