GRANDEZAS: uma história dos comensuráveis e incomensuráveis

Marcelo Baia da Silva
Saul Rodrigo da Costa Barreto
Miguel Chaquiam

Introdução

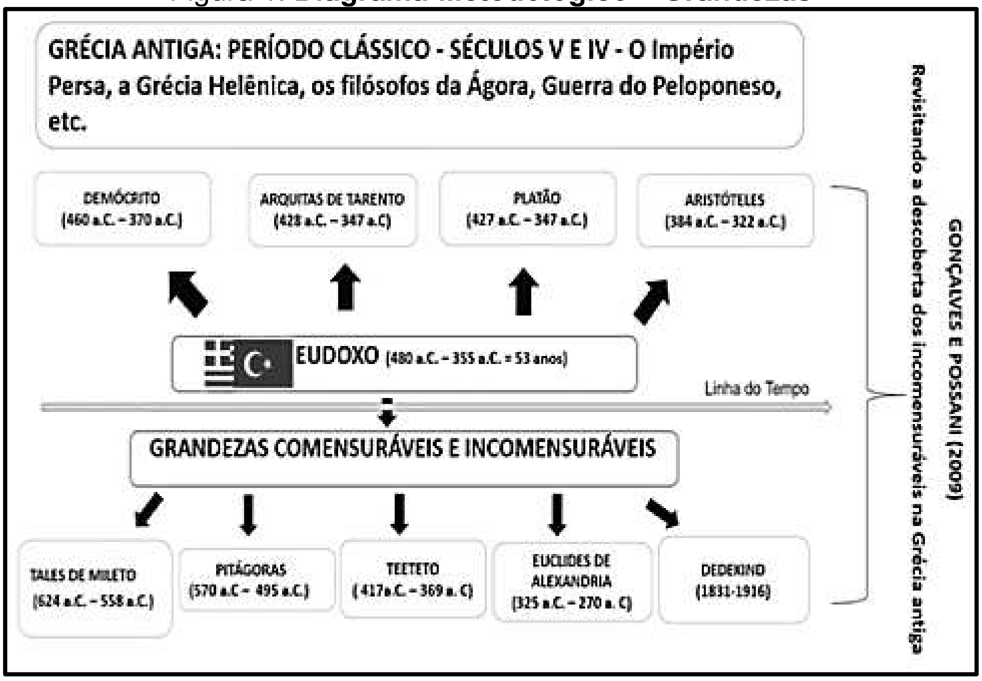
Este trabalho tem como objetivo apresentar um estudo a respeito das grandezas comensuráveis e incomensuráveis ao longo da história, desde os estudos de Tales de Mileto, dos pitagóricos, incidindo em Eudoxo, o personagem em foco, até a construção dos números reais por Dedekind, além de perpassar pelo contexto cultural, social e político de alguns estudiosos desse tema, em particular Eudoxo, criador da teoria das proporções, temos em vista também situar seu desenvolvimento ao longo história, bem como os desafios enfrentados.

> O magistral tratamento dos incomensuráveis formulado por Eudoxo aparece no quinto livro dos *Elementos* de Euclides, e essencialmente coincide com a exposição moderna dos números irracionais dada por Dedekind em 1872.
> As abordagens de razoes e proporções e de semelhança de triângulos apresentadas nos textos de geometria das primeiras décadas deste século destinados ao ensino secundário refletem as dificuldades e as sutilezas na questão das grandezas incomensuráveis. Nessas abordagens consideram-se dois casos, dependendo da comensurabilidade ou incomensurabilidade de certas grandezas.
>
> (EVES, 2011, p.107)

Nesse sentido, observa-se que a partir das dificuldades dos matemáticos gregos em aceitar as grandezas incomensuráveis é que surge o tratamento dado por Eudoxo para tal problema, ou seja, a criação da teoria das proporções que, posteriormente, veio a influenciar Dedekind na composição teórica dos números reais. Para tal abordagem, começamos as pesquisas com a intenção de construir uma visão histórica da humanidade nos Séculos V e IV a.C., mais especificamente no período clássico na Grécia antiga, com análises práticas, ensinamentos e enfoques culturais, bem como o desenvolvimento científico e tecnológico da população da época para então nos atermos ao personagem em foco, estudando suas produções e o desenvolvimento de seu saber matemático, observando seus contemporâneos e personagens importantes que contribuíram para a evolução dos conhecimentos acerca das grandezas comensuráveis e incomensuráveis.

Tendo em vista o uso desse texto em sala de aula, foi elaborado um diagrama a partir de Chaquiam (2016), para subsidiar o conteúdo matemático, assim como balizar a construção de uma história, a fim de abordar pensamentos e métodos matemáticos acerca das grandezas comensuráveis e incomensuráveis.

Figura 1: **Diagrama-Metodológico – Grandezas**



Fonte: Elaborado pelos autores a partir do modelo de Chaquiam (2016)

Tendo como referência o diagrama, o professor poderá trabalhar em sala de aula, começando na apresentação do tema e do personagem em foco (no nosso caso foi Eudoxo); em seguida o professor faz uma pequena abordagem de como era o cenário mundial na época deste personagem, colocando em cena seus contemporâneos, figuras celebres que contribuíram de alguma com seus trabalhos para a história da ciência em geral; agora o ele retoma o foco para a evolução do tema, fazendo alguns questionamentos que o levarão a explanação da evolução do tema em questão: como iniciaram os primeiros estudo? Quem estudou? Passando assim pelas contribuições do personagem principal até estudos mais recentes acerca do tema. E para um fechamento mais conciso, o docente poderá mostrar olhares de pesquisadores mais atuais sobre o tema ou sobreo personagem principal. Dessa feita, acreditamos que o professor poderá trabalhar com sucesso a história da matemática como recurso didático que muito o auxiliará no processo de Ensino e aprendizagem na sala de aula.

Na próxima secção faremos uma abordagem da história da Grécia no período clássico, época em que viveu Eudoxo, bem como mostraremos seu contexto sociocultural e político.

A Grécia nos séculos V e IV a.C.

No início do século V a.C., é importante ressaltar que os gregos tiveram que enfrentar a ameaça dos persas, cujo Império chegou a abranger a Líbia, as cidades gregas da Ásia Menor, o Egito, a Trácia e a Macedônia, controlando importantes regiões fornecedoras de alimentos (como trigo, por exemplo)

O império Persa

O império Persa (559-330 a.C.) representado pela dinastia Aquemênida, que por causa disso é chamado também de Império

Aquemênida, tem sua linhagem remonta ao rei Aquêmenes que governou a Pérsia entre 705 e 675 a.C. Os Aquemênidas alcançaram o domínio do Oriente Médio sob o governo de Ciro II da Pérsia, bisneto de Aquêmenes, quando este subjugou a Média e todas as outras tribos arianas da área do atual Irã conquistando em seguida a Lídia, a Síria, a Babilônia, a Palestina, a Armênia e o Turquestão, fundando o Império Persa.

As conquistas foram levadas adiante por seu filho Cambises II, que conquistou o Egito, e Dario I, que expandiu o poderio persa até a Europa, conquistando a Trácia e consolidando seu poder na Anatólia formando o maior império que o mundo de então tinha visto. No auge de seu poder, os Aquemênidas governavam um império que abrangia cerca de 8 milhões de quilômetros quadrados ao longo de três continentes: Ásia, África e Europa. Em 480 a.C., estima-se que 50 milhões de pessoas viviam no Império Aquemênida.

> O formidável e extenso Império Persa (atuais Irã, Iraque, Síria, Egito e partes da Índia e Ásia Menor), que atingira seu apogeu nos séculos V e IV, com Ciro, Cambises, Dario e Xerxes, seria derrotado e ocupado por Alexandre, após destruir sua capital, Persépolis (331 a. C).
>
> (ROSA, 2012, p.98).

Após a tentativa frustrada de Dario de conquistar a Grécia, o Império Aquemênida começou a declinar. Décadas de golpes, revoltas e assassinatos enfraqueceram o poder da dinastia, embora o império continuasse relativamente poderoso. Por volta de 330 a.C., os persas não suportaram as incursões e ataques do rei macedônio Alexandre, o Grande. Sendo assim, em 330 a.C., o último rei aquemênida, Dario III, foi assassinado por um de seus sátrapas, Besso, e o primeiro Império Persa caiu em mãos dos gregos e macedônios.

A Grécia Helênica

A Grécia Helênica (800-336 a.C.) segundo Eves, apresentou um grande crescimento intelectual e cientifico surpreendente, um período notável, no que diz respeito as realizações humanas. Era o viver e o pensar grego. O período testemunhou realizações intelectuais extraordinárias.

