TÓPICOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR - SEMANA 5

FUNÇÃO EXPONENCIAL E FUNÇÃO LOGARÍTMICA

1) FUNÇÃO EXPONENCIAL

1.1) Definição

A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = b^x$, com $b > 0$ e $b \neq 1$ é denominada função exponencial de base b.

Exemplos: $f(x) = 2^x$ $\quad g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ $\quad h(x) = \pi^x$

1.2) Imagem

Pela definição de função exponencial, como a base b é positiva, temos que a imagem dessa função é o conjunto dos números reais positivos.

Exemplo: Em $f(x) = 2^x$, temos $f(-10) = \frac{1}{1024}$, $f(0) = 1$ e $f(10) = 1024$. Note que nenhum valor do domínio gera imagem negativa ou nula. De fato, $Im(f) = (0, +\infty)$.

1.3) Função crescente ou decrescente

Em $f(x) = b^x$, quando $b > 1$, temos que $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$, portanto a função é crescente em todo o domínio. Já quando $0 < b < 1$, temos que $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, assim a função é decrescente em todo o domínio.

Exemplos:

	$f(x) = 2^x$	$g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
$x = -10$	$f(-10) = \frac{1}{1024}$	$g(-10) = 1024$
$x = 0$	$f(0) = 1$	$g(0) = 1$
$x = 10$	$f(10) = 1024$	$g(10) = \frac{1}{1024}$

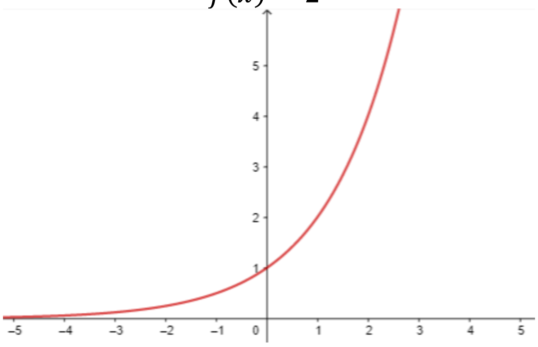
1.4) Gráfico

O ponto $(0, 1)$ sempre pertence ao gráfico $f(x) = b^x$, para qualquer valor de b que satisfaz a definição de função exponencial.

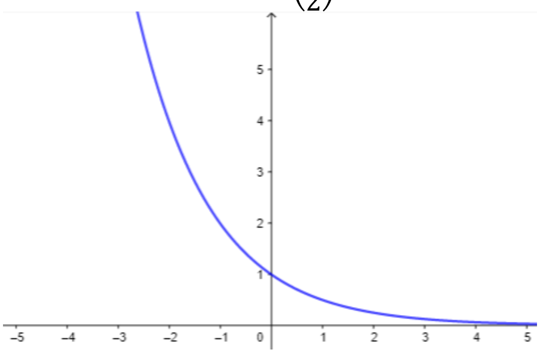
Quando $b > 1$, temos que $f(x)$ é cada vez maior a medida que x tende para $+\infty$ e, cada vez mais próxima de 0 quando x tende para $-\infty$. No caso em que $0 < b < 1$, ocorre o contrário.

Exemplos:

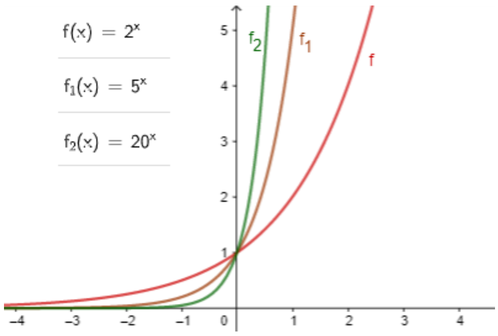
$f(x) = 2^x$

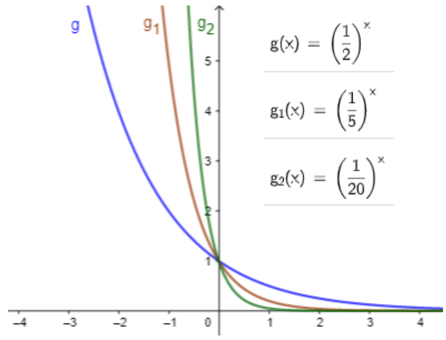


$g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$



Observação: Quando $b > 1$, quanto maior o valor de b, mais "próxima do eixo y" fica o gráfico. Já quando $0 < b < 1$, o mesmo ocorre quanto menor é o valor de b.
Exemplos:



