GEOMETRIA EUCLIDIANA E NÃO-EUCLIDIANAS
composição histórica

Adan Rodrigo Vale Pacheco
Fábio Barros Gonçalves
Miguel Chaquiam

Introdução

O modo de conceber a aprendizagem, o planejamento e plano pedagógico, os tempos das aprendizagens, as finalidades dos conteúdos, a transposição didática, dentre outros, são fatores que, de alguma forma, estão relacionados com a escolha metodológica do professor no processo de ensino e de aprendizagem.

Essa escolha transcende o simples fato de considerar apenas o conteúdo a ser ensinado, pois é necessário adequá-lo aos sujeitos envolvidos no processo, partindo de uma intencionalidade pré-estabelecida.

Neste sentido, percebe-se que as metodologias têm responsabilidade sobre a aprendizagem, pois influenciam nas representações elaboradas pelos estudantes as quais podem ser de determinismo e/ou de possibilidades, e esse olhar dependerá de como o conhecimento será mediado pelo professor.

Com relação ao processo de ensino e de aprendizagem da Matemática, não existe um caminho único e melhor. Conhecer variadas possibilidades é essencial para a prática docente visando potencializar esse processo. Dentre elas, compreendemos ser relevante aqui destacar: a História da Matemática, as Tecnologias da Informação e Comunicação, os Jogos, a Resolução de Problemas, a Etnomatemática e a Modelagem Matemática, entretanto, neste trabalho será abordado uma proposta de uso da História da Matemática no ensino.

A História da Matemática, como um recurso pedagógico, permite contextualizar o conhecimento, situando-o e relacionando-o com variados contextos sociais nos quais foram concebidos, afinal, eles geralmente respondem as demandas historicamente situadas num tempo e espaço.

D'Ambrosio (2002) *apud* Almeida (2013), resume de forma clara e concisa essa ideia nos seguintes dizeres:

> [...] em todas as culturas encontramos manifestações relacionadas, e mesmo identificadas, com o que hoje se chama matemática (isto é, processos de organização, de classificação, de contagem, de medição, de inferência), geralmente mescladas ou dificilmente distinguíveis de outras formas [de conhecimento], que hoje são identificadas como Arte, Religião, Música, Técnica, Ciências. Em todos os tempos e em todas as culturas, Matemática, Artes, Religião, Música, Técnicas, Ciências foram desenvolvidas com a finalidade de explicar, de conhecer, de aprender, de saber/fazer e de predizer (artes divinatórias) o futuro. Todas aparecem mescladas e indistinguíveis como forma de conhecimento, num primeiro estágio da história da humanidade e na vida pessoal de cada um de nós.
> (D'AMBROSIO, 2002, p.60 *apud* ALMEIDA, 2013, p.24)

Segundo Almeida (2013, p.24), "todas essas formas de conhecimento são produtos do pensamento racional do ser humano e são consideradas como expressão do comportamento do homem moderno".

Nesse sentido, a História da Matemática como um recurso para o ensino de Matemática, não deve ficar limitada à descrição de fatos ocorridos no passado ou a mera apresentação da biografia de matemáticos importantes. É necessário abordar com os estudantes a história do conhecimento matemático, sua evolução, o contexto histórico, social e político no qual determinado conteúdo matemático emergiu, assim como as principais dificuldades enfrentadas para a formalização e aceitação, pelas sociedades, desse conhecimento ao longo do tempo.

As geometrias não-euclidianas, especificamente a hiperbólica e a elíptica, foi o tema escolhido por nós para ser abordado neste trabalho. Segundo Hansen (1997) *apud* Ribeiro (2012, p.30), "[...] embora a história das geometrias não-euclidianas envolva ideias geométricas e construções importantes e úteis, raramente é considerada no ensino contemporâneo da geometria." Ou seja, raramente é fomentada a discussão em sala de aula com os estudantes da educação básica e até mesmo do ensino superior brasileiro, da existência de outras geometrias diferente da euclidiana.

Além disso, Ribeiro (2012) diz que:

> As pesquisas brasileiras têm apontado como produtiva a possibilidade de uma apresentação simultânea de conceitos básicos de geometrias não-euclidianas e euclidiana na Matemática escolar. Mesmo quando as pesquisas não afirmam objetivamente esta possibilidade dão a entender pelo contexto. Bonete (2000), Pataki (2003), Martos (2002), Reis (2006) e Marqueze (2006) são autores que apresentam em suas dissertações propostas de trabalho com as geometrias não-euclidianas para o público escolar e, em todas elas, são ressaltados aspectos positivos de tais experiências.
> (RIBEIRO, 2012, p. 32)

Desta forma, acreditamos ser relevante levar ao conhecimento dos estudantes da educação básica não só a geometria euclidiana, mas também as geometrias não-euclidianas, pois estas possibilitarão novos olhares e novas interpretações a respeito da geometria euclidiana, assim como de outros contextos.

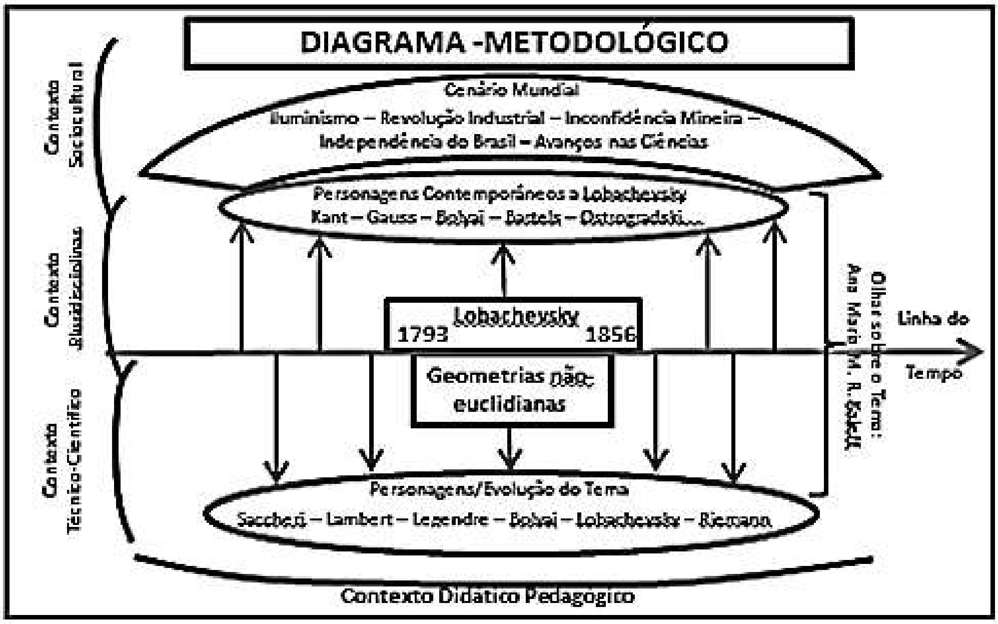
Assim, este trabalho tem como objetivo apresentar uma proposta de inserção das geometrias não euclidianas na educação básica, com a utilização da História da Matemática de acordo com o modelo proposto por Chaquiam (2017).