> A Grécia Helênica era um mosaico de cidades-estados e de pequenas fazendas dispersas. Não era uma planície ampla dividida por rios grandes e lamacentos, como o Egito e a Babilônia; ao contrário, era um pais cortado por longas cadeias de montanhas íngremes e por baias sinuosas que penetravam fundo seu interior. Seus vales eram estreitos e pontilhados de grandes pedras, seus rios, rasos e seu solo, ressequido. Suas cidades-estados separavam-se umas das outras por montanhas íngremes e alcantiladas; suas fazendas, em vales pequenos, eram divididas por afloramentos de rochas e por trechos de terra infértil. Devido em parte a seu isolamento e em parte as dimensões restritas das áreas circunvizinhas, as pequenas cidades e fazendas da Grécia Helênica estavam resguardadas de projetos expansionistas. E inegável que os gregos fizeram várias guerras, mas raramente uma cidade-Estado conseguia anexar outra. Alguns fazendeiros gregos ricos chegaram a formar grandes propriedades, mas nunca na escala observada no Egito ou na Babilônia. Nesse cadinho, onde poder e riqueza estavam dispersos, era viável a criação de republicas democráticas; e foi isso exatamente o que os gregos fizeram na cidade de Atenas sobranceira as ilhas que pontilhavam o golfo Sarônico.
>
> (EVES, 2011, p.91)

Segundo o teórico, o azeite e o vinho de Atenas eram considerados os mais finos da região do mar mediterrâneo. Sem mencionar as produções artística advindas das mãos dos artesãos da cidade, que eram vendidos tanto dentro quanto fora da Grécia. O mercado de Atenas, a ágora, era o principal elo que ligava as transações comerciais do mediterrâneo oriental, sendo que toda vida intelectual girava em torno da ágora. Ali pessoas de todos os tipos se reunião para conversar.

> Filósofos como Sócrates (469? - 399 a.C.) e Platão (427? -347 a.C.), cientistas como Aristóteles (384-322 a.C.) e dramaturgos

> como Aristófanes (445? - 385? a.C.) sentavam-se a sombra, cercados de discípulos, admiradores e cidadãos interessados e trocavam ideias. Embora a *ágora* ateniense fosse a maior da Grécia Helênica, outros mercados, em outras cidades comerciais, como Corinto, Rodes e Mileto, tinham uma função semelhante.
>
> (EVES, 2011, p.92)

Os gregos foram os primeiros a romper as algemas do conservadorismo e a libertar a razão, capacitando-a mais e mais. No que tange ao brilhantismo nos mais diversos campos, como da educação, das artes, do direito, da política, da medicina e da filosofia, os gregos foram os criadores da ciência e os iniciadores do espírito científico. Tudo isso, foi fruto de um longo e complexo processo de desenvolvimento e aperfeiçoamento e, não apenas de gênio ou de uma geração privilegiada

Período Clássico

Grécia vivia o período clássico, caracterizado pela hegemonia e imperialismo das cidades de Atenas, Esparta e Tebas. Um momento marcado por invasões e conflitos. Entretanto mesmo com tais conflitos, muitos estudiosos acreditam que a Grécia viveu nesse período, seu apogeu como civilização, devido as mudanças político-administrativas em Atenas e a disseminação desse modelo para as outras cidades-estados gregas (como Esparta e Tebas) acabaram deixando marcadas o auge da Antiguidade grega.

> O resultado Principal das vitórias Gregas foi a expansão e a hegemonia de Atenas. Nessa cidade, sob o domínio de Péricles, na segunda metade do século V a.C., os elementos democráticos tornaram-se cada vez mais influentes. Constituíam a força condutora da expansão econômica e militar e, por volta de 430 a.C., fizeram de Atenas não apenas a cabeça do Império Grego, mas também o centro de uma nova e fascinante civilização – A idade de ouro da Grécia.
>
> (STRUIK, 1992, p.75).

No governo de Péricles, a Grécia viveu um ápice cultural, pois ele protegeu os artistas e ordenou a construção de vários monumentos. A estátua de Zeus olímpico, construída pelo escultor Fídias, foi considerada uma das maravilhas do mundo antigo. Templos, teatros, anfiteatros e Odeons eram construído em mármore para a grandeza da Grécia, para que ela fosse vista pelos estrangeiros e sua beleza divulgada no mundo inteiro. Seus padrões de colunas eram invejados e copiados por outros povos.

A Guerra do Peloponeso

No ano de 431 a.C., a rivalidade econômica e política existente entre Atenas e Esparta e as cidades aliadas culminou na guerra do Peloponeso (431 a.C. – 403 a.C.), trazendo destruição, conflitos sociais e empobrecimento. Em Atenas, os vestígios de uma guerra prolongada deixou um rastro de ruina aos pequenos camponeses que foram obrigados a abandonar suas terras e a se mudar para área urbana. A derrota de Atenas trouxe a instalação de oligarquias em toda a Grécia.

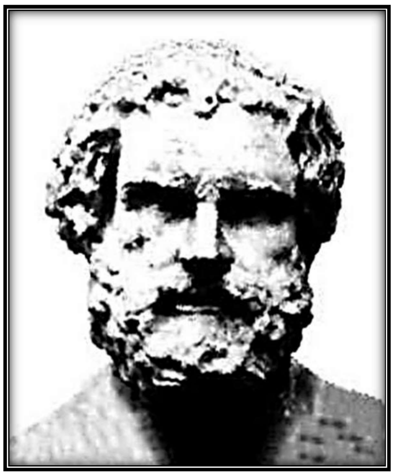
> A paz chegou ao fim em 431 a.C. com o início da Guerra do Peloponeso entre Atenas e Esparta. Foi um conflito inusitadamente longo. Atenas, ao início vitoriosa, foi assolada por uma peste devastadora que matou um quarto de sua população; e por fim, em 404 a.C., teve de aceitar uma derrota humilhante. Esparta assumiu a liderança grega que só veio a perder em 371 a.C. ao ser derrotada por uma liga de cidades-estados rebeldes.
>
> (EVES, 2011, p.131)

Com o fim da Guerra do Peloponeso, em 403 a.C., veio o período marcado pela hegemonia de Esparta até 362 a.C., seguida pela supremacia da cidade de Tebas. Os constantes desentendimentos bélicos entre as cidades gregas somente conseguiram abalar a unidade do país, propiciando a Filipe II que concretizasse a conquista da Grécia em 338 a.C., na batalha de Queronéia. Felipe foi sucedido por seu filho Alexandre, o grande, (336 a.C. – 323 a.C.), que fundou o Império Macedônico, englobando a Grécia, a Pérsia, a Mesopotâmia e o Egito. Chegava ao fim o mais brilhante período da Grécia antiga.

Os contemporâneos de Eudoxo

O grego Eudoxo de Cnido (408-355 a.C.) viveu durante o Período Clássico Grego, marcado por muitos conflitos e invasões imbricados em um cenário de guerra, que marcou o contexto político e social da Grécia nesse período. Frente a esse cenário, cabe mencionar alguns dos contemporâneos de Eudoxo, como:

Demócrito de Abdera



"De todos os meus contemporâneos tenho coberto o mais terreno em minhas viagens, fazendo as perguntas mais exaustivas do tempo; tenho visto a maioria dos climas e países e ouvidos o maior número de homens instruídos." (DEMÓCRITO)[2]

A Idade Heroica da Matemática foi marcada por grandes produções matemáticas, mas também pelos atores que participaram desse período. Dentre eles, estava Demócrito de Abdera, o qual era conhecido como o filósofo da Química. Ele viveu aproximadamente entre os anos de 460 a 370 a.C., foi quem propôs uma doutrina materialista atômica. Além disso,

[2] Disponível em: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Democritus.html>

teve destaque no campo da geometria e grande conhecimento na área da matemática, fruto das inúmeras viagens realizadas. Passou por Atenas, Egito, Mesopotâmia e, provavelmente, pela Índia. Por causa dessas viagens, ele foi considerado o homem que mais viajou em seu tempo em busca de conhecimento. (BOYER, 2010, p. 54)

De acordo com Boyer (2010, p. 55), Demócrito escreveu inúmeras obras em matemática, a saber, "Sobre os números, Sobre a geometria, Sobre tangências, Sobre representações e Sobre irracionais", sendo que estas não foram preservadas e se perderam com o tempo. Todavia, depois de séculos, foram atribuídos a ele muitos trados de matemática e química, dentre estes, estão antigos trados de alquimia e os livros sobre o pitagorismo, sobre a ordem do mundo e sobre ética.

Sobre a teoria atômica de Demócrito, de acordo com O'Connor e Robertson (1999), esta provavelmente tenha sofrido influências tanto de seu professor Leucipo e de Anaxágoras, pois ambos propuseram anteriormente um sistema atômico, e também dos pitagóricos, por meio da teoria dos sólidos regulares, com relação à constituição do universo. No entanto, a proposição de Demócrito apresentava uma configuração mais elaborada e sistemática do mundo físico, do que a teoria dos seus antecessores. Como mostra o trecho a seguir.

