Capítulo 5

Potenciação

5.1 Potência com expoente natural

Dados dois números $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{N}$, com $b > 0$, definimos:

$$a^b = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{b \text{ vezes}}. \tag{5.1}$$

Dizemos que a é a base da potência e b o expoente. Lê-se: a elevado a b.

Exemplo 5.1.1. *Observe que neste caso o expoente é um número natural, e portanto positivo, como por exemplo:*

a) $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$;

b) $-2^3 = -(2 \cdot 2 \cdot 2) = -8$

c) $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$;

d) $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$;

e) $-2^4 = -(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = -16$;

f) $(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 16$;

g) $\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \left(\frac{3}{5}\right) \cdot \left(\frac{3}{5}\right) = \frac{3 \cdot 3}{5 \cdot 5} = \frac{9}{25}$;

h) $\left(\frac{-3}{4}\right)^3 = \left(\frac{-3}{4}\right) \cdot \left(\frac{-3}{4}\right) \cdot \left(\frac{-3}{4}\right) = \frac{(-3) \cdot (-3) \cdot (-3)}{4 \cdot 4 \cdot 4} = \frac{-27}{64}$;

i) $(0,02)^4 = (0,02) \cdot (0,02) \cdot (0,02) \cdot (0,02) = (0,0004) \cdot (0,0004) = 0,00000016$;

j) $(0,02)^4 = \left(\dfrac{2}{100}\right)^4 = \left(\dfrac{2}{10^2}\right)^4 = \left(\dfrac{2^4}{10^8}\right) = \left(\dfrac{16}{100000000}\right) = 0,00000016$*;*

k) $\dfrac{7}{10^3} = \dfrac{7}{10 \cdot 10 \cdot 10} = \dfrac{7}{1000} = 0,007$*;*

l) $\dfrac{7^3}{10} = \dfrac{7 \cdot 7 \cdot 7}{10} = \dfrac{343}{10} = 34,3$*;*

m) $\left(\dfrac{7}{10}\right)^3 = \dfrac{7^3}{10^3} = \dfrac{343}{1000} = 0,343.$

Por enquanto temos definido somente potência com expoente sendo um número natural maior que zero. Definiremos potências com outros expoentes fazendo-as recair neste caso.

5.2 Potência com expoente inteiro

Dados dois números $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{Z}$ definimos:

$$a^b = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{b \text{ vezes}}, \text{ para } b > 0, \text{ esta situação está inclusa no caso anterior ;} \tag{5.2}$$

$$a^0 = 1 \text{ para } a \neq 0 \text{ ;} \tag{5.3}$$

$$a^{-b} = \frac{1}{a^b} = \underbrace{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} \cdot \cdots \cdot \frac{1}{a}}_{b \text{ vezes}}, \text{ para } b > 0 \text{ e } a \neq 0 \text{ .} \tag{5.4}$$

Exemplo 5.2.1. *Vejamos agora alguns exemplos em que o expoente é um número inteiro negativo. Os casos em que o expoente é um número inteiro positivo foram exemplificados anteriormente.*

a) $2^{-1} = \dfrac{1}{2^1} = \dfrac{1}{2}$*;*

b) $2^{-3} = \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{8}$*;*

c) $\dfrac{1}{3^{-2}} = 3^2 = 3 \cdot 3 = 9$*;*

d) $(-13)^{-2} = \left(\dfrac{1}{-13}\right)^2 = \dfrac{1}{169}$*;*

e) $-8^{-4} = -\left(\frac{1}{8}\right)^4 = -\left(\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{8}\right) = -\left(\frac{1}{4096}\right) = \frac{-1}{4096}$;

f) $\left(\frac{8}{22}\right)^{-2} = \left(\frac{22}{8}\right)^2 = \frac{22}{8}\cdot\frac{22}{8} = \frac{484}{64} = \frac{121}{16}$;

g) $\left(\frac{-5}{11}\right)^{-3} = \left(\frac{11}{-5}\right)^3 = \left(\frac{11}{-5}\right)\cdot\left(\frac{11}{-5}\right)\cdot\left(\frac{11}{-5}\right) = \frac{-1331}{125}$;

h) $\frac{2^{-2}}{10} = \frac{2^{-2}}{1}\cdot\frac{1}{10} = \frac{1}{2^2}\cdot\frac{1}{10} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{10} = \frac{1}{40} = 0,025$;

i) $\frac{2}{10^{-2}} = \frac{2}{1}\cdot\frac{1}{10^{-2}} = \frac{2}{1}\cdot\frac{10^2}{1} = 2\cdot 100 = 200$;

j) $(0,35)^{-2} = \frac{1}{0,35^2} = \frac{1}{0,1225} = \frac{1}{\frac{1225}{10000}} = \frac{10000}{1225} = \frac{400}{49}$

Note que em todos os exemplos acima o que fizemos foi "inverter" a fração, e com isso deixamos os expoentes positivos, e então basta aplicar a definição de potência para o caso do expoente ser um número natural.

