TÓPICOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR - SEMANA 4

# FUNÇÕES ELEMENTARES: AFIM, QUADRÁTICA, POLINOMIAL, RACIONAL E MODULAR



## 1) FUNÇÃO AFIM

### 1.1) Definição

Uma função real do tipo $f(x) = ax + b$, sendo $a$ e $b$ números reais é chamada função linear.

Exemplo: $f(x) = 2x + 5$

Observações:

- Se $a = 0$, temos uma função constante, por exemplo, $f(x) = -3$.
- Se $a \neq 0$ $e$ $b = 0$, temos uma função linear, por exemplo, $f(x) = \frac{1}{2}x$. Note que, em qualquer função linear, $f(0) = 0$.

### 1.2) Raiz

O valor de $x$ que faz com que $f(x) = 0$ é a raiz da função linear.

Exemplo: $-\frac{5}{2}$ é a raiz de $f(x) = 2x + 5$, pois $f\left(-\frac{5}{2}\right) = 0$.

Observação: Para encontrar a raiz de uma função é preciso resolver uma equação. No caso de $f(x) = 2x + 5$, por exemplo:

$$0 = 2x + 5 \Rightarrow -5 = 2x \Rightarrow x = -\frac{5}{2}$$

### 1.3) Taxa de variação

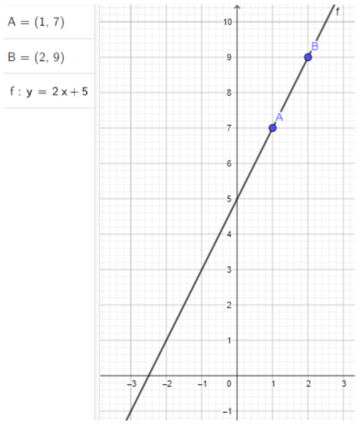
Na função linear $f(x) = ax + b$, a cada unidade que a variável independente $x$ aumenta uma unidade, a variável dependente $y = f(x)$ varia $a$ unidades. Sendo assim, a taxa de variação de uma função afim é constante.

Exemplo: Em $f(x) = 2x + 5$, temos $f(0) = 5$, $f(1) = 7$, $f(2) = 9$, $f(3) = 11$, ou seja, a cada unidade que variável $x$ aumenta, a imagem $f(x)$ aumenta 2 unidades.

### 1.4) Gráfico

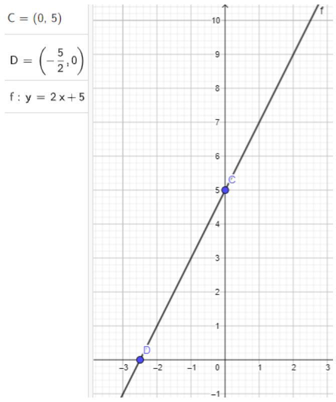
Como a taxa de variação de uma função afim é constante, o gráfico desse tipo de função é uma reta. Sendo assim, basta determinar dois pontos desse gráfico e traçar a reta que os contém.

Exemplo: Em $f(x) = 2x + 5$, considerando os pontos (1, 7) e (2, 9) é possível traçar a reta que corresponde ao gráfico da função.




**Observação:** Normalmente os pontos utilizados para traçar o gráfico de uma função afim são (0, b) e (k, 0), sendo k a raiz da função.

Por exemplo, em $f(x) = 2x + 5$, obtemos facilmente os pontos $(0, 5)$ e $\left(-\frac{5}{2}, 0\right)$, e com estes fica fácil traçar o gráfico.




### 1.5) Função crescente ou decrescente

Como a taxa de variação da imagem de uma função afim é constante e determinada pelo coeficiente $a$, temos que:

- Se $a > 0$, a taxa de variação da imagem é constante e positiva, portanto a função é crescente em todo o domínio;
- Se $a = 0$, a taxa de variação da imagem é nula, e a função é constante;
- Se $a < 0$, a taxa de variação da imagem é constante e negativa, portanto a função é decrescente em todo o domínio.

Exemplos: $f(x) = 2x + 5$ é uma função crescente e $g(x) = -3x$ é uma função decrescente.

# 2) FUNÇÃO QUADRÁTICA

## 2.1) Definição

Uma função real do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, sendo $a \neq 0$, $b$ e $c$ números reais é chamada função quadrática.

Exemplo: $f(x) = x^2 + x - 2$

## 2.2) Raízes

Os valores de $x$ que fazem com que $f(x) = 0$ são as raízes da função quadrática.

Exemplo: $1$ e $-2$ são raízes de $f(x) = x^2 + x - 2$, pois $f(1) = 0$ e $f(-2) = 0$.

