

## **CONJUNTOS: sobre a história de sua evolução**

*Robério Valente Santos  
Marcos Fabrício Ferreira Pereira  
Miguel Chaquiam*

### **Introdução**

O processo de ensino-aprendizagem da matemática enfrenta diversos obstáculos, dentre eles, a capacitação docente inadequada, o conceito pré-formado de que a matemática é difícil, o uso excessivo da metodologia tradicional frente ao mundo tecnológico, o desinteresse de alunos em querer aprender e de professores em ensinar matemática, a falta de infraestrutura de suporte, etc. (ARAÚJO ET AL., 2014, p. 1) No entanto, devemos buscar novos caminhos na tentativa de superar ou amenizar esses obstáculos com por meio da apresentação de uma matemática ativa, interativa, dinâmica e prazerosa.

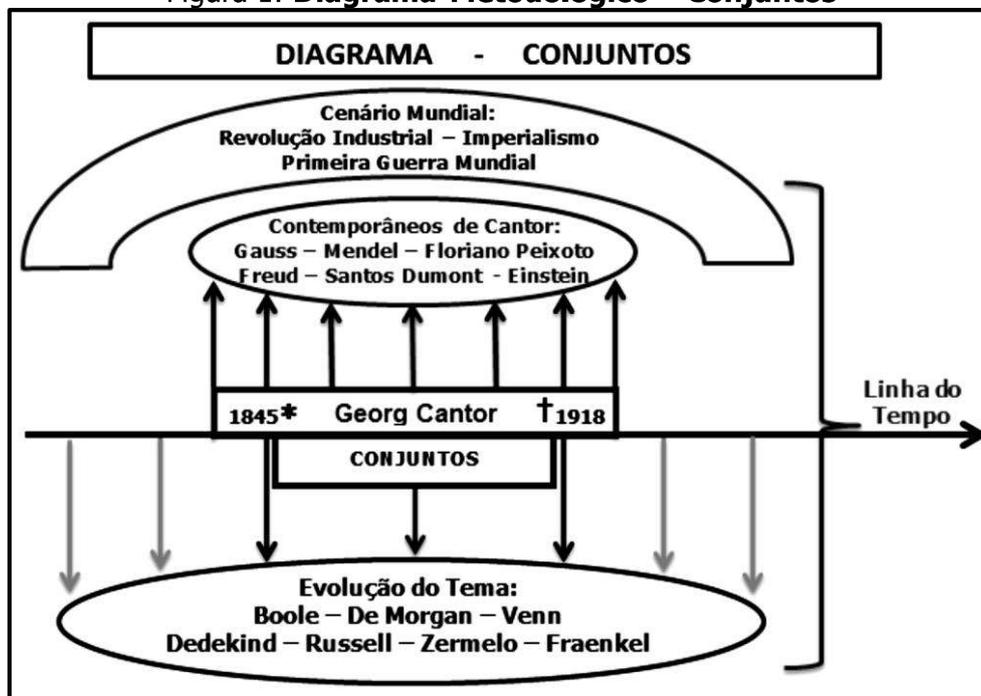
O uso de novas tendências metodológicas para o ensino de matemática, como: o ensino por atividades, a história da matemática, a resolução de problemas, os jogos educativos, a modelagem matemática, as tecnologias de informação e comunicação e a etnomatemática são possibilidades que podem contribuir para superar os obstáculos mencionados anteriormente. Essas alternativas nos permitem enveredar por caminhos que tornam o ensino de matemática menos mecânico e com pouca ênfase em regras e fórmulas, mas isso não significa que conceitos e algoritmos sejam descartados, contudo espera-se que a referida disciplina leve o aluno a pensar e que este saia da condição de passividade.

É preciso substituir os processos de ensino que priorizam a exposição, que levam a um receber passivo do conteúdo, através de processos que não estimulam os alunos à participação. É preciso que eles deixem de ver a matemática como um produto acabado, cuja transmissão de conteúdos é vista como um conjunto estático de conhecimentos e técnicas.

