1) Funções	2) Função afim	3) Função quadrática
1.01) Definição de função; 1.02) Domínio; 1.03) Imagem; 1.04) Gráfico; 1.05) Função crescente ou decrescente em um intervalo; 1.06) Função injetora; 1.07) Função sobrejetora; 1.08) Função bijetora; 1.09) Função composta; 1.10) Função inversa.	2.1) Definição; 2.2) Raiz; 2.3) Taxa de variação; 2.4) Gráfico; 2.5) Função crescente ou decrescente.	3.1) Definição; 3.2) Raízes; 3.3) Gráfico; 3.4) Concavidade; 3.5) Vértice; 3.6) Intervalos em que a função é crescente ou decrescente.
4) Funções: polinomial, racional, modular e irracional	**5) Função exponencial**	**6) Função logarítmica**
4.1) Função polinomial; 4.2) Comportamento da imagem da função polinomial; 4.3) Raízes da função polinomial; 4.4) Função racional; 4.5) Gráfico de uma função racional; 4.6) Função módulo; 4.7) Funções com variável no módulo. 4.8) Função irracional	5.1) Definição; 5.2) Imagem; 5.3) Função crescente ou decrescente; 5.4) Gráfico; 5.5) Gráfico de uma função do tipo $f(x) = k \cdot b^x + c$; 5.6) Função exponencial de base natural; 5.7) Equações exponenciais; 5.8) Inequações exponenciais.	6.01) Definição de logaritmo; 6.02) Logaritmos decimais; 6.03) Logaritmos naturais; 6.04) Propriedades dos logaritmos; 6.05) Mudança de base; 6.06) Definição de função logarítmica; 6.07) Domínio; 6.08) Função crescente ou decrescente; 6.09) Gráfico; 6.10) Gráfico de uma função do tipo $f(x) = k \cdot \log_b(x-a) + c$; 6.11) Equações logarítmicas; 6.12) Inequações logarítmicas.
7) Função trigonométrica		
7.01) Unidades de medida de ângulo; 7.02) Comprimento de um arco de circunferência; 7.03) Relações nos triângulos retângulos; 7.04) Ciclo trigonométrico; 7.05) Relação de ângulos entre 90° e 360° com ângulos do 1° quadrante; 7.06) Lei dos Senos e Lei dos Cossenos; 7.07) Identidades trigonométricas; 7.08) Arcos côngruos; 7.09) Funções trigonométricas; 7.10) Gráfico; 7.11) Gráfico de $y = a \cdot sen(bx + c) + d$; 7.12) Funções trigonométricas inversas; 7.13) Equações trigonométricas; 7.14) Inequações trigonométricas.		

FUNÇÕES

1.01) Definição de função

Sejam A e B conjuntos não-vazios. Uma função de A em B é uma relação f que a cada elemento de A associa um único elemento de B.

Notação: $f: A \to B$ (lê-se "f de A em B")

$x \longmapsto y$ (lê-se "x é levado em y", onde x (variável independente) é um elemento do domínio e y (variável dependente) é um elemento do contradomínio).

Observação: Normalmente escrevemos $y = f(x)$ e fica implícito que o contradomínio é o conjunto dos números reais e que o domínio é um subconjunto dos números reais. Nesse caso temos uma função real de variável real.

Exemplos:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 3x + 5$	$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = \begin{matrix} 1, se\ x \in \mathbb{Q} \\ 0, se\ x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{matrix}$	$h: \to \mathbb{R}, h(x) = \sqrt{x} - x$

1.02) Domínio

Sendo a função f a relação que consiste em um subconjunto de pares ordenados do produto cartesiano $A \times B$, o domínio de f é o conjunto A e a sua notação é $D(f)$. Quando uma função é expressa apenas pela lei de formação, sem explicitar os conjuntos A e B, fica implícito que o domínio da função é o maior subconjunto possível dos números reais.

Exemplos:

Função	Domínio
$f(x) = 3x + 5$	$D(f) = \mathbb{R}$
$g(x) = \begin{matrix} 1, se\ x \in \mathbb{Q} \\ 0, se\ x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{matrix}$	$D(g) = \mathbb{R}$
$h(x) = \sqrt{x} - x$	$D(h) = \mathbb{R}_+$ (o radical de índice par não pode ter radicando negativo)
$n(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 3} + \frac{1}{\sqrt{x + 5}}$	$D(m) = (-5, +\infty) - \{-3\}$ (o denominador não pode ser nulo e o radical de índice par não pode ter radicando negativo)

1.03) Imagem

Sendo a função f a relação que consiste em um subconjunto de pares ordenados do produto cartesiano $A \times B$, a imagem de f é o subconjunto de B que estão associados com algum elemento de A. A notação para o conjunto imagem da função f é $Im(f)$.

Exemplos:

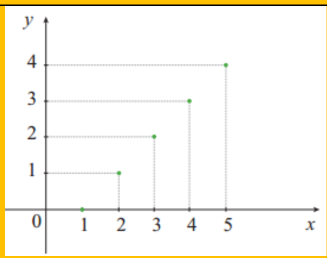
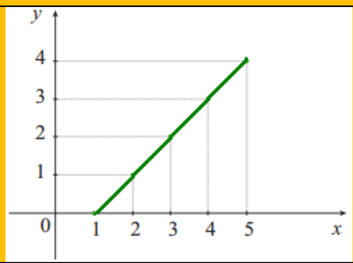
Função	Imagem
$f(x) = 3x + 5$	$Im(f) = \mathbb{R}$
$g(x) = \begin{matrix} 1, se\ x \in \mathbb{Q} \\ 0, se\ x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{matrix}$	$Im(g) = \{0, 1\}$
$h(x) = \sqrt{x} - x$	$Im(h) = \mathbb{R}$
$n(x) = x^2 + 5$	$Im(n) = [5, +\infty)$

Observação: $f(a)$ é a imagem do elemento a. Por exemplo, na função $f(x) = 3x + 5$, temos $f(-1) = 2$.

1.04) Gráfico

Seja $A \subset \mathbb{R}$ e $f: A \to \mathbb{R}$ uma função. O gráfico de f é o conjunto de todos os pontos do plano cujas coordenadas são $(x, f(x))$, com $x \in A$. No plano cartesiano, o eixo horizontal diz respeito a coordenada x do ponto (abscissa) e o eixo vertical diz respeito a coordenada y do ponto (ordenada). Os eixos são perpendiculares e a intersecção corresponde a coordenada zero de ambos. No eixo das abscissas, à esquerda do zero temos os reais negativos e à direita os positivos, já no eixo das ordenadas, os reais negativos estão abaixo da origem e os positivos acima.

Exemplos:

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $f: A \to \mathbb{R},\ f(x) = x - 1$ Como A não é um intervalo de números reais, o gráfico da função f é um conjunto de pontos e não um “pedaço” de curva.	
$B = [1, 5]$ $f: B \to \mathbb{R},\ f(x) = x - 1$	

1.05) Função crescente ou decrescente em um intervalo

Uma função é crescente em um intervalo I, se para quaisquer elementos x_1 e x_2 de I:

$$x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Uma função é decrescente em um intervalo I, se para quaisquer elementos x_1 e x_2 de I:

$$x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Exemplos:

$f(x) = x^2 + 5$	$g(x) = x + 5$
É decrescente no intervalo $I_1 = (-\infty, 0)$, pois se $x_1, x_2 \in I_1$: $x_1 > x_2 \overset{\substack{x_1<0 \\ x_2<0}}{\Longrightarrow} \lvert x_1 \rvert < \lvert x_2 \rvert \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ É crescente no intervalo $I_2 = (0, +\infty)$, pois se $x_1, x_2 \in I_2$: $x_1 > x_2 \overset{\substack{x_1>0 \\ x_2>0}}{\Longrightarrow} \lvert x_1 \rvert > \lvert x_2 \rvert \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$	É crescente em todo o domínio, pois sempre temos: $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

1.06) Função injetora

Uma função f é injetora se não há elementos do domínio distintos com a mesma imagem, ou seja, se $x_1, x_2 \in D(f)$:

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Exemplos:

- $g(x) = x + 5$ é uma função injetora, pois não há quaisquer dois elementos distintos do domínio que tenham a mesma imagem.
- $f(x) = x^2 + 5$ não é uma função injetora, pois há elementos distintos do domínio com a mesma imagem, por exemplo, $f(-1) = f(1) = 6$.

1.07) Função sobrejetora

Uma função é sobrejetora quando a imagem é igual ao contradomínio.

- $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_1(x) = x^2 + 5$ não é uma função sobrejetora, pois a imagem é o intervalo $[5, +\infty)$, ou seja, há elementos do contradomínio que não estão na imagem.
- $f_2 : \mathbb{R} \to [5, +\infty), f_2(x) = x^2 + 5$ é uma função sobrejetora.

1.08) Função bijetora

Uma função é bijetora quando ela é, simultaneamente, injetora e sobrejetora.

Exemplos:

- $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = x + 5$ é uma função bijetora, pois é injetora (não há imagem repetida) e sobrejetora (a imagem equivale ao contradomínio).
- $f_2 : \mathbb{R} \to [5, +\infty),\ f_2(x) = x^2 + 5$ não é uma função bijetora, pois não é injetora (há repetição de imagens, por exemplo: $f_2(-1) = f_2(1) = 6$).
- $f_3 : [0, +\infty) \to [5, +\infty),\ f_3(x) = x^2 + 5$ é uma função bijetora, pois é injetora (não há imagem repetida) e sobrejetora (a imagem equivale ao contradomínio).

1.09) Função composta

Dadas as funções f(x) e g(x), a função composta de g com f, $g(f(x))$, denotada por $g \circ f$, associa a cada elemento do domínio de f uma imagem da função g e está definida apenas se a imagem da função f está contida no domínio da função g.