> [...] o espaço, ou o Vazio, tinha um direito igual com a realidade, ou Ser, para ser considerado existente. Ele concebeu o Vazio como um vácuo, um espaço infinito no qual movia um número infinito de átomos que constituíam o Ser (isto é, o mundo físico). Esses átomos são eternos e invisíveis; absolutamente pequeno, tão pequeno que seu tamanho não pode ser diminuído (daí o nome de atomon, ou "indivisível") ; absolutamente cheio e incompressível, como eles são sem poros e preencher inteiramente o espaço que ocupam; e homogênea, diferindo apenas em forma, disposição, posição e magnitude.[3]

[3] Disponível em: <www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Democritus.html>

Demócrito acreditava, segundo Boyer (2010, p. 55), que o surgimento do mundo e de tantos outros, foram resultados ordenados ou coagulações de átomos em grupos que apresentaram alguma semelhança. De acordo com O'Connor e Robertson (1999), a teoria atômica de Demócrito não abriga espaço para crer que o mundo tenha surgido por uma intervenção Divina. "Este não foi um mundo que surgiu através do design ou propósito de algum ser sobrenatural, mas sim um mundo que surgiu por necessidade, isto é, pela própria natureza dos átomos."

Apesar da teoria atômica de Demócrito fosse imbricada de leis matemáticas, a Idade Heroica foi lembrada, segundo Boyer (2010, p. 56), pelo legado matemático que abrangeu seis problemas, a saber, quadratura do circulo, duplicação do cubo, trissecção do ângulo, razão de grandezas incomensuráveis, paradoxo do movimento e validade dos números infinitesimais. Assim, essa época ficou marcada pela ousadia em atacar problemas imprescindíveis da matemática, por esse motivo ficou conhecida como Idade Heroica que compreendeu o período de Anaxágoras até Arquitas.

Arquitas de Tarento

"Para se tornar conhecedor de coisas que não se sabe, é preciso aprender com os outros ou descobrir por si mesmo. Agora a aprendizagem deriva de outra pessoa e é estrangeira, ao passo que descobrir é por e por si mesmo. Descobrir sem procurar é difícil e raro, mas com a busca é manejável e fácil, embora alguém que não sabe como procurar não pode encontrar." (ARQUITAS)[4]

[4] Disponível em: <http://www.somatematica.com.br/biograf/tarento.php>

Esse grego, segundo O'Connor e Robertson (1999), viveu em Tarentum (hoje Tarento), sul da Itália, por volta de 428 a.C. até 350 a.C. Fora matemático, estadista e filósofo também chegou a ser comandante chefe das forças em Tarento por sete anos, pois buscou formar uma aliança com as cidades gregas, com o objetivo de proteger os pitagóricos contra as ofensivas não-gregas.

De acordo com os autores, Arquitas foi aluno de Filolaus e defendia a filosofia dos Pitágoras, a qual tinha como premissa que a matemática canalizava para o entendimento de todas as coisas.

Arquitas, na concepção dos autores, foi um estudioso da matemática e considerava que as outras disciplinas dependiam desta. Ele dividiu a matemática em quatro ramos, ou seja, em geometria, aritmética, astronomia e música, o que ele chamou de quadrivium. Trabalhou com a média harmônica, nome dado por ele, com o interesse no problema de duplicação do cubo, que consistia em descobrir o lado de um cubo com o dobro do volume do cubo dado. Além disso, o grego fora considerado, por vezes, como o fundador da mecânica, pois inventou dois artefatos, a saber, uma ave mecânica e um chocalho para crianças.

Ainda sobre alguns dos feitos de Arquitas cabe ressaltar que ele

> Escreveu sobre as utilizações das médias aritméticas e geométricas, sobre métodos interativos para determinação de raízes quadradas e, também, sobre geometria analítica e introduziu o estudo da média harmônica na música. Com relação à música escreveu Harmonia, da qual conhecemos alguns fragmentos, e sempre a achou mais importante que a literatura no ensino das crianças, dentro de um núcleo educacional denominado de quadrivium, formado pelas aritmética, geometria, música e astronomia. Suas ideias contribuíram para que a Matemática se tornasse matéria básica na educação atual[5].

Arquitas de Tarento, segundo O'connor e Robertson (1999), via a política e a ética sobre o prisma da matemática, da seguinte forma:

---

[5] Disponível em: <http://www.somatematica.com.br/biograf/tarento.php>

> Quando o raciocínio matemático foi encontrado, ele verifica a facção política e aumenta a concórdia, pois não há vantagem injusta em sua presença, e a igualdade reina. Com o raciocínio matemático suavizamos as diferenças em nossas relações uns com os outros. Através dele os pobres tomam dos poderosos, e os ricos dão aos necessitados, ambos confiando nela para obter uma parte igual[6] [...].

O grego Arquitas fora um homem justo e prudente, porque considerou a razão a responsável pelo aprimoramento da sociedade. Era também bondoso e apreciava as crianças. (BOYER, 2010, p. 48)

Arquitas sobrepujou a Aritmética da geometria, pois acreditava na eficiência dos números e na filosofia pitagórica. Ele também afirmou que entre dois inteiros que estão na razão n : (n + 1) não poderia haver um número inteiro que fosse um média geométrica. Ainda mais, acreditava que a matemática era importante porque influenciava no aprendizado. Assim, a participação considerável da matemática no cenário da educação se deve, em boa parte, a Arquitas. (BOYER, 2010, p. 49)

Plalão (ou Plato)

"[...] que a realidade que o pensamento científico está procurando deve ser expressível em termos matemáticos, sendo a matemática o tipo de pensamento mais preciso e definido do qual somos capazes. O significado dessa ideia para o desenvolvimento da ciência desde o início até o presente tem sido imenso."[7]

[6] Disponível em: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Archytas.html>.
[7] Disponível em: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Plato.html>.

Um filósofo eminente da Grécia antiga que exerceu influência no mundo pagão e na ideologia da igreja Romana por intermédio de Santo Agostinho. Ele nasceu e morreu em Atenas (427 – 345 a.C.), fora aprendiz de Sócrates e adquiriu conhecimentos pitagóricos quando viajou pela África do Sul e pela Itália, os quais foram utilizados em suas doutrinas. Em 387 a.C., criou a célebre Academia que perdurou até o ano de 529 d.C., como o último centro da cultua helenista pagã, sendo fechada pelo imperador Justiniano. Platão teve interesse pela política, o que fez escrever sobre a arte de governar e concepção da Sociedade humana, além de ter participado do processo de ensinar a governar uma cidade, Siracusa. Em seus escritos sobre filosofia, cerca de 30 diálogos e inúmeras cartas, prevaleceu o uso do método da Dialética. (ROSA, 2012, p. 128-129)

Na República de Platão, escrita por volta de 360 a.C., encontram-se os ideias da classe dirigente esclavagista. Os membros da República, provavelmente, estudaram os quadrivium, composto pela aritmética, geometria, astronomia e música, para compreender a leis do universo. Neste cenário, discutiu-se sobre os fundamentos da matemática e da cosmogonia especulativa. Participaram dessa época da Academia de Platão os matemáticos Arquitas, Teeteto e Eudoxo. (STRUIK, 1992, p. 83)

Sobre Platão, Boyer (2010, p. 58) afirmou que "Embora o próprio Platão não tenha dado contribuição específica digna de nota a resultados matemáticos técnicos, ele era o centro da atividade matemática da época e guiava e inspirava o seu desenvolvimento."

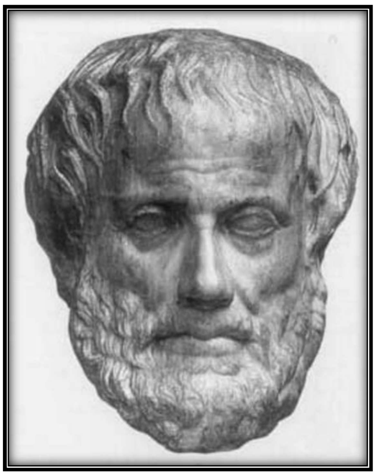
Nas portas da Academia de Platão estava a frase "Que ninguém que ignore a geometria entre aqui". Por se interessar pela Geometria, Platão ficou conhecido não como matemático e sim como o "criador de matemáticos." (BOYER, 2010, p. 58)

Na perspectiva de Boyer (2010), é provável que Arquitas tenha influenciado Platão a enveredar pela Matemática, quando visitou aquele em Sicília por volta de 388 a.C.. Nessa viagem, talvez, Platão obteve conhecimento acerca dos cinco sólidos regulares. Esses eram ligados aos quatro elementos de Empédocles (terra, fogo, ar e água). O culto dos pitagóricos ao dodecaedro fez com que Platão o considerasse o quinto e último sólido regular como uma representação do universo. Os poliedros regulares foram chamados de corpos cósmicos ou sólidos platônicos, pela maneira como Platão os utilizou para explicar os fenômenos científicos.