(D'AMBROSIO, 2003, p. 57)

O objetivo deste trabalho é apresentar uma evolução histórica a respeito dos conjuntos a partir de Boole até Abraham Fraenkel, com ênfase ao personagem Georg Cantor. A escolha desse tema ocorreu pelo fato dos conjuntos permearem toda a Educação Básica. Para alcançarmos tal finalidade nos apoiamos no diagrama-metodológico proposto por Chaquiam (2016). A figura a seguir é uma adaptação do referido modelo para o tema conjuntos.

Figura 1: **Diagrama-Metodológico – Conjuntos**



Fonte: Adaptado de Chaquiam (2016)

Tomamos por base o diagrama acima para apresentar, na sequência, aspectos relativos ao contexto sociocultural dos séculos XIX e XX, fragmentos da matemática neste período, alguns contemporâneos de Georg Cantor, traços biográficos do personagem em destaque e um recorte da história dos conjuntos a partir de George Boole até Fraenkel.

## **O contexto sociocultural**

Em meados do século XVIII iniciou na Inglaterra a chamada Revolução Industrial, caracterizada pela mecanização da produção, expansão do comércio e êxodo rural, que trouxeram profundas consequências econômicas, políticas, sociais e culturais. Esta foi a Primeira Revolução Industrial (1760-1860), marcada pelo uso do carvão, do ferro, da máquina a vapor e da produção têxtil. A Segunda Revolução Industrial (1860-1900) representou um aumento da capacidade produtiva, motivado pelo uso do aço, da energia elétrica, dos combustíveis derivados do petróleo e da invenção da locomotiva a vapor. Esta etapa da revolução industrial se espalhou por países, dentre eles, Alemanha, Estados Unidos, França e Japão.

O Imperialismo Europeu ou Neocolonialismo desenvolveu-se a partir da segunda metade do século XIX, no entanto o seu apogeu encontra-se no início do século XX. As revoluções industriais provocaram uma superprodução de produtos manufaturados nas grandes potências mundiais da época - Inglaterra, França, Alemanha, Rússia, Estados Unidos e Japão, que buscaram na África e na Ásia colônias que pudessem servir de novos mercados consumidores e fontes de matérias-primas. O cenário brasileiro deste período foi marcado pela chegada da Família Real Portuguesa ao país (1808), pela independência (1822), pela abolição da escravidão (1888) e pela proclamação da República (1889).

O cenário mundial do século XX foi bastante conturbado, marcado por guerras. Um dos marcos históricos do início desse século foi a Primeira Guerra Mundial (1914-1918), motivada pela busca de novos mercados consumidores e fontes de matérias primas e pela disputa de territórios na Ásia e África as potências mundiais dessa época entraram em conflitos. Uma das consequências disso foi o declínio das potências europeias e a ascensão dos Estados Unidos à condição de principal potência mundial.

Em 1917 ocorreu a Revolução Russa, na qual a classe proletária, constituída principalmente por operários, soldados e camponeses, insatisfeita com o capitalismo e liderados por Lênin instituíram uma nova ordem, o socialismo. O resultado desta revolução foi a criação da União das

Repúblicas Socialistas Soviéticas (URSS) que perdurou até 1991 com o final da Guerra Fria.

A Segunda Guerra Mundial (1939-1945) foi um conflito armado que envolveu a maioria das nações mundiais, organizadas em duas alianças militares, os países aliados, liderados pelos Estados Unidos, União Soviética, França e Império Britânico, e os países do eixo, liderados pela Alemanha, Itália e Japão. Um fato importante deste período foram os bombardeios atômicos as cidades japonesas de Hiroshima e Nagasaki feito pela ofensiva norte-americana em 1945. A guerra terminou com a vitória dos países aliados e como consequência houve uma redefinição da ordem mundial, com EUA e URSS tornando-se superpotências, iniciando o mundo bipolar. Além disso, ocorreu o declínio da influência política, econômica e cultural da Europa.

Estados Unidos e União soviética travaram um conflito ideológico entre dois sistemas antagônicos, de um lado o capitalismo norte-americano e de outro o socialismo soviético, denominado de Guerra Fria (1940–1991), na qual disputavam a hegemonia política, econômica e militar do mundo. Um fato importante deste período foi a divisão da Alemanha, marcada pela criação do muro de Berlim em 1961, que separou a Alemanha Ocidental (capitalista) da Alemanha Oriental (socialista).