Exemplos:

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 3x$ $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x + 1$ Note que $Im(f) = \mathbb{R} \subset D(g)$, assim: $g \circ f = g\big(f(x)\big) = 2 \cdot (3x) + 1$ $= 6x + 1$ Note que $Im(g) = \mathbb{R} \subset D(f)$, assim: $f \circ g = f\big(g(x)\big) = 3 \cdot (2x + 1)$ $= 6x + 3$	$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x$ $g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}, g(x) = \sqrt{x}$ Note que $Im(f) = \mathbb{R}$ não está contida no domínio de g, portanto não é possível obter $g \circ f$. Note que $Im(g) = [0, +\infty) \subset D(f)$, assim: $f \circ g = f\big(g(x)\big) = 2\sqrt{x}$	$f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = 2x$ $g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}, g(x) = \sqrt{x}$ Note que $Im(f) = [0, +\infty) \subset D(g)$, assim: $g \circ f = g\big(f(x)\big) = \sqrt{2x}$ Note que $Im(g) = [0, +\infty) \subset D(f)$, assim: $f \circ g = f\big(g(x)\big) = 2\sqrt{x}$

1.10) Função inversa

Apenas funções bijetoras possuem função inversa. A notação para a inversa de uma função f é f^{-1}. Quando a função $f : A \to B$ é inversível, para $x \in A$ e $y \in B$, temos:

$$f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$$

Note que $D(f^{-1}) = Im(f)$ e $D(f) = Im(f^{-1})$.

Exemplos:

$f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, f(x) = x^2$ $f^{-1} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ Note que: $f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x)) = \sqrt{x^2} = x$	$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ , f(x) = 2x + 1$ $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ , f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$ Note que: $f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x)) = \dfrac{(2x+1) - 1}{2} = x$

Dica para encontrar a função inversa de uma função bijetora: Escreva a função f com as variáveis x e y, depois isole x. Feito isso troque y por x para que a função inversa seja escrita em função de x. Observe o exemplo:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ , f(x) = 2x + 1$$

$$y = 2x + 1 \Rightarrow y - 1 = 2x \Rightarrow x = \frac{y - 1}{2}$$

Assim, $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$

Função Afim

2.1) Definição

Uma função real do tipo $f(x) = ax + b$, sendo a e b números reais é chamada função linear.

Exemplo: $f(x) = 2x + 5$

Observações:

- Se $a = 0,$ temos uma função constante, por exemplo, $f(x) = -3$.
- Se $a \neq 0$ e $b = 0$, temos uma função linear, por exemplo, $f(x) = \frac{1}{2}x$. Note que, em qualquer função linear, $f(0) = 0$.

2.2) Raiz

O valor de x que faz com que $f(x) = 0$ é a raiz da função linear.

Exemplo: $-\frac{5}{2}$ é a raiz de $f(x) = 2x + 5$, pois $f\left(-\frac{5}{2}\right) = 0$.

Observação: Para encontrar a raiz de uma função é preciso resolver uma equação. No caso de $f(x) = 2x + 5$, por exemplo:

$$0 = 2x + 5 \Rightarrow -5 = 2x \Rightarrow x = -\frac{5}{2}$$

2.3) Taxa de variação

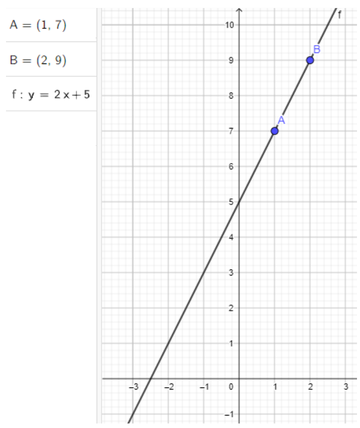
Na função linear $f(x) = ax + b$, a cada unidade que a variável independente x aumenta uma unidade, a variável dependente $y = f(x)$ varia a unidades. Sendo assim, a taxa de variação de uma função afim é constante.

Exemplo: Em $f(x) = 2x + 5$, temos $f(0) = 5$, $f(1) = 7$, $f(2) = 9$, $f(3) = 11$, ou seja, a cada unidade que variável x aumenta, a imagem $f(x)$ aumenta 2 unidades.

2.4) Gráfico

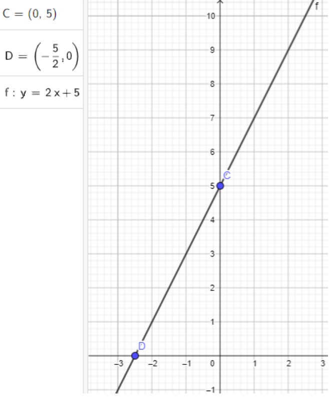
Como a taxa de variação de uma função afim é constante, o gráfico desse tipo de função é uma reta. Sendo assim, basta determinar dois pontos desse gráfico e traçar a reta que os contém.

Exemplo: Em $f(x) = 2x + 5$, considerando os pontos (1, 7) e (2, 9) é possível traçar a reta que corresponde ao gráfico da função.



Observação: Normalmente os pontos utilizados para traçar o gráfico de uma função afim são (0, b) e (k, 0), sendo k a raiz da função.

Por exemplo, em $f(x) = 2x + 5$, obtemos facilmente os pontos $(0, 5)$ e $\left(-\frac{5}{2}, 0\right)$, e com estes fica fácil traçar o gráfico.



2.5) Função crescente ou decrescente

Como a taxa de variação da imagem de uma função afim é constante e determinada pelo coeficiente a, temos que:

- Se $a > 0$, a taxa de variação da imagem é constante e positiva, portanto a função é crescente em todo o domínio;
- Se $a = 0$, a taxa de variação da imagem é nula, e a função é constante;
- Se $a < 0$, a taxa de variação da imagem é constante e negativa, portanto a função é decrescente em todo o domínio.

Exemplos: $f(x) = 2x + 5$ é uma função crescente e $g(x) = -3x$ é uma função decrescente.

FUNÇÃO QUADRÁTICA

3.1) Definição

Uma função real do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, sendo $a \neq 0$, b e c números reais é chamada função quadrática.

Exemplo: $f(x) = x^2 + x - 2$

3.2) Raízes

Os valores de x que fazem com que $f(x) = 0$ são as raízes da função quadrática.

Exemplo: 1 e -2 são raízes de $f(x) = x^2 + x - 2$, pois $f(1) = 0$ e $f(-2) = 0$.

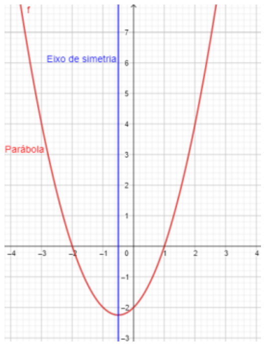
Observação: Para encontrar as raízes de $f(x) = ax^2 + bx + c$ é preciso resolver a equação polinomial de segundo grau $0 = ax^2 + bx + c$. Assim sendo, há três possibilidades quanto ao número de raízes da função quadrática, lembrando da fórmula resolutiva para equações do segundo grau (fórmula de Bhaskara):

- Duas raízes reais, caso $b^2 - 4ac > 0$;
- Uma raiz real, caso $b^2 - 4ac = 0$;
- Nenhuma raiz real (raízes complexas), caso $b^2 - 4ac < 0$.

3.3) Gráfico

O gráfico de uma função quadrática é uma curva denominada parábola, a qual apresenta um eixo de simetria paralelo ao eixo y. Para esboçar a parábola que corresponde a representação gráfica de uma função quadrática é preciso conhecer as raízes, o vértice e o ponto de intersecção com o eixo y.

Exemplo: Na figura a seguir temos a parábola que corresponde ao gráfico de $f(x) = x^2 + x - 2$

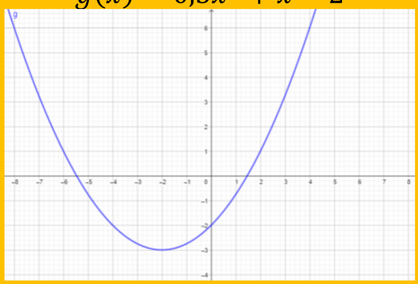


3.4) Concavidade

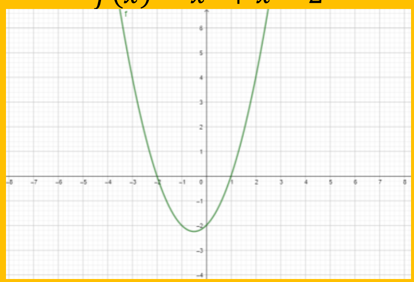
A concavidade de uma parábola que representa uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ pode ser voltada para cima (como na figura do exemplo anterior) ou pra baixo. Quando x tende para $+\infty$ ou $-\infty$, ax^2 tende para $+\infty$ se $a > 0$ ou para $-\infty$ se $a < 0$. Assim temos que, se $a > 0$, a parábola tem a concavidade voltada para cima e, se $a < 0$, a parábola tem a concavidade voltada para baixo.

O valor de $|a|$ interfere na abertura da parábola, pois quanto maior o valor de $|a|$, mais brusco é o crescimento/decrescimento da imagem da função, a cada vez que x varia uma unidade, portanto a parábola é mais fechada. Veja alguns exemplos:

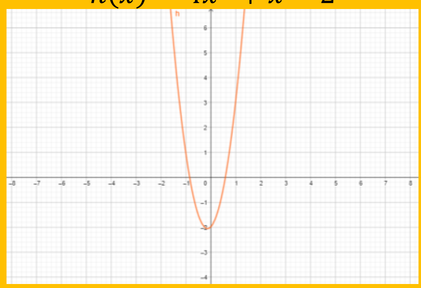
$g(x) = 0,5x^2 + x - 2$



$f(x) = x^2 + x - 2$



$h(x) = 4x^2 + x - 2$



3.5) Vértice

O vértice de uma parábola é o ponto em que a imagem é mínima, no caso de uma parábola com a concavidade para cima, ou máxima, no caso contrário.

