TÓPICOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR - SEMANA 3

PROGRESSÕES ARITMÉTICA E GEOMÉTRICA, RELAÇÕES E FUNÇÕES

1) P.A. E P.G.

1.1) Progressão aritmética

Progressão aritmética (P.A.) é uma sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é igual ao anterior adicionado a um número fixo, chamado de razão da progressão.

Exemplos:

- $(10, 15, 20, 25, \dots)$ é uma P.A. crescente, pois cada termo, exceto o primeiro, equivale ao termo imediatamente anterior adicionado de 5;
- $(1, -3, -7, -11, \dots)$ é uma P.A. descrescente, pois cada termo, exceto o primeiro, equivale ao termo imediatamente anterior adicionado de -4 .

1.2) Fórmula do termo geral da P.A.

Para chegar ao nº termo de uma P.A., a partir do primeiro termo (a_1), a razão (r), é somada $n-1$ vezes, portanto:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$$

Observação: Note que n é necessariamente um número natural não-nulo, pois é a posição do termo.

Exemplo:

O 6º termo da P.A. $(10, 15, 20, 25, \dots)$ é $a_6 = 10 + (6-1) \cdot 5 = 35$

1.3) Soma dos termos de uma P.A. finita

Numa P.A. finita, a soma de dois termos equidistantes dos extremos é igual à soma dos extremos. Sendo assim, se a_n é o último termo de uma P.A. de n termos, a parcela $a_1 + a_n$ aparece $\frac{n}{2}$ vezes na soma de todos os termos da sequência:

$$S_n = (a_1 + a_n).\frac{n}{2}$$

Exemplo:

A soma de todos os termos da P.A. finita $(10, 15, 20, 25, 30, 35)$ é $S_6 = (10 + 35) \cdot \frac{6}{2} = 135$

1.4) Progressão geométrica

Progressão geométrica (P.G.) é uma sequência de números não-nulos em que cada termo, a partir do segundo, é igual ao anterior multiplicado por um número fixo, chamado de razão da progressão.

Exemplos:

- $(10, 20, 40, 80, \ldots)$ é uma P.G. crescente, pois cada termo, exceto o primeiro, equivale ao termo imediatamente anterior multiplicado por 2;
- $(80, 20, 5, \frac{5}{4}, \ldots)$ é uma P.G. decrescente, pois cada termo, exceto o primeiro, equivale ao termo imediatamente anterior multiplicado por $0{,}25$;
- $(1, -3, 9, -27, \ldots)$ é uma P.G. alternada, pois cada termo, exceto o primeiro, equivale ao termo imediatamente anterior multiplicado por -3.

1.5) Fórmula do termo geral da P.G.

Para chegar ao nº termo de uma P.G., a partir do primeiro termo (a_1), a razão (q), é multiplicada $n - 1$ vezes, portanto:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Observação: Note que n é necessariamente um número natural não-nulo, pois é a posição do termo.

Exemplo:

O 6º termo da P.G. $(10, 20, 40, 80, \ldots)$ é $a_6 = 10 \cdot 2^{6-1} = 320$

1.6) Soma dos termos de uma P.G. finita

Numa P.G. finita, temos:

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^{n-1}$

$q \cdot S_n = a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \cdots + a_1 q^n$

Donde segue que:

$$q \cdot S_n - S_n = a_1 q^n - a_1 \Rightarrow S_n \cdot (\quad) = a_1 \cdot (q^n - 1) \Rightarrow \boldsymbol{S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}}$$

Exemplo:

A soma de todos os termos da P.G. finita $(10, 20, 40, 80, 160, 320)$ é $S_6 = \frac{10 \cdot (2^6 - 1)}{2 - 1} = 630$

1.7) Soma dos termos de uma P.G. infinita com razão entre -1 e 1 (exceto zero)