Dados $a, b \in \mathbb{R}$, $m, n \in \mathbb{N}^*$, decorrem diretamente da definição de potência as seguintes propriedades:

P1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{a\cdot a\cdots a}_{m\text{- termos}}\cdot\underbrace{a\cdot a\cdots a}_{n\text{- termos}} = \underbrace{a\cdot a\cdots a}_{(m+n)\text{- termos}} = a^{m+n} \tag{5.5}$$

P2) $(a^m)^n = a^{m\cdot n}$;

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m\cdot a^m\cdots a^m}_{n\text{- termos}} = \underbrace{\underbrace{a\cdot a\cdots a}_{m\text{- termos}}\cdot\underbrace{a\cdot a\cdots a}_{m\text{- termos}}\cdots\underbrace{a\cdot a\cdots a}_{m\text{- termos}}}_{n\text{- termos}} = \underbrace{a\cdot a\cdots a}_{(m\cdot n)\text{- termos}} = a^{m\cdot n} \tag{5.6}$$

P3) $(a\cdot b)^n = a^n\cdot b^n$;

$$(a\cdot b)^n = \underbrace{(a\cdot b)\cdot(a\cdot b)\cdots(a\cdot b)}_{n\text{- termos}} = \underbrace{(a\cdot a\cdots a)}_{n\text{- termos}}\cdot\underbrace{(b\cdot b\cdots b)}_{n\text{- termos}} = a^n\cdot b^n \tag{5.7}$$

P4) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, para $b \neq 0$;

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\left(\frac{a}{b}\right)\cdot\left(\frac{a}{b}\right)\cdots\left(\frac{a}{b}\right)}_{n\text{- termos}} = \frac{\overbrace{a\cdot a\cdots a}^{n\text{- termos}}}{\underbrace{b\cdot b\cdots b}_{n\text{- termos}}} = \frac{a^n}{b^n}$$

P5) $a^m \div a^n = a^{m-n}$, para $a \neq 0$;

$$a^m \div a^n = \frac{a^m}{a^n} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdots a}^{m\text{- termos}}}{\underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n\text{- termos}}} = a^{m-n} \tag{5.8}$$

Para justificar esta última passagem precisamos analisar 3 casos separadamente, façamos isso:

Caso 1: Se $m = n$ então $a^m = a^n$ aí por um lado teremos que $\dfrac{a^m}{a^n} = \dfrac{a^m}{a^m} = 1$ e por outro lado $\dfrac{a^m}{a^n} = \dfrac{a^m}{a^m} = a^{m-m} = a^0$ donde obtemos que $a^0 = 1$.

Caso 2: Se $m > n$ então $m - n > 0$ e também temos que,

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdots a}^{m\text{- termos}}}{\underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n\text{- termos}}} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdots a}^{n\text{- termos}} \cdot \overbrace{a \cdot a \cdots a}^{(m-n)\text{- termos}}}{\underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n\text{- termos}}} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdots a}^{n\text{- termos}}}{\underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n\text{- termos}}} \cdot \overbrace{a \cdot a \cdots a}^{(m-n)\text{- termos}} = 1 \cdot \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{(m-n)\text{- termos}} = a^{m-n} .$$

Caso 3: Se $m < n$ então $m - n < 0$ e também temos que,

$$\begin{aligned} \frac{a^m}{a^n} &= \frac{\overbrace{a \cdot a \cdots a}^{m\text{- termos}}}{\underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n\text{- termos}}} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdots a}^{m\text{- termos}}}{\underbrace{a \cdot a \cdots a}_{m\text{- termos}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{(n-m)\text{- termos}}} \\ &= \frac{\overbrace{a \cdot a \cdots a}^{m\text{- termos}}}{\underbrace{a \cdot a \cdots a}_{m\text{- termos}}} \cdot \frac{1}{\underbrace{a \cdot a \cdots a}_{(n-m)\text{- termos}}} = 1 \cdot \frac{1}{\underbrace{a \cdot a \cdots a}_{(n-m)\text{- termos}}} = \frac{1}{a^{n-m}} = a^{-(n-m)} = a^{m-n} . \end{aligned}$$

P6) $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$, para $(a \neq 0)$;

$$a^{-n} = a^{0-n} = \frac{a^0}{a^n} = \frac{1}{a^n} . \tag{5.9}$$

P7) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^n$, para $a \neq 0$ e $b \neq 0$;