Os principais marcos históricos no Brasil foram o auge do ciclo borracha (1879-1912), República do café com leite (1894-1930), Revolução de 30 (1930), era Vargas (1930-1945), Estado Novo (1937-1945), entrada do Brasil na segunda guerra mundial (1942), construção de Brasília (1956-1960), golpe militar de 1964, abertura política (1979), fim da ditadura (1985), promulgação da constituição federal (1988) e plano real (1994). A partir da caracterização contexto sociocultural, enveredamos a seguir pelos caminhos da matemática.

## **A matemática nos séculos XIX e XX**

Na primeira metade do século XIX ocorreram dois acontecimentos matemáticos notáveis e revolucionários. O primeiro feito foi a descoberta

de uma geometria autoconsistente em 1829, diferente da geometria usual de Euclides. O segundo foi a descoberta em 1843 de uma álgebra diferente da álgebra usual dos números reais (EVES, 2004, p. 539).

Segundo Eves (2004, pp. 544-548), o surgimento de geometrias não euclidianas ocorreu em 1829 e 1832, quando Lobachevsky e Bolyai deram início ao movimento de "libertação da geometria" ao desconsiderarem um dos postulados de Euclides. Em 1871, Klein nomeou as geometrias de Lobachevsky e Bolyai, a de Euclides e a de Riemann, respectivamente, de geometria hiperbólica, geometria parabólica e geometria elíptica.

Conforme Garbi (2007), no final do século XIX, o matemático inglês George Boole (1815-1877) mostrou que a álgebra poderia se libertar dos números e trabalhar também com outros tipos de entes, como os conjuntos e as proposições da lógica. Esta descoberta, juntamente com estudos dos matemáticos William Rowan Hamilton (1805-1895), Hermann Günther Grassmann (1809-1877) e Arthur Cayley (1821-1895) deram origem ao movimento conhecido como "a libertação da álgebra". Em 1857, Cayley descobriu mais uma álgebra não comutativa, a álgebra das matrizes. Além dos dois movimentos descritos acima, a matemática do século XIX teve um terceiro movimento de extrema relevância, conhecido como "aritmética da análise".

De acordo com Eves (2004, pp. 655-696), a maior parte dos estudos desenvolvidos na matemática do século XX, está relacionada ao exame dos fundamentos e da estrutura lógica dessa ciência. Com consequência disto, houve a criação da "axiomática", ou o estudo dos sistemas de postulados e suas propriedades. A teoria dos conjuntos, a álgebra abstrata e a topologia se desenvolveram grandemente nesse período. Além disso, ocorreu também o surgimento da lógica matemática, dos números transfinitos, das filosofias da matemática (logicismo, intuicionismo e formalismo) e da matemática moderna e o grupo de Bourbaki.

Dentro de um contexto pluridisciplinar, apresentamos personagens que contribuíram para o meio científico e que foram contemporâneos a George Cantor, dentro do cenário mundial descrito anteriormente.

## **Contemporâneos de Georg Cantor**

Para melhor caracterizar o período de vida de Georg Cantor destacamos os contemporâneos Gauss, Gregor Mendel, Floriano Peixoto, Freud, Santos Dumont e Albert Einstein de áreas do conhecimento científico.

Iniciamos com **Carl Friedrich Gauss** (1777-1855), matemático, astrônomo e físico alemão, nasceu em Brunswick em 30 de abril. Contribuiu em diversas áreas da ciência, a exemplo, teoria dos números, estatística, análise matemática, geometria diferencial, geodésia, geofísica, eletrostática, astronomia e óptica. A obra *Indagações Aritméticas* (1798) é considerada por muitos como sua principal. Segundo Eves (2004, p. 519), Gauss é considerado o maior matemático do século XIX, sendo conhecido como o "príncipe dos matemáticos".

De acordo com Eves (2004, p. 519), há uma história atribuída a Gauss, história de que aos dez anos de idade apresentou em poucos instantes o resultado correto, 5050, relativo a soma dos números de 1 a 100, porém sem nenhum cálculo. Muitos associam esse fato a soma dos termos de uma progressão aritmética finita

**Gregor Michael Mendel** (1822-1884), foi um biólogo austríaco do século XIX, nasceu em 20 de julho num pequeno povoado denominado de Heinzendorf, na atual Áustria. Em 1847 ele foi ordenado monge e logo em seguida ingressou na Universidade de Viena, onde cursou História da Natureza. Mendel é considerado o pai da genética por ter desenvolvido as Leis de Hereditariedade ou Leis de Mendel, apresentadas em 1865 em dois encontros da Sociedade de História Natural de Brno, no entanto as suas teorias só foram reconhecidas cientificamente após a sua morte ocorrida em 06 de janeiro de 1884.

