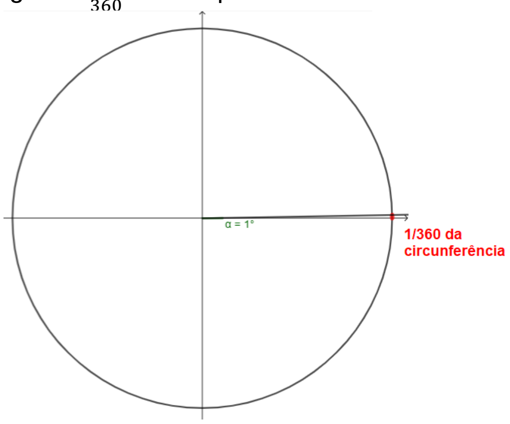
TÓPICOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR - SEMANA 6

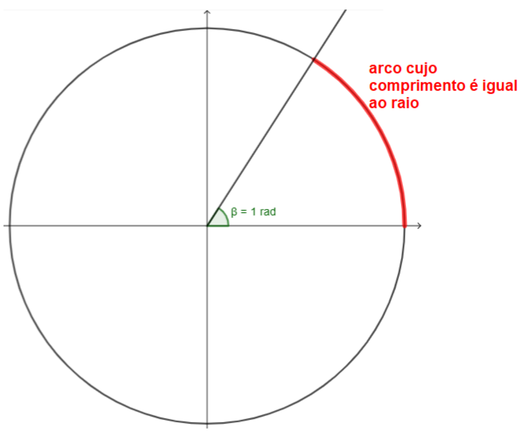
FUNÇÃO TRIGONOMÉTRIA E FUNÇÃO TRIGONOMÉTRICA INVERSA

1.01) Unidades de medida de ângulo

Grau: Um grau corresponde ao ângulo subtendido por um arco de comprimento igual a $\frac{1}{360}$ do comprimento da circunferência.



Radiano: Um radiano corresponde ao ângulo subtendido por um arco de comprimento igual ao raio do círculo.



O ângulo central de uma circunferência mede entre $0°$ e $360°$ ou $1\, rad$ e $2\pi\, rad$. Por convenção, quando nos referenciamos a um ângulo sem mencionar a unidade, fica implícito que ele está em radianos. Nos problemas envolvendo funções trigonométricas é padrão que o ângulo seja dado em radianos.

Relação de conversão (proporção direta): $\mathbf{180° = \pi\, rad}$

1.02) Comprimento de um arco de circunferência

Em qualquer circunferência, a razão entre o comprimento e o diâmetro é dada pela constante π. Dessa forma, sabendo o raio é possível obter o comprimento da circunferência fazendo $2\pi r$.

Em um arco de circunferência, há uma relação de proporção direta entre o ângulo central e o comprimento do arco.

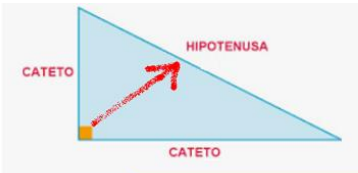
Exemplos:

- Um arco cujo ângulo central mede 90° tem comprimento $\frac{90}{360} \cdot 2\pi r = \frac{1}{4} \cdot 2\pi r$;
- Um arco cujo ângulo central mede $\frac{3\pi}{2}$ rad tem comprimento $\frac{\frac{3\pi}{2}}{2\pi} \cdot 2\pi r = \frac{3}{4} \cdot 2\pi r$.

1.03) Relações nos triângulos retângulos

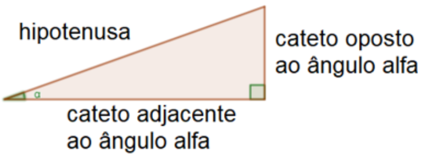
Nos triângulos retângulos há um ângulo reto (90º) e dois ângulos agudos (menores que 90º, e no caso desse tipo de triângulo a soma desses dois ângulos é 90°).