Atualmente são trabalhadas várias propostas de ensino relacionadas à inserção do uso da história da matemática em sala de aula. A abordagem didática adotada neste artigo foi proposta por Mendes e Chaquiam (2016). Nela, os autores, destacam a importância de revisitar os momentos históricos dos personagens que contribuíram para o desenvolvimento das noções matemáticas que se pretende ensinar com a finalidade de promover nos alunos o estímulo para o estudo, pesquisa e criticidade que culminem em produção de conhecimento durante sua atividade escolar.

Tal abordagem pressupõe uma aproximação entre o conteúdo e o cenário mundial da época, contemporâneos do matemático em destaque, assim como daqueles que contribuíram para a evolução das ideias matemáticas em estudo. Portanto, nossa intenção, não é apenas destacar conteúdos matemáticos, nomes e datas, mas fomentar debates sobre as origens, evolução e formalização de conceitos matemáticos como estratégia para o ensino e aprendizagem de conteúdos matemáticos.

A partir desse entendimento, utilizamos a metodologia proposta por Chaquiam (2017) que consistiu na construção de um diagrama que orientou a elaboração de um texto sobre as Geometrias associada a personagens matemáticos, um central, Lobachevsky, e outros que contribuíram para evolução do tema, assim como, contemporâneos do personagem em destaque, Lobachevsky, e o cenário mundial da época conforme Figura 1, a seguir.

Figura 1: **Diagrama-Metodológico – Geometrias**



Fonte: Adaptado de Chaquiam (2016)

Como pode ser observado no diagrama metodológico, seus componentes estão distribuídos em três contextos, quais sejam: sociocultural, pluridisciplinar e técnico-científico.

Dessa forma, o artigo percorrerá a história da humanidade da época, os personagens contemporâneos ao personagem em destaque, o personagem em destaque, personagens que contribuíram para a evolução do tema e suas respectivas contribuições e nosso ponto de vista sobre o personagem em destaque ou tema trabalhado. Essa ordem, segundo Mendes e Chaquiam (2016, p. 99), pode proporcionar uma visão geral que se inicia em um contexto sociocultural, perpassa por um contexto pluridisciplinar e finaliza no contexto técnico-científico, com localização em tempo e espaço do personagem principal e evolução do conteúdo matemático.

Importante destacar, seguindo orientação de Mendes e Chaquiam (2016, p. 95), que a ordem descrita anteriormente para elaboração do texto didático-pedagógico não foi a mesma para a constituição do diagrama metodológico. Neste, iniciamos com a escolha do tema, em seguida, trabalhamos a evolução do tema e identificação dos personagens que contribuíram para o tema; elegemos um personagem principal; identificamos os contemporâneos do personagem evidenciado; fizemos um recorte na história da humanidade para descrever o cenário mundial e finalizamos identificando os pesquisadores que emitiram seu ponto de vista sobre o personagem destacado ou tema.

O personagem destacado será Lobachevsky por ter sido o primeiro a publicar sua teoria sobre Geometria Não Euclidiana em 1829 (EVES, 2004, p.543). Ele viveu no período compreendido entre 1793 e 1856. Por este motivo, faremos um recorte temporal que contemple os séculos XVIII e XIX, mais precisamente do ano 1750 a 1860.

Dessa forma, o passeio pelas geometrias se justifica, segundo Fonseca et al (2009, p.92), por seus aspectos utilitários e formativos. Utilitários porque evidencia os aportes que os recursos geométricos oferecem à resolução de problemas da vida cotidiana, ao desempenho de determinadas atividades profissionais ou à própria compreensão de outros conteúdos escolares. E formativo, porque é relevante assinalarmos o papel da Geometria como veículo para o desenvolvimento de habilidades e competências tais como a percepção espacial e a resolução de problemas escolares ou não, uma vez que ela oferece aos alunos "as oportunidades de olhar, comparar, medir, adivinhar, generalizar e abstrair" (SHERARD III, 1981 apud Fonseca et al, 2009, p. 92).

Mendes e Chaquiam (2016, p. 88) ressaltam que esta abordagem não tem como objetivo apresentar e discutir de forma detalhada e aprofundada indagações acerca de determinado tema ou sobre a história da matemática, mas, subsidiar o leitor com caminhos que possibilitem a construção de uma história, articulada ao desenvolvimento histórico dos conteúdos matemáticos, bem como a demarcação do tempo e espaço na história da humanidade para extrapolar a visão internalista da matemática, tendo em vista sua utilização em sala de aula durante o desenvolvimento dos conteúdos matemáticos durante a Educação Básica.

Nesse sentido, este artigo servirá como material de apoio à professores de diversas áreas, mas sobretudo de matemática da Educação Básica e os que se encontram em formação. Ele poderá ser utilizado com alunos do Ensino Básico e Superior. Neste último, há a possibilidade de utilização nas disciplinas de História da Matemática e Didática da Matemática dos cursos de licenciatura em matemática como alternativa de ensino e elemento motivador para os alunos na elaboração de outros trabalhos.

Sugerimos aos docentes o uso dessa metodologia em sala de aula como recurso didático a partir da construção do diagrama metodológico obedecendo à ordem de prioridades descritas anteriormente. O texto didático pedagógico servirá de apoio para aprofundamentos, revisão do tema tratado e estudos posteriores.

Vale ressaltar a aplicação das geometrias em outras áreas do conhecimento, como, engenharias, astronomia e navegação. Portanto, a utilização deste material extrapola o campo estritamente matemático.

Neste momento, trabalharemos, como mencionado anteriormente, cada componente do diagrama metodológico nesta ordem, quais sejam: História da Humanidade; personagens contemporâneos à Lobachevsky;

Lobachevsky como personagem principal; personagens que contribuíram para a evolução da Geometria e ponto de vista sobre o tema estudado.