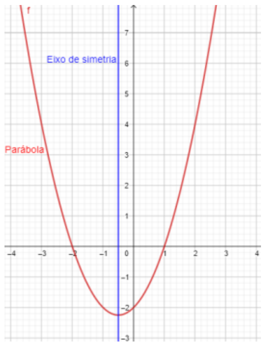
Observação: Para encontrar as raízes de $f(x) = ax^2 + bx + c$ é preciso resolver a equação polinomial de segundo grau $0 = ax^2 + bx + c$. Assim sendo, há três possibilidades quanto ao número de raízes da função quadrática, lembrando da fórmula resolutiva para equações do segundo grau (fórmula de Bhaskara):

- Duas raízes reais, caso $b^2 - 4ac > 0$;
- Uma raiz real, caso $b^2 - 4ac = 0$;
- Nenhuma raiz real (raízes complexas), caso $b^2 - 4ac < 0$.

## 2.3) Gráfico

O gráfico de uma função quadrática é uma curva denominada parábola, a qual apresenta um eixo de simetria paralelo ao eixo y. Para esboçar a parábola que corresponde a representação gráfica de uma função quadrática é preciso conhecer as raízes, o vértice e o ponto de intersecção com o eixo y.

Exemplo: Na figura a seguir temos a parábola que corresponde ao gráfico de $f(x) = x^2 + x - 2$

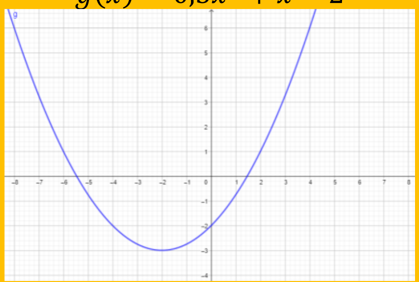



## 2.4) Concavidade

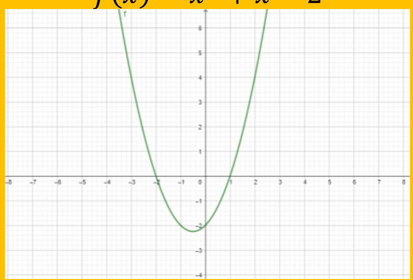
A concavidade de uma parábola que representa uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ pode ser voltada para cima (como na figura do exemplo anterior) ou pra baixo. Quando $x$ tende para $+\infty$ ou $-\infty$, $ax^2$ tende para $+\infty$ se $a > 0$ ou para $-\infty$ se $a < 0$. Assim temos que, se $a > 0$, a parábola tem a concavidade voltada para cima e, se $a < 0$, a parábola tem a concavidade voltada para baixo.

O valor de $|a|$ interfere na abertura da parábola, pois quanto maior o valor de $|a|$, mais brusco é o crescimento/decrescimento da imagem da função, a cada vez que $x$ varia uma unidade, portanto a parábola é mais fechada. Veja alguns exemplos:

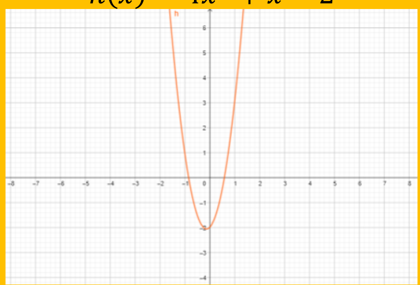
$g(x) = 0{,}5x^2 + x - 2$



$f(x) = x^2 + x - 2$



$h(x) = 4x^2 + x - 2$



### 2.5) Vértice

O vértice de uma parábola é o ponto em que a imagem é mínima, no caso de uma parábola com a concavidade para cima, ou máxima, no caso contrário.

Como a parábola é simétrica em relação ao eixo paralelo ao eixo y que passa pelo vértice, se k é uma imagem da parábola, existem $x_1$ e $x_2$ tais de $f(x_1) = f(x_2) = k$, e a abscissa do vértice, $x_v$, é a média destes:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow ax^2 + bx + c = k \Rightarrow ax^2 + bx + c - k = 0 \Rightarrow x = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4a(c-k)}}{2a} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4a(c-k)}}{2a} \\ x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4a(c-k)}}{2a} \end{matrix}$$

$$x_v = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{\dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4a(c-k)}}{2a} + \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4a(c-k)}}{2a}}{2} = \frac{-\dfrac{2b}{2a}}{2} = -\frac{b}{2a}$$

Para encontrar $y_v$ basta obter a imagem de $x_v$:

$$y_v = f(x_v) = ax_v^2 + bx_v + c = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} = \frac{-b^2 + 4ac}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{\Delta}{4a}$$

Portanto, as coordenadas do vértice são $(x_v, y_v) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$

Exemplo: O vértice de $f(x) = x^2 + x - 2$ é o ponto $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{9}{4}\right)$.