O lado oposto ao ângulo reto chama-se hipotenusa e os outros são denominados catetos. Nos triângulos retângulos vale o Teorema de Pitágoras:



Teorema de Pitágoras: $(\boldsymbol{hipotenusa})^2 = (\boldsymbol{cat_1})^2 + (\boldsymbol{cat_2})^2$

Considerando-se um dos ângulos agudos, podemos diferenciar os catetos: cateto adjacente é aquele vizinho ao ângulo e outro é o cateto oposto. Dessa forma, são definidas as razões trigonométricas no triângulo retângulo:



$$sen\ \alpha = \frac{cateto\ oposto\ a\ \alpha}{hipotenusa}$$

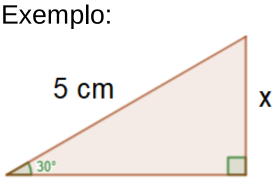
$$cos\ \alpha = \frac{cateto\ adjacente\ a\ \alpha}{hipotenusa}$$

$$tg\ \alpha = \frac{cateto\ oposto\ a\ \alpha}{cateto\ adjacente\ a\ \alpha}$$

Os valores de seno, cosseno e tangente dependem do ângulo e podem ser obtidos via calculadora científica (https://drive.google.com/file/d/1Ku2FDHRVIcVFhokOwedAd7IfbngLfWGz/view) ou tabela (https://waldexifba.wordpress.com/material-de-apoio/ensino-medio/trigonometria/seno-cosseno-e-tangente-de-angulos/). As razões trigonométricas para os ângulos de 30º, 45º e 60° (ângulos notáveis) tem valores bastante conhecidos, obtidos aplicando tais razões na metade de um quadrado e de um triângulo equilátero.

$\boldsymbol{\alpha}$	$\mathbf{30°}$	$\mathbf{45°}$	$\mathbf{60°}$
$\boldsymbol{sen\ \alpha}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\boldsymbol{cos\ \alpha}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\boldsymbol{tg\ \alpha}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Exemplo:



Nesse triângulo retângulo, a hipotenusa mede 5 cm e queremos descobrir a medida x do cateto oposto ao ângulo de 30º. A razão trigonométrica que relaciona o cateto oposto e a hipotenusa é o seno, assim:

$$sen\ 30° = \frac{cateto\ oposto\ ao\ 30°}{hipotenusa} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{x}{5} \Rightarrow x = 2{,}5\ cm$$

Há duas formas de descobrimos a medida do cateto adjacente ao ângulo de 30º (vamos chamá-lo de y):

I) Aplicando uma Razão Trigonométrica:

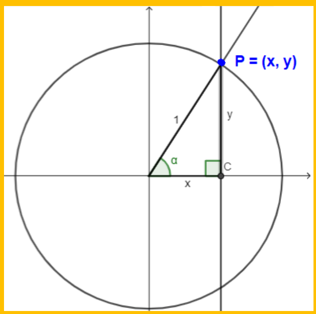
$$cos\ 30° = \frac{cateto\ adjacente\ ao\ 30°}{hipotenusa} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{y}{5} \Rightarrow y = \frac{5\sqrt{3}}{2}\ cm \approx 4{,}33\ cm$$

II) Aplicando Teorema de Pitágoras:

$$5^2 = 2{,}5^2 + y^2 \Rightarrow y = \sqrt{5^2 - 2{,}5^2} \Rightarrow y = \sqrt{18{,}75}\ cm \approx 4{,}33\ cm$$

1.04) Ciclo trigonométrico

O ciclo trigonométrico é uma circunferência de raio 1, cujo centro coincide com o centro do sistema de coordenadas cartesianas. Observando a figura abaixo, formamos um triângulo retângulo cuja a hipotenusa é 1 e os catetos adjacente e oposto ao ângulo α são x e y. Assim temos:



$$\cos\alpha = \frac{x}{1} \Rightarrow x = cos\ \alpha$$
$$sen\ \alpha = \frac{y}{1} \Rightarrow y = sen\ \alpha$$
$$tg\ \alpha = \frac{y}{x} \Rightarrow tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha}$$