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{a^{-n}}{b^{-n}} = a^{-n} \cdot \frac{1}{b^{-n}} = \frac{1}{a^n} \cdot b^n = \frac{b^n}{a^n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n . \tag{5.10}$$

Aqui é importante observar que:

$\nexists 0^0 \qquad a^1 = a, \forall a \in \mathbb{R} \qquad a^0 = 1, \forall a \in \mathbb{R} \qquad 1^a = 1, \forall a \in \mathbb{R}$

Exemplo 5.2.2. *Vejamos agora alguns exemplos de aplicação direta das propriedades de potência dadas acima.*

P1) $7^2 \cdot 7^3 = (7 \cdot 7) \cdot (7 \cdot 7 \cdot 7) = 7^{2+3} = 7^5$;

P2) $(7^4)^2 = (7^4) \cdot (7^4) = (7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7) \cdot (7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7) = 7^{2 \cdot 4} = 7^8$;

P3) $(7 \cdot 10)^5 = (7 \cdot 10) \cdot (7 \cdot 10) \cdot (7 \cdot 10) \cdot (7 \cdot 10) \cdot (7 \cdot 10) = (7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7) \cdot (10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10) = 7^5 \cdot 10^5$;

P4) $\left(\frac{13}{9}\right)^4 = \left(\frac{13}{9}\right) \cdot \left(\frac{13}{9}\right) \cdot \left(\frac{13}{9}\right) \cdot \left(\frac{13}{9}\right) = \frac{13 \cdot 13 \cdot 13 \cdot 13}{9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9} = \frac{13^4}{9^4}$;

P5) *Caso 1:* $\frac{100^3}{100^3} = 100^{3-3} = 100^0 = 1$;

Caso 2: $\frac{48^{70}}{48^{69}} = 48^{70-69} = 48^1 = 48$;

Caso 3: $\frac{10^4}{10^7} = 10^{4-7} = 10^{-3} = \frac{1}{10^3}$;

P6) $10^{-3} = \frac{1}{10^3}$;

P7) $\left(\frac{12}{20}\right)^{-7} = \left(\frac{20}{12}\right)^7$.

5.3 Raízes

Dados um número real $a \geq 0$ e um número natural n, existe um número real positivo ou nulo b tal que $b^n = a$. O número real b é chamado de raiz enézima de a, ou raiz de ordem n de a e indicaremos por $\sqrt[n]{a}$.

Observação 2. Da definição decorre que $(\sqrt[n]{a})^n = a$.

Observação 3. Note que de acordo com a definição dada $\sqrt{36} = 6$ e não $\sqrt{36} = \pm 6$.

Observação 4. Muita atenção ao calcular a raiz quadrada de um quadrado perfeito:

$$\sqrt{a^2} = |a| \quad . \tag{5.11}$$

Se $a, b \in \mathbb{R}_+$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$, e $p \in \mathbb{N}^*$, então valem as seguintes propriedades:

R1) $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n\cdot p]{a^{m\cdot p}}$;

R2) $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$;

R3) $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, para $b \neq 0$;

R4) $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$;

R5) $\sqrt[p]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[p\cdot n]{a}$.

Exemplo 5.3.1. *Vejamos agora alguns exemplos de aplicação direta das propriedades de raízes dadas acima.*

R1) $\sqrt[4]{7^3} = \sqrt[4\cdot 2]{7^{3\cdot 2}}$;

R2) $\sqrt[3]{8 \cdot 5} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{5}$;

R3) $\sqrt[2]{\dfrac{9}{25}} = \dfrac{\sqrt[2]{9}}{\sqrt[2]{25}}$;

R4) $\left(\sqrt[3]{7}\right)^6 = \sqrt[3]{7^6}$;

R5) $\sqrt[2]{\sqrt[3]{729}} = \sqrt[2\cdot 3]{729} = \sqrt[6]{3^6}$.

5.4 Potência com expoente racional

A radiciação pode ser entendida como uma potência com expoente racional, a partir da seguinte definição.

Dados dois números $a \in \mathbb{R}_+^*$ e $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ ($m \in \mathbb{Z}$ e $n \in N^*$), definimos:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \text{ para } \frac{m}{n} > 0; \tag{5.12}$$

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}, \text{ para } \frac{m}{n} > 0. \tag{5.13}$$

Entendida a radiciação como potência são válidas aqui todas as propriedades de potência com expoente inteiro listadas anteriormente.