Aqui cabe ressaltar, de acordo com Boyer (2010, p. 59) que citou Proclo, que foram os Pitágoras que construíram as figuras cósmicas e Teeteto quem, a priori, escreveu sobre eles. E mais, consta no livro XIII dos Elementos de Euclides que os Pitágoras tinham conhecimento sobre três dos cincos sólidos regulares, mas foi somente por meio de Teeteto que o octaedro e icosaedro ficaram conhecidos.

A biografia de Teeteto e algumas das suas contribuições para a Matemática serão apresentadas adiante no contexto da evolução do tema, como um dos personagens partícipe na abordagem acerca das grandezas incomensuráveis.

Aristóteles



"Mas meu argumento não rouba de qualquer modo os matemáticos de seu estudo, embora nega a existência do infinito no sentido de existência real como algo aumentado a tal ponto que não pode ser passado completamente; Pois, como eles são, eles não precisam do infinito ou usá-lo, mas apenas exigem que a linha reta finita deve ser o tempo que quiserem. ... Portanto, não fará diferença para eles com o propósito de provas."[8]

O nascimento de Aristóteles ocorreu, segundo O'Connor e Robertson (1999), em 384 a.C. na Grécia em Estágira, Macedônia, e sua morte por volta de 322 a.C., em Chalcis, Eubéia, no território Grego. Era

[8] Disponível em: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Aristotle.html>.

filho do médico Nicômaco, o qual fora médico pessoal do rei da Macedônia, Amyntas III, e da Phaestis, sua mãe.

Aristóteles foi considerado o maior filósofo, pensador e cientista da Antiguidade e um dos mais sábios de todos os tempos. Ele redigiu textos sobre Física, Matemática, Biologia, Zoologia, Psicologia, Política, Lógica e Ética. Conviveu na Academia de Platão por um período de quase duas décadas. Também fundou uma escola chamada Liceu, em 334 a.C., após a morte de Platão. A escola de Aristóteles também fora administrada, após a morte deste, por Teofrasto (322 a 287 a.C.), depois por Estratão (287 – 270 a.C.), seguidos de Licon (270-228 a.C.), Crátetes e Arcesilau. Essa escola destinou-se ao estudo e a pesquisa em inúmeras áreas, sobretudo, nas Ciências Naturais, Astronomia e Física. (ROSA, 2012, p. 131)

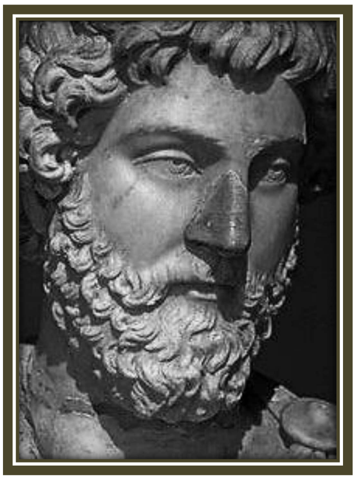
A obra de Aristóteles, segundo Rosa (2012), estava divida em dois tipos, a saber, uma para o grande público, escrita em forma de diálogo como o Eudemo, que abordava a imortalidade da alma, Protético, apresentava um elogio à vida contemplativa, Sobre a Filosofia, essa era contrária à teoria platônica das ideias. A outra obra se destinava aos alunos e abordava sobre Ciências e Filosofia.

No final do século V a.C., de acordo com Roque e Carvalho (2012, p. 61-62), Aristóteles, bem como Platão, procurou encontrar meios que apurassem os tipos de afirmação que uma pessoa podia fazer, para diferenciar o juízo falso do correto e, assim, determinar critérios de verdade. Nesse período, as opiniões eram vastas, por isso foi imperativo a criação de critérios que decidissem quem estava com a razão, o que para Platão serviu para distinguir os indivíduos perceptíveis de suas cópias. Tudo isso deveria estar fundamentado em definições inteligíveis. Frente a esse cenário, Aristóteles desenvolvera, a posteriori, uma lógica, onde os critérios de verdade estavam ligados com o nexo e ao rigor da demonstração, ou seja, num conjunto de conclusões as ideias deveriam convergir daquilo que foi falado anteriormente, sem que houvesse contestação do raciocínio. Assim, Aristóteles e Platão utilizaram da Matemática para erigir esta nova forma de pensamento.

Aqui cabe ressaltar que as concisas biografias apresentadas nessa seção são apenas um recorte na História da Matemática, onde procuramos enfatizar alguns dos feitos desses importantes homens que viveram na Grécia antiga e que se debruçaram em inúmeras tarefas com o fito de contribuir com seus conhecimentos para o avanço da Matemática e outras áreas do conhecimento.

A seguir são mencionadas as contribuições do grego Eudoxo de Cnido para o que foi a crise (ou não) dos fundamentos da matemática, a descoberta das grandezas incomensuráveis.

Eudoxo de Cnido (408 a.C - 355 a.C)



"Eu, de boa vontade, morreria queimado como Faetonte, se esse fosse o preço a pagar para alcançar o sol e saber qual a sua forma, tamanho e substância". EUDOXO (BOYER, 1996, p.57)[9]

Eudoxo, também chamado de Eudoxo de Cnido, nasceu em 408 a.C na antiga cidade grega de Cnido, na Ásia menor (atualmente é Knidos e pertence a Turquia), foi um matemático, astrônomo e filosofo que viveu durante o período clássico grego, que foi marcado por muitas disputas e invasões, que foi o pano de fundo político e social da Grécia nesse período (EVES, 2011).

O Eudoxo de Cnido foi discípulo de Platão e, também o primeiro a descrever satisfatoriamente as esferas celestes e um dos primeiros a

[9] Fonte: http://calculaveis.blogspot.com.br/2009/06/eudoxo.html

descrever o movimento do sol, da lua e dos cinco planetas conhecidos da época. Não são muitas as informações disponíveis sobre ele. Sabemos que ele esteve na cidade de Tarento, na Itália, onde estudou com um discípulo muito promissor de Pitágoras, cujo nome era Arquitas. E Por pertencer a uma família de pessoas que pendiam para a medicina, Eudoxo estudou Medicina na Sicília, antes de se dirigir para Atenas, onde ficou algum tempo participando de muitas discussões sobre filosofia e astronomia com Platão e outros estudiosos (só matemática)[10].

> A academia platônica de Atenas tornou-se centro matemático do mundo, e dessa escola provieram os principais mestres e pesquisadores durante os meados do quarto século a.C. Desses o maior foi Eudoxo de Cnido, que foi um discípulo de Platão e tornou-se o mais célebre matemático do seu tempo.
>
> (BOYER, 1996, p.61)

> Eudoxo, além disso, não era apenas um matemático e na história da ciência é conhecido como o pai da astronomia cientifica.
>
> (BOYER, 1996, p.64)

Eudoxo elaborou um trabalho que entraria para a história, registrou pela primeira vez que a duração do ano não era só de 365 dias, mas 365 dias e seis horas. Ele foi também o gerador da ideia de explicar o movimento dos planetas e das estrelas, por meio de uma composição de esferas concêntricas, deixando a terra no centro e variando os raios, cada uma variando uniformemente, em torno de um eixo fixo em relação a esfera posterior em torno da Terra. Esse tipo de sistema chegaria a um patamar superior, quase meio milênio depois, com os estudos de outro grego muito famoso, Ptolomeu, de Alexandria. (MacTutor History of Mathematics archive)[11]

Segundo Boyer (1996), Eudoxo foi com toda certeza o melhor matemático da idade helênica, contudo suas produções se perderam, mas sua influência é observada na maioria das obras de autores que o

---

[10] http://www.somatematica.com.br/biograf/eudoxo.php

[11] http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Eudoxus.html

sucederam. Ficou conhecido como um dos matemáticos mais brilhantes de sua época, por dominar muito as técnicas da geometria conhecida. Seus trabalhos merecem todos nossos créditos, quando elabora procedimentos matemáticos para calcular a área de superfícies. Assim, através desta sua técnica, que ficou conhecido como "Método da Exaustão", trabalha com figuras curvilíneas e trata os conceitos dos infinitésimos, o conceito de Soma Superior e Soma Inferior, o que muito influenciaria os criadores do cálculo integral.