Quando $0 < |q| < 1$, temos que q^n fica cada vez mais próximo de 0 quanto maior o valor de n. Vamos assumir que quando n "tende para infinito", q^n "tende para zero". Assim a soma dos infinitos termos da P.G. é dada por:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1} \underset{n \to \infty}{\Longrightarrow} S = \frac{a_1 \cdot (0 - 1)}{q - 1} \cdot \left(\frac{-1}{-1}\right) \Rightarrow \boldsymbol{S = \frac{a_1}{1 - q}}$$

Exemplo:

A soma dos infinitos termos da P.G. $(80, 20, 5, \frac{5}{4}, \ldots)$ é $S = \frac{80}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{80}{\frac{3}{4}} = \frac{320}{3}$

2) RELAÇÕES

2.1) Relação

Sejam A e B conjuntos. Uma relação R de A em B é um subconjunto de $A \times B$, ou seja, $R \subset A \times B$.

Exemplos:

$A = \{1, 2, 3, 4\}$ $B = \{5, 6, 7, 8\}$ Relação R_1: ... é menor do que ... $R_1 = \{(1,5), (1,6), (1,7), (1,8), (2,5), (2,6), (2,7), (2,8), (3,5), (3,6), (3,7), (3,8)\ (4,5), (4,6), (4,7), (4,8)\}$ Relação R_2: ... é múltiplo de ... $R_2 = \emptyset$ Relação R_3: ... é divisor de ... $R_3 = \{(1,5), (1,6), (1,7), (1,8), (2,6), (2,8), (3,6), (4,8)\}$ Relação $R_4 = \{(x, y) \in A \times B \| y = 2x + 1\}$ $R_4 = \{(2,5), (3,7)\}$
$A = \mathbb{N}$ $B = \mathbb{N}$ Relação R_1: ... é menor do que ... $R_1 = \{(1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), \dots, (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), \dots,$ $(3,4), (3,5), (3,6), \dots, (4,5), (4,6), \dots\}$ Relação R_2: ... é múltiplo de ... $R_2 = \{(1,1), (2,1), (2,2), (3,1), (3,3), (4,1), (4,2), (4,4), (5,1), (5,5), (6,1), (6,2), (6,3), (6,6), \dots\}$ Relação R_3: ... é divisor de ... $R_3 = \{(1,1), (1,2), (1,3), \dots, (2,2), (2,4), (2,6), \dots, (3,3), (3,6), (3,9), \dots\}$ Relação $R_4 = \{(x, y) \in A \times B \| y = 2x + 1\}$ $R_4 = \{(1,3), (2,5), (3,7), (4,9), (5,11), (6,13), \dots\}$

2.2) Relação inversa

Dada uma relação R de A em B, chama-se relação inversa de R e denota-se R^{-1} ao conjunto dos pares ordenados $(y, x) \in B \times A$ tais que $(x, y) \in A \times B$.

Exemplo: Considerando a relação R_4 do exemplo anterior em que A e B eram finitos temos:

$R_4 = \{(2,5), (3,7)\}$ e $R_4^{-1} = \{(5,2), (7,3)\}$

2.3) Propriedade reflexiva

Uma relação R em A $(R \subset A \times A)$ é reflexiva quando para qualquer elemento $a \in A$ temos $(a, a) \in R$.

Exemplos:

$R_2 \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$	$R_1 \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$
R_2: ... é múltiplo de ... É reflexiva, pois todo número natural é múltiplo dele mesmo $(a = 1 \cdot a)$	R_1: ... é menor do que ... Não é reflexiva, nenhum número natural é menor do que ele mesmo

2.4) Propriedade simétrica

Uma relação R em A $(R \subset A \times A)$ é simétrica quando para quaisquer elementos a e b pertencentes ao conjunto A, temos que $(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R$.

Exemplo:

$A = \{r_1, r_2, r_3, r_4\}$, sendo $r_1, r_2, r_3\ e\ r_4$ as retas suporte de um quadrado. $R_5 \subset A \times A$ R_5: ... é paralela a .... É simétrica, pois se qualquer reta r é paralela a outra s, a recíproca sempre é válida.