**Floriano Vieira Peixoto** (1839-1895), foi um militar e político brasileiro, nasceu na cidade de Maceió (AL) em 30 de abril de 1839. Em 1862 se formou em Ciências Físicas e Matemática na Escola Militar do Rio de Janeiro. Floriano foi o segundo presidente do Brasil, após a renúncia de Marechal Deodoro da Fonseca em 23 de novembro de 1891. Os seus três

anos de mandato foram marcados pelo uso excessivo da força e pela violência, o que lhe rendeu o título de Marechal de Ferro. Faleceu em Barra Mansa (RJ), em 29 de junho de 1895.

**Sigismund Schlomo Freud** (1856-1939), ou simplesmente **Sigmund Freud**, nasceu em 6 de maio de 1856 na cidade Freiberg in Mähren, atual República Tcheca, no entanto viveu a maior parte de sua vida em Viena na Áustria. Sua família era judaica e no período nazista ele perdeu quatro das suas cinco irmãs nos campos de concentração, mas Freud e parte de sua família escaparam e conseguiram refúgio na Inglaterra.

Estudou na Universidade de Viena, aonde se formou em medicina, especializando-se em neurologia. Contribuiu grandemente com o campo da psicologia, sendo considerado o pai da psicanálise, a qual investiga os processos inconscientes. Desenvolveu os conceitos de *id*, *ego* e *superego*. Morreu em Londres, Inglaterra, em 23 de setembro de 1939.

**Alberto Santos Dumont** (1873-1932) foi um aeronauta, esportista e inventor brasileiro, nasceu na cidade de Palmira (MG) em 20 de julho de 1873. Viveu parte de sua vida em Paris, na França. Ele é considerado o pai da aviação, devido ser o autor do primeiro voo de avião em 1906. Além do famoso avião 14 Bis, Santos Dumont inventou o chuveiro de água quente, o ultraleve, o dirigível e o relógio de pulso. Suas obras publicadas são "Dans-L'air" (1904) e "O que Vi e o que Nós Veremos" (1918). Em 1914 Dumont volta ao Brasil, já muito doente, sofrendo de depressão e esclerose múltiplas em decorrência de ver a sua maior criação, o avião, sendo utilizada como máquina de guerra durante a Primeira Guerra Mundial, o que o motivou a cometer suicídio em 23 de julho de 1932.

**Albert Einstein** (1879-1955) nasceu em Ulm, na Alemanha, em 14 de março de 1879. Estudou matemática e física no Instituto Politécnico Suíço na cidade de Zurique e, depois de formado, em fevereiro de 1901, adquiriu a nacionalidade suíça. Contribuiu enormemente para a física, com o desenvolvimento da Teoria da Relatividade Restrita (1905), na qual apresentou novas concepções sobre tempo, espaço, massa, movimento e gravitação. Desenvolveu em 1915 a Teoria da Relatividade Generalizada,

aonde buscou expressar todas as leis da física através de equações covariantes. Einstein é muito lembrado por sua equação de energia,  $E = mc^2$ , sendo considerado um dos pilares da física moderna. Em 1921 ele recebeu o Prêmio Nobel de Física, devido a sua descoberta da lei do efeito fotoelétrico. Junto com o filósofo britânico Bertrand Russell, assinou o *Manifesto Russell-Einstein*, que destacou o perigo das armas nucleares. Einstein tornou-se um cidadão norte-americano em 1º de outubro de 1940 e morreu em Princeton, EUA, em 18 de abril de 1955.

Os contemporâneos de Georg Cantor, acima apresentados, nos dão uma dimensão dos acontecimentos noutras áreas do conhecimento e suas realizações. A seguir, para conhecermos um pouco mais sobre a vida e obra Georg Cantor, apresentamos um perfil biográfico deste.