> Segundo Arquimedes, foi Eudoxo quem forneceu o lema que hoje tem o nome de Arquimedes, as vezes chamado axioma de Arquimedes e que serviu de base para o "método da exaustão", o equivalente grego do cálculo integral.
>
> (Boyer, 1996, p.62, 63)

> O método de exaustão, que pode ser considerado como a resposta da escola platônica aos paradoxos de Zenão, comumente e creditado a Eudoxo (c. 370 a.C.). O método admite que uma grandeza possa ser subdividida indefinidamente e sua base e a proposição: Se de uma grandeza qualquer se subtrai uma parte não menor que sua metade, do restante subtrai-se também uma parte não menor que sua metade, e assim por diante, se chegará pôr fim a uma grandeza menor que qualquer outra predeterminada da mesma espécie.
>
> (EVES, 2011, p.419)

Assim, podemos representar o Método da Exaustão utilizando o cálculo da área do círculo. Para tanto, temos de inscrever e circunscrever polígonos regulares na figura geométrica no círculo. Percebe-se que à medida que os lados dos polígonos aumentam, temos uma convergência para a área real do círculo. Na maioria das vezes Eudoxo não escreveria suas conclusões acerca da matemática. Apenas transmitia seus resultados via oral. Contudo, estas conclusões passaram de pessoas a pessoas, de geração em geração, chegando aos homens do século XX. Dessa forma Eudoxo, através de sua genialidade, de sua conjectura, principalmente, em ter criado o método de exaustão, contribuiu de forma significativa e definitiva para o advento das ideias de Newton, Leibniz e Riemann, na elaboração do trabalho mais importante dos últimos tempos: o desenvolvimento das integrais[12].

> A primeira crise nos fundamentos da matemática ocorreu no século V a.C.; na verdade, essa crise não poderia ter ocorrido muito antes pois, como vimos, a matemática, como ciência dedutiva, não e anterior ao século VI a.C., tendo se originado talvez com Tales, Pitágoras e seus discípulos. A crise se desencadeou com a descoberta de que nem todas as grandezas geométricas da mesma espécie são comensuráveis; mostrou-se, por exemplo, que a diagonal e o lado de um quadrado não admitem uma unidade de medida comum. Como a teoria pitagórica das grandezas se baseava na crença intuitiva de que todas as grandezas da mesma espécie deveriam ser comensuráveis, a descoberta de segmentos incomensuráveis provocou grandes transtornos. Por exemplo, toda a teoria pitagórica das proporções, com todas as suas consequências, teria que ser jogada fora por infundada. A superação dessa crise não foi fácil nem rápida. Foi levada a efeito por volta de 370 a.C. pelo brilhante Eudoxo, cuja revisão da teoria das grandezas e proporções e uma das grandes obras-primas matemáticas de todos os tempos. A notável abordagem dos incomensuráveis de Eudoxo pode ser encontrada no quinto livro dos Elementos de Euclides e coincide em essência com a moderna teoria dos números irracionais dada por Richard Dedekind em 1872. Focalizamos essa primeira crise na Seção 3-5 e sua resolução na Seção 5-5. É bem possível que essa crise seja grandemente responsável pela subsequente instituição e adoção do método axiomático em matemática.
>
> (EVES, 2011, p.673)

Pelo exposto acima, Eudoxo, Contribuiu muito para o desenvolvimento da matemática. Ele elaborou fórmulas para calcular o volume dos cones e das pirâmides. Contudo a maior parte de seu esforço foi dedicada a estabelecer comparações entre segmentos. Elaborou, então, uma teoria das proporções na qual incluiu as chamados grandezas incomensuráveis, teoria que tantas discussões gerou no passado.

---

[12] http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Eudoxus.html

Personagens e grandezas comensuráveis e incomensuráveis

Tales de Mileto

Tales viveu, segundo Rosa (2012, p. 121), entre os períodos de 624 a 558 a.C., era estadista, filósofo, matemático e astrônomo. Foi o primeiro filósofo grego e fundador da Escola Jônica, além de ser, considerado por muitos, o pai da Filosofia e dos Sete Sábios da Grécia.

Entre as convicções de Tales, de acordo com Rosa (2012), acreditava que a terra era plana como se fosse um disco, via o sol e a lua como vapores abrasadores que navegavam pelo firmamento. Além disso, ele previu, de acordo com Heródoto citado pelo autor, o Eclipse solar em maio de 525 a.C. e via esse acontecimento como um fenômeno natural, sem que houvesse alguma intervenção divina. No campo da Geometria, teve destaque por demonstrar teoremas e fomentar um método que calculava a distância dos barcos até a margem. O que fez de Tales, segundo Cajori (2007, p.45), o primeiro a aplicar à Geometria a usos práticos. Esse autor também afirma que Tales inseriu o estudo da Geometria na Grécia.

Sobre Tales, Berlinghoff e Gouvêa (2010, p. 15) afirmam que

> De Tales se diz que foi a primeira pessoa a tentar demonstrar algum teorema geométrico, inclusive a afirmação de que a soma dos ângulos de um triângulo é igual a dois ângulos retos, que os lados de triângulos semelhantes são proporcionais e que um círculo é cortado ao meio por qualquer de seus diâmetros.
> (BERLINGHOFF e GOUVÊA, 2010, p. 15)

De acordo com Boyer (2010, p. 32), Tales organizou a geometria dedutiva e demonstrou os seguintes teoremas: "Um círculo é bissectado por um diâmetro"; "Os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais"; "Os pares de ângulos opostos formados por duas retas que se cortam são iguais"; "Se dois triângulos são tais que dois ângulos e um lado de um são iguais respectivamente a dois ângulos e um lado de outro, então os triângulos são congruentes".

Além desses feitos, nas concepções do mesmo autor, Diógenes Laércio, Plínio e Plutarco afirmaram que Tales descobrira a altura das pirâmides do Egito e para tal feito ela utilizou as sombras de um bastão e das pirâmides.

O fato supracitado ocorrera quando Tales, segundo Cajori (2007, p. 44), viajou pelo Egito, onde permaneceu por alguns anos e durante este tempo estudou com os sacerdotes daquele lugar sobre Física e Matemática. Com o tempo, Tales sobrepujou os seus mestres e ganhara admiração do rei Amasis quando mediu as alturas das pirâmides com auxílio de suas sombras. E, de acordo com Plutarco, "isto foi feito porque a razão do comprimento da sombra de um bastão na vertical para o comprimento da sombra da pirâmide é igual à razão entre as alturas do bastão e da pirâmide."

Sobre o procedimento de Tales no cálculo das alturas das pirâmides, Cajori (2007) conjectura que a solução do problema estivesse imbricada do saber sobre proporção e este era conhecido pelos egípcios por meio do papiro de Ahmes.

De acordo com Diógenes Laércio, citado por Cajori (2007, p. 44), "as pirâmides foram medidas por Tales de modo diferente; a saber, medindo o comprimento da sombra da pirâmide no momento em que o comprimento da sombra do bastão é igual a este."

Diante do exposto, Cajori (2007) diz que certamente as duas maneiras apresentadas foram usadas por Tales para determinar as alturas das pirâmides do Egito.

Frente a esse cenário, é possível que Tales de Mileto tenha se deparado com as grandezas incomensuráveis no enfrentamento de problemas que envolviam razões, como por exemplo, ao abordar razões entre segmentos de retas em um dos teoremas que levou o seu nome, conhecido como Teorema de Tales. "O Teorema de Tales é de importância fundamental em Geometria Plana, pois dele depende toda a teoria sobre semelhança de figuras; em particular, os teoremas sobre semelhança de triângulos." (ÁVILA, 1985, p. 8-9)

O autor do parágrafo precedente afirma que a descoberta dos incomensuráveis, na antiguidade, veio a colocar em dúvida a teoria de

Tales, entre outras, pois era preciso determinar uma forma de demonstrar esse teorema quando estivesse envolvido com segmentos incomensuráveis. Todavia, esse impasse somente foi resolvido com a definição eudoxiana para a igualde de razões, cuja abordagem não se preocupava com a distinção entre grandezas comensuráveis e incomensuráveis. Falaremos mais sobre essa definição quando tratarmos de Eudoxo.

A História da Matemática relata que as grandezas comensuráveis já fazia parte do conhecimento dos matemáticos da antiguidade, entretanto, com a descoberta das grandezas incomensuráveis, o cenário mudou frente às teorias que serviam de base de sustentação para a igualdade de razões. Sobre esse fato, alguns autores atribuem aos Pitágoras à descoberta dessas, quando trataram da razão entre o lado de um quadro e sua diagonal. Sobre este fato, entre outros, relacionado aos pitagóricos, abordaremos a seguir como um dos personagens que contribuiu direta ou indiretamente para evolução do tema, as grandezas incomensuráveis.

Pitágoras

Pitágoras viveu em Samos, uma cidade da Jônia, durante o período de 580 a 497 a.C., aproximadamente. Em Crotana, uma colônia grega no sul da Itália, erigiu a Escola de Pitágoras, onde abordava sobre Filosofia, Matemática e Ciências Naturais. A escola era tida como um confraria ligada por ritos secretos e religiosos. (ROSA, 2012, p. 122; EVES, 2011, p. 97)

A filosofia pitagórica, na concepção de Eves (2011, p. 97), creditava aos números todas as características do homem e da matéria. O que, segundo Rosa (2012, p. 123), explicara o entendimento universal ou a consonância dos divergentes, ou seja, seco com úmido; frio com quente; bom com mau; justo com injusto; masculino com feminino. Além disso, a proporcionalidade admitiria uma sistematização ordenada de opostos no mundo, isto é, no Cósmos, e este por possuir uma estrutura harmônica estaria presente em todas as coisas e também na alma.