Como a parábola é simétrica em relação ao eixo paralelo ao eixo y que passa pelo vértice, se k é uma imagem da parábola, existem x_1 e x_2 tais de $f(x_1) = f(x_2) = k$, e a abscissa do vértice, x_v, é a média destes:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow ax^2 + bx + c = k \Rightarrow ax^2 + bx + c - k = 0 \Rightarrow x = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4a(c-k)}}{2a} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4a(c-k)}}{2a} \\ x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4a(c-k)}}{2a} \end{array}$$

$$x_v = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4a(c-k)}}{2a} + \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4a(c-k)}}{2a}}{2} = \frac{-\frac{2b}{2a}}{2} = -\frac{b}{2a}$$

Para encontrar y_v basta obter a imagem de x_v:

$$y_v = f(x_v) = ax_v^2 + bx_v + c = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} = \frac{-b^2 + 4ac}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{\Delta}{4a}$$

Portanto, as coordenadas do vértice são $(x_v, y_v) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$

Exemplo: O vértice de $f(x) = x^2 + x - 2$ é o ponto $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{9}{4}\right)$.

3.6) Intervalos em que a função é crescente ou decrescente

Numa função quadrática com a concavidade para cima temos que a função é decrescente no intervalo do domínio $(-\infty, x_v)$ e, crescente em $(x_v, +\infty)$. Quando a concavidade é baixo a função é crescente em $(-\infty, x_v)$ e decrescente em $(x_v, +\infty)$.

FUNÇÕES POLINOMIAL, RACIONAL E MODULAR

4.1) Função polinomial

Uma função polinomial é toda aquela cuja lei de formação é dada por um polinômio. As funções afins e quadráticas são casos especiais de funções polinomiais

Exemplos: $f(x) = 3x - 5$ $\qquad$ $g(x) = -2x^2 + 3x$ $\qquad$ $h(x) = 2x^4 - x^3 + 5$

4.2) Comportamento da imagem da função polinomial

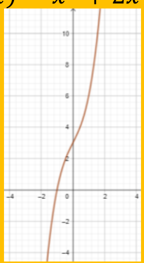
Quando x tende para $+\infty$ ou $-\infty$, o termo de maior grau do polinômio que corresponde à lei de formação da função determina o comportamento da imagem:

- se o expoente de x é par, em ambos os casos, teremos $f(x)$ tendendo para $+\infty$, se o coeficiente do termo de maior grau é positivo, ou, no caso contrário, para $-\infty$.
- se o expoente de x é ímpar, $f(x)$ tem comportamento diferenciado:
  - se coeficiente do termo de maior grau é positivo, $f(x)$ tende para $+\infty$ quando x tende para $+\infty$ e $f(x)$ tende para $-\infty$ quando x tende para $-\infty$;
  - se coeficiente do termo de maior grau é negativo, $f(x)$ tende para $-\infty$ quando x tende para $+\infty$ e $f(x)$ tende para $+\infty$ quando x tende para $-\infty$;

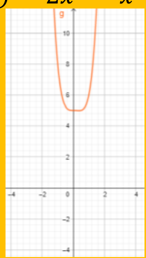
Assim, quando o termo de maior grau do polinômio da lei de formação da função tem grau ímpar, o gráfico intercepta o eixo x ao menos uma vez, o que não é garantido no caso contrário.

Exemplos:

$m(x) = x^3 + 2x + 3$



$g(x) = 2x^4 - x^3 + 5$



4.3) Raízes de uma função polinomial

As raízes da função polinomial $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ são as raízes da equação $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$. Pelo teorema fundamental da Álgebra, há n raízes para o polinômio, porém se considerarmos que a multiplicidade de uma raiz pode ser maior do que 1 e que algumas raízes podem ser complexas, pode-se afirmar que há, no máximo, n raízes reais distintas.

Quando uma raiz real tem multiplicidade par (o expoente do fator de primeiro grau, na forma fatorada do polinômio, indica a multiplicidade) o gráfico da função não cruza o eixo x (“bate e “volta”), o que não acontece no caso contrário.

Exemplos:

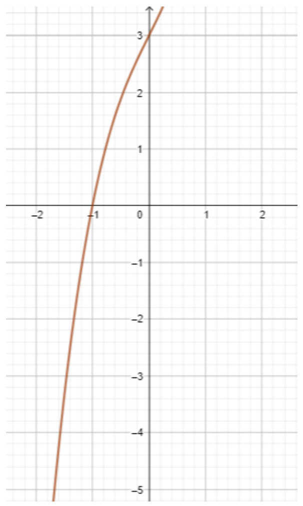
$$m(x) = x^3 + 2x + 3$$

-1 é raiz, pois $m(-1) = 0$

Escrevendo a forma fatorada de $m(x)$:

$$m(x) = (x+1)\cdot(x^2 - x + 3)$$

Note que a multiplicidade da raiz -1 é 1 (ímpar).



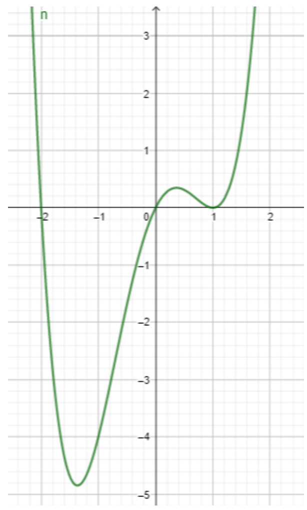
$$n(x) = x^4 - 3x^2 + 2x$$

$-2, 0$ e 1 são raízes pois $n(-2) = n(0) = n(1) = 0$

Escrevendo a forma fatorada de $n(x)$:

$$n(x) = (x-1)^2\cdot(x+2)\cdot x$$

Note que a multiplicidade da raiz 1 é 2 (par), e das raízes -2 e 0 é 1 (ímpar).



4.4) Função racional

Quando $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, onde $p(x)$ e $q(x)$ são funções polinomiais, temos uma função racional. As raízes da função $q(x)$ não pertence ao domínio da função racional, pois nesses casos teríamos denominador zero, o que não é possível.

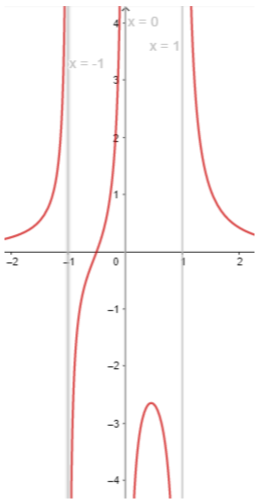
Exemplo: $f: \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x+1}{x^3 - x}$

4.5) Gráfico de uma função racional

Não há padrão para o gráfico de função racional, porém é importante observar que o gráfico não será composto por uma curva contínua, visto que possivelmente há restrições no domínio.

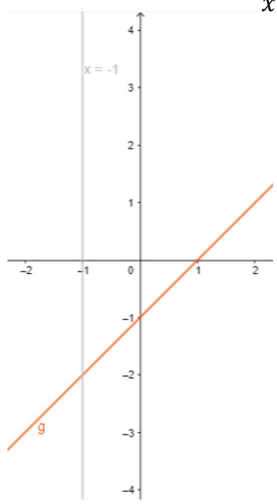
Exemplos:

$$f: \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x + \frac{1}{2}}{x^3 - x}$$



Note que há "quebras" no gráfico nos valores de x que são restrições do domínio.

$$g: \mathbb{R} - \{-1\} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$$



O gráfico parece não ter interrupções, mas na verdade há um ponto de descontinuidade, que não pode ser visualizado (devido às restrições do software de gráficos), quando $x = -1$.

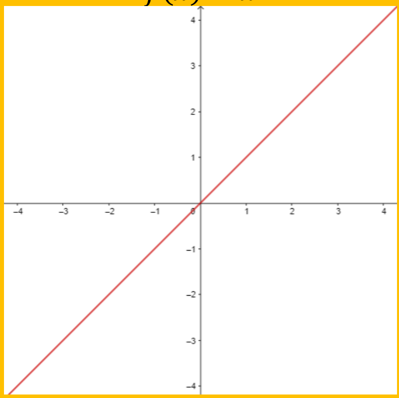
4.6) Função módulo

A função $f(x) = |x|$ é uma função definida por duas sentenças:

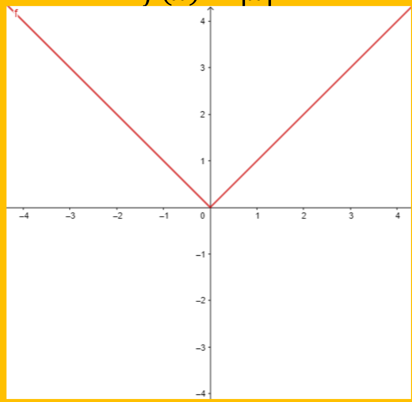
$$f(x) = \begin{cases} x, & se\ x \geq 0 \\ -x, & se\ x < 0 \end{cases}$$

Graficamente, em relação a função $f(x) = x$, há uma reflexão em relação ao eixo na parte em que $x < 0$:

$f(x) = x$



$f(x) = |x|$



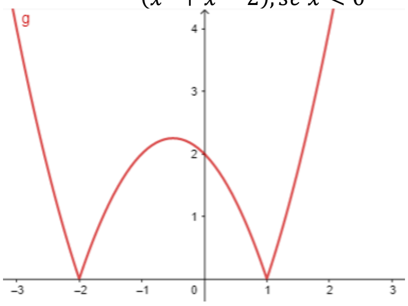
4.7) Funções com variável no módulo

De acordo com a definição da função módulo, é preciso escrever a função em duas sentenças.