### **Traços biográficos de Georg Cantor**

Filho de pais dinamarqueses, Georg Ferdinand Ludwig Philip Cantor nasceu em São Petersburgo, Rússia, em 3 março de 1845. Sua família era extremamente religiosa, o pai de Cantor era um judeu convertido ao protestantismo e a mãe, também descendente de judeus e muito talentosa na música, era católica. Garbi (2007) afirma que de sua mãe, Cantor herdou dons artísticos, tendo sido um talentoso desenhista, como comprovam alguns trabalhos deixados por ele.

A religiosidade da família também influência nos interesses de Cantor pela teologia medieval, sendo decisiva no seu misticismo e em sua forma de enxergar o mundo. Com o intuito de concentrar seus estudos em Filosofia, Física e Matemática, não atendeu a sugestão de seu pai em estudar engenharia.

Mudou-se aos 11 anos para Frankfurt, Alemanha, país onde estudou e viveu quase toda vida. Após estudar em Zurique e Göttingen, em 1867 obteve o doutorado em Berlim, onde foi aluno de Weierstrass. No período de 1869 a 1905, foi professor na Universidade de Halle, porém seu sonho de ensinar em Berlim, considerado um dos melhores centros matemáticos

do mundo, jamais se realizou, pois seus pontos de vista nada convencionais encontraram forte oposição, principalmente de Leopold Kronecker, professor da Universidade de Berlim.

Em 1872 ele definiu números irracionais em termos de sequências convergentes de números racionais e, em 1873, provou que os números racionais são enumeráveis, isto é, podem ser colocados em correspondência biunívoca com os números naturais. Depois de realizar estudos em teoria dos números e em séries trigonométricas, voltou seus esforços para os fundamentos da análise e, mais precisamente, sua atenção para os conjuntos infinitos, tema ao qual se dedicou 25 anos e produziu trabalhos de grande relevância para a matemática.

Cantor sofreu durante a última metade da sua vida repetidos ataques depressivos, fatos que comprometeram a sua capacidade de trabalho e o forçou a ficar hospitalizado várias vezes. Ao final de sua vida passou a ter maior interesse por literatura e religião e desenvolveu o conceito de infinito absoluto, um infinito que transcende os números transfinitos. Faleceu em 6 de janeiro de 1918 no hospital em Halle com doenças mentais.

## **Uma evolução histórica dos Conjuntos**

**George Boole**, um dos colaboradores do movimento da libertação da Álgebra, nasceu em 2 de novembro de 1815 em Lincoln, Lincolnshire, na Inglaterra, e faleceu em 8 de dezembro de 1864 em Ballintemple, County Cork, na Irlanda. Filho de um lojista, frequentou a escola pública local e, com apoio do dono de uma livraria, aprendeu grego e latim por si mesmo. Foi professor de uma escola primária por três anos até abrir sua própria escola onde sentiu necessidade de aprender alguma Matemática para ensinar aos alunos. Em pouco tempo de estudos, avançou a ponto de entender as difíceis obras de Laplace e Lagrange.

Boole percebeu que as manipulações algébricas não necessitam restringir-se ao âmbito dos números, pois se baseiam em princípios lógicos aplicáveis de forma muito mais ampla. Com isso, associações como  $a + b$

(soma) e  $a \cdot b$  (produto) antes feitas pela "Álgebra" apenas com números, poderiam ser trabalhadas também com outros entes. Assim, podemos citar como exemplo as associações  $A + B$  (ou  $A \cup B$ ) e  $A \cap B$  (ou  $A \cdot B$ ), que representam, respectivamente, as operações de soma (ou união) e produto (ou intersecção) dos conjuntos  $A$  e  $B$ .

Seu livro intitulado *The Mathematical Analysis of Logic* (1847) foi ampliado e esclarecido em um livro chamado *Investigations of the Laws of Thought* (1854) que, segundo Eves (2004), lançou fundamentos da lógica formal e de uma nova álgebra, hoje conhecida como *álgebra booleana*. O trabalho de Boole (1847) foi louvado por De Morgan como uma obra para marcar época.