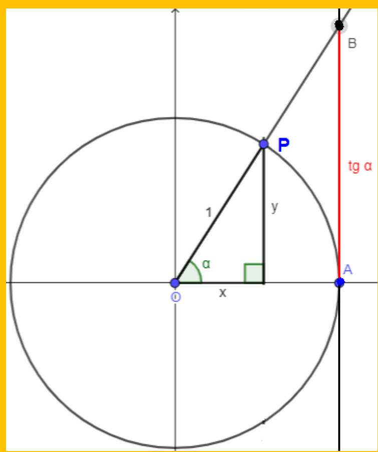
Ou seja, Sendo A = (1, 0), O = (0, 0) e P = (x, y) (ponto do ciclo trigonométrico), temos que:

- $\cos\alpha$ é o segmento que corresponde a projeção do segmento OP sob o eixo x, cujo comprimento está entre 0 e 1;
- $\mathrm{sen}\,\alpha$ é o segmento que corresponde a projeção do segmento OP sob o eixo y, , cujo comprimento está entre 0 e 1.

Considerando o "sinal dos segmentos", temos:

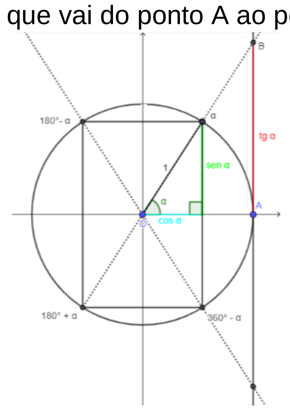
Quadrante	α	Sinal de x	Sinal de y	Sinal de $\cos\alpha$	Sinal de $\mathrm{sen}\,\alpha$	Sinal de $\mathrm{tg}\,\alpha$
1º	Entre 0º e 90º	+	+	+	+	+
2º	Entre 90º e 180º	-	+	-	+	-
3º	Entre 180º e 270º	-	-	-	-	+
4º	Entre 270º e 360°	+	-	+	-	-

Observação: Por semelhança de triângulos, podemos comprovar que, na figura ao lado, a medida do segmento AB equivale a razão $\frac{y}{x}$, e por conseguinte em $tg\ \alpha$. Isso vale em qualquer ponto P do ciclo trigonométrico: o comprimento (com sinal) do segmento da reta paralela ao eixo y que passa pelo ponto A (eixo das tangentes) com extremos em A e B (intersecção dessa reta com a reta pelos pontos O e P) corresponde a $tg\ \alpha$. Note que tal segmento não tem limitação de comprimento, por exemplo, no 1º quadrante, quanto mais próximo de 90º, maior o valor de $tg\ \alpha$.



1.05) Relação de ângulos entre 90º e 360º com ângulos do 1º quadrante

Sabendo os valores de seno, cosseno e tangente para ângulos entre 0º e 90º, obtemos todos os valores para as razões trigonométricas no ciclo. Por simplicidade, na figura abaixo, os pontos estão nomeados com a medida do ângulo central do arco que vai do ponto A ao ponto em questão.

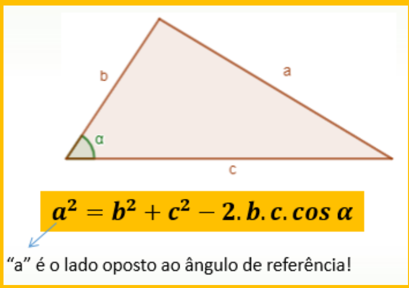


Quadrante	Relação com α	Seno	Cosseno	Tangente
1º	α	$sen\ \alpha$	$cos\ \alpha$	$tg\ \alpha$
2º	$180° - \alpha$	$sen(180° - \alpha) = sen\ \alpha$	$cos(180° - \alpha) = -cos\ \alpha$	$tg(180° - \alpha) = -tg\ \alpha$
3º	$180° + \alpha$	$sen(180° + \alpha) = -sen\ \alpha$	$cos(180° + \alpha) = -cos\ \alpha$	$tg(180° + \alpha) = tg\ \alpha$
4º	$360° - \alpha$	$sen(360° - \alpha) = sen\ \alpha$	$cos(360° - \alpha) = cos\ \alpha$	$tg(360° - \alpha) = -tg\ \alpha$