Cenário Mundial

Lobachevsky, personagem central, viveu de 1793 a 1856. Com o objetivo de compreender o contexto mundial em torno dele, assim como, nos situar no tempo e espaço, destacaremos alguns acontecimentos da História da Humanidade no período compreendido entre 1750 a 1860, quais sejam: Iluminismo, Revolução Industrial, Revolução Francesa, Inconfidência Mineira, Independência do Brasil e avanço na Ciência.

Iluminismo

O Iluminismo foi um movimento cultural da elite intelectual europeia do século XVIII que procurou mobilizar o poder da razão a fim de reformar a sociedade e o conhecimento herdado da tradição medieval. Ele também é conhecido como século das Luzes, pois os escritores da época estavam convencidos que emergiriam da escuridão e ignorância para uma nova era, iluminada pela razão, ciência e respeito à humanidade. O centro das ideias e pensadores Iluministas foi à cidade de Paris.

Este movimento aprofundou o processo da transformação social e técnica – em detrimento da metafísica e dos cálculos esotéricos.

Através da popularização da Ciência alcançou-se um grau de desenvolvimento. Ou seja, este foi

> um dos ícones daquele século, que marcou o sucesso definitivo de uma doutrina geral de progresso. O avanço da astronomia – com a perda do privilégio cósmico da Terra – e a necessidade de admitir que podemos não estar sós no universo tiveram uma profunda influência no pensamento humano. O destino universal do homem, defendido pela Igreja, sofreu forte abalo; restava-nos

> perdidos na imensidão do universo, encontrar uma teoria menos grandiosa para iluminar nosso futuro de habitantes desse pequeno planeta.
> (DUPAS, 2006, p. 40 apud Mello e Donato, 2011)

Segundo Mello e Donato, 2011 através de Adorno; Horkheimer, 1985 e Silva, 2005, este processo levou à dissolução dos mitos e a substituição da imaginação pelo saber racional e científico. Dessa forma, terminada a era das explicações metafísicas, a racionalidade acabava por tomar seu lugar com sentido único e absoluto para a validação do conhecimento humano, perdendo a natureza o seu fator de encantamento e receio ao homem e passando a ser sobreposta pelo pensamento racional e técnico da sociedade.

Pacievitch afirma que os iluministas defendiam a criação de escolas para que o povo fosse educado e a liberdade religiosa. Para divulgar o conhecimento, os iluministas idealizaram e concretizaram a ideia da Enciclopédia (impressa entre 1751 e 1780), uma obra composta por 35 volumes, na qual estava resumido todo o conhecimento existente até então.

Os principais pensadores iluministas foram: Montesquieu (1689-1755), Voltaire (1694-1778), Écrasez l'Infâme, Diderot (1713-1784), Rousseau (1712-1778) e D'Alembert (1717-1783).

A partir do iluminismo surgiu outro movimento, de cunho mais econômico e político: o liberalismo, que gerou acumulação de capital e em seguida, uma série de invenções de caráter tecnológico. Essas transformações tecnológicas que impactaram o processo produtivo em nível econômico e social será nosso foco no tópico seguinte.

Revolução Industrial

Segundo Gomes, as máquinas foram inventadas com o propósito de poupar o tempo do trabalho humano. Com isso a produção de mercadorias ficou maior e os lucros também. A consequência deste acontecimento foi o investimento de empresários no setor industrial.

Isso ocorreu entre 1760 a algum momento entre 1820 e 1840, onde os avanços no setor industrial não pararam e as indústrias se espalharam pela Inglaterra ocasionando várias mudanças. Este período de substituição das ferramentas pelas máquinas, da energia humana pela motriz e do modo de produção doméstico pelo sistema fabril recebeu o nome de Revolução Industrial. A revolução teve início na Inglaterra e em poucas décadas se espalhou para a Europa Ocidental e os Estados Unidos, encerrando a transição entre feudalismo e capitalismo.

Os ingleses davam muita importância ao comércio. Entretanto, quanto maior o comércio maior a concorrência. Valorizavam também a educação e os estudos científicos o que favoreceu as descobertas tecnológicas. Dessa forma, os ingleses vislumbraram uma nova possibilidade de ampliarem seus negócios. Começaram então a aperfeiçoar suas máquinas e investir cada vez mais em indústrias.

Essas mudanças não se restringiram à Inglaterra. No século XIX a Revolução Industrial chegou a França. Em 1850, chegou até a Alemanha. Nos EUA, o desenvolvimento industrial se deu na segunda metade do século XIX e na Itália, Rússia e Japão no final deste século.

O Brasil era colônia de Portugal quando iniciou o processo de Revolução Industrial na Inglaterra e, portanto, sofria os efeitos do Pacto Colonial imposto pela Coroa Portuguesa. Dessa forma, o modo de produzir gerado pela Revolução começou a se desenvolver significativamente em nosso país somente no final do século XIX e início do XX. Foram os cafeicultores de São Paulo com excedente de capital originário das exportações de café que começaram a investir no setor industrial.

Nesta fase, as principais atividades industriais era a de produção de tecidos e de processamento de alimentos. Estas indústrias eram de pequeno e médio porte, tocadas pela burguesia industrial que estava em plena ascensão. Concentravam-se, principalmente, nos centros urbanos dos estados da região Sudeste, sendo que a cidade de São Paulo era o grande polo industrial.

O grande desenvolvimento industrial brasileiro aconteceu nas décadas de 1930 e 1940 com o final das Repúblicas das Oligarquias. O governo de Getúlio Vargas, que teve inicio em 1930, incentivou o desenvolvimento do setor industrial nacional no país. Foi a partir da década de 1930 que o Brasil começou a mudar seu modelo econômico de agrário-exportador para industrial. Já no começo da década de 1940, ainda no governo Vargas, houve um forte incentivo industrial patrocinado pelo Estado com a criação de empresas estatais. Estas indústrias atuavam nos setores pesados, pois necessitavam de grandes investimentos. Como exemplos, podemos citar as seguintes empresas estatais que surgiram neste contexto: Companhia Siderúrgica Nacional (CSN), 1940; Companhia Vale do Rio Doce, 1942; Fábrica Nacional de Motores, 1943; Fábrica Nacional de Álcalis, 1943.

Com as transformações citadas houve o aparecimento de uma nova classe social, o proletariado. Mulheres e crianças eram exploradas com trabalhos pesados, salários baixos e jornadas de trabalho que variavam de 14 a 16 horas diárias para as mulheres, e de 10 a 12 horas por dia para as crianças.

Enquanto os burgueses se reuniam em grandes festas para comemorar os lucros, os trabalhadores chegavam à conclusão que teriam que começar a lutar pelos seus direitos. Uma das primeiras formas de luta dos trabalhadores foi conhecida como ludismo. Este movimento foi formado por trabalhadores que invadiam as fábricas e quebravam as máquinas. Além do ludismo, surgiram outras organizações operárias, sindicatos e greves.