2.5) Propriedade transitiva

Uma relação R em A ($R \subset A \times A$) é transitiva quando para quaisquer elementos a, b e c pertencentes ao conjunto A, temos que $(a, b) \in R \; e \; (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$.

Exemplo:

> $R_1 \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$
> R_1: ... é menor do que ...
> É transitiva, pois se $a < b$ e $b < c$, sempre implica que $a < c$. Por exemplo, no caso a = 1, b=20 e c = 34.

2.6) Propriedade anti-simétrica

Uma relação R em A ($R \subset A \times A$) é anti-simétrica quando para quaisquer elementos a e b pertencentes ao conjunto A, temos que $(a, b) \in R \; e \; (b, a) \in R \Rightarrow a = b$.

Exemplo:

> $R_1 \subset \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$
> R_3: ... é divisor de ...
> É anti-simétrica, pois se a é divisor de b, então $b = a \cdot k_1$, $k_1 \in \mathbb{N}^*$ e se b é divisor de a, então $a = b \cdot k_2$, $k_2 \in \mathbb{N}^*$.
> Assim $b = a \cdot k_1 \Rightarrow b = b \cdot k_2 \cdot k_1 \Rightarrow k_2 \cdot k_1 = 1 \underset{\substack{k_1 \in \mathbb{N}^* \\ k_2 \in \mathbb{N}^*}}{\Longrightarrow} k_1 = k_2 = 1 \Rightarrow b = a$

2.7) Relação de equivalência

Relação que goza das propriedades reflexiva, simétrica e transitiva.

Exemplos:

- Relação de igualdade no conjunto dos números reais.
- Relação de paralelismo no plano.

2.8) Relação de ordem

Relação que goza das propriedades reflexiva, anti-simétrica e transitiva.

Exemplos:

- Relação ... é menor ou igual ... no conjunto dos números reais.
- Relação ... é divisor de ... no conjunto dos números naturais.

3) FUNÇÕES

3.01) Definição de função

Sejam A e B conjuntos não-vazios. Uma função de A em B é uma relação f que a cada elemento de A associa um único elemento de B.

Notação: $f: A \to B$ (lê-se “f de A em B”)

$x \mapsto y$ (lê-se “x é levado em y”, onde x (variável independente) é um elemento do domínio e y (variável dependente) é um elemento do contradomínio).

Observação: Normalmente escrevemos $y = f(x)$ e fica implícito que o contradomínio é o conjunto dos números reais e que o domínio é um subconjunto dos números reais. Nesse caso temos uma função real de variável real.

Exemplos:

$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 3x + 5$	$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = \begin{cases} 1, se\ x \in \mathbb{Q} \\ 0, se\ x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$	$h\colon \to \mathbb{R}, h(x) = \sqrt{x} - x$

3.02) Domínio

Sendo a função f a relação que consiste em um subconjunto de pares ordenados do produto cartesiano $A \times B$, o domínio de f é o conjunto A e a sua notação é $D(f)$. Quando uma função é expressa apenas pela lei de formação, sem explicitar os conjuntos A e B, fica implícito que o domínio da função é o maior subconjunto possível dos números reais.

Exemplos:

Função	Domínio
$f(x) = 3x + 5$	$D(f) = \mathbb{R}$
$g(x) = \begin{cases} 1, se\ x \in \mathbb{Q} \\ 0, se\ x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$	$D(g) = \mathbb{R}$
$h(x) = \sqrt{x} - x$	$D(h) = \mathbb{R}_+$ (o radical de índice par não pode ter radicando negativo)
$n(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x + 3} + \dfrac{1}{\sqrt{x + 5}}$	$D(m) = (-5, +\infty) - \{-3\}$ (o denominador não pode ser nulo e o radical de índice par não pode ter radicando negativo)

3.03) Imagem

Sendo a função f a relação que consiste em um subconjunto de pares ordenados do produto cartesiano $A \times B$, a imagem de f é o subconjunto de B que estão associados com algum elemento de A. A notação para o conjunto imagem da função f é $Im(f)$.