Exemplos:

$$g(x) = |x^2 + x - 2|$$

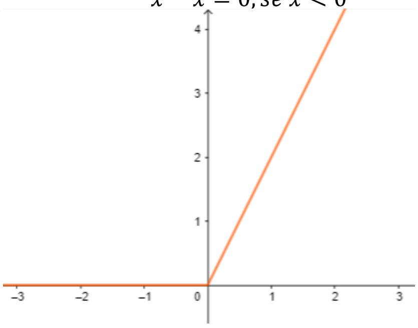
$$g(x) = \begin{cases} x^2 + x - 2, se\ x \geq 0 \\ -(x^2 + x - 2), se\ x < 0 \end{cases}$$



Nesse caso, note que basta refletir a parte do gráfico de $y = x^2 + x - 2$ com imagem negativa, em relação ao eixo x.

$$h(x) = x + |x|$$

$$h(x) = \begin{cases} x + x = 2x, se\ x \geq 0 \\ x - x = 0, se\ x < 0 \end{cases}$$



4.8) Função irracional

As funções que tem variável independente no radicando são denominadas funções irracionais. Caso o indíce for par teremos restrições no domínio. Por exemplo, na função $f(x) = \sqrt{x - 5}$ o domínio é o intervalo $[5, +\infty[$, pois como o índice é 2, o radicando não pode ser negativo.

FUNÇÃO EXPONENCIAL

5.1) Definição

A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = b^x$, com $b > 0$ e $b \neq 1$ é denominada função exponencial de base b.

Exemplos: $f(x) = 2^x$ $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ $h(x) = \pi^x$

5.2) Imagem

Pela definição de função exponencial, como a base b é positiva, temos que a imagem dessa função é o conjunto dos números reais positivos.

Exemplo: Em $f(x) = 2^x$, temos $f(-10) = \frac{1}{1024}$, $f(0) = 1$ e $f(10) = 1024$. Note que nenhum valor do domínio gera imagem negativa ou nula. De fato, $Im(f) = (0, +\infty)$.

5.3) Função crescente ou decrescente

Em $f(x) = b^x$, quando $b > 1$, temos que $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$, portanto a função é crescente em todo o domínio. Já quando $0 < b < 1$, temos que $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, assim a função é decrescente em todo o domínio.

Exemplos:

	$f(x) = 2^x$	$g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
$x = -10$	$f(-10) = \frac{1}{1024}$	$g(-10) = 1024$
$x = 0$	$f(0) = 1$	$g(0) = 1$
$x = 10$	$f(10) = 1024$	$g(10) = \frac{1}{1024}$

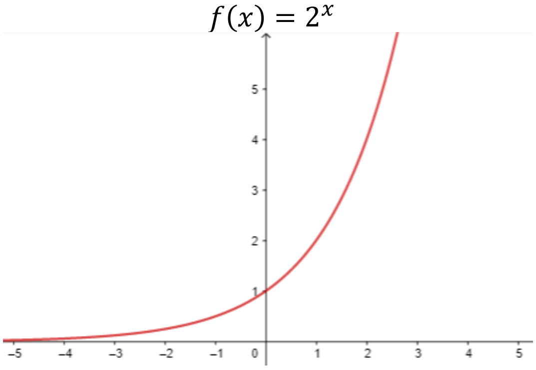
5.4) Gráfico

O ponto $(0, 1)$ sempre pertence ao gráfico $f(x) = b^x$, para qualquer valor de b que satisfaz a definição de função exponencial.

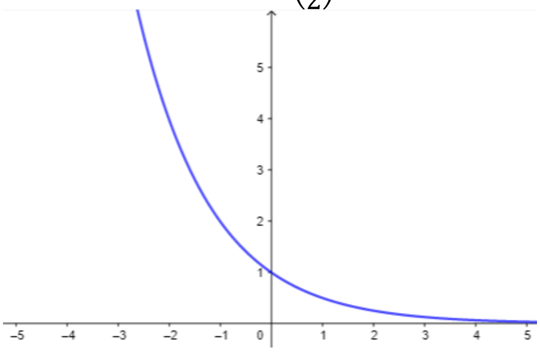
Quando $b > 1$, temos que $f(x)$ é cada vez maior a medida que x tende para $+\infty$ e, cada vez mais próxima de 0 quando x tende para $-\infty$. No caso em que $0 < b < 1$, ocorre o contrário.

Exemplos:

$f(x) = 2^x$

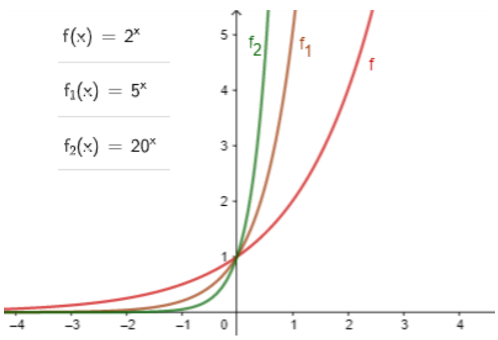


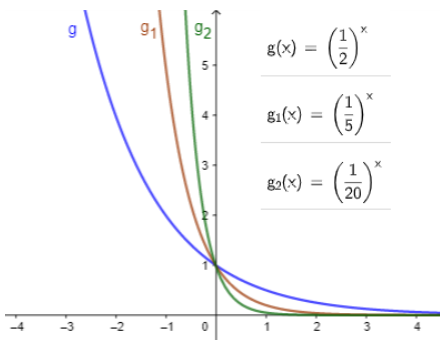
$g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$



Observação: Quando $b > 1$, quanto maior o valor de b, mais "próxima do eixo y" fica o gráfico. Já quando $0 < b < 1$, o mesmo ocorre quanto menor é o valor de b.

Exemplos:



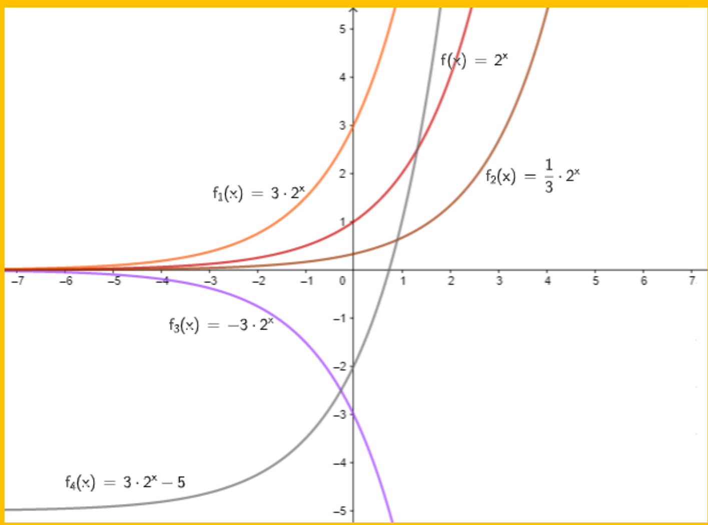


5.5) Gráfico de uma função do tipo $\boldsymbol{f(x) = k \cdot b^x + c}$

A multiplicação de b^x por k provoca um alongamento (quando $|k| > 1$) ou uma compressão (quando $0 < |k| < 1$) no gráfico de $y = b^x$. Quando $k < 0$ ainda ocorre uma reflexão do gráfico de $y = b^x$ em relação ao eixo x.

A soma da constante c provoca um deslocamento vertical de $|c|$ unidades para cima ($c > 0$) ou para baixo ($c < 0$).

Exemplos:



5.6) Função exponencial de base natural

A função $f(x) = e^x$ é amplamente utilizada em aplicações, onde a base e, denominada base natural, é o número de Euler (um número irracional, $e \approx 2{,}71828$, tal que $e = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$). Nas calculadoras científicas há uma tecla que permite calcular diretamente a imagem dessa função para qualquer valor do domínio.

5.7) Equações exponenciais

Equações com incógnita no expoente. Algumas equações exponenciais podem ser resolvidas montando-se uma igualdade de potências de mesma base, outras precisam de artifícios como a utilização de logaritmos.

Exemplos:

$$2^x = 0{,}25 \Rightarrow 2^x = \frac{1}{4} \Rightarrow 2^x = 2^{-2} \Rightarrow x = -2$$

$$2^x = 7$$

(Aqui é necessário utilizar logaritmos)

5.8) Inequações exponenciais

Para resolver esse tipo de inequação é preciso observar o crescimento ou decrescimento da função exponencial.

$$2^x > 0{,}25$$
$$\Rightarrow 2^x > 2^{-2}$$

Como a base é maior do que 1, estamos comprando imagens de uma função crescente, e a desigualdade se mantém para os expoentes.

$$2^x > 2^{-2} \Rightarrow x > -2$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x \geq \left(\frac{1}{27}\right)$$
$$\Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^x \geq \left(\frac{1}{3}\right)^3$$

Como a base está entre 0 e 1, estamos comparando imagens de uma função decrescente, e a desigualdade se inverte para os expoentes.

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x \geq \left(\frac{1}{3}\right)^3 \Rightarrow x \leq 3$$

Função Logarítmica

6.01) Definição de logaritmo

O logaritmo do número a na base b é o expoente x ao qual se deve elevar b para obter a, ou seja:

$$\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a$$

Condições:

- A base b precisa ser positiva e diferente de 1.
- O número a precisa ser positivo.

Exemplo: $\log_2 32 = 5$, pois $2^5 = 32$.