Nos relatos de Proclo, onde citou Eudemo, foram creditadas aos Pitágoras duas descobertas, a saber, a construção dos sólidos regulares e a teoria das proporcionais. (BOYER, 2010, p. 38)

Esse autor relata ainda que Pitágoras teve conhecimento das médias aritmética, geométrica e harmônica na Mesopotâmia, sendo que esta última era conhecida como média subcontrária.

Ao matemático Pitágoras fora atribuído, segundo Eves (2011, p. 103), um teorema na Geometria sobre triângulos retângulos que levou o seu nome. Esse teorema era conhecido dos povos babilônios, entretanto, fora demostrado, a priori, por Pitágoras.

Na concepção de Eves (2011, p. 104), os números inteiros estavam relacionados aos processos de contar coleções finitas, no entanto, frente às atividades que exigiam outras habilidades matemáticas, como por exemplo, medir, foi preciso criar outros números chamados de racionais, os quais compreendiam todos os inteiros e as frações. Assim, para os matemáticos daquele tempo, todo número racional podia ser representado geometricamente por um ponto na reta. Todavia, Pitágoras percebeu que não havia nem um número racional na reta, que representasse a diagonal de um quadrado cuja medida do lado fosse um. Com isso, surgiam os números irracionais como uma descoberta dos Pitágoras.

A descoberta dos números irracionais, segundo Eves (2011, p. 105), trouxera um descrédito a filosofia pitagórica, a qual acreditava que tudo dependia dos números inteiros e qualquer grandeza poderia ser representada por um número racional.

A definição de proporção dos Pitágoras também ficou comprometida com a descoberta dos números irracionais, pois aquela acreditava que duas grandezas de mesma espécie sempre seriam comensuráveis, o que invalidou a teoria geral das figuras semelhantes dos pitagóricos.

Com a descoberta das grandezas incomensuráveis, quando não é possível expressar a razão de duas grandezas por meio de dois números inteiros, Boyer (2010) e Eves (2011) compartilham que houve uma crise nos fundamentos da matemática, todavia, Roque (2012, p. 122) contrapõe às ideias desses dois autores, ao afirmar que

> A possibilidade de existirem grandezas incomensuráveis não teria representado, assim, nenhum tipo de escândalo ou crise no fundamento da matemática grega. Ao contrário, sua existência seria uma circunstância positiva, pois teria sido responsável pelo desenvolvimento de novas técnicas matemáticas para lidar com razões e proporções.
> (ROQUE, 2012, p. 122)

De posse do trecho supracitado, é razoável acreditar que, de certa forma, os Pitágoras contribuíram para o fomento de ideias, a posteriori, que viessem a contornar a problemática das incomensuráveis, visto que esta teve origem na escola pitagórica. Outro fato é que a teoria pitagórica das razões se mostrava inadequada para enfrentar as grandezas incomensuráveis, e que, presumidamente, foi preciso criar outras formas para lhe dar com tais grandezas, como foi o caso da antifairese, utilizada por Teeteto e a definição de Eudoxo para a teoria das proporções.

As contribuições de Teeteto para Matemática e para as grandezas incomensuráveis serão apresentadas a seguir, além disso, fora um dos personagens da História da Matemática que, segundo Boyer (2010, p. 59), escreveu um vasto estudo acerca dos cinco sólidos regulares.

Eudoxo

Observando à teoria das proporções, a definição elaborada por Eudoxo permitia a comparação de comprimentos ou grandezas incomensuráveis (irracionais) de maneira semelhante a multiplicação em cruz. Para a matemática da época, uma das grandes dificuldades era que certas grandezas não eram comensuráveis.

> A descoberta de grandezas incomensuráveis foi feita pelos pitagóricos; e representou um momento de crise na Matemática [...]
> [...] dizer que a razão de dois segmentos A e B é a fração m/n significa dizer que existe um segmento δ tal que A = mδ e B = nδ. Ora, com a descoberta dos

> incomensuráveis, ficou claro que isso nem sempre seria possível. Como então poderia o número ser o fundamento de todos os fenômenos naturais, se nem sequer eram suficientes para exprimir a razão de dois segmentos?
>
> (ÁVILA, 2005, p.53)

Segundo Ávila (2005), hoje é fácil de compreender que a crise provocada pela descoberta dos incomensuráveis seria resolvida com a entrada das frações e dos números irracionais. Contudo, os gregos trilharam outro caminho, trabalhando um modo de se expressar em igualdade de razões mesmo as grandezas incomensuráveis. Com isso, Eudoxo cria a teoria das proporções que só dependia dos números naturais.

> "O Livro V e uma exposição magistral da teoria das proporções de Eudoxo. Foi por meio dessa teoria, aplicável tanto a grandezas comensuráveis como a grandezas incomensuráveis, que se resolveu o "escândalo logico" decorrente da descoberta dos números irracionais pelos pitagóricos."
>
> (EVES, 2011, p.163)

Eudoxo, com a sua definição de igualdade de duas razões, ele cria a teoria da proporções, apenas com uso de números naturais, a pesar que tenha sido uma solução brilhante da crise, segundo Ávila (2005), ela atrasou por mais de um milênio o desenvolvimento da Aritmética e Álgebra, sobretudo, porque submeteu essas áreas ao estudo da Geometria, como é mostrado muito bem na exposição feita nos Elementos de Euclides.

Eudoxo morreu em 355 a.C. em Cnido, sua cidade natal, apesar de suas obras na matemática, astronomia e até na geografia não terem chegado aos dias de hoje, é sabido por estudiosos que o sucederam nesses campos, que Eudoxo escreveu Sobre os contatos de um círculo e de uma esfera, Sobre a Geometria, Sobre os números e Sobre as linhas e os sólidos irracionais (Rosa, 2012).

Segundo Rosa (2012), competiu a Eudoxo a demonstração do famoso Teorema de Hipócrates de Quíos – que aparece no livro XII de Os Elementos de Euclides – sobre a proporcionalidade das áreas dos círculos aos quadrados dos seus diâmetros. A contribuição de Eudoxo para a

Matemática foi extraordinária, porque não se limitou apenas a demonstração de teoremas, à elaboração da Teoria das Proporções e à demonstração do método de exaustão; esclareceu também as proporções do segmento áureo e criou o método formal de apresentar teoremas e axiomas geométricos. Eudoxo é, igualmente, famoso na Astronomia, pois foi o autor da Teoria das Esferas Homocêntricas, conceito astronômico de grande influência durante os 1800 anos seguintes e influenciou inúmeros astrônomos ao desenvolvimento dessa ciência.

Teeteto

Nas concepções dos autores O'Connor e Robertson (1999), Teeteto viveu no período entre 417 a 369 a.C em Atenas na Grécia e, de acordo com Boyer (2010, p. 59), era amigo de Platão e filho de um dos mais ricos patrícios da Ática. Esse autor relatou também que Teeteto desenvolvera um estudo extenso sobre os cinco sólidos regulares e fora o primeiro a escreve sobre eles, visto que os Pitágoras só conheciam apenas três desses sólidos.

Com a morte de Teeteto, segundo Boyer (2010), Platão homenageou o amigo ao atribuir a palavra "Teeteto" ao nome de um diálogo que aconteceu entre Teeteto, Sócrates e Teodoro. Na ocasião se discutiu sobre as grandezas incomensuráveis. E mais

> Supõe-se que essa discussão tomou mais ou menos a forma que encontramos no início do livro X de *Os elementos*. Aqui são feitas distinções não só entre grandezas comensuráveis e incomensuráveis, mas entre aqueles que, sendo incomensuráveis em comprimento, são ou não são incomensuráveis em quadrado. Raízes como $\sqrt{3}$ e $\sqrt{5}$ são incomensuráveis em comprimento, mas não são comensuráveis em quadrado, pois seus quadrados têm razão 3 e 5. As grandezas $\sqrt{1+\sqrt{3}}$ e $\sqrt{1+\sqrt{5}}$, por outro lado, são incomensuráveis tanto em comprimento quanto em quadrado.

(BOYRE, 2010, p. 59)

Outra menção foi atribuída a Teeteto, com base nas concepções dos historiadores Freudenthal, Knorr e Fowler, citada por Roque (2012, p. 119), no que tange o fomento de um método chamado antifairese, onde era utilizado em situações que envolviam a prática com razões, isto durante o período do século IV.

Fowler, citado por Roque (2012), afirma que no lapso pré-Euclides era comum o uso da teoria de razão por meio da antifairese sem a verificação de proporções.