Exemplos:

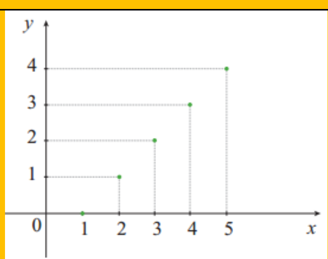
Função	Imagem
$f(x) = 3x + 5$	$Im(f) = \mathbb{R}$
$g(x) = \begin{cases} 1, se\ x \in \mathbb{Q} \\ 0, se\ x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$	$Im(g) = \{0, 1\}$
$h(x) = \sqrt{x} - x$	$Im(h) = \mathbb{R}$
$n(x) = x^2 + 5$	$Im(n) = [5, +\infty)$

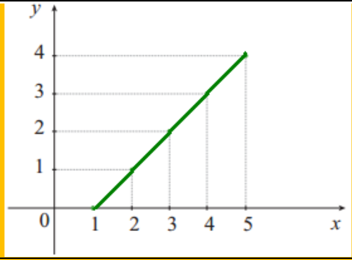
Observação: $f(a)$ é a imagem do elemento a. Por exemplo, na função $f(x) = 3x + 5$, temos $f(-1) = 2$.

3.04) Gráfico

Seja $A \subset \mathbb{R}$ e $f\colon A \to \mathbb{R}$ uma função. O gráfico de f é o conjunto de todos os pontos do plano cujas coordenadas são $(x, f(x))$, com $x \in A$. No plano cartesiano, o eixo horizontal diz respeito a coordenada x do ponto (abscissa) e o eixo vertical diz respeito a coordenada y do ponto (ordenada). Os eixos são perpendiculares e a intersecção corresponde a coordenada zero de ambos. No eixo das abscissas, à esquerda do zero temos os reais negativos e à direita os positivos, já no eixo das ordenadas, os reais negativos estão abaixo da origem e os positivos acima.

Exemplos:

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $f\colon A \to \mathbb{R},\ f(x) = x - 1$ Como A não é um intervalo de números reais, o gráfico da função f é um conjunto de pontos e não um "pedaço" de curva.	

$B = [1,5]$ $f: B \to \mathbb{R},\ f(x) = x - 1$	

3.05) Função crescente ou decrescente em um intervalo

Uma função é crescente em um intervalo I, se para quaisquer elementos x_1 e x_2 de I:

$$x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Uma função é decrescente em um intervalo I, se para quaisquer elementos x_1 e x_2 de I:

$$x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Exemplos:

$f(x) = x^2 + 5$	$g(x) = x + 5$
É decrescente no intervalo $I_1 = (-\infty, 0)$, pois se $x_1, x_2 \in I_1$: $x_1 > x_2 \overset{\substack{x_1<0 \\ x_2<0}}{\Longrightarrow} \lvert x_1 \rvert < \lvert x_2 \rvert \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ É crescente no intervalo $I_2 = (0, +\infty)$, pois se $x_1, x_2 \in I_2$: $x_1 > x_2 \overset{\substack{x_1>0 \\ x_2>0}}{\Longrightarrow} \lvert x_1 \rvert > \lvert x_2 \rvert \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$	É crescente em todo o domínio, pois sempre temos: $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

3.06) Função injetora

Uma função f é injetora se não há elementos do domínio distintos com a mesma imagem, ou seja, se $x_1, x_2 \in D(f)$:

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Exemplos:

- $g(x) = x + 5$ é uma função injetora, pois não há quaisquer dois elementos distintos do domínio que tenham a mesma imagem.
- $f(x) = x^2 + 5$ não é uma função injetora, pois há elementos distintos do domínio com a mesma imagem, por exemplo, $f(-1) = f(1) = 6$.