**Augustus De Morgan** nasceu em 27 de junho de 1806 em Madura, na Índia, e morreu em 18 de março de 1871, em Londres, na Inglaterra. Frequentou o Trinity College e graduou-se em matemática com distinção máxima em Cambridge. Assumiu em 1828 o cargo de professor da recém-criada Universidade de Londres, onde exerceu larga influência na matemática inglesa através de seus trabalhos e de seus alunos. Foi o primeiro presidente da *Sociedade Matemática de Londres*, fundada em 1866.

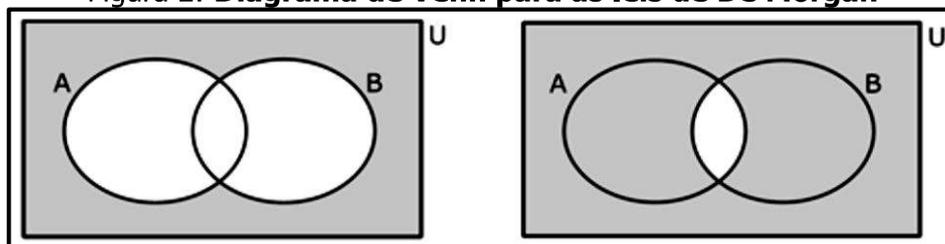
Dando continuidade ao trabalho de Boole, De Morgan enunciou o princípio da dualidade da teoria dos conjuntos que podem ser ilustradas pelas chamadas leis de De Morgan, enunciadas a seguir:

*Sejam  $A$  e  $B$  subconjuntos de um dado conjunto universo, então*

- *o complemento da união de  $A$  com  $B$  é a intersecção dos complementos de  $A$  e de  $B$  ou  $(A \cup B)' = A' \cap B'$ ;*
- *o complemento da intersecção de  $A$  e  $B$  é a união dos complementos de  $A$  e  $B$  ou  $(A \cap B)' = A' \cup B'$ .*

Essas leis podem ser visualizadas utilizando os chamados diagramas de Venn, que segundo Garbi (2007), foram popularizados pelo matemático inglês John Venn, entretanto, foram utilizados um século antes por Leonhard Euler (1707-1783) para testar a validade de raciocínios dedutivos e, de acordo com Eves (2004), os diagramas também foram parte conteúdo de uma das cartas de Euler à princesa Phillipine von Schwedt.

Figura 2: **Diagrama de Venn para as leis de De Morgan**



Fonte: Elaborado pelos autores.

**John Venn** nasceu no dia 4 de agosto de 1834 em Kingston upon Hull, na Inglaterra. Aos três anos ficou órfão de mãe e só foi para a escola aos 19 anos, quando ingressou em Cambridge. Em 1857, graduou-se na Universidade de Cambridge e, em 1862, assumiu o cargo de professor nesta universidade para ministrar Ciência e Moral, além disso, estudou e ensinou técnicas lógicas e a teoria da probabilidade desenvolvendo a lógica de Boole, utilizando representações gráficas de conjuntos, através de diagramas que ficaram conhecidos com o seu nome, publicados pela primeira vez na *Philosophical Magazine and Journal of Science*, no artigo *Da representação mecânica e diagramática de proposições e raciocínios*.

Desde 1960, com o Movimento da Matemática Moderna, os diagramas foram introduzidos no ensino de Matemática no que tange a teoria dos conjuntos e funções.

Outro matemático importante para a evolução do conceito de conjuntos foi **Julius Wilhelm Richard Dedekind**. Nascido em 6 de outubro de 1831, em Braunschweig, Alemanha, e morreu na sua cidade natal em 12 de fevereiro de 1916. Segundo Garbi (2007), frequentou o curso de Matemática e Física na Universidade de Göttingen, sendo um dos mais talentosos alunos de Gauss, seu orientador no doutorado obtido em 1852. Em sua maior obra *Stetigkeit und Irrationale Zahlen* (A continuidade e os números irracionais), publicada em 1872, consta a principal ideia geradora do *Corte de Dedekind*, que era compreender o que distingue a grandeza geométrica contínua das grandezas representadas pelos números racionais, fato que o levou a concluir que a definição de número irracional dada pelos cortes de Dedekind.

Dedekind procurou fornecer na, maioria de seus trabalhos, uma compreensão rigorosa sobre a natureza dos números reais. Para o embasamento lógico e dedutivo da teoria dos números reais, buscou ideias na Grécia, onde os gregos associavam números (inteiros, racionais e os irracionais do tipo  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{3}$ ,  $\sqrt{5}$ , etc.) a segmentos de reta.