6.02) Logaritmos decimais

São os logaritmos de base 10. Normalmente a base 10 fica implícita na nomenclatura. Nas calculadoras científicas há uma tecla para o cálculo desse tipo de logaritmo.

Exemplo: $\log 1000 = \log_{10} 1000 = 3$

6.03) Logaritmos naturais

São os logaritmos de base e. A nomenclatura utilizada é ln ao invés de $\log_e$. Nas calculadoras científicas há uma tecla para o cálculo desse tipo de logaritmo

Exemplo: $\ln 2 = \log_e 2 \approx 0{,}693147$

6.04) Propriedades dos logaritmos

Sejam $\log_b a = x_1$, $\log_b c = x_2$, $\log_b ac = x_3$, $\log_b \left(\frac{a}{c}\right) = x_4$ e $\log_b a^n = x_5$. Aplicando a definição de logaritmo temos: (I) $b^{x_1} = a$, (II) $b^{x_2} = c$, (III) $b^{x_3} = ac$, (IV) $b^{x_4} = \frac{a}{c}$ e (V) $b^{x_5} = a^n$.

Substituição	Desenvolvimento	**Propriedade**
(I) e (II) em (III)	$b^{x_3} = ac \Rightarrow b^{x_3} = b^{x_1}b^{x_2} \Rightarrow b^{x_3} = b^{x_1+x_2} \Rightarrow x_3 = x_1 + x_2$	$\log_b ac = \log_b a + \log_b c$
(I) e (II) em (IV)	$b^{x_4} = \frac{a}{c} \Rightarrow b^{x_4} = \frac{b^{x_1}}{b^{x_2}} \Rightarrow b^{x_4} = b^{x_1 - x_2} \Rightarrow x_4 = x_1 - x_2$	$\log_b \left(\frac{a}{c}\right) = \log_b a - \log_b c$
(I) e (II) em (V)	$b^{x_5} = a^n \Rightarrow b^{x_5} = (b^{x_1})^n \Rightarrow b^{x_5} = b^{n \cdot x_1} \Rightarrow x_5 = n \cdot x_1$	$\log_b a^n = n \cdot \log_b a$
$\log_b a = x_1$ em (I)	$b^{x_1} = a$	$b^{\log_b a} = a$

Exemplos:

$\log_2 32 = \log_2(2 \cdot 16) = \log_2 2 + \log_2 16$	$\log_2 32 = \log_2 \left(\frac{64}{2}\right) = \log_2 64 - \log_2 2$
$\log_2 32 = \log_2 2^5 = 5 \cdot \log_2 2$	$2^{\log_2 32} = 32$

6.05) Mudança de base

Quando queremos calcular logaritmos que não sejam de base decimal nem natural é preciso fazer uma mudança de base para que o cálculo seja possível via calculadora.

$$\log_b a = x \Rightarrow b^x = a \Rightarrow \log_c b^x = \log_c a \Rightarrow x.\log_c b = \log_c a \Rightarrow x = \frac{\log_c a}{\log_c b} \Rightarrow \boldsymbol{\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}}$$

Exemplo: $\log_2 32 = \frac{\log 32}{\log 2}$

6.06) Definição de função logarítmica

A função $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}, f(x) = \log_b x$, com $b > 0$ e $b \neq 1$ é denominada função logarítmica de base b.

Note que a função logarítmica é a inversa da função exponencial, e vice-versa, pois:

$$\begin{matrix} f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}, f(x) = \log_b x \\ f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*, f^{-1}(x) = b^x \end{matrix} \Rightarrow f^{-1}(f(x)) = b^{\log_b x} = x$$

Exemplos: $f(x) = \log_2 x$ $\qquad g(x) = \ln x$ $\qquad h(x) = \log_{0,5} x$

6.07) Domínio

Como a função logarítmica é a inversa da função exponencial, seu domínio corresponde ao conjunto imagem dessa função, ou seja, conjunto dos números reais positivos.

Exemplo: Note que em $f(x) = \log_2 x$, não está definido $f(-5)$ (não existe expoente que elevado à base 2 gere um número negativo), pois $-5 \notin D(f)$.

6.08) Função crescente ou decrescente

Em $f(x) = \log_b(x)$, quando $b > 1$, temos que $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$, portanto a função é crescente em todo o domínio. Já quando $0 < b < 1$, temos que $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, assim a função é decrescente em todo o domínio.

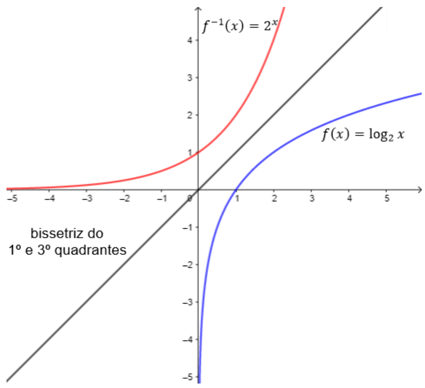
Exemplos:

	$f(x) = \log_2 x$	$g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$
$x = 0,1$	$f(0,1) \approx -3,32$	$g(0,1) \approx 3,32$
$x = 1$	$f(1) = 0$	$g(1) = 1$
$x = 10$	$f(10) \approx 3,32$	$g(10) \approx 3,32$

6.09) Gráfico

O ponto $(1,0)$ sempre pertence ao gráfico $f(x) = \log_b x$, para qualquer valor de b que satisfaz a definição de função logarítmica. Por ser a inversa da função exponencial, o gráfico de

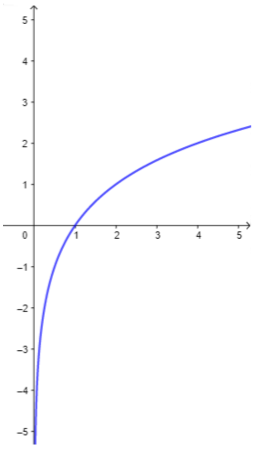
$f(x) = \log_b x$ tem simetria em relação à bissetriz do 1º e 3º quadrantes com $f^{-1}(x) = b^x$, conforme pode ser percebido no exemplo a seguir:



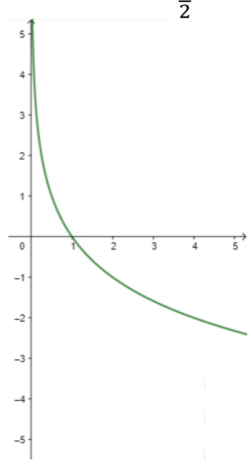
Quando $b > 1$, temos que $f(x) = \log_b x$ é cada vez maior a medida que x tende para $+\infty$ e, cada vez menor quando x tende para $-\infty$. No caso em que $0 < b < 1$, ocorre o contrário.

Exemplos:

$f(x) = \log_2 x$

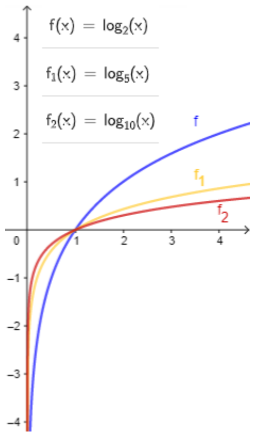


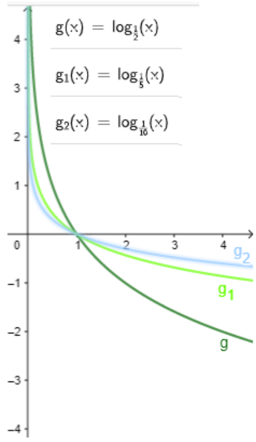
$g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$



Observação: Quando $b > 1$, quanto maior o valor de b, mais “próxima do eixo x” fica o gráfico. Já quando $0 < b < 1$, o mesmo ocorre quanto menor é o valor de b.

Exemplos:





6.10) Gráfico de uma função do tipo $f(x) = k \cdot \log_b(x - a) + c$

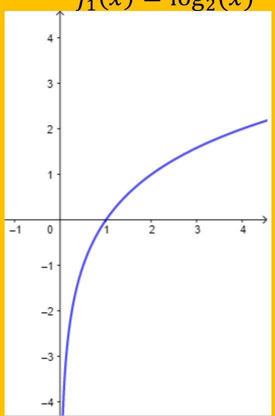
No gráfico de $y = \log_b(x - a)$ ocorre um deslocamento horizontal de $|a|$ unidades para a direita (quando $a > 0$) ou para a esquerda (quando $a < 0$). Tal deslocamento prova mudança de domínio em relação à função $y = \log_b x$.

A multiplicação de $y = \log_b(x - a)$ por k provoca um alongamento (quando $|k| > 1$) ou uma compressão (quando $0 < |k| < 1$) no gráfico. Quando $k < 0$ ainda ocorre uma reflexão do gráfico em relação ao eixo x.

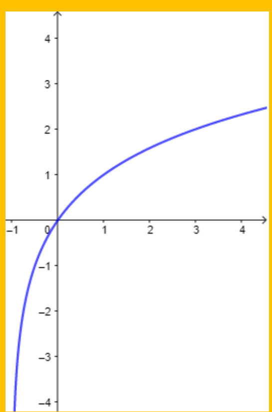
A soma da constante c provoca um deslocamento vertical de $|c|$ unidades para cima ($c > 0$) ou para baixo ($c < 0$).