Embora tardia, os efeitos da Revolução Industrial no Brasil foram positivas em muitos aspectos: Diminuição da dependência da importação de produtos manufaturados; Aumento da produção com diminuição de custos, barateando o preço final dos produtos; Geração de empregos na indústria; Organização dos trabalhadores da indústria em sindicatos, que passaram a lutar por melhores condições de trabalho, direitos e salários mais justos e Avanços nas áreas de transportes, iluminação urbana e infraestrutura. Entre os efeitos negativos, destacaram-se: Aumento da poluição do ar e dos rios (muitas industriais passaram a jogar produtos químicos e lixo em rios e córregos); Crescimento desordenado dos centros urbanos com o êxodo rural e aumentos da vinda de imigrantes para as grandes cidades e Uso de mão-de-obra infantil (na primeira etapa da industrialização).

Inconfidência Mineira

Segundo Sousa (2017), no século XVIII, a ascensão da economia mineradora trouxe um intenso processo de criação de centros urbanos pela colônia acompanhada pela formação de camadas sociais intermediárias. Os filhos das elites mineradoras, buscando concluir sua formação educacional, eram enviados para os principais centros universitários europeus. Nessa época, os ideais de igualdade e liberdade do pensamento iluminista espalhavam-se nos meios intelectuais da Europa.

Na segunda metade do século XVIII, a economia mineradora dava seus primeiros sinais claros de enfraquecimento. O problema do contrabando, o escasseamento das reservas auríferas e a profunda dependência econômica fizeram com que Portugal aumentasse os impostos e a fiscalização sobre as atividades empreendidas na colônia. Entre outras medidas, as cem arrobas de ouro anuais configuravam uma nova modalidade de cobrança que tentava garantir os lucros lusitanos.

No entanto, com o progressivo desaparecimento das regiões auríferas, os colonos tinham grandes dificuldades em cumprir a exigência estabelecida. Portugal, inconformado com a diminuição dos lucros, resolveu empreender um novo imposto: a derrama. Sua cobrança serviria para complementar os valores das dívidas que os mineradores acumulavam junto à Coroa. Sua arrecadação era feita pelo confisco de bens e propriedades que pudessem ser de interesse da Coroa.

Esse imposto era extremamente impopular, pois muitos colonos consideravam sua prática extremamente abusiva. Com isso, as elites intelectuais e econômicas da economia mineradora, influenciadas pelo iluminismo, começaram a se articular em oposição à dominação portuguesa. No ano de 1789, um grupo de poetas, profissionais liberais, mineradores e fazendeiros tramavam tomar controle de Minas Gerais. O plano seria colocado em prática em fevereiro de 1789, data marcada para a cobrança da derrama.

Aproveitando da agitação contra a cobrança do imposto, os inconfidentes contaram com a mobilização popular para alcançarem seus objetivos. Entre os inconfidentes estavam poetas como Claudio Manoel da Costa e Tomas Antônio Gonzaga; os padres Carlos Correia de Toledo, o coronel Joaquim Silvério dos Reis; e o alferes Tiradentes, um dos poucos participantes de origem popular dessa rebelião. Eles iriam proclamar a independência e a proclamação de uma república na região de Minas.

Com a aproximação da cobrança metropolitana, as reuniões e expectativas em torno da inconfidência tornavam-se cada vez mais intensas. Chegada a data da derrama, sua cobrança fora revogada pelas autoridades lusitanas. Nesse meio tempo, as autoridades metropolitanas estabeleceram um inquérito para apurar uma denúncia sobre a insurreição na região de Minas. Através da delação de Joaquim Silvério dos Reis, que denunciou seus companheiros pelo perdão de suas dívidas, várias pessoas foram presas pelas autoridades de Portugal.

Tratando-se de um movimento composto por influentes integrantes das elites, alguns poucos denunciados foram condenados à prisão e ao degredo na África. O único a assumir as responsabilidades pela trama foi Tiradentes. Para reprimir outras possíveis revoltas, Portugal decretou o enforcamento e o esquartejamento do inconfidente de origem menos abastada. Seu corpo foi exposto nas vias que davam acesso a Minas Gerais. Era o fim da Inconfidência Mineira.

Mesmo tendo caráter separatista, os inconfidentes impunham limites ao seu projeto. Não pretendiam dar fim à escravidão africana e não possuíam algum tipo de ideal que lutasse pela independência da "nação brasileira". Dessa forma, Sousa (2017) afirma que a inconfidência foi um movimento restrito e incapaz de articular algum tipo de mobilização que definitivamente desse fim à exploração colonial lusitana. Entretanto Gomes

(2017) ressalta que entre os objetivos dos inconfidentes estava a Independência do Brasil.

Neste contexto havia dentre outras aspirações e sentimentos: vontade de grande parte da elite política brasileira em conquistar a autonomia política; desgaste do sistema de controle econômico, com restrições e altos impostos, exercido pela Coroa Portuguesa no Brasil e tentativa da Coroa Portuguesa em recolonizar o Brasil. Essas foram algumas causas que levaram à Independência do Brasil.

Independência do Brasil

Segundo Fernandes (2017), a Independência do Brasil, ocorrida em 7 de setembro de 1822, é um dos acontecimentos mais importantes da história do Brasil, haja vista que foi nesse momento que houve uma clara ruptura com as Cortes Portuguesas. Para entendermos bem como se desenrolou o processo de Independência, é necessário que saibamos um pouco do contexto em que tanto Portugal quanto o Brasil estavam inseridos nas primeiras décadas do século XIX.

Sabemos que, em 1808, o Brasil havia sido alçado à condição de Reino Unido, junto a Portugal e Algarves – em decorrência da fuga da Família Real Portuguesa de sua terra, que ocorreu em razão da ofensiva das tropas de Napoleão Bonaparte. Como o Brasil tornou-se a sede desse Reino Unido, muitas transformações de toda ordem (política, cultural, econômica e social) ocorreram por aqui nesse período.

A atuação política de brasileiros, desde os mais radicais até os mais moderados, passou a ter amplo destaque durante a presença do príncipe regente D. João VI e de sua família aqui. Os problemas tiveram início quando, após a queda do Império Napoleônico, em 1815, uma onda de reconfiguração política deslanchou-se por toda a Europa, atingido também Portugal. Em 1820, houve a Revolução Liberal do Porto e, antes disso, a Conspiração de Lisboa, em 1817. A Revolução do Porto teve grande apoio de todas as camadas da população portuguesa, que passaram a exigir a convocação das Cortes para a elaboração de uma nova constituição para o Reino de Portugal.