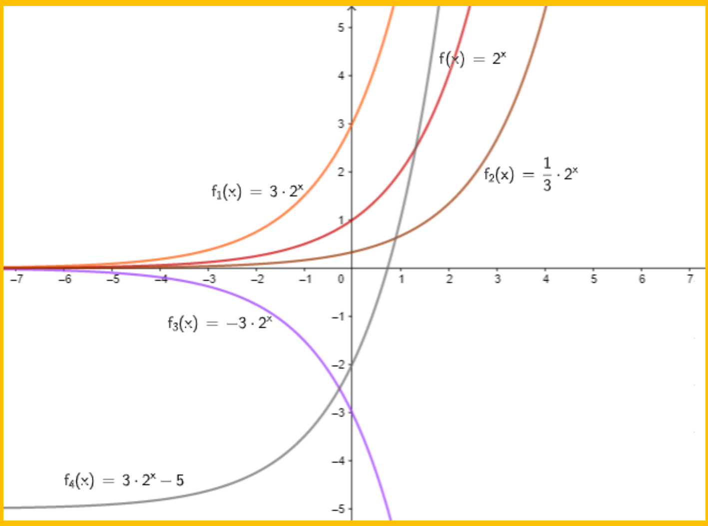


1.5) Gráfico de uma função do tipo $f(x) = k \cdot b^x + c$

A multiplicação de b^x por k provoca um alongamento (quando $|k| > 1$) ou uma compressão (quando $0 < |k| < 1$) no gráfico de $y = b^x$. Quando $k < 0$ ainda ocorre uma reflexão do gráfico de $y = b^x$ em relação ao eixo x.

A soma da constante c provoca um deslocamento vertical de $|c|$ unidades para cima ($c > 0$) ou para baixo ($c < 0$).

Exemplos:



1.6) Função exponencial de base natural

A função $f(x) = e^x$ é amplamente utilizada em aplicações, onde a base e, denominada base natural, é o número de Euler (um número irracional, $e \approx 2{,}71828$, tal que $e = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$). Nas calculadoras científicas há uma tecla que permite calcular diretamente a imagem dessa função para qualquer valor do domínio.

1.7) Equações exponenciais

Equações com incógnita no expoente. Algumas equações exponenciais podem ser resolvidas montando-se uma igualdade de potências de mesma base, outras precisam de artifícios como a utilização de logaritmos.

Exemplos:

$$2^x = 0{,}25 \Rightarrow 2^x = \frac{1}{4} \Rightarrow 2^x = 2^{-2} \Rightarrow x = -2$$

$$2^x = 7$$
(Aqui é necessário utilizar logaritmos)

1.8) Inequações exponenciais

Para resolver esse tipo de inequação é preciso observar o crescimento ou decrescimento da função exponencial.

$$2^x > 0{,}25$$
$$\Rightarrow 2^x > 2^{-2}$$

Como a base é maior do que 1, estamos comprando imagens de uma função crescente, e a desigualdade se mantém para os expoentes.

$$2^x > 2^{-2} \Rightarrow x > -2$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x \geq \left(\frac{1}{27}\right)$$
$$\Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^x \geq \left(\frac{1}{3}\right)^3$$

Como a base está entre 0 e 1, estamos comparando imagens de uma função decrescente, e a desigualdade se inverte para os expoentes.

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x \geq \left(\frac{1}{3}\right)^3 \Rightarrow x \leq 3$$

2) FUNÇÃO LOGARÍTMICA

2.01) Definição de logaritmo

O logaritmo do número a na base b é o expoente x ao qual se deve elevar b para obter a, ou seja:

$$\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a$$

Condições:

- A base b precisa ser positiva e diferente de 1.
- O número a precisa ser positivo.