A respeito da etimologia e do método antifairese, Roque (2012, p. 119) destaca:

> A palavra antifairese vem do grego e significa, literalmente, "subtração recíproca". Na álgebra moderna, o procedimento é semelhante ao conhecido como "algoritmo de Euclides" e sua função é encontrar o maior divisor comum entre dois números. O procedimento das "subtrações mútuas", ou "subtrações recíprocas", consiste em: dados dois números (ou grandezas), em cada passo subtrai-se, do maior, um múltiplo do menor, de modo que o resto seja menor do que o menor dos dois números considerados. O método da antifairese descreve uma série de comparações. (Grifo da autora)
>
> (ROQUE, 2012, p. 119)

O método supracitado, segundo a autora, podia ser aplicado para comprar dois segmentos de reta, de tal forma que o último segmento encontrado, após as mútuas subtrações, coubesse um número inteiro de vezes em cada um dos segmentos anteriores. Dessa forma, era possível aproximar a geometria à aritmética, pois cada segmento teria uma medida. Assim, a semelhança entre figuras podia ser vista pelo viés da proporção aritmética, ou seja, pela igualdade das razões entre números. Todavia, essa abordagem não era válida diante das grandezas incomensuráveis; o que reduziu a eficácia da antifairese somente para casos particulares, ou seja, com as razões comensuráveis.

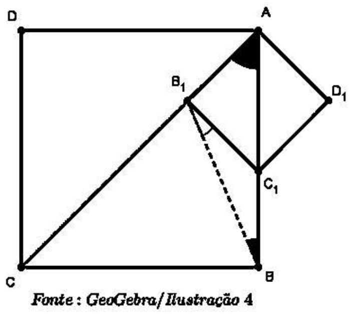
O historiador Fowler destacou que a técnica da antifairese foi utilizada para fomentar uma teoria de razão que não dependesse da proporção. Para esse historiador, a tradição grega perpassava por três formas de razão, a saber, uma da teoria musical, outra da astronomia e uma outra da antifairese.

Roque (2012) destaca que a tomada de conhecimento sobre as grandezas incomensuráveis ocasionou um cenário propício para avanços na Matemática e defende que não houve uma crise, contrapondo os relatos de alguns textos históricos que defendem que a crise existiu.

Em última análise, Roque (2012) defende que a incomensurabilidade tenha sido descoberta por meio de uma abordagem geométrica na antiguidade por volta dos anos 430 a 410 a.C., e esta descoberta teria sido difundida pelos trabalhos de Teeteto. Seus trabalhos mostraram que duas razões são incomensuráveis em um problema que usou o lado para medir a diagonal de um quadrado.

Sobre este fato, Roque (2012, p. 127) apresenta o procedimento da antifairese com algumas adaptações à linguagem atual, onde mostra que o lado e a diagonal do quadrado são grandezas incomensuráveis, a saber.

> Seja o quadrado ABCD de lado AB e diagonal AC. Suponhamos que AB e AC sejam comensuráveis, logo existe um segmento, AP, a unidade de medida, que mede AB e AC. Em primeiro lugar, queremos construir um quadro menor que ABCD cujo lado esteja sobre a diagonal AC e cuja diagonal esteja sobre o lado AB.
>
> Seja B_1 um ponto em AC tal que $B_1C = AB$. Marcando um ponto C_1 sobre AB (com B_1C_1 perpendicular a AC), podemos construir um quadrado $AB_1C_1D_1$ de lados $AB_1 = B_1C_1$ e diagonal AC_1 sobra AB. Isso é possível porque $C\hat{A}B = B_1\hat{A}C_1$ é a metade de um ângulo reto; e $A\hat{B}_1C_1$ é um ângulo reto. Logo, $A\hat{C}_1B_1$ é ½ reto; e o triângulo AB_1C_1 é isósceles, com $AB_1 = B_1C_1$.



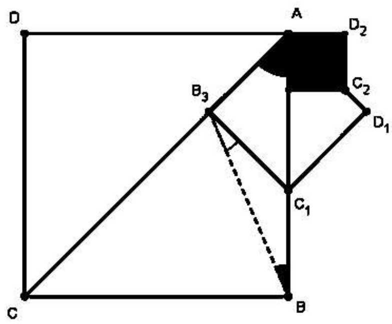
Fonte: GeoGebra/Ilustração 4

Mas como, por construção, $BC = B_1C$, o triângulo BCB_1 é isósceles e temos que $B_1\widehat{B}C = B\widehat{B}_1C \Longrightarrow B_1\widehat{B}C_1 = B\widehat{B}_1C_1$ (pois $C\hat{B}C_1$ e $C\hat{B}_1C_1$ são retos). Isso significa que o triângulo B_1C_1B também é isósceles e concluímos que $BC_1 = B_1C_1$. Podemos, assim, exprimir o lado e a diagonal do novo quadrado, AB_1 e AC_1, em função do lado e da diagonal do quadrado inicial, AB e AC:

$AB_1 = AC - B_1C = AC - AB$

$AC_1 = AB - BC_1 = AB - B_1C_1 = AB - AB_1 = AB - AC + AB = 2AB - AC$

Pela igualdade exposta acima, se AB e AC forem comensuráveis com relação à unidade de medida AP, o lado e a diagonal do quadro menor, AB_1 e AC_1, também serão. Para concluir a demonstração, precisamos evidenciar que, do mesmo modo que construímos $AB_1C_1D_1$ sobre o lado e a diagonal de ABCD, podem-se construir novos quadrados, menores, dessa vez sobre o lado e a diagonal do quadrado pequeno $AB_1C_1D_1$.



Fonte : GeoGebra/Ilustração 5

Supondo que o lado e a diagonal do novo quadrado são, respectivamente, AB_2 e AC_2, como na Ilustração 5, temos de mostrar que esses segmentos podem ser tornados menores do que qualquer quantidade dada. Isto é, repetimos o procedimento até obter um quadrado de lado AB_n e diagonal AC_n cujos comprimentos são menores do que a unidade AP (quantidade dada), ainda que este seja muito pequena.

Feito isso, continuando o processo indefinidamente, para qualquer que seja a escolha inicial do segmento AP, poderemos obter um quadrado de lado AB_n e diagonal AC_n, comensuráveis em relação a AP, tal que se chegue a $AB_n < AC_n < AP$, o que será uma contradição, uma vez que AP é unidade de medida. Se escolhermos AP menor do que a escolha inicial, teremos o mesmo resultado, logo, não será possível encontrar uma medida comum entre o lado e a diagonal: eles são incomensuráveis. (ROQUE, 2012, p. 127)

Acerca da antifairese entre o lado e a diagonal do quadro com feição geométrica, Roque (2012) afirmou que esse modo de fazer surgiu, provavelmente, nos séculos V e IV a.C., todavia a execução do procedimento não estava vinculada a demonstração da incomensurabilidade.

Outros fatos surgiram a respeito da descoberta dos incomensuráveis, segundo a perspectiva dessa autora, um deles atribuído a Euclides por meio da aritmética. Outro a Aristóteles, no final do século IV a.C., quando se referia à prova da incomensurabilidade por contradição ao afirmar que "se o lado e o diâmetro são considerados comensuráveis um em relação ao outro, pode-se deduzir que os números ímpares são iguais aos pares; essa contradição afirma, portanto, a incomensurabilidade das duas grandezas." (ROQUE, 2012, p. 131)

Na Matemática grega pré-Euclide, os problemas geométricos, de acordo com Roque (2012), eram calculados por meio da utilização de números. Com a descoberta das incomensuráveis, houve o rompimento entre as grandezas e os números. Assim, a reorganização da Matemática só ocorrera depois de muito tempo com a teoria das proporções de Eudoxo, o qual mostrou uma solução que erradicou a dificuldade em representar as razões entre grandezas incomensuráveis.

Sobre a teoria das proporções de Eudoxo para solucionar o problema das grandezas incomensuráveis, ela será abordada com mais detalhes quando voltarmos a falar desse matemático e de sua valiosa contribuição para o avanço da Matemática e de como sua teoria influenciou outras mentes na criação da teoria dos números.

Abordagens de autores que se debruçaram sobre o estudo das grandezas incomensuráveis, com o fito de verificar outros olhares acerca do tema e como estes podem auxiliar no ensino da matemática.

Outros olhares sobre as grandezas incomensuráveis

O trabalho de Gonçalves e Possani (2009) sobre a descoberta das grandezas incomensuráveis relata que os textos dos livros de História da

Matemática e de Matemática trazem duas versões contraditórias com relação ao estudo dos incomensuráveis na Grécia Antiga. Uma versão defende que houve uma crise na matemática, pois os incomensuráveis contrariava a filosofia pitagórica que acreditava que tudo podia ser explicado ou representado pelos números. A outra defende que não houve crise com a descoberta dos incomensuráveis, pelo menos não há registros nas fontes confiáveis sobre a ocorrência da mesma.