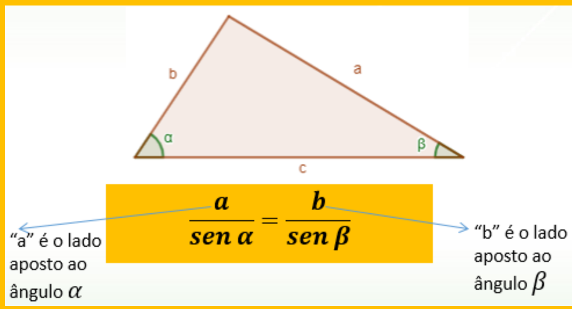
1.06) Lei dos Senos e Lei dos Cossenos

São relações que valem para qualquer tipo de triângulo, demostradas particionando um triângulo em dois triângulos retângulos.

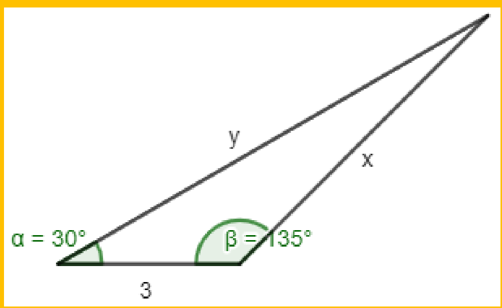
Lei dos Cossenos



Lei dos Senos



Exemplo:



O ângulo oposto ao lado que mede 3 é $180° - 30° - 135° = 15°$, assim aplicando a Lei do Senos, temos:

$$\frac{x}{sen\ 30°} = \frac{3}{sen\ 15°} \Rightarrow x = \frac{3 \cdot sen\ 30°}{sen\ 15°} \approx 5{,}8$$

A medida y pode ser calculada de duas maneiras distintas:

I) Pela Lei dos Senos:

$$\frac{y}{sen\ 135°} = \frac{3}{sen\ 15°} \Rightarrow y = \frac{3 \cdot sen\ 135°}{sen\ 15°} \approx 8{,}2$$

II) Pela Lei dos Cossenos:

$$y^2 \approx 3^2 + 5{,}8^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5{,}8.\cos 135°$$

$$\Rightarrow y \approx \sqrt{3^2 + 5{,}8^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5{,}8.\cos 135°} \approx 8{,}2$$

1.07) Identidades trigonométricas

Do ciclo trigonométrico temos a relação trigonométrica fundamental:

$$sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$$

A partir da relação trigonométrica fundamental obtemos outras duas identidades:

$$1 + tg^2\alpha = sec^2\alpha$$

$$1 + cotg^2\alpha = cossec^2\alpha$$

Há outras identidades podem ser demonstradas com auxílio de triângulos:

$$sen(\alpha + \beta) = sen\ \alpha \cdot \cos\beta + sen\ \beta\ \cdot \cos\alpha$$

$$sen(\alpha - \beta) = sen\ \alpha \cdot \cos\beta - sen\ \beta\ \cdot \cos\alpha$$

$$tg(\alpha + \beta) = \frac{tg\ \alpha + \mathrm{tg}\,\beta}{1 - \mathrm{tg}\,\alpha \cdot tg\ \beta}$$

$$cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - sen\ \beta\ \cdot \mathrm{sen}\,\alpha$$

$$cos(\alpha - \beta) = cos\ \alpha \cdot \cos\beta + sen\ \beta\ \cdot \mathrm{sen}\,\alpha$$

$$tg(\alpha - \beta) = \frac{tg\ \alpha - \mathrm{tg}\,\beta}{1 + \mathrm{tg}\,\alpha \cdot tg\ \beta}$$

$$sen(2\alpha) = 2 \cdot sen\ \alpha \cdot \cos\alpha$$

$$cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \mathrm{sen}^2\alpha$$

1.08) Arcos côngruos

Há uma infinidade que arcos com os mesmos extremos inicial e final no ciclo trigonométrico, porém com comprimento diferentes, diferenciando-se em função do sentido e/ou no número de voltas completas no ciclo.