Exemplo 5.4.1. *Vejamos agora alguns exemplos de potência com expoente sendo um número racional ($b \in \mathbb{Q}$):*

a) $4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$;

b) $(-8)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{(-8)^1} = \sqrt[3]{(-2)^3} = -2$;

c) $(-27)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-27)^2} = \sqrt[6]{((-3)^3)^2} = \sqrt[6]{(-3)^6} = |-3| = 3$;

d) $9^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{9^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{9}} = \dfrac{1}{3}$;

e) $\left(\dfrac{4}{9}\right)^{-\dfrac{1}{2}} = \left(\dfrac{9}{4}\right)^{\dfrac{1}{2}} = \sqrt{\left(\dfrac{9}{4}\right)} = \dfrac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}} = \dfrac{3}{2}$;

f) $\dfrac{2}{3^{-2}} = 2 \cdot \dfrac{1}{3^{-2}} = 2 \cdot 3^2 = 2 \cdot 9 = 18$;

5.5 Potência com expoente irracional

Dados um número real $a > 0$ e um número irracional α, podemos construir por meio de aproximações sucessivas de potências de a com expoente racional, um único número real positivo a^α que é potência de base a e expoente irracional α.

Esse método é decorre do fato que um número irracional pode ser aproximado por falta ou por excesso por sequências de números racionais, e potências com expoentes racionais estão bem definidas, então podemos utilizar estes dois fatos e definir potências com expoente irracionais que satifazem todas as propriedades de potências já descritas. Vejamos um exemplo:

Exemplo 5.5.1. *Consideremos o número irracional* $\sqrt{2} = 1,414213562\ldots$*. Observe que podemos aproximar* $\sqrt{2}$ *por falta ou por excesso pelos seguintes números racionais:*

por falta:

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ 1,4 &= \frac{14}{10} \\ 1,41 &= \frac{141}{100} \\ 1,414 &= \frac{1414}{1000} \\ 1,4142 &= \frac{14142}{1000} \end{aligned}$$

por excesso:

$$\begin{aligned} 2 &= 2 \\ 1,5 &= \frac{15}{10} \\ 1,42 &= \frac{142}{100} \\ 1,415 &= \frac{1415}{1000} \\ 1,4143 &= \frac{14143}{1000} \end{aligned}$$

Assim podemos definir o valor de $13^{\sqrt{2}}$ *por aproximação por falta ou por excesso de potências de base* 13*, da seguinte forma:*
por falta:

$$\begin{aligned} 13^1 &= & 13^1 & = 13 \\ 13^{1,4} &= & 13^{\frac{14}{10}} &= & 36,267756667 \\ 13^{1,41} &= & 13^{\frac{141}{100}} &= & 37,210039132 \\ 13^{1,414} &= & 13^{\frac{1414}{1000}} &= & 37,59377174 \\ 13^{1,4142} &= & 13^{\frac{14142}{1000}} &= & 37,613061911 \end{aligned}$$

por excesso:

$$\begin{aligned} 13^2 &= & 13^2 &= & 169 \\ 13^{1,5} &= & 13^{\frac{15}{10}} &= & 46,872166581 \\ 13^{1,42} &= & 13^{\frac{142}{100}} &= & 38,176803296 \\ 13^{1,415} &= & 13^{\frac{1415}{1000}} &= & 37,69032163 \\ 13^{1,4143} &= & 13^{\frac{14143}{10000}} &= & 37,622710708 \end{aligned}$$

Portanto $13^{\sqrt{2}} \approx 37,6$.

Se $a = 0$ e α é irracional e positivo, definimos $0^\alpha = 0$.

Observação 5. Se $a = 1$ então $1^\alpha = 1, \forall \alpha$ irracional.

Observação 6. Se $a < 0$ e α é irracional e positivo então o símbolo a^α não tem significado.

Observação 7. Se α é irracional e negativo $(\alpha < 0)$ então 0^α não tem significado.

Observação 8. Para as potências de expoente irracional são válidas as propriedades de potências com expoente racional.

5.6 Potência com expoente real

Considerando que já foram definidas anteriormente as potências de base $a \in \mathbb{R}_+^*$ e expoente b (b racional ou irracional) então já está definida a potência a^b com $a \in \mathbb{R}_+^*$ e $b \in \mathbb{R}$.

Observação 9. Toda potência de base real e positiva e expoente real é um número real positivo.

$$a > 0 \Rightarrow a^b > 0 \ . \tag{5.14}$$

Se $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, $m, n \in \mathbb{R}$, então valem as seguintes propriedades:

P1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;

P2) $a^m \div a^n = a^{m-n}$, para $a \neq 0$;

P3) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$;

P4) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$;

P5) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, para $b \neq 0$;

P6) $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, para $(a \neq 0)$;

P7) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$, para $a \neq 0$ e $b \neq 0$;

5.7 Exercícios

Esta seção carece de exercícios. Participe da sua escrita.
Veja como em:
https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html