Exemplo: $\log_2 32 = 5$, pois $2^5 = 32$.

2.02) Logaritmos decimais

São os logaritmos de base 10. Normalmente a base 10 fica implícita na nomenclatura. Nas calculadoras científicas há uma tecla para o cálculo desse tipo de logaritmo.

Exemplo: $\log 1000 = \log_{10} 1000 = 3$

2.03) Logaritmos naturais

São os logaritmos de base e. A nomenclatura utilizada é ln ao invés de $\log_e$. Nas calculadoras científicas há uma tecla para o cálculo desse tipo de logaritmo

Exemplo: $\ln 2 = \log_e 2 \approx 0{,}693147$

2.04) Propriedades dos logaritmos

Sejam $\log_b a = x_1$, $\log_b c = x_2$, $\log_b ac = x_3$, $\log_b\left(\frac{a}{c}\right) = x_4$ e $\log_b a^n = x_5$. Aplicando a definição de logaritmo temos: (I) $b^{x_1} = a$, (II) $b^{x_2} = c$, (III) $b^{x_3} = ac$, (IV) $b^{x_4} = \frac{a}{c}$ e (V) $b^{x_5} = a^n$.

Substituição	Desenvolvimento	**Propriedade**
(I) e (II) em (III)	$b^{x_3} = ac \Rightarrow b^{x_3} = b^{x_1}b^{x_2} \Rightarrow b^{x_3} = b^{x_1+x_2} \Rightarrow x_3 = x_1 + x_2$	$\log_b ac = \log_b a + \log_b c$
(I) e (II) em (IV)	$b^{x_4} = \frac{a}{c} \Rightarrow b^{x_4} = \frac{b^{x_1}}{b^{x_2}} \Rightarrow b^{x_4} = b^{x_1-x_2} \Rightarrow x_4 = x_1 - x_2$	$\log_b\left(\frac{a}{c}\right) = \log_b a - \log_b c$
(I) e (II) em (V)	$b^{x_5} = a^n \Rightarrow b^{x_5} = (b^{x_1})^n \Rightarrow b^{x_5} = b^{n \cdot x_1} \Rightarrow x_5 = n \cdot x_1$	$\log_b a^n = n \cdot \log_b a$
$\log_b a = x_1$ em (I)	$b^{x_1} = a$	$b^{\log_b a} = a$

Exemplos:

$\log_2 32 = \log_2(2 \cdot 16) = \log_2 2 + \log_2 16$	$\log_2 32 = \log_2\left(\frac{64}{2}\right) = \log_2 64 - \log_2 2$
$\log_2 32 = \log_2 2^5 = 5 \cdot \log_2 2$	$2^{\log_2 32} = 32$

2.05) Mudança de base

Quando queremos calcular logaritmos que não sejam de base decimal nem natural é preciso fazer uma mudança de base para que o cálculo seja possível via calculadora.

$$\log_b a = x \Rightarrow b^x = a \Rightarrow \log_c b^x = \log_c a \Rightarrow x.\log_c b = \log_c a \Rightarrow x = \frac{\log_c a}{\log_c b} \Rightarrow \boldsymbol{\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}}$$

Exemplo: $\log_2 32 = \frac{\log 32}{\log 2}$

2.06) Definição de função logarítmica

A função $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}, f(x) = \log_b x$, com $b > 0$ e $b \neq 1$ é denominada função logarítmica de base b.

Note que a função logarítmica é a inversa da função exponencial, e vice-versa, pois:

$$\begin{matrix} f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}, f(x) = \log_b x \\ f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*, f^{-1}(x) = b^x \end{matrix} \Rightarrow f^{-1}(f(x)) = b^{\log_b x} = x$$

Exemplos: $f(x) = \log_2 x$ $\quad g(x) = \ln x$ $\quad h(x) = \log_{0,5} x$

2.07) Domínio

Como a função logarítmica é a inversa da função exponencial, seu domínio corresponde ao conjunto imagem dessa função, ou seja, conjunto dos números reais positivos.