Na época de Dedekind eram conhecidos outros tipos de números irracionais, não apenas aqueles conhecidos pelos gregos na antiguidade. Nesse sentido, Dedekind decidiu postular o hoje conhecido como Axioma de Dedekind-Cantor, isto é, *todos os tipos de números reais poderiam ser postos em correspondência biunívoca com todos os pontos de uma reta.*

Os principais estudos de George Cantor dizem respeito aos conjuntos infinitos e a questão dos seus tamanhos, ou seja, como existem infinitos números naturais e infinitos números irracionais, haveria uma forma de comparar estas duas infinidades, de se saber se uma é maior que a outra?

Desde o tempo de Zenão de Eléia que viveu por volta de 450 a.C., a ideia de infinito já era bastante sutil e por meio desta, pode-se produzir alguns paradoxos de difícil explicação, podemos citar os paradoxos de Zenão (Eves, 2004, p.418).

Outra importante observação sobre os conjuntos infinitos foi feita por Galileu Galilei (1564-1642) quando fez a correspondência de cada natural com o seu quadrado, notando assim que cada número da linha inferior também pode ser encontrado na linha superior. Galileu concluiu que no conjunto infinito dos naturais a parte é igual ao todo, batendo de frente com a ideia de Euclides, segundo a qual, para conjuntos finitos, a parte é sempre menor que o todo.

Gauss escreveu em 1831 que *o infinito é apenas uma figura de linguagem: uma forma abreviada para a afirmação de que existe limites dos quais certas relações podem se aproximar tanto quanto nós desejamos, desde que permitamos que outras magnitudes cresçam sem qualquer restrição.*

Cantor mostrou que para se comparar o “tamanho” de dois conjuntos não era necessário contar o número de elementos de ambos. Por

exemplo, para sabermos a quantidade de dedos em cada mão é a mesma, basta colocar uma sobre a outra e verificar se cada dedo de uma mão se corresponde a um dedo da outra, sem necessariamente precisar contar os dedos.

De modo geral, Cantor mostrou que a possibilidade de se estabelecer uma relação biunívoca entre elementos de dois conjuntos finitos assegura que tais conjuntos possuem o mesmo número de elementos. Mas ele foi além, estendendo este critério para conjuntos infinitos e disse que todo conjunto que pudesse ser colocado em correspondência biunívoca com os naturais era enumerável.

Cantor criou também a figura de um número cardinal transfinito, correspondente à infinidade dos números naturais, pondo-se assim a pesquisar os conjuntos infinitos, foi ele que utilizou pela primeira vez o símbolo  $\mathbb{R}$  para representar o conjunto dos números reais, fazendo descobertas que deixaram muitos matemáticos da época incrédulos. Um desses matemáticos foi **Leopold Kronecker**, um forte opositor de Cantor que nasceu em 07 de dezembro de 1823, na cidade de Liegnitz, nas proximidades de Breslau, Alemanha. Estudou na Universidade de Berlim e depois na Universidade de Bonn. Atuou no mundo dos negócios no período de 1844 a 1855, onde graças ao seu talento financeiro acumulou uma considerável fortuna. Faleceu no dia 29 de dezembro de 1891, em Berlim.

Segundo Eves (2004), após sua mudança para Berlim em 1855, Kronecker passou a lecionar na Universidade local, onde se especializou em teorias das equações, funções elípticas e teoria dos números algébricos. Condenava o trabalho de Cantor, visto que considerava os trabalhos mais de teologia do que matemática, pois acreditava que toda matemática devia se basear em métodos finitos desenvolvidos e a partir dos números inteiros.