Exemplos:

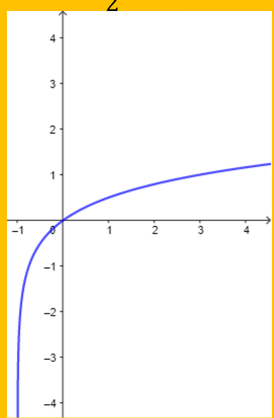
$f_1(x) = \log_2(x)$



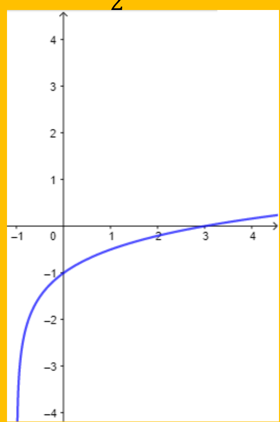
$f_2(x) = \log_2(x + 1)$



$f_3(x) = \frac{1}{2} \cdot \log_2(x + 1)$



$f_4(x) = \frac{1}{2} \cdot \log_2(x + 1) - 1$



6.11) Equações logarítmicas

Equações que apresentam a incógnita envolvida com logaritmos. Normalmente a resolução passa pela utilização da definição de logaritmo.

Exemplos:

$$\log(x-1) = -2$$
$$\Rightarrow 10^{-2} = x - 1 \Rightarrow x = 1{,}01$$

$$log_{m-1} 9 = 2$$
$$\Rightarrow (m-1)^2 = 3 \Rightarrow \begin{matrix} m = 4 \\ m = -2 \end{matrix}$$

Da definição de logaritmo sabemos que base precisa ser positiva e diferente de 1, o que não ocorre quando $m = -2$, pois a base seria -3. Assim a única solução dessa equação é $m = 4$.

6.12) Inequações logarítmicas

Para resolver esse tipo de inequação é preciso observar o crescimento ou decrescimento da função logarítmica.

$$\log_2(x-3) > -2$$

Como a base é maior do que 1, estamos trabalhando com uma função crescente, portanto a desigualdade se mantém ao utilizar a definição de logaritmo:

$$x - 3 > 2^{-2} \Rightarrow x > 2^{-2} + 3 \Rightarrow x > 3{,}25$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(x-3) \geq \log_{\frac{1}{2}} 7$$

Como a base está entre 0 e 1, estamos comparando imagens de uma função decrescente, e a desigualdade se inverte para os logaritmandos.

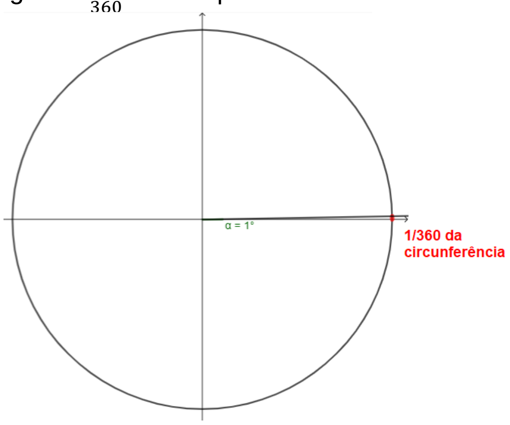
$$x - 3 \leq 7 \Rightarrow x \leq 10$$

Da definição de logaritmo sabemos que o logaritmando não pode ser negativo, o que ocorre quando $x < 3$, assim o conjunto solução dessa inequação é $3 < x \leq 7$.

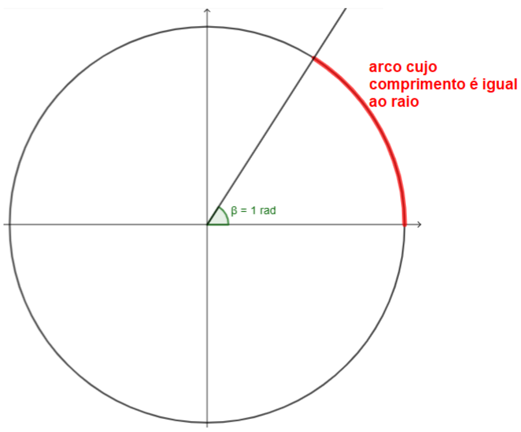
<u>TRIGONOMETRIA, FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS E FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS</u>

7.01) Unidades de medida de ângulo

Grau: Um grau corresponde ao ângulo subtendido por um arco de comprimento igual a $\frac{1}{360}$ do comprimento da circunferência.



Radiano: Um radiano corresponde ao ângulo subtendido por um arco de comprimento igual ao raio do círculo.



O ângulo central de uma circunferência mede entre $0°$ e $360°$ ou $1\ rad$ e $2\pi\ rad$. Por convenção, quando nos referenciamos a um ângulo sem mencionar a unidade, fica implícito que ele está em radianos. Nos problemas envolvendo funções trigonométricas é padrão que o ângulo seja dado em radianos.

Relação de conversão (proporção direta): $\mathbf{180° = \pi\ rad}$

7.02) Comprimento de um arco de circunferência

Em qualquer circunferência, a razão entre o comprimento e o diâmetro é dada pela constante π. Dessa forma, sabendo o raio é possível obter o comprimento da circunferência fazendo $2\pi r$.

Em um arco de circunferência, há uma relação de proporção direta entre o ângulo central e o comprimento do arco.

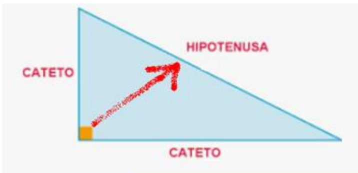
Exemplos:

- Um arco cujo ângulo central mede 90° tem comprimento $\frac{90}{360} \cdot 2\pi r = \frac{1}{4} \cdot 2\pi r$;
- Um arco cujo ângulo central mede $\frac{3\pi}{2}$ rad tem comprimento $\frac{\frac{3\pi}{2}}{2\pi} \cdot 2\pi r = \frac{3}{4} \cdot 2\pi r$.

7.03) Relações nos triângulos retângulos

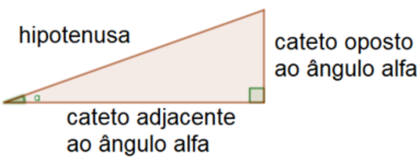
Nos triângulos retângulos há um ângulo reto (90º) e dois ângulos agudos (menores que 90º, e no caso desse tipo de triângulo a soma desses dois ângulos é 90°).

O lado oposto ao ângulo reto chama-se hipotenusa e os outros são denominados catetos. Nos triângulos retângulos vale o Teorema de Pitágoras:



Teorema de Pitágoras: $(hipotenusa)^2 = (cat_1)^2 + (cat_2)^2$

Considerando-se um dos ângulos agudos, podemos diferenciar os catetos: cateto adjacente é aquele vizinho ao ângulo e outro é o cateto oposto. Dessa forma, são definidas as razões trigonométricas no triângulo retângulo:



$$sen\ \alpha = \frac{cateto\ oposto\ a\ \alpha}{hipotenusa}$$

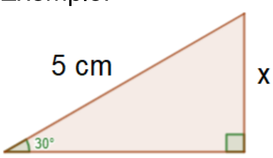
$$cos\ \alpha = \frac{cateto\ adjacente\ a\ \alpha}{hipotenusa}$$

$$tg\ \alpha = \frac{cateto\ oposto\ a\ \alpha}{cateto\ adjacente\ a\ \alpha}$$

Os valores de seno, cosseno e tangente dependem do ângulo e podem ser obtidos via calculadora científica (https://drive.google.com/file/d/1Ku2FDHRVIcVFhokOwedAd7IfbngLfWGz/view) ou tabela (https://waldexifba.wordpress.com/material-de-apoio/ensino-medio/trigonometria/seno-cosseno-e-tangente-de-angulos/). As razões trigonométricas para os ângulos de 30º, 45º e 60° (ângulos notáveis) tem valores bastante conhecidos, obtidos aplicando tais razões na metade de um quadrado e de um triângulo equilátero.

α	$30°$	$45°$	$60°$
$sen\ \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$cos\ \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$tg\ \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Exemplo:



Nesse triângulo retângulo, a hipotenusa mede 5 cm e queremos descobrir a medida x do cateto oposto ao ângulo de 30º. A razão trigonométrica que relaciona o cateto oposto e a hipotenusa é o seno, assim:

$$sen\ 30° = \frac{cateto\ oposto\ ao\ 30°}{hipotenusa} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{x}{5} \Rightarrow x = 2{,}5\ cm$$

Há duas formas de descobrimos a medida do cateto adjacente ao ângulo de 30º (vamos chamá-lo de y):

I) Aplicando uma Razão Trigonométrica:

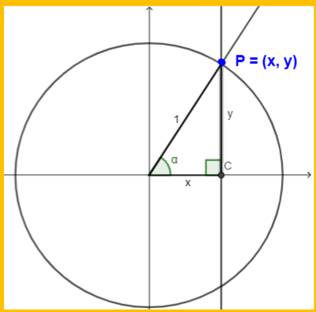
$$cos\ 30° = \frac{cateto\ adjacente\ ao\ 30°}{hipotenusa} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{y}{5} \Rightarrow y = \frac{5\sqrt{3}}{2}\ cm \approx 4{,}33\ cm$$

II) Aplicando Teorema de Pitágoras:

$$5^2 = 2{,}5^2 + y^{2\Rightarrow} y = \sqrt{5^2 - 2{,}5^2} \Rightarrow y = \sqrt{18{,}75}\ cm \approx 4{,}33\ cm$$

7.04) Ciclo trigonométrico

O ciclo trigonométrico é uma circunferência de raio 1, cujo centro coincide com o centro do sistema de coordenadas cartesianas. Observando a figura abaixo, formamos um triângulo retângulo cuja a hipotenusa é 1 e os catetos adjacente e oposto ao ângulo α são x e y. Assim temos:



$$\cos\alpha = \frac{x}{1} \Rightarrow x = cos\ \alpha$$
$$sen\ \alpha = \frac{y}{1} \Rightarrow y = sen\ \alpha$$
$$tg\ \alpha = \frac{y}{x} \Rightarrow tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha}$$

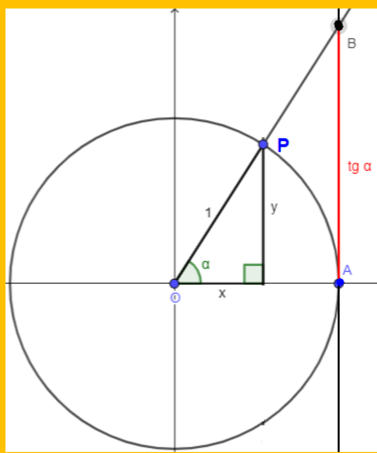
Ou seja, Sendo A = (1, 0), O = (0, 0) e P = (x, y) (ponto do ciclo trigonométrico), temos que:

- $\cos\alpha$ é o segmento que corresponde a projeção do segmento OP sob o eixo x, cujo comprimento está entre 0 e 1;
- $\operatorname{sen}\alpha$ é o segmento que corresponde a projeção do segmento OP sob o eixo y, cujo comprimento está entre 0 e 1.