3.07) Função sobrejetora

Uma função é sobrejetora quando a imagem é igual ao contradomínio.

- $f_1: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_1(x) = x^2 + 5$ não é uma função sobrejetora, pois a imagem é o intervalo $[5, +\infty)$, ou seja, há elementos do contradomínio que não estão na imagem.
- $f_2: \mathbb{R} \to [5, +\infty), f_2(x) = x^2 + 5$ é uma função sobrejetora.

3.08) Função bijetora

Uma função é bijetora quando ela é, simultaneamente, injetora e sobrejetora.

Exemplos:

- $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = x + 5$ é uma função bijetora, pois é injetora (não há imagem repetida) e sobrejetora (a imagem equivale ao contradomínio).
- $f_2: \mathbb{R} \to [5, +\infty),\ f_2(x) = x^2 + 5$ não é uma função bijetora, pois não é injetora (há repetição de imagens, por exemplo: $f_2(-1) = f_2(1) = 6$).
- $f_3: [0, +\infty) \to [5, +\infty),\ f_3(x) = x^2 + 5$ é uma função bijetora, pois é injetora (não há imagem repetida) e sobrejetora (a imagem equivale ao contradomínio).

3.09) Função composta

Dadas as funções f(x) e g(x), a função composta de g com f, $g(f(x))$, denotada por $g \circ f$, associa a cada elemento do domínio de f uma imagem da função g e está definida apenas se a imagem da função f está contida no domínio da função g.

Exemplos:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 3x$ $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x + 1$ Note que $Im(f) = \mathbb{R} \subset D(g)$, assim: $g \circ f = g\big(f(x)\big) = 2 \cdot (3x) + 1$ $= 6x + 1$ Note que $Im(g) = \mathbb{R} \subset D(f)$, assim: $f \circ g = f\big(g(x)\big) = 3 \cdot (2x + 1)$ $= 6x + 3$	$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x$ $g: [0, +\infty) \to \mathbb{R}, g(x) = \sqrt{x}$ Note que $Im(f) = \mathbb{R}$ não está contida no domínio de g, portanto não é possível obter $g \circ f$. Note que $Im(g) = [0, +\infty) \subset D(f)$, assim: $f \circ g = f\big(g(x)\big) = 2\sqrt{x}$	$f: [0, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = 2x$ $g: [0, +\infty) \to \mathbb{R}, g(x) = \sqrt{x}$ Note que $Im(f) = [0, +\infty) \subset D(g)$, assim: $g \circ f = g\big(f(x)\big) = \sqrt{2x}$ Note que $Im(g) = [0, +\infty) \subset D(f)$, assim: $f \circ g = f\big(g(x)\big) = 2\sqrt{x}$

3.10) Função inversa

Apenas funções bijetoras possuem função inversa. A notação para a inversa de uma função f é f^{-1}. Quando a função $f: A \to B$ é inversível, para $x \in A$ e $y \in B$, temos:

$$f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$$

Note que $D(f^{-1}) = Im(f)$ e $D(f) = Im(f^{-1})$.

Exemplos:

$f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, f(x) = x^2$ $f^{-1}: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ Note que: $f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x)) = \sqrt{x^2} = x$	$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ , f(x) = 2x + 1$ $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ , f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$ Note que: $f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x)) = \frac{(2x+1)-1}{2} = x$

Dica para encontrar a função inversa de uma função bijetora: Escreva a função f com as variáveis x e y, depois isole x. Feito isso troque y por x para que a função inversa seja escrita em função de x. Observe o exemplo:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ , f(x) = 2x + 1$$

$$y = 2x + 1 \Rightarrow y - 1 = 2x \Rightarrow x = \frac{y-1}{2}$$

Assim, $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$