

Relações trigonométricas

1) Construa um triângulo retângulo cujos catetos meçam 10 cm e 5 cm.

a) Qual a medida da hipotenusa do triângulo retângulo? $5\sqrt{5}$ cm

b) Quais são os ângulos internos do triângulo?

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{10}{5\sqrt{5}} \rightarrow \operatorname{sen} \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} \rightarrow \alpha = \operatorname{arcsen} \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \right) \approx 63,43^\circ$$

$$\beta = 90^\circ - \alpha \approx 90^\circ - 63,43^\circ = 26,57^\circ$$

c) Com uma leve dobra, marque a metade da hipotenusa. Faça um corte seguindo segmento de reta que vai do vértice do ângulo reto no triângulo original ao ponto marcado na hipotenusa. Mantenha o triângulo que tem 10 cm como um de seus lados e descarte o outro. Descubra a medida do lado obtido por meio de corte e dos ângulos desconhecidos no triângulo que foi mantido.

$$\begin{aligned} x^2 &= 10^2 + \left(\frac{5\sqrt{5}}{2} \right)^2 - 2 \cdot 10 \cdot \frac{5\sqrt{5}}{2} \cdot \cos 26,57^\circ \\ x^2 &= 100 + \frac{125}{4} - 50\sqrt{5} \cdot \cos 26,57^\circ \\ x &\approx 5,59 \end{aligned}$$

Lados: 10 cm, 5,59 cm e 5,59 cm

Como o nosso triângulo é isósceles e dois ângulos são $26,57^\circ$, o outro mede:

$$180^\circ - 2 \cdot 26,57^\circ = 126,86^\circ$$

Senos, cossenos e tangentes de ângulos entre 0° e 90° são valores tabelados (também disponíveis na calculadora científica). Os ângulos notáveis 30° , 45° e 60° podem ser obtidos por uma “tabelinha especial”:

	30°	45°	60°
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Unidades de medida de ângulo

Agora vamos para **um novo ambiente**, a circunferência:

Quantos radianos equivalem a um ângulo de 360° , ou seja, o comprimento da circunferência equivale ao raio multiplicado por quanto? 2π

Assim podemos estabelecer relações entre as medidas de ângulo em graus e radianos:

Grau	Radiano
360°	$2\pi \text{ rad}$
180°	$\pi \text{ rad}$
90°	$\frac{\pi}{2} \text{ rad}$
60°	$\frac{\pi}{3} \text{ rad}$
45°	$\frac{\pi}{4} \text{ rad}$
30°	$\frac{\pi}{6} \text{ rad}$

Nas funções trigonométricas os ângulos sempre estarão em radianos é não é preciso escrever *rad* depois!

Por exemplo, $50^\circ = ? \text{ rad}$

Grau	Radiano
180	π
50	x

$$\frac{180}{50} = \frac{\pi}{x} \rightarrow x = \frac{50\pi}{180} = \frac{5\pi}{18} \text{ rad}$$

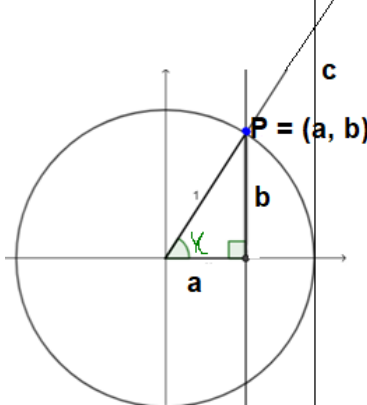
Por exemplo, $1 \text{ rad} = ?^\circ$

Grau	Radiano	
180	π	
x	1	

$$\frac{180}{x} = \frac{\pi}{1} \rightarrow x = \frac{180}{\pi}^\circ \approx 57,3^\circ$$

Circunferência trigonométrica

A circunferência trigonométrica (raio 1, centrada no ponto (0,0), sentido positivo é o anti-horário, todos os arcos partem do (1, 0)):



$$\sin x = \frac{b}{1} \rightarrow \sin x = b$$

$$\cos x = \frac{a}{1} \rightarrow \cos x = a$$

$$tg x = ?$$

$$\frac{c}{b} = \frac{1}{a} \rightarrow c = \frac{b}{a} = \frac{\sin x}{\cos x}$$

	1ºQ	2ºQ	3ºQ	4ºQ
$\sin x$]0, 1[]0, 1[] -1, 0[] -1, 0[
$\cos x$]0, 1[] -1, 0[] -1, 0[]0, 1[
$tg x$]0, \infty[] -\infty, 0[]0, \infty[] -\infty, 0[

Relação trigonométrica fundamental:

$$(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

Exemplo: Sabendo que $\sin x \approx 0,2588$ que x é um ângulo do 2º Q, qual o valor de $\cos x$?

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$(0,2588)^2 + \cos^2 x = 1$$

$$\cos^2 x = 1 - 0,2588^2$$

$$\cos x = \mp \sqrt{1 - 0,2588^2}$$

Como no 2ºQ o cosseno é negativo:

$$\cos x = -\sqrt{1 - 0,2588^2}$$

$$\cos x \approx -0,9659$$

Reduções ao 1ºQ (no geogebra):

<p>Relações com $\frac{\pi}{6}$ (30°):</p> $\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$ $\sin \frac{\pi}{6} = \sin \frac{5\pi}{6}$ $\sin \frac{\pi}{6} = -\sin \frac{7\pi}{6} = -\sin \frac{11\pi}{6}$ $\cos \frac{\pi}{6} = \cos \frac{11\pi}{6}$ $\cos \frac{\pi}{6} = -\cos \frac{5\pi}{6} = -\cos \frac{7\pi}{6}$	<p>Relações com $\frac{\pi}{4}$ (45°):</p> $\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$	<p>Relações com $\frac{\pi}{3}$ (60°):</p> $\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$
--	--	--

$tg \frac{\pi}{6} = tg \frac{7\pi}{6}$ $tg \frac{\pi}{6} = -tg \frac{5\pi}{6} = -tg \frac{7\pi}{6}$		
---	--	--

Se x é ângulo do primeiro quadrante:

$$\text{sen}(\pi - x) = \text{sen } x$$

$$\text{sen}(\pi + x) = -\text{sen } x$$

$$\text{sen}(2\pi - x) = -\text{sen } x$$

$$\text{cos}(\pi - x) = -\text{cos } x$$

$$\text{cos}(\pi + x) = -\text{cos } x$$

$$\text{cos}(2\pi - x) = \text{cos } x$$

$$tg(\pi - x) = -tg \ x$$

$$tg(\pi + x) = tg \ x$$

$$tg(2\pi - x) = -tg \ x$$

Funções trigonométricas

(Observação: x é um ângulo em radiano, cuidado ao utilizar a calculadora!)

$f(x) = \text{sen } x$ https://www.geogebra.org/classic/ds48due5	Domínio: \mathbb{R} Imagem: $[-1, 1]$ Período: 2π Amplitude: 1
$f(x) = \text{cos } x$	Domínio: \mathbb{R} Imagem: $[-1, 1]$ Período: 2π Amplitude: 1
$f(x) = \text{tg } x$	Domínio: $\mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ Imagem: \mathbb{R} Período: π Amplitude: infinito