Considerando o "sinal dos segmentos", temos:

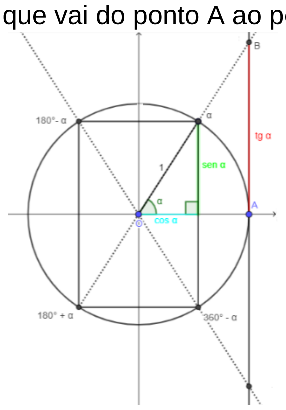
Quadrante	α	Sinal de x	Sinal de y	Sinal de $\cos\alpha$	Sinal de $\operatorname{sen}\alpha$	Sinal de $\operatorname{tg}\alpha$
1º	Entre 0º e 90º	+	+	+	+	+
2º	Entre 90º e 180º	-	+	-	+	-
3º	Entre 180º e 270º	-	-	-	-	+
4º	Entre 270º e 360°	+	-	+	-	-

Observação: Por semelhança de triângulos, podemos comprovar que, na figura ao lado, a medida do segmento AB equivale a razão $\frac{y}{x}$, e por conseguinte em $tg\ \alpha$. Isso vale em qualquer ponto P do ciclo trigonométrico: o comprimento (com sinal) do segmento da reta paralela ao eixo y que passa pelo ponto A (eixo das tangentes) com extremos em A e B (intersecção dessa reta com a reta pelos pontos O e P) corresponde a $tg\ \alpha$. Note que tal segmento não tem limitação de comprimento, por exemplo, no 1º quadrante, quanto mais próximo de 90º, maior o valor de $tg\ \alpha$.



7.05) Relação de ângulos entre 90º e 360º com ângulos do 1º quadrante

Sabendo os valores de seno, cosseno e tangente para ângulos entre 0º e 90º, obtemos todos os valores para as razões trigonométricas no ciclo. Por simplicidade, na figura abaixo, os pontos estão nomeados com a medida do ângulo central do arco que vai do ponto A ao ponto em questão.

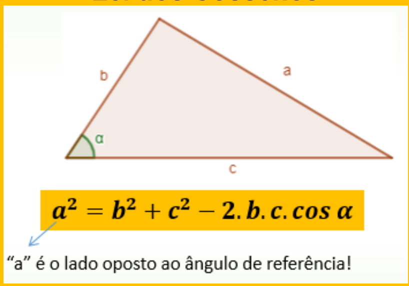


Quadrante	Relação com α	Seno	Cosseno	Tangente
1º	α	$sen\ \alpha$	$cos\ \alpha$	$tg\ \alpha$
2º	$180° - \alpha$	$sen(180° - \alpha) = sen\ \alpha$	$cos(180° - \alpha) = -cos\ \alpha$	$tg(180° - \alpha) = -tg\ \alpha$
3º	$180° + \alpha$	$sen(180° + \alpha) = -sen\ \alpha$	$cos(180° + \alpha) = -cos\ \alpha$	$tg(180° + \alpha) = tg\ \alpha$
4º	$360° - \alpha$	$sen(360° - \alpha) = sen\ \alpha$	$cos(360° - \alpha) = cos\ \alpha$	$tg(360° - \alpha) = -tg\ \alpha$

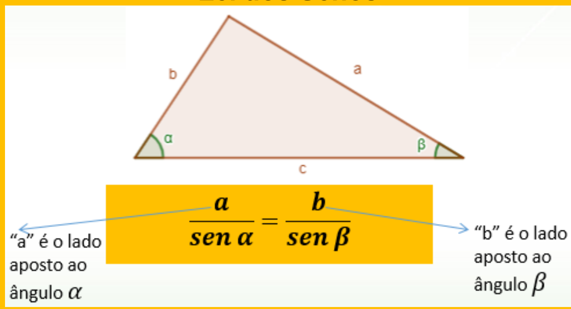
7.06) Lei dos Senos e Lei dos Cossenos

São relações que valem para qualquer tipo de triângulo, demostradas particionando um triângulo em dois triângulos retângulos.

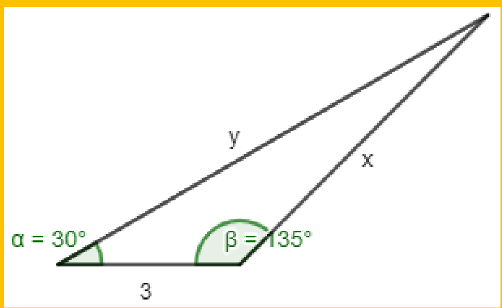
Lei dos Cossenos



Lei dos Senos



Exemplo:



O ângulo oposto ao lado que mede 3 é $180° - 30° - 135° = 15°$, assim aplicando a Lei do Senos, temos:

$$\frac{x}{sen\ 30°} = \frac{3}{sen\ 15°} \Rightarrow x = \frac{3 \cdot sen\ 30°}{sen\ 15°} \approx 5{,}8$$

A medida y pode ser calculada de duas maneiras distintas:

I) Pela Lei dos Senos:

$$\frac{y}{sen\ 135°} = \frac{3}{sen\ 15°} \Rightarrow y = \frac{3 \cdot sen\ 135°}{sen\ 15°} \approx 8{,}2$$

II) Pela Lei dos Cossenos:

$$y^2 \approx 3^2 + 5{,}8^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5{,}8.\cos 135°$$

$$\Rightarrow y \approx \sqrt{3^2 + 5{,}8^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5{,}8.\cos 135°} \approx 8{,}2$$

7.07) Identidades trigonométricas

Do ciclo trigonométrico temos a relação trigonométrica fundamental:

$$sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$$

A partir da relação trigonométrica fundamental obtemos outras duas identidades:

$$1 + tg^2\alpha = sec^2\alpha$$

$$1 + cotg^2\alpha = cossec^2\alpha$$

Há outras identidades podem ser demonstradas com auxílio de triângulos:

$$sen(\alpha + \beta) = sen\ \alpha \cdot \cos\beta + sen\ \beta\ \cdot \cos\alpha$$

$$sen(\alpha - \beta) = sen\ \alpha \cdot \cos\beta - sen\ \beta\ \cdot \cos\alpha$$

$$tg(\alpha + \beta) = \frac{tg\ \alpha + \mathrm{tg}\,\beta}{1 - \mathrm{tg}\,\alpha \cdot tg\ \beta}$$

$$cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - sen\ \beta\ \cdot \mathrm{sen}\,\alpha$$

$$cos(\alpha - \beta) = cos\ \alpha \cdot \cos\beta + sen\ \beta\ \cdot \mathrm{sen}\,\alpha$$

$$tg(\alpha - \beta) = \frac{tg\ \alpha - \mathrm{tg}\,\beta}{1 + \mathrm{tg}\,\alpha \cdot tg\ \beta}$$

$$sen(2\alpha) = 2 \cdot sen\ \alpha \cdot \cos\alpha$$

$$cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \mathrm{sen}^2\alpha$$

7.08) Arcos côngruos

Há uma infinidade que arcos com os mesmos extremos inicial e final no ciclo trigonométrico, porém com comprimento diferentes, diferenciando-se em função do sentido e/ou no número de voltas completas no ciclo.

Exemplos:

- Um arco de medida 750° corresponde ao um arco de duas voltas completas e mais 30° ($2 \cdot 360° + 30° = 750°$), a partir do ponto de origem de todos os arcos.

Um arco de medida $-30°$ corresponde a um arco de $30°$ no sentido negativo do ciclo trigonométrico (sentido horário), que é côngruo ao arco de $330°$ no sentido anti-horário ($360° - 30° = 330°$).