Os membros da revolução também exigiram a volta da Família Real Portuguesa, que teve de sair do Brasil, deixando Dom Pedro, filho de Dom João VI, como príncipe regente no país. O ano de 1821 foi permeado por intensas discussões nas Cortes de Lisboa. O Brasil, na condição de membro do Reino Unido, também enviou para as Cortes os seus representantes, entre eles, o famoso Antônio Carlos de Andrada, irmão de José Bonifácio de Andrada e Silva, um dos "arquitetos" do Império do Brasil.

Nas discussões das Cortes Gerais Portuguesas, os embates entre brasileiros e lusitanos tornaram-se inevitáveis, sobretudo pelo fato de alguns portugueses desejarem a volta do Brasil à condição de colônia de Portugal. Com a resistência dos brasileiros a essa perspectiva, restava aos portugueses exercer maior pressão. Uma das manobras foram as tentativas de obrigar o príncipe Dom Pedro a regressar a Portugal, deixando então os brasileiros sem representante legítimo em seu solo. O episódio mais emblemático que ilustra essa situação e que se tornou uma espécie de "prólogo da Independência" foi a decisão de Dom Pedro, no dia 9 de janeiro de 1822, em optar por ficar no Brasil. Esse dia ficou conhecido como Dia do Fico.

Nos meses que se seguiram, os conflitos com os portugueses tornaram-se ainda mais intensos. Em 07 de setembro daquele mesmo ano (1822), a Independência foi consumada, como afirma Fernandes (2017):

> Alcançado em 7 de setembro de 1822, às margens do riacho Ipiranga, dom Pedro proferiu o chamado Grito do Ipiranga, formalizando a independência do Brasil. Em 1º de dezembro, com apenas 24 anos, o príncipe regente era coroado Imperador, recebendo o título de dom Pedro I. O Brasil se tornava independente, com a manutenção da forma monárquica de governo. Mais ainda, o novo país teria no trono um rei português. Este último fato criava uma situação estranha, porque uma figura originária da Metrópole assumia o comando do novo país. Em torno de dom Pedro I e da questão da sua

> permanência no trono muitas disputas iriam ocorrer, nos anos seguintes.
> (FERNANDES, 2017, *apud* FAUSTO, 2013, p. 116)

Avanços nas Ciências

O século XIX (de 1801 a 1900) foi um período histórico marcado pelo colapso dos impérios da Espanha, China, França, Sacro Império Romano-Germânico e Mogol. O século também testemunhou o crescimento da influência dos impérios Britânico, Russo, Alemão, Japonês, e dos Estados Unidos, estimulando conflitos militares, mas também avanços científicos e de exploração.

Na medicina, o conhecimento da anatomia humana e a prevenção de doenças foram responsáveis pela rápida aceleração do crescimento populacional no Hemisfério Ocidental. A população europeia dobrou de cerca de 200 milhões para mais de 400 milhões.

O desenvolvimento da medicina se relaciona diretamente com a migração, superlotação das cidades e as precárias condições de vida da classe trabalhadora própria da Revolução Industrial. A sua consequência foi a proliferação das doenças infecciosas (sífilis, tuberculose) ou relacionadas com a má alimentação (pelagra, raquitismo, escorbuto). Esses problemas são cruciais para entender a origem da medicina social de Rudolf Virchow e o sistema de saúde pública de Edwin Chadwick que dariam lugar a atual medicina preventiva. A mesma Revolução Industrial, junto com numerosas guerras e revoluções, gerariam um desenvolvimento científico generalizado que contribuiria com a instauração de condições técnicas para o triunfo da assepsia, da anestesia e da cirurgia.

As Revoluções liberais, promovendo cidadãos livres-pensadores, constroem uma nova medicina científica e empírica, desligada do místico e artesanal. Culmina-se com a opressão dos velhos cânones éticos do absolutismo e o catolicismo instaurando novos cânones, novos calendários. O século XIX verá nascer a medicina experimental de Claude Bernard, a teoria de Omnia cellula a cellula de Rudolf Virchow, a teoria microbiana das doenças, a teoria da evolução das espécies de Charles Darwin, e a genética de Gregor Mendel.

No campo das invenções, em meados do século XIX, destacaram-se: Locomotiva de Richard Trevithick, 1804; Fotografia: Louis Jacques Daguerre, 1816; Anestesia: William Morton, 1846; Lâmpada incandescente: Heinrich Göbel, 1854 e Telefone: Antonio Meucci, 1854.

Quanto às teorias importantes referentes ao período recortado, temos: Teoria dos números: Carl Friedrich Gauss, 1801; Positivismo: Auguste Comte na primeira metade do século XIX; Marxismo: Karl Marx, Friedrich Engels, 1848 e Teoria da Evolução: Charles Darwin, 1859.

A seguir destacamos os contemporâneos ao personagem principal, Lobachevsky, descrevendo seus traços biográficos e trabalhos desenvolvidos.

Emmanuel Kant

Segundo Maciel (2017), o filósofo alemão Emmanuel Kant (1724 – 1804), foi um dos principais pensadores do período moderno da filosofia. Abordando questões que abrangiam desde a moralidade até s natureza do espaço e do tempo, Kant é reconhecido particularmente por promover s reunião conceitual entre o racionalismo, que tem em Descartes seu maior expoente, e o empirismo, tal como apresentado por Hume. Desta forma reunindo o potencial da razão humana e a relevância da experiência no processo de aquisição produção de conhecimento.

Kant comparou a si mesmo com Copérnico, que reverteu a forma como vemos o sistema solar, na medida em que seu trabalho promoveu uma revolução similar na filosofia. Isto ocorreu quando Kant demonstrou como os problemas metafísicos tradicionais poderiam ser superados pela suposição de que a concordância entre os conceitos que usamos para conceber a realidade e a própria realidade surge da conformação desta realidade a mente humana, de modo ativo e de forma que todos os humanos possam experimenta-la, e não porque nossos conceitos mentais passivamente reflitam a realidade, sem nada adicionar. Destarte, para Kant, a experiência era de extrema importância, mas a mente humana era a condição de possibilidade para qualquer experiência. A mente humana é o que nos permite transcender a mera atitude passiva em relação a realidade e termos experiências genuínas.