Gonçalves e Possani (2009) citam no decorrer do texto alguns trechos de autores que viram a descoberta dos incomensuráveis como uma crise na história da matemática. Esses autores são Boyer (1989), Eves (1969), Kline (1972) e Tannery (1930). Eles atribuíram a descoberta dos incomensuráveis aos Pitágoras, sobretudo ao Hipaso ou aos primeiros pitagóricos.

Contrapondo as ideias dos autores supracitados que defenderam a existência da crise na matemática, Gonçalves e Possani (2009) arrolam alguns pensadores que sustentaram a não ocorrência da crise, entre eles, citamos Grattan-Guinness (1997) e Fowler (1999). Aquele afirmou que Aristóteles não mencionou a existência de crise na Grécia, pelo contrário, enfatizou que os gregos vivenciaram um período de avanços na Matemática; enquanto este, apoiado nos trabalhos de Burkert (1962) e de Knnor (1975), defendeu através de alegação que a descoberta dos incomensuráveis não ocasionou uma crise na Matemática.

Por fim, Gonçalves e Possani (2009) em suas considerações afirmaram que a crise dos incomensuráveis não ocorreu e ela só existiu por falta de um rigor na interpretação das fontes de informação. Alegaram também que esse mal entendido não ocorre apenas na História da Matemática, mas em outras áreas do conhecimento, como por exemplo, na História da Literatura.

Para os autores a versão adequada da história da incomensurabilidade, pelo rigor historiográfico, é de que não houve uma crise no fundamento da Matemática que envolvesse os Pitágoras. Todavia, os trabalhos anteriores que defenderam a existência da crise não devem ser considerados inválidos, pois a história dos incomensuráveis foi escrita por meio de aproximações, como todo fato histórico, sendo estas aprimoradas com novas pesquisas, mas que não tornam as anteriores menos importantes.

No trabalho de Ávila (1984) sobre grandezas incomensuráveis e números irracionais, foi defendido que houve uma crise sustenta na descoberta das grandezas incomensuráveis pelos pitagóricos durante os anos de 450 a 400 a.C., quando esses demonstraram, por meio geométrico, que o lado e a diagonal de um quadrado eram segmentos incomensuráveis.

De acordo com o autor, a descoberta supracitada representou um revés na filosofia pitagórica, a qual era arraigada na crença de que os números representavam todos os fenômenos presentes na Geometria, na Astronomia, na Música e na Física. Os Pitágoras conheciam apenas os números naturais ou inteiros e não consideravam as frações como números, pois elas estavam representadas nas razões entre grandezas de mesma espécie. Com a descoberta dos incomensuráveis, eles perceberam que os números naturais eram insuficientes para relacionar duas grandezas. E mais, o paradoxo de Zeno também contribuiu para um cenário de crise na Matemática, onde a consonância da Geometria com os números ficou comprometida.

Ávila (1984) afirmou que a crise instalada na Matemática só foi resolvida de fato com a criação da teoria dos números reais no século XIX, principalmente, pelos trabalhos do matemático alemão Richard Dedekind (1831-1916). No entanto, o autor mencionou que a crise dos incomensuráveis fora resolvida, a priori, por Eudoxo na primeira metade do 4° a.C., quando esse fomentou uma teoria das proporções que superou a dificuldade das grandezas incomensuráveis ao utilizar somente números inteiros positivos.

Os recortes dos trabalhos de Gonçalves, Possani e Ávila apresentados aqui tentaram mostrar os olhares desses autores sobre o tema das grandezas incomensuráveis e suas perspectivas com relação à existência ou não de uma crise no fundamento da Matemática.

Assim, é relevante que o ensino de Matemática esteja pautado na História da Matemática e, com isso, subsidiar o trabalho do professor em sala de forma consistente em relação à veracidade dos fatos, pois "[...] nenhuma outra disciplina perde mais do que a matemática quando dissociada de sua história" (GLAISHER, apud CAJORI, 2007, p. 2)

Considerações finais

Neste trabalho procuramos ressaltar a importância do ensino das grandezas comensuráveis e incomensuráveis no Ensino Básico, bem como, mostrar que é possível ensinar os referidos conteúdos, levando em consideração o seu desenvolvimento e seus construtores ao longo da história de forma prazerosa e atraente. Dessa forma, o texto proposto é um recorte que têm como objetivo auxiliar a prática pedagógica docente por meio da utilização da história da matemática como recurso didático nas aulas de matemática, em especial de nos estudos das proporções, com intuito de facilitar o processo da aprendizagem dos alunos.

Atualmente é consenso reconhecer que o professor tem um papel fundamental no processo de aprendizagem, uma vez que cabe a esse o papel de se preocupar tanto com a aprendizagem dos conteúdos matemáticos quanto com o desenvolvimento a capacidade geral de aprender. É necessário explorar sua capacidade de equilibrar momentos de fazer com momentos de refletir, auxiliando os aprendizes a construírem os conceitos matemáticos.

Aprender Matemática está intimamente liga com o fazer Matemática, e isso se dá por meio da elaboração de metodologias matemáticas intencionais, que envolvam os mais diversos saberes, pois é assim que as pessoas adquirem conhecimento. Acreditamos que uma das maneiras de ajudar nessa empreitada é utilizar a história da matemática como um recurso didático nas aulas de matemática, e por meio do diagrama aqui apresentado, dispomos de uma grande ferramenta potencial, no que diz respeito a aprendizagem que ele querer transmitir.

Nessa ótica, acreditamos que novas pesquisa devem ser feita, a fim de melhorar este recurso pedagógico, no que diz respeito a sua utilização na escola, para assim, contribuir para a formação tanto dos alunos quanto dos professores, não só em respeito ao ensino-aprendizagem, mas também na sua formação como cidadão.

Referências

ARQUITAS de tarento. Disponível em:
< http://www.somatematica.com.br/biograf/tarento.php>. Acesso em: 04 abr 2017.

ÁVILA, Geraldo. Eudoxo, dedekind, números reais e ensino de matemática. Revista do professor de matemática, São Paulo, n. 7, p. 5-10, 2º semestre. 1985.

______. Grandezas incomensuráveis e números irracionais. Revista do professor de matemática, São Paulo, n. 5, p. 6-11, 2º semestre. 1984.

______. Análise matemática para licenciatura. 2.ed. São Paulo: Edgar Blücher, 2005.

BERLINGHOFF, William P.; GOUVÊA, Fernando Q. A matemática através dos tempos. 2. ed. São Paulo: Blucher, 2010.

BOYER, Carl B. História da matemática. 3. ed. São Paulo: Blucer, 2010.

CAJORI, Florian. Uma história da matemática. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda, 2007.

CHAQUIAM, M. Um diagrama, um texto. In: MENDES, I. A.; CHAQUIAM, M. **História nas aulas de Matemática**: fundamentos e sugestões didáticas para professores. Belém: SBHMat, 2016.

CHAQUIAM, M. **História da matemática em sala de aula**: proposta para integração aos conteúdos matemáticos. Coleção

História da Matemática para Professores. Natal: Livraria da Física, 2015. 82 p.

CHASSOT, Attico. A ciência através dos tempos. São Paulo: Moderna, 1994.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Educação Matemática:** da teoria à prática. Campinas/SP: Papirus, 2003.

EVES, Howard. **Introdução a História da Matemática**. Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2004.

GONÇALVES, Carlos Henrique B.; POSSANI, Claudio. Revisitando a descoberta dos incomensuráveis na grécia antiga. Revista matemática universitária. Rio de Janeiro. n. 47, p. 16-23, dezembro. 2009.

MOL, Rogério Santos. Introdução à história da matemática / Rogério S. Mol. – Belo Horizonte: CAED-UFMG, 2013.

O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. Archytas de tarentum. In: Arquivo história da matemática. Disponível em: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Archytas.html>. Acesso em: 04 abr 2017.

______. Aristóteles. Arquivo história da matemática. Disponível em: < http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Aristotle.html >. Acesso em: 04 abr 2017.

______. Demócrito de abdera. Arquivo história da matemática. Disponível em: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Democritus.html>. Acesso em: 04 abr 2017.

ROQUE, Tatiana. História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

ROQUE, Tatiana; CARVALHO; João Bosco Pitombeira. Tópicos da história da matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

ROSA, Carlos Augusto de Proença. História da ciência: da antiguidade ao renascimento. 2. ed. Brasília: 2012.

SOUSA, Rainer Gonçalves. "Grécia Período Clássico"; Brasil Escola. Disponível em <http://brasilescola.uol.com.br/historiag/grecia-periodo-classico.htm>. Acesso em 10 de abril de 2017.

STRUIK, Dirk J. História concisa das matemáticas. 2. ed. Lisboa-Portugal: Gradiva, 1992.