Exemplo: Note que em $f(x) = \log_2 x$, não está definido $f(-5)$ (não existe expoente que elevado à base 2 gere um número negativo), pois $-5 \notin D(f)$.

2.08) Função crescente ou decrescente

Em $f(x) = \log_b(x)$, quando $b > 1$, temos que $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$, portanto a função é crescente em todo o domínio. Já quando $0 < b < 1$, temos que $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, assim a função é decrescente em todo o domínio.

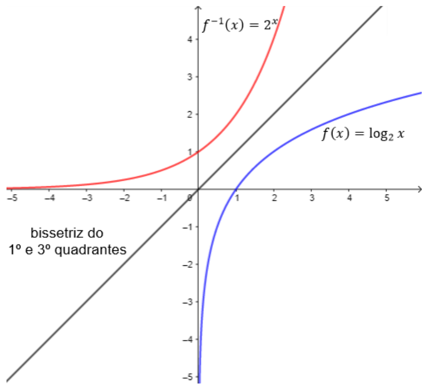
Exemplos:

	$f(x) = \log_2 x$	$g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$
$x = 0,1$	$f(0,1) \approx -3,32$	$g(0,1) \approx 3,32$
$x = 1$	$f(1) = 0$	$g(1) = 1$
$x = 10$	$f(10) \approx 3,32$	$g(10) \approx 3,32$

2.09) Gráfico

O ponto $(1,0)$ sempre pertence ao gráfico $f(x) = \log_b x$, para qualquer valor de b que satisfaz a definição de função logarítmica. Por ser a inversa da função exponencial, o gráfico de

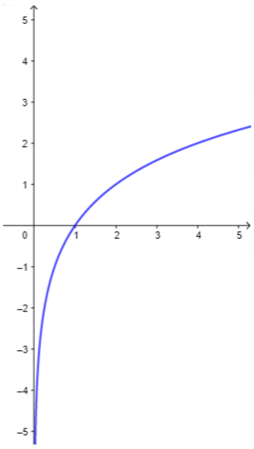
$f(x) = \log_b x$ tem simetria em relação à bissetriz do 1º e 3º quadrantes com $f^{-1}(x) = b^x$, conforme pode ser percebido no exemplo a seguir:



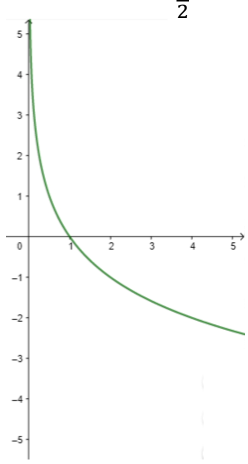
Quando $b > 1$, temos que $f(x) = \log_b x$ é cada vez maior a medida que x tende para $+\infty$ e, cada vez menor quando x tende para $-\infty$. No caso em que $0 < b < 1$, ocorre o contrário.

Exemplos:

$f(x) = \log_2 x$

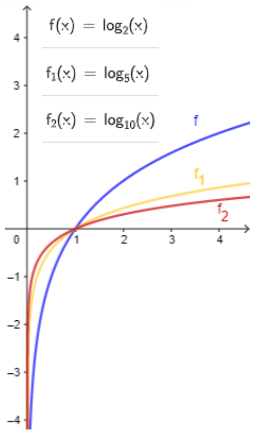


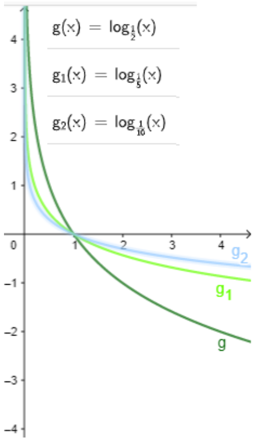
$g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$



Observação: Quando $b > 1$, quanto maior o valor de b, mais “próxima do eixo x” fica o gráfico. Já quando $0 < b < 1$, o mesmo ocorre quanto menor é o valor de b.