Em sua Crítica da Razão Pura, de 1781, Kant leva este trabalho a cabo e busca afastar o ceticismo de filósofos como David Hume, promovendo a dissolução do impasse entre racionalistas e empiristas. Sua posição não implica em relativismo da realidade, de fato Kant defende uma realidade objetiva, para a qual cunhou o termo "*coisa em si*", porém, se não pelas configurações específicas da mente humana a experiência da coisa em si é impossível, de modo que só temos acesso ao resultado de nossos conceitos aplicados sobre s realidade, para o que utilizou o termo "fenômeno". Desta forma, não temos acesso a coisa é si, mas a mente humana não altera s realidade, enquanto coisa em si, ela altera a nossa experiência da realidade, o fenômeno, em última instância, a mente humana torna possível a experiência.

Devido a estas mesmas configurações, conceitos como espaço e tempo são compartilhados por todas as mentes, de modo a tornar possível a comunicação, o conhecimento e a moral.

Em ética, seu principal legado é o conceito de imperativo categórico, que utilizou para afastar a visão utilitarista.

Em termos de filosofia politica, Kant foi uma expoente da ideia de que a *Paz Perpétua* seria o resultado da história universal, sendo atingida, em algum momento, e garantida sem um planejamento racional, mas pela cooperação internacional. O autor defendeu um estado baseado na lei, ou uma reunião de indivíduos sob a lei, com um governo republicano. Kant recusou a democracia direta, pois esta oferece risco a liberdade individual, comparando a democracia com o despotismo, uma vez que esta estabelece um poder executivo que pode governar contra a liberdade dos indivíduos que discordam da maioria. Criticou ainda que a democracia é normalmente identificada com a ideia de que todos governam, mas de fato o "todo" não é a totalidade. O autor propunha um governo misto, composto de elementos da democracia, aristocracia e monarquia, o que deveria servir para evitar as suas formas degeneradas, respectivamente anarquia, oligarquia e tirania.

As posições e teorias de Kant continuam a ser estudadas ativamente, em campos clássicos como a política e a metafísica, assim como em campos contemporâneos como a ciência cognitiva e filosofia da psicologia. Entre seus maiores críticos encontramos os filósofos Arthur Schopenhauer e Johann Georg Hamann.

Carl Friedrich Gauss

De acordo com Amaral (2017), Carl Friedrich Gauss nasceu em 1777 e viveu até 1855. É considerado um dos maiores matemáticos de todos os tempos. Gauss teve a estatura de Arquimedes e de Newton, e seus campos de interesse excederam os de ambos. Gauss contribuiu para todos os ramos da Matemática e para a Teoria dos Números. Seu pai era jardineiro e assistente de um comerciante, e enquanto criança mostrou grande talento para a matemática. Sua produção intelectual foi precoce; existe um conto que ilustra como Gauss deduziu a fórmula da soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética. Diz a história que sua professora primária para manter a classe ocupada, lhe passou a tarefa de fazer uma soma de 1 a 100, tarefa que Gauss cumpriu quase que de imediato com a utilização da fórmula da PA.

Amigos de seu professor o apresentaram ao Duque de Brunswick, quando tinha 14 anos. O Duque passou a financiar sua educação e posteriormente suas pesquisas científicas. Gauss ingressou na universidade em outubro de 1795. Em seu primeiro semestre na universidade fez uma brilhante descoberta que o homem buscava a mais de 2000 anos como construir com compasso e esquadro. Esta descoberta foi comemorada com o início de seu diário que durante os próximos 18 anos foi testemunha de muitas de suas descobertas. Dentre suas descobertas nos tempos de estudante as mais significativas são a do método dos mínimos quadrados, a prova da reciprocidade quadrática na teoria dos números.

Até a idade de 20 anos Gauss teve um grande interesse por idiomas e quase se tornou um filologista. Posteriormente, literatura estrangeira e leituras sobre política eram seus passatempos, ambos com tendências conservadoras. Aos 28 anos, quando atingiu uma condição financeira confortável ele se casou com Johanne Osthof, sendo muito feliz. Teve com ela tres filhos. Porém, depois do nascimento do terceiro filho, em 1809, sua esposa faleceu. Depois ele se casaria novamente e teria mais tres filhos, no entanto sua vida não foi mais a mesma, e voltou-se cada vez mais para a pesquisa matemática.

Gauss obteve seu doutorado com a defesa de uma tese intitulada New Demonstration of the Theorem that Every Rational Integral Algebric Function in Variable Can be Solved Into Real Factors of First or Second Degree.

Em 1798 Gauss retornou a Brunswick, onde ele viveu sozinho e continuou seu intensivo trabalho. No próximo ano com a quarta prova do teorema fundamental da álgebra, concluiu seu doutorado em 1801. A criatividade dos anos que se precederam se refletiram em duas descobertas :"Disquesitiones Arithmeticae" e o cálculo da órbita do planeta Ceres que havia sido recentemente descoberto.

A teoria dos números é um ramo da matemática que caminha para generalizações, entretanto é cultivada desde a antiguidade. O final do século XVIII foi considerado uma grande coleção de resultados isolados . Em sua Disquesitiones Gauss sumarizou seu trabalho anterior de forma sistemática, e solucionou algumas das mais difíceis questões, simulou conceitos e questões que serviram de guia para o século e ainda são significantes hoje. São alguns destes trabalhos, a prova da lei da reciprocidade quadrática, o desenvolvimento da teoria da composição de formas quadráticas, e completou a análise da equação ciclotômica.

Em janeiro de 1801 G.Piazzi observou e perdeu um novo planeta. Durante o restante do ano astrônomos tentaram em vão relocalizar o novo planeta. Em setembro, com o término de sua obra Disquesitiones, Gauss decidiu assumir mais este desafio. Para isso ele aplicou duas das mais apuradas teorias de órbitas e improvisou métodos numéricos. Em dezembro a tarefa estava cumprida e o planeta foi encontrado na órbita pré-calculada. Este feito de localizar um corpo celeste pequeno e distante com informações visuais insuficientes pareceu sobre-humana, principalmente porque Gauss não revelou seus métodos. Juntamente com o Disquesitiones Gauss firmava sua reputação de matemático e cientista genial. Esta década que começava com o Disquesitiones e Ceres foi decisiva para Gauss. Cientificamente este foi o principal período de exploração de idéias, foi o ponto de partida para a próxima década, terminando com a publicação da Theoria Motus Couporum Coilestium In Sectionibus Conics Solem Ambientum, em que Gauss desenvolveu sistematicamente seus métodos de cálculo de órbitas incluindo a teoria e o uso de quadrados mínimos.