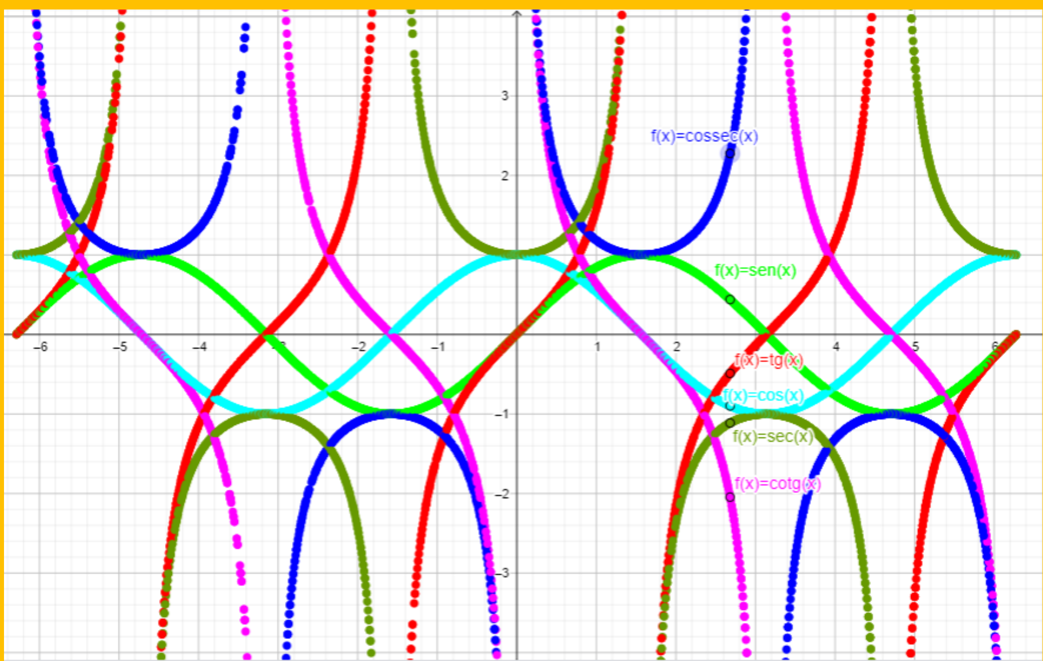
7.09) Funções trigonométricas

Sendo x um ângulo em radianos, temos as seguintes funções trigonométricas:

Função	Domínio	Imagem	Período
$f(x) = sen(x)$	$\mathbb{R}$	$[-1, 1]$	2π
$f(x) = cos(x)$	$\mathbb{R}$	$[-1, 1]$	2π
$f(x) = tg(x)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}$	π
$f(x) = cossec(x) = \frac{1}{sen(x)}$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$	2π
$f(x) = sec(x) = \frac{1}{cos(x)}$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$	2π
$f(x) = cotg(x) = \frac{1}{tg(x)}$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}$	π

7.10) Gráficos

Observe o gráfico das seis funções trigonométricas no intervalo $[-2\pi, 2\pi]$:



No link https://www.geogebra.org/classic/j3v8a5ej você consegue visualizar a relação entre os comprimentos dos segmentos no ciclo trigonométrico e os gráficos das funções trigonométricas clicando em no comando deslizante X.

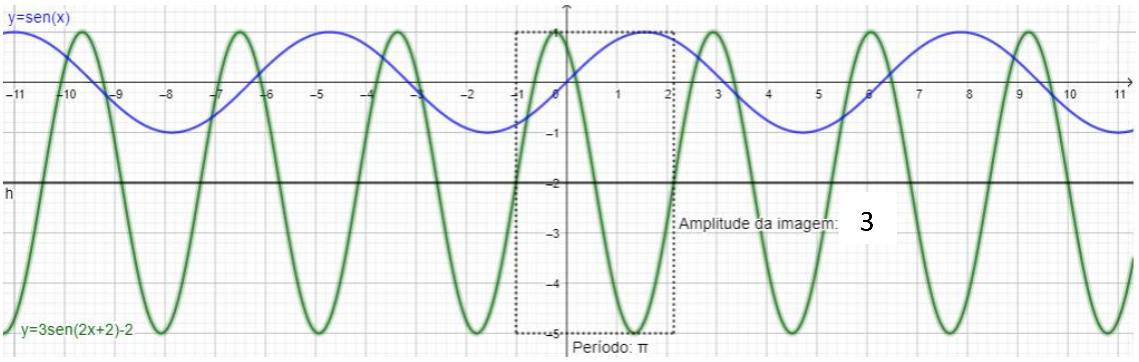
7.11) Gráfico de $y = a \cdot sen(bx + c) + d$

Coeficiente	Mudança em relação à $y = sen\ (x)$
a	A amplitude da imagem (metade da diferença entre as imagens máxima e mínima) é multiplicada por a.
b	O período é dividido por b, portanto equivale a $\frac{2\pi}{b}$.
c	Ocorre um deslocamento horizontal de $-\frac{c}{b}$ unidades.
d	Ocorre um deslocamento vertical de d unidades.

Exemplo:

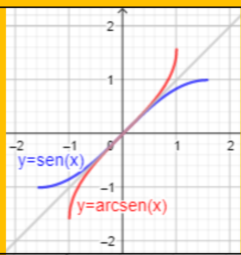
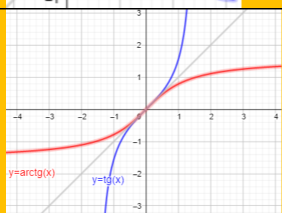
$$y = 3sen(2x + 2) - 2$$

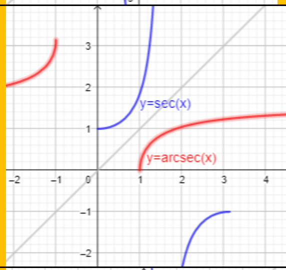
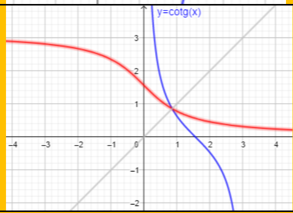
A amplitude da imagem é 3 e o período é $\frac{2\pi}{2} = \pi$. Ocorre um deslocamento horizontal de -1 (uma unidade à esquerda), portanto o primeiro ciclo do período é $[-1, 1 + \pi]$, e um deslocamento vertical de -2 (duas unidades para baixo), portanto a imagem é $[-5,\ 1]$.



Observação: Podemos fazer transformações análogas com base nas demais funções trigonométricas.

7.12) Funções trigonométricas inversas

Função	Domínio e Contradomínio para que seja uma bijeção	Função Inversa	Domínio e Contradomínio da função inversa	Gráfico das duas funções
$y = sen\ x$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$	$y = arcsen\ x$	$[-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$	
$y = cos\ x$	$[0, \pi] \to [-1, 1]$	$y = arccos\ x$	$[-1, 1] \to [0, \pi]$	
$y = tg\ x$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$	$y = arctg\ x$	$\mathbb{R} \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$	

$y = cossec\ x$	$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]-\{0\}\to(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$	$y = arccossec\ x$	$(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$ $\to\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]-\{0\}$	
$y = sec\ x$	$[0,\pi]-\left\{\frac{\pi}{2}\right\}\to(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$	$y = arcsec\ x$	$(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$ $\to[0,\pi]-\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$	
$y = cotg\ x$	$[0,\pi]\to\mathbb{R}$	$y = arccotg\ x$	$\mathbb{R}\to[0,\pi]$	

7.13) Equações trigonométricas

Quando o universo para a solução encontrada é $\mathbb{R}$, é preciso observar que há infinitos arcos que tem a mesma imagem, diferindo apenas pelo número de voltas completas. Também é preciso observar, que na mesma volta no ciclo trigonométrico, há mais de um arco com o mesmo valor para qualquer uma das razões trigonométricas.

Exemplo:

$$sen(2x+1)=\frac{1}{2}$$

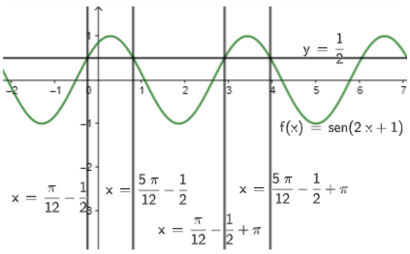
Note que a função $f(x)=arcsen(x)$ retorna apenas um arco do 1º ou 4º quadrante como imagem. No caso dessa equação, como queremos saber o arco cujo seno é positivo, há o arco $arcsen\left(\frac{1}{2}\right)$ mas também o arco do 2º quadrante $\pi - arcsen\left(\frac{1}{2}\right)$ que resultam em $\frac{1}{2}$. Também precisamos considerar que todos os arcos obtidos somando-se $2k\pi$, com $k\in\mathbb{Z}$, são côngruos a esses.

$$arcsen\left(\frac{1}{2}\right)+2k\pi=2x+1 \qquad \text{ou} \qquad \pi - arcsen\left(\frac{1}{2}\right)+2k\pi=2x+1$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{6}+2k\pi-1=2x \qquad\qquad \Rightarrow \pi-\frac{\pi}{6}+2k\pi-1=2x$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{x=\frac{\pi}{12}-\frac{1}{2}+k\pi} \qquad\qquad \Rightarrow \boldsymbol{x=\frac{5\pi}{12}-\frac{1}{2}+k\pi}$$

Na figura abaixo, podemos comprovar a veracidade das soluções obtidas para k = 0 e k =1:

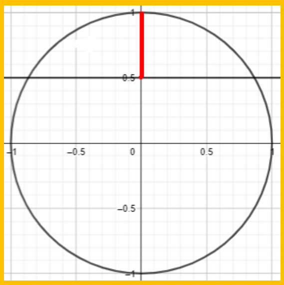


7.14) Inequações trigonométricas

Além das mesmas observações que para as equações trigonométricas, nas inequações é importante visualizar o ciclo trigonométrico.

Exemplo:

$$sen(2x+1) > \frac{1}{2}$$



Olhando para o eixo dos senos (eixo y) percebemos que o seno é maior do que $\frac{1}{2}$ para arcos entre $arcsen\left(\frac{1}{2}\right)$ e $\pi - arcsen\left(\frac{1}{2}\right)$ ou entre côngruos a esses na mesma volta, assim:

$$arcsen\left(\frac{1}{2}\right) + 2k\pi < 2x + 1 < \pi - arcsen\left(\frac{1}{2}\right) + 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{6} + 2k\pi < 2x + 1 < \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{6} + 2k\pi - 1 < 2x < \frac{5\pi}{6} + 2k\pi - 1$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{\pi}{6} + 2k\pi - 1}{2} < x < \frac{\frac{5\pi}{6} + 2k\pi - 1}{2}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\frac{\pi}{12} - \frac{1}{2} + k\pi < x < \frac{5\pi}{12} - \frac{1}{2} + k\pi}$$