### 2.6) Intervalos em que a função é crescente ou decrescente

Numa função quadrática com a concavidade para cima temos que a função é decrescente no intervalo do domínio $(-\infty, x_v)$ e, crescente em $(x_v, +\infty)$. Quando a concavidade é baixo a função é crescente em $(-\infty, x_v)$ e decrescente em $(x_v, +\infty)$.

# 3) FUNÇÕES POLINOMIAL, RACIONAL E MODULAR

### 3.1) Função polinomial

Uma função polinomial é toda aquela cuja lei de formação é dada por um polinômio. As funções afins e quadráticas são casos especiais de funções polinomiais

Exemplos: $f(x) = 3x - 5$ $\quad g(x) = -2x^2 + 3x$ $\quad h(x) = 2x^4 - x^3 + 5$

### 3.2) Comportamento da imagem da função polinomial

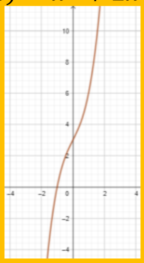
Quando $x$ tende para $+\infty$ ou $-\infty$, o termo de maior grau do polinômio que corresponde à lei de formação da função determina o comportamento da imagem:

- se o expoente de $x$ é par, em ambos os casos, teremos $f(x)$ tendendo para $+\infty$, se o coeficiente do termo de maior grau é positivo, ou, no caso contrário, para $-\infty$ .
- se o expoente de $x$ é ímpar, $f(x)$ tem comportamento diferenciado:
  - se coeficiente do termo de maior grau é positivo, $f(x)$ tende para $+\infty$ quando $x$ tende para $+\infty$ e $f(x)$ tende para $-\infty$ quando $x$ tende para $-\infty$;
  - se coeficiente do termo de maior grau é negativo, $f(x)$ tende para $-\infty$ quando $x$ tende para $+\infty$ e $f(x)$ tende para $+\infty$ quando $x$ tende para $-\infty$;

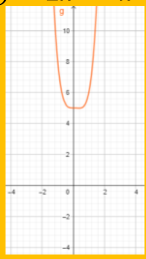
Assim, quando o termo de maior grau do polinômio da lei de formação da função tem grau ímpar, o gráfico intercepta o eixo x ao menos uma vez, o que não é garantido no caso contrário.

Exemplos:

$m(x) = x^3 + 2x + 3$



$g(x) = 2x^4 - x^3 + 5$



**3.3) Raízes de uma função polinomial**

As raízes da função polinomial $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ são as raízes da equação $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$. Pelo teorema fundamental da Álgebra, há $n$ raízes para o polinômio, porém se considerarmos que a multiplicidade de uma raiz pode ser maior do que 1 e que algumas raízes podem ser complexas, pode-se afirmar que há, no máximo, n raízes reais distintas.

Quando uma raiz real tem multiplicidade par (o expoente do fator de primeiro grau, na forma fatorada do polinômio, indica a multiplicidade) o gráfico da função não cruza o eixo x ("bate e "volta"), o que não acontece no caso contrário.

Exemplos:

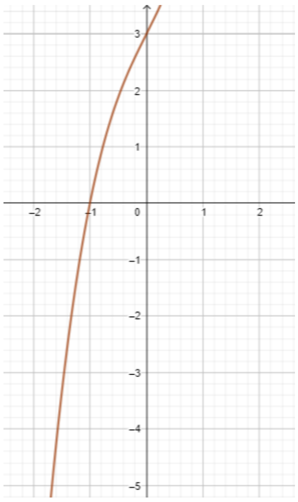
$m(x) = x^3 + 2x + 3$

$-1$ é raiz, pois $m(-1) = 0$

Escrevendo a forma fatorada de $m(x)$:

$m(x) = (x+1)\cdot(x^2 - x + 3)$

Note que a multiplicidade da raiz -1 é 1 (ímpar).



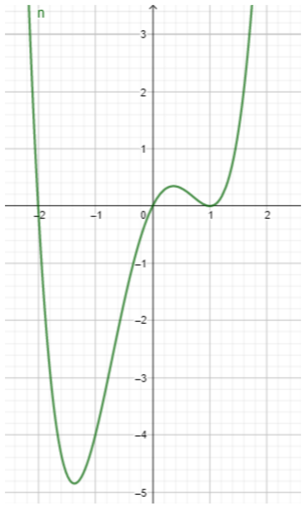
$n(x) = x^4 - 3x^2 + 2x$

$-2, 0$ e $1$ são raízes pois $n(-2) = n(0) = n(1) = 0$

Escrevendo a forma fatorada de $n(x)$:

$n(x) = (x-1)^2 \cdot (x+2)\cdot x$

Note que a multiplicidade da raiz 1 é 2 (par), e das raízes -2 e 0 é 1 (ímpar).