Profissionalmente esta foi uma década de transição para a matemática astronômica apesar disso Gauss estava bem com seu patronado do duque, entretanto se sentia inseguro e precisava de um posto mais sólido. No entanto, Gauss sentiu muito quando o Duque foi morto na Batalha de Jena (1806) em combate a Napoleão. A astronomia acabou sendo a opção mais interessante. Gauss assumiu o posto de direção do observatório de Göttingen sendo que nesta época já era afiliado à London Royal Society e às academias russa e francesa.

Após a metade da década de 1820 Gauss se rendeu às pressões financeiras, e aos problemas de saúde e de família. Os estudos de Gauss tiveram seu início formal em 1829 com estudos sobre o campo magnético terrestre, porém Gauss mostrou pouca experiência para realizar medições, o que tornou valiosa a colaboração de Weber, um jovem e brilhante fisico. Em outubro deste ano Gauss voltou-se a estender seus conhecimentos no campo da física, começando a trabalhar em problemas de física teórica, especialmente em mecânica, capilaridade, acústica, óptica e cristalografia, tendo como primeiro fruto destes trabalhos o "Uber Ein Neues Allgemeines Grundgesetz Der Mechanik".

Em 1830, Gauss publicou o "Principia Generalia Theoriare Figurae Fluidorum En Statu Aequilibrii" que foi uma importante contribuição para o campo da capilaridade e teve um importante papel no cálculo de variações, pois foi a primeira solução envolvendo integrais duplas, condições de contorno e limites variáveis.

Em 1832 Gauss apresentou à Academia o "Intensisitas Vis Magnecticae Terrestris Ad Mensuram Absolutam Revocata", em que aparece pela primeira vez o primeiro uso sistemático de unidades absolutas (distância, massa, tempo) para medir grandezas não mecânicas.

Juntamente com Weber, em 1833, Gauss chegou às leis de Kirchoff e antecipou várias descobertas na eletricidade, estática, térmica e da fricção, porém não publicaram resultados, pois seus interesses estavam voltados ao eletromagnetismo terrestre, sendo que a publicação de maior relevância neste campo foi "Allgemeine Theorie Des Ermagnetismus (1839)" no qual Gauss expressa o potencial em qualquer ponto da superfície da terra como uma série infinita de funções esféricas, juntamente com dados experimentais.

Gauss terminou suas pesquisas no campo da física com a publicação de "Allgemeine Lehrsatse In Beziehung Auf Die Im Verkehrten Verhaltnisse Des Quadrats der Entfernung Wirkenden Anziehungs Und Abstossungskrafte (1840)". No mesmo ano Gauss terminou o 'Dioptrische Untersuchungen (1841), no qual ele analisa o caminho da luz através de um sistema de lentes e mostrou entre outras coisas, que qualquer sistema é equivalente à escolha correta de uma única lente. Gauss dizia que esta teoria era de seu conhecimento a quarenta anos, porém ele as considerava muito elementares para serem publicadas, sendo que esta teoria foi tida como um de seus melhores trabalhos, por parte de um de seus biógrafos.

Com o aparecimento dos trabalhos sobre superfícies curvas o clima do mundo da matemática começou a mudar. Um dos mais significativos aspectos desta mudança foi a fundação de um novo periódico científico. A iniciativa prévia de manter um periódico matemático foi da Escola Politécnica, quando esta começou a publicar sua revista. Pouco tempo depois, em 1810, o primeiro periódico matemático foi publicado: era o Annales De Math&eacutematiques Pures Et Aplique&eacutes. Dentre estes novos periódicos que surgiam, Gauss participou com dois pequenos artigos no Journal Fur Die REINE Und Angerandle Mathematich. Um destes artigos foi uma prova do teorema de Hariot na álgebra, enquanto o outro continha o princípio de Gauss da restrição mínima.

Durante os últimos 20 anos de sua vida Gauss publicou artigos de grande interesse para a matemática. Um destes foi a quarta prova do teorema fundamental da álgebra que ele realizou na época de seu doutorado (1849), 15 anos depois da publicação de sua primeira prova. A outra foi um texto sobre teoria potencial em 1840 em um dos volumes de "Geomagnétic Results", que foi co-editado com seu jovem amigo o físico Wilhelm Weber. O geomagnetismo ocupou grande parte do tempo de Gauss na década de 1830. A maioria de suas publicações na última década de sua vida no observatório astronômico, faziam menção aos planetas recém descobertos, como Netuno.

A matemática gaussiana, serviu de ponto de partida para muitas das principais áreas de pesquisa da matemática moderna. As anotações de Gauss mostraram posteriormente que ele antecipou a geometria não-Euclidiana, 30 anos antes de Bolyai e Lobachevsky. Descobriu o teorema fundamental de Cauchy da análise complexa 14 antes. Descobriu os quaternios antes de Hamilton e antecipou muitos dos mais importantes trabalhos de Legendre, Abel e Jacobi. Se Gauss tivesse publicado todos os seus resultados, teria feito avançar o progresso da Matemática em mais de 50 anos.

Janos Bolyai

Segundo material encontrado na biblioteca matemática da Universidade de Coimbra, János Bolyai foi um matemático húngaro, conhecido pelo seu trabalho na geometria não-Euclidiana.

Bolyai nasceu no ano de 1802 em Kolozsvár, Transylvania, Reino da Hungria, Império Habsburgo, hoje Cluj-Napoca, Roménia, filho de Zsuzsanna Benko e de Farkas Bolyai, famoso matemático, mas logo foi para Marosvásárhely Farkas, onde o seu pai ensinava matemática, física e química no Colégio Calvinista, pois Farkas Bolyai sempre quis que o seu filho fosse um matemático.

Estava claro desde o início, porém, que János era uma criança extremamente inteligente e atenta: ... aos quatro anos ele sabia distinguir certas figuras geométricas, sabia sobre a função seno, e sabia identificar as constelações conhecidas. Aos cinco anos tinha aprendido, praticamente sozinho, a ler. Aos 13 anos, tinha dominado as formas de cálculo e outros tipos de mecânica analítica. O seu pai tinha uma obsessão com o famoso postulado da paralela de Euclides, tendo dedicado a sua vida a tentar provar isso. Apesar das advertências de seu pai que iria arruinar sua saúde, paz de espírito e felicidade, Janos também começou a trabalhar sobre este axioma, até que, por volta de 1820 ele chegou à conclusão de que não podia ser provado. Passou a desenvolver uma geometria consistente em que o postulado das paralelas não é utilizado, estabelecendo assim a independência do axioma.