Exemplos:





2.10) Gráfico de uma função do tipo $f(x) = k \cdot \log_b(x - a) + c$

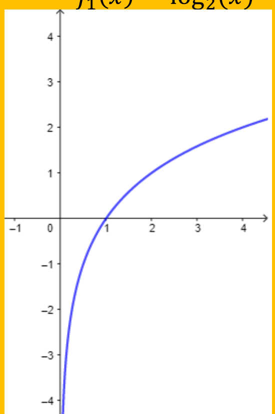
No gráfico de $y = \log_b(x - a)$ ocorre um deslocamento horizontal de $|a|$ unidades para a direita (quando $a > 0$) ou para a esquerda (quando $a < 0$). Tal deslocamento prova mudança de domínio em relação à função $y = \log_b x$.

A multiplicação de $y = \log_b(x - a)$ por k provoca um alongamento (quando $|k| > 1$) ou uma compressão (quando $0 < |k| < 1$) no gráfico. Quando $k < 0$ ainda ocorre uma reflexão do gráfico em relação ao eixo x.

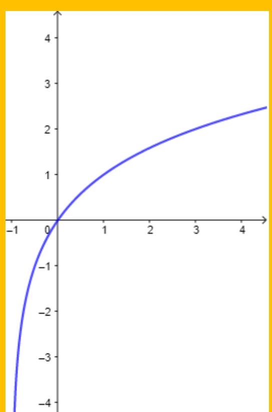
A soma da constante c provoca um deslocamento vertical de $|c|$ unidades para cima ($c > 0$) ou para baixo ($c < 0$).

Exemplo:

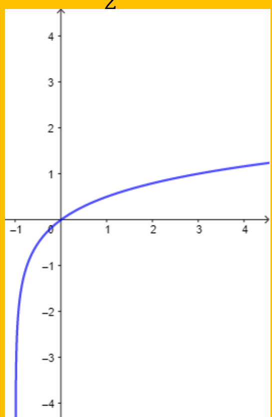
$f_1(x) = \log_2(x)$



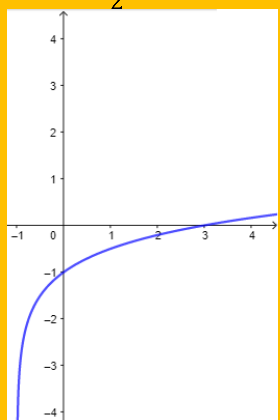
$f_2(x) = \log_2(x + 1)$



$f_3(x) = \frac{1}{2} \cdot \log_2(x + 1)$



$f_4(x) = \frac{1}{2} \cdot \log_2(x + 1) - 1$



2.11) Equações logarítmicas

Equações que apresentam a incógnita envolvida com logaritmos. Normalmente a resolução passa pela utilização da definição de logaritmo.

Exemplos:

$$\log(x-1) = -2$$
$$\Rightarrow 10^{-2} = x - 1 \Rightarrow x = 1{,}01$$

$$log_{m-1} 9 = 2$$
$$\Rightarrow (m-1)^2 = 3 \Rightarrow \begin{matrix} m = 4 \\ m = -2 \end{matrix}$$

Da definição de logaritmo sabemos que base precisa ser positiva e diferente de 1, o que não ocorre quando $m = -2$, pois a base seria -3. Assim a única solução dessa equação é $m = 4$.

2.12) Inequações logarítmicas

Para resolver esse tipo de inequação é preciso observar o crescimento ou decrescimento da função logarítmica.

$$\log_2(x-3) > -2$$

Como a base é maior do que 1, estamos trabalhando com uma função crescente, portanto a desigualdade se mantém ao utilizar a definição de logaritmo:

$$x - 3 > 2^{-2} \Rightarrow x > 2^{-2} + 3 \Rightarrow x > 3{,}25$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(x-3) \geq \log_{\frac{1}{2}} 7$$

Como a base está entre 0 e 1, estamos comparando imagens de uma função decrescente, e a desigualdade se inverte para os logaritmandos.

$$x - 3 \leq 7 \Rightarrow x \leq 10$$

Da definição de logaritmo sabemos que o logaritmando não pode ser negativo, o que ocorre quando $x < 3$, assim o conjunto solução dessa inequação é $3 < x \leq 7$.