**3.4) Função racional**

Quando $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, onde $p(x)$ e $q(x)$ são funções polinomiais, temos uma função racional. As raízes da função $q(x)$ não pertence ao domínio da função racional, pois nesses casos teríamos denominador zero, o que não é possível.

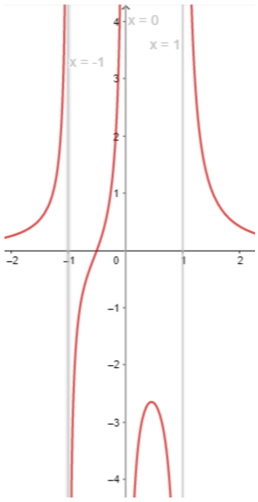
Exemplo: $f: \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\} \to \mathbb{R},\;\; f(x) = \frac{x+1}{x^3 - x}$

**3.5) Gráfico de uma função racional**

Não há padrão para o gráfico de função racional, porém é importante observar que o gráfico não será composto por uma curva contínua, visto que possivelmente há restrições no domínio.

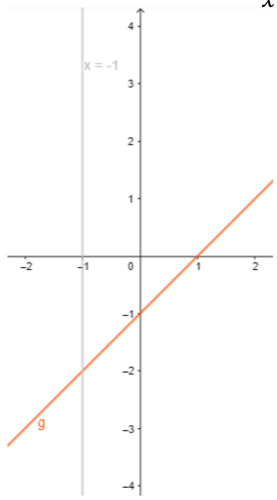
Exemplos:

$$f:\mathbb{R}-\{-1,0,1\}\to\mathbb{R},\quad f(x)=\frac{x+\frac{1}{2}}{x^3-x}$$




Note que há "quebras" no gráfico nos valores de $x$ que são restrições do domínio.

$$g:\mathbb{R}-\{-1\}\to\mathbb{R},\quad g(x)=\frac{x^2-1}{x+1}$$




O gráfico parece não ter interrupções, mas na verdade há um ponto de descontinuidade, que não pode ser visualizado (devido às restrições do software de gráficos), quando $x=-1$.

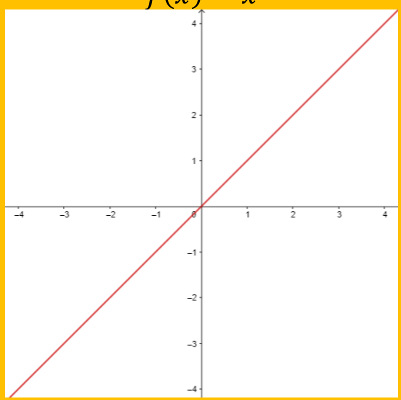
**3.6) Função módulo**

A função $f(x)=|x|$ é uma função definida por duas sentenças:

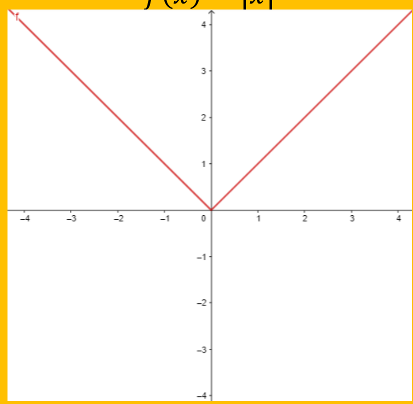
$$f(x)=\begin{cases} x, & se\ x\geq 0\\ -x, & se\ x<0\end{cases}$$

Graficamente, em relação a função $f(x)=x$, há uma reflexão em relação ao eixo na parte em que $x<0$:

$f(x)=x$



$f(x)=|x|$



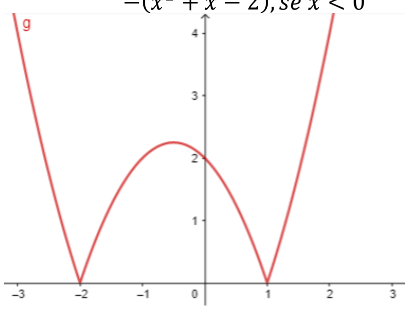
**3.7) Funções com variável no módulo**

De acordo com a definição da função módulo, é preciso escrever a função em duas sentenças.

Exemplos:

$$g(x)=|x^2+x-2|$$

$$g(x)=\begin{cases} x^2+x-2, se\ x\geq 0\\ -(x^2+x-2), se\ x<0\end{cases}$$




Nesse caso, note que basta refletir a parte do gráfico de $y=x^2+x-2$ com imagem negativa, em relação ao eixo x.

$$h(x)=x+|x|$$

$$h(x)=\begin{cases} x+x=2x, se\ x\geq 0\\ x-x=0, se\ x<0\end{cases}$$