No final do século XIX e início do século XX, a descoberta de alguns paradoxos abalou a teoria dos conjuntos. Um desses paradoxos foi descoberto por **Bertrand Arthur William Russell**, nascido em 18 de Maio de 1872 na cidade de Ravenscroft, País de Gales, e faleceu em 2 de Fevereiro de 1970 em Penrhyndeudraeth, no mesmo país de nascimento. Considerado um popularizador da filosofia, Russell foi respeitado por

inúmeras pessoas e considerado como uma espécie de profeta da vida racional e da criatividade. Em 1902, enuncia o paradoxo que ficou conhecido como Paradoxo de Russell, que de acordo com Eves (2004), seu enunciado é:

Representamos por  $M$  o conjunto de todos os conjuntos que são membros de si próprios e por  $N$  o conjunto de todos os conjuntos que não membros de si próprios. Perguntamos então se  $N$  é um membro de si próprio ou não. Se  $N$  é um membro de si próprio, então  $N$  é um membro de  $M$  e não de  $N$  e, portanto  $N$  não é membro de si próprio. De outra parte, se  $N$  não é um membro de si mesmo, então  $N$  é membro de  $N$  e não de  $M$ , ou seja,  $N$  é membro de si próprio.

(Eves, 2004, p. 674)

Muitos outros paradoxos foram encontrados desde então. A existência de tais paradoxos mostrou algumas fragilidades na teoria de Cantor, não faltando propostas de solução para essas questões. Para Eves (2004) uma saída matemática simples para estas questões seria a reconstrução da teoria dos conjuntos com *uma base axiomática suficientemente restrita para eliminar as antinomias conhecidas*.

Ernst Zermelo e Abraham Fraenkel fizeram as primeiras tentativas no sentido de axiomatizar a teoria de Cantor, porém o procedimento que ficou conhecido como axiomas de Zermelo-Fraenkel foi bastante criticado pelo fato deste simplesmente evitar paradoxos, não explicando o porquê deles. Outra tentativa de eliminar os paradoxos na teoria de Cantor foi procurar o problema na lógica, o que desencadeou investigações minuciosas nos fundamentos da lógica, adotando assim uma lógica trivalente, ou seja, uma lógica com afirmações verdadeiras, falsas e *indecidível*.

### **Considerações sobre o texto apresentado**

O recorte histórico feito sobre a evolução do conceito de conjuntos nos permite perceber que Cantor, inspirado pelas ideias de Zenão e Galileu,

contribuiu de maneira significativa para chegarmos aos conceitos que temos hoje, mesmo encontrando grandes opositores à sua teoria, como por exemplo, Kronecker.

Neste sentido, a abordagem histórica proposta neste trabalho pode contribuir para que professores e alunos da licenciatura em matemática tenham um olhar mais crítico sobre os conceitos matemáticos e, muito provavelmente, obter respostas aos seus questionamentos sobre o processo de ensino e de aprendizagem de conjuntos.

### **Bibliografia consultada e mencionada**

ARAÚJO, Adjanny Vieira Britode; ATAÍDE, Ana Raquel Pereira de; MONTENEGRO, Dhiego Souto. **Atividades adidáticas no ensino de matemática: uma compreensão da realidade vivida na escola**. In: Anais do I Congresso Internacional de Educação Inclusiva – CINTEDI. Anais ... Brasil/Paraíba, 2014. Disponível em: [http://editorarealize.com.br/revistas/cintedi/trabalhos/Modalidade\\_1dataho](http://editorarealize.com.br/revistas/cintedi/trabalhos/Modalidade_1dataho)

BOYER, Carl B. **História da Matemática**. 2 ed. São Paulo: Blucher, 1996.

CHAQUIAM, M. Um diagrama, um texto. In: MENDES, I. A.; CHAQUIAM, M. **História nas aulas de Matemática: fundamentos e sugestões didáticas para professores**. Belém: SBHMat, 2016.

CHAQUIAM, M. **História da matemática em sala de aula: proposta para integração aos conteúdos matemáticos**. Coleção História da Matemática para Professores. Natal: Livraria da Física, 2015. 82 p.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Educação Matemática: da teoria à prática**. Campinas/SP: Papyrus, 2003.

EVES, Howard. **Introdução a História da Matemática**. Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2004.

GARBI, Gilberto G. **A Rainha das Ciências: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática.** 2 ed. São Paulo: Livraria da Física, 2007.

LOPES, Lidiane Schimitz e FERREIRA, André Luis Andrejew. **Um olhar sobre a história nas aulas de matemática.** Revista Abakós. Belo Horizonte (MG): Ed. PUC Minas, 2013.

RONAN, Colin A.. História Ilustrada da Ciência. São Paulo: Círculo do Livro, 1987.