Exemplos:

- Um arco de medida 750° corresponde ao um arco de duas voltas completas e mais 30° ($2 \cdot 360° + 30° = 750°$), a partir do ponto de origem de todos os arcos.

Um arco de medida $-30°$ corresponde a um arco de $30°$ no sentido negativo do ciclo trigonométrico (sentido horário), que é côngruo ao arco de $330°$ no sentido anti-horário ($360° - 30° = 330°$).

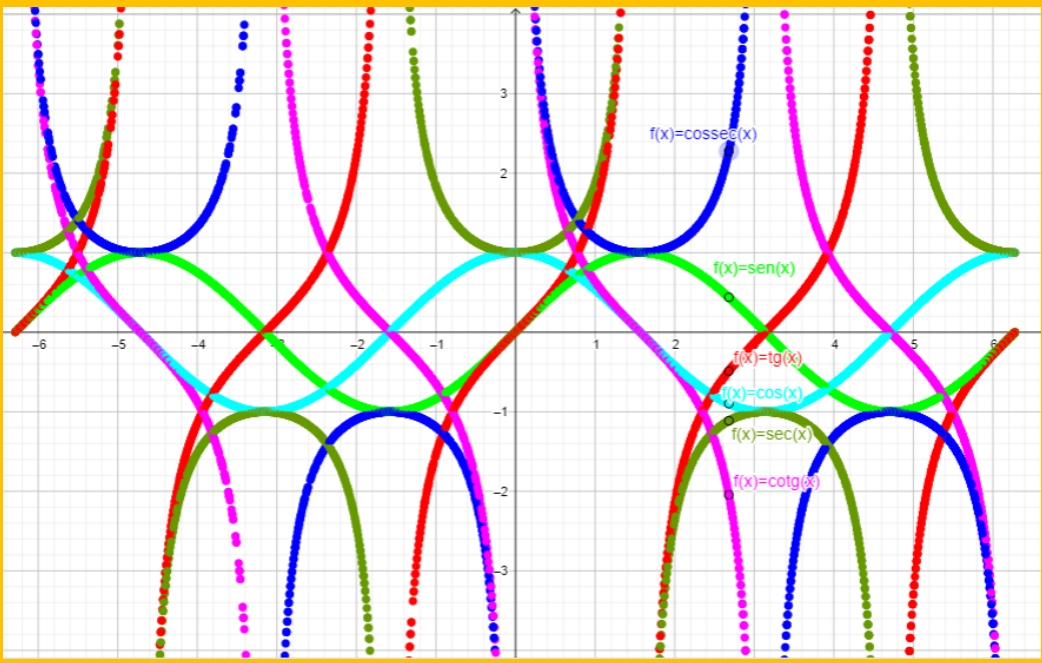
1.09) Funções trigonométricas

Sendo x um ângulo em radianos, temos as seguintes funções trigonométricas:

Função	Domínio	Imagem	Período
$f(x) = sen(x)$	$\mathbb{R}$	$[-1, 1]$	2π
$f(x) = cos(x)$	$\mathbb{R}$	$[-1, 1]$	2π
$f(x) = tg(x)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}$	π
$f(x) = cossec(x) = \frac{1}{sen(x)}$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$	2π
$f(x) = sec(x) = \frac{1}{cos(x)}$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$	2π
$f(x) = cotg(x) = \frac{1}{tg(x)}$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}$	π

1.10) Gráficos

Observe o gráfico das seis funções trigonométricas no intervalo $[-2\pi, 2\pi]$:



No link https://www.geogebra.org/classic/j3v8a5ej você consegue visualizar a relação entre os comprimentos dos segmentos no ciclo trigonométrico e os gráficos das funções trigonométricas clicando em ▶ no comando deslizante X.

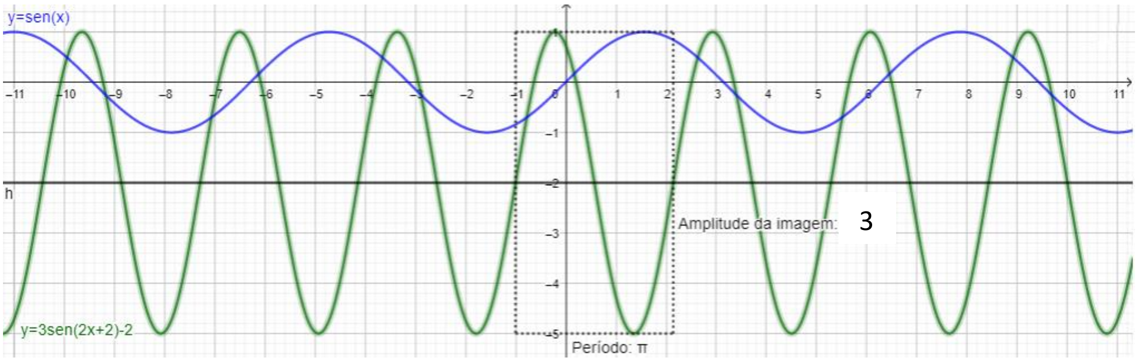
1.11) Gráfico de $y = a \cdot sen(bx + c) + d$

Coeficiente	Mudança em relação à $y = sen\ (x)$
a	A amplitude da imagem (metade da diferença entre as imagens máxima e mínima) é multiplicada por a.
b	O período é dividido por b, portanto equivale a $\frac{2\pi}{b}$.
c	Ocorre um deslocamento horizontal de $-\frac{c}{b}$ unidades.
d	Ocorre um deslocamento vertical de d unidades.

Exemplo:

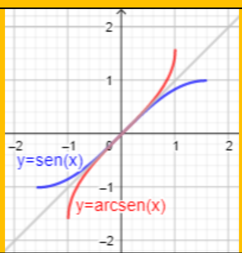
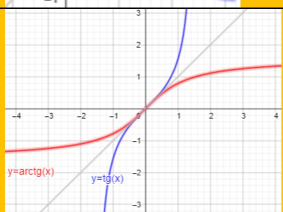
$$y = 3sen(2x + 2) - 2$$

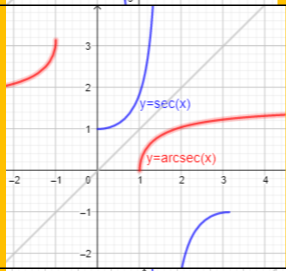
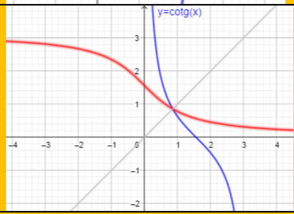
A amplitude da imagem é 3 e o período é $\frac{2\pi}{2} = \pi$. Ocorre um deslocamento horizontal de -1 (uma unidade à esquerda), portanto o primeiro ciclo do período é $[-1, 1 + \pi]$, e um deslocamento vertical de -2 (duas unidades para baixo), portanto a imagem é $[-5,\ 1]$.



Observação: Podemos fazer transformações análogas com base nas demais funções trigonométricas.

1.12) Funções trigonométricas inversas

Função	Domínio e Contradomínio para que seja uma bijeção	Função Inversa	Domínio e Contradomínio da função inversa	Gráfico das duas funções
$y = sen\ x$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$	$y = arcsen\ x$	$[-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$	
$y = cos\ x$	$[0, \pi] \to [-1, 1]$	$y = arccos\ x$	$[-1, 1] \to [0, \pi]$	
$y = tg\ x$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$	$y = arctg\ x$	$\mathbb{R} \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$	

$y = cossec\ x$	$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]-\{0\}\to(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$	$y = arccossec\ x$	$(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$ $\to\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]-\{0\}$	
$y = sec\ x$	$[0,\pi]-\left\{\frac{\pi}{2}\right\}\to(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$	$y = arcsec\ x$	$(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$ $\to[0,\pi]-\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$	
$y = cotg\ x$	$[0,\pi]\to\mathbb{R}$	$y = arccotg\ x$	$\mathbb{R}\to[0,\pi]$	

1.13) Equações trigonométricas

Quando o universo para a solução encontrada é $\mathbb{R}$, é preciso observar que há infinitos arcos que tem a mesma imagem, diferindo apenas pelo número de voltas completas. Também é preciso observar, que na mesma volta no ciclo trigonométrico, há mais de um arco com o mesmo valor para qualquer uma das razões trigonométricas.

Exemplo:

$$sen(2x+1)=\frac{1}{2}$$

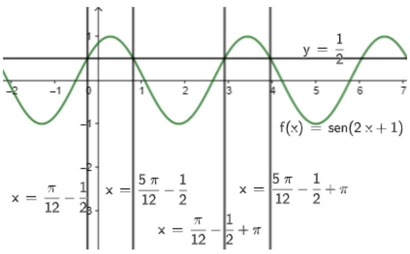
Note que a função $f(x) = arcsen(x)$ retorna apenas um arco do 1º ou 4º quadrante como imagem. No caso dessa equação, como queremos saber o arco cujo seno é positivo, há o arco $arcsen\left(\frac{1}{2}\right)$ mas também o arco do 2º quadrante $\pi - arcsen\left(\frac{1}{2}\right)$ que resultam em $\frac{1}{2}$. Também precisamos considerar que todos os arcos obtidos somando-se $2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, são côngruos a esses.

$$arcsen\left(\frac{1}{2}\right)+2k\pi = 2x+1 \qquad \text{ou} \qquad \pi - arcsen\left(\frac{1}{2}\right)+2k\pi = 2x+1$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{6}+2k\pi-1 = 2x \qquad\qquad \Rightarrow \pi-\frac{\pi}{6}+2k\pi-1 = 2x$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{x = \frac{\pi}{12}-\frac{1}{2}+k\pi} \qquad\qquad \Rightarrow \boldsymbol{x = \frac{5\pi}{12}-\frac{1}{2}+k\pi}$$

Na figura abaixo, podemos comprovar a veracidade das soluções obtidas para k = 0 e k =1:

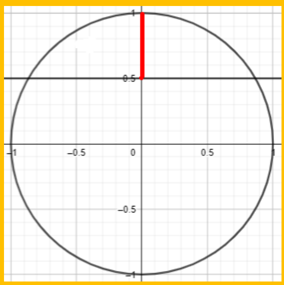


1.14) Inequações trigonométricas

Além das mesmas observações que para as equações trigonométricas, nas inequações é importante visualizar o ciclo trigonométrico.

Exemplo:

$$sen(2x+1) > \frac{1}{2}$$



Olhando para o eixo dos senos (eixo y) percebemos que o seno é maior do que $\frac{1}{2}$ para arcos entre $arcsen\left(\frac{1}{2}\right)$ e $\pi - arcsen\left(\frac{1}{2}\right)$ ou entre côngruos a esses na mesma volta, assim:

$$arcsen\left(\frac{1}{2}\right) + 2k\pi < 2x+1 < \pi - arcsen\left(\frac{1}{2}\right) + 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{6} + 2k\pi < 2x+1 < \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{6} + 2k\pi - 1 < 2x < \frac{5\pi}{6} + 2k\pi - 1$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{\pi}{6} + 2k\pi - 1}{2} < x < \frac{\frac{5\pi}{6} + 2k\pi - 1}{2}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\frac{\pi}{12} - \frac{1}{2} + k\pi < x < \frac{5\pi}{12} - \frac{1}{2} + k\pi}$$