Entre 1820 e 1823 preparou um tratado sobre um sistema completo de geometria não-euclidiana. O trabalho de Bolyai foi publicado em 1832 como um "apêndice" a um ensaio de seu pai. Gauss, após ler o "apêndice", escreveu a um amigo dizendo: "Eu considero este jovem geómetra Bolyai um génio de primeira ordem".

Além do seu trabalho em geometria, Bolyai desenvolveu um rigoroso conceito geométrico dos números complexos com pares ordenados de números reais. Apesar de nunca ter publicado mais de 24 páginas do "apêndice", ele deixou mais de 20000 páginas de manuscritos matemáticos. Estes podem ser encontrados na Biblioteca Bolyai-Teleki em Morosvásáhely, actual Târgu-Mures, Roménia.

Personalidade singular foi um hábil violinista e exímio espadachim. Foi um linguista, conseguindo falar nove idiomas, incluindo chinês e tibetano. Morreu com 58 anos de idade, em Janeiro de 1860.

Johann Christian Martin Bartels

De acordo com Connor e Robertson (2017), quando Martin (1769-1836) nasceu, o mercado de estanho tinha caído acentuadamente com os produtos de barro e porcelana. Os Bartels viveram em Brunswick, que hoje é a cidade de Braunschweig na Alemanha, e sua casa estava no Wendengraben (hoje Wilhelmstrasse) ao lado de um canal do mesmo nome. Martin Bartels mostrou um interesse considerável na matemática como um rapaz, mas, em 1783, com a idade de 14 anos, ele foi empregado como professor de escola primária na Katherinen-Volksschule que estava perto de sua casa. Lá ele era um assistente do professor Büttner e logo Bartels começou a ensinar um menino que, como ele, viveu no Wendengraben. Esse jovem garoto foi Carl Friedrich Gauss que começou a estudar na Katherinenschule em 1784.

> Por sorte o professor Büttner tinha um assistente, Johann Martin Bartels, um jovem com paixão pela matemática, cujo dever era ajudar os principiantes por escrito e cortar suas canetas para eles. Entre o assistente de dezessete e o aluno de dez [Gauss] surgiu uma amizade calorosa que durou a vida de Bartels. Eles estudaram juntos, ajudando uns aos outros sobre dificuldades e amplificando provas em seu livro comum sobre álgebra e os rudimentos da análise. Desse primeiro trabalho desenvolveu-se um dos interesses dominantes da carreira de Gauss [álgebra]. ... Bartels fez mais por Gauss do que induzi-lo aos mistérios da álgebra. O jovem professor conhecia alguns dos homens influentes de Brunswick. Ele agora se interessava por esses homens em seu achado [Gauss].
>
> (E.T. BELL, *apud* ROBERTSON, 2017)

Em particular, Bartels informou Eberhard August Wilhelm Zimmermann (1743-1815) que havia sido professor de matemática, física e história natural no Collegium Carolinum em Brunswick desde 1766. Isso foi extremamente valioso para o jovem Gauss, mas este encontro notável de mentes entre Gauss E seu jovem professor Bartels levou Bartels a tornar-se determinado a prosseguir o seu estudo da matemática. Devemos notar, no entanto, que em Dick apresenta uma visão diferente da aceita que nós demos acima. Ele sugere que Bartels tinha maiores tarefas a fazer do que ensinar cálculo na escola, que não se sabe se Bartels ensinou o cálculo de Gauss e que não está claro se Bartels usou sua influência para ajudar Gauss a continuar sua educação em outros estabelecimentos.

A associação de Bartels com o Collegium Carolinum foi formal a partir de 23 de agosto de 1788, quando ele se tornou um visitante lá. Então, em 23 de outubro de 1791, ele entrou na Universidade de Helmstedt, onde estudou com o professor de matemática Johann Friedrich Pfaff. Em seguida, mudou-se para a Universidade de Göttingen, onde seus professores incluíram Abraham Gotthelf Kästner, o professor de matemática e física. No entanto, a matemática não foi o único assunto que Bartels estudou, pois no semestre de inverno de 1793-4 estudou Física Experimental, Astronomia, Meteorologia e Geologia.

Em 1800, Bartels foi nomeado para ensinar matemática em Reichenau, uma cidade suíça perto da cidade de Chur. Ele conheceu Anna Magdalena Saluz de Chur e eles se casaram em 1803; Sua filha Johanna Henriette Francisca Bartels (nascida em 1807) casou-se com o astrônomo Wilhelm Struve em fevereiro de 1835. No entanto, em 1801 Bartels se mudou para Aarau, no norte da Suíça, onde lecionou na escola cantonal. A partir de 1803 voltou à Alemanha ensinando na Universidade de Jena e, lá em 1807, recebeu um convite de Stepan Rumowski para ser professor de Matemática na Universidade Estadual de Kazan. Esta universidade tinha sido fundada em 1804, o resultado de uma das muitas reformas do imperador russo Alexander I, e abriu no ano seguinte. Rumowski foi responsável pela criação da universidade e a maioria dos professores que ele havia convidado a ir lá eram da Alemanha. Bartels assumiu seu posto de professor de matemática em Kazan em 1808 e, durante os doze anos seguintes, lecionou sobre a História da Matemática, Cálculo Aritmético Superior, Cálculo Diferencial e Integral, Geometria Analítica e Trigonometria, Trigonometria Esférica, Mecânica Analítica e Astronomia.

> Nos primeiros anos, a atmosfera no Departamento foi bastante favorável. Os alunos estavam cheios de entusiasmo. Eles estudavam dia e noite para compensar a falta de conhecimento. Os professores, principalmente convidados da Alemanha, se mostraram excelentes professores, o que não era comum.
>
> (VINBERG, *apud* CONNOR e ROBERTSON, 2017)

Em 1808, Nikolai Ivanovich Lobachevsky teve a sorte de estudar com Bartels na Universidade de Kazan pouco tempo depois de assumir o seu cargo lá. Não só Bartels ajudou Lobachevsky com seus estudos, mas também cuidou de seu jovem aluno, apoiando-o quando ele entrou em apuros com as autoridades (o que aconteceu muitas vezes!) Quando Lobachevsky estava para se formar era Bartels que passou três dias de lobby Os outros professores para lhe conceder um mestrado. As autoridades universitárias não queriam dar um diploma a Lobachevsky por causa de seu mau comportamento. Bartels ganhou o argumento e Lobachevsky foi concedido um grau de mestre. Depois de se formar em 1811, Lobachevsky permaneceu em Kazan para estudar com Bartels que guiou sua leitura de Disquisitiones Arithmeticae de Gauss e Mécanique Céleste de Laplace. Em 1814 foi principalmente devido a Bartels que Lobachevsky foi nomeado como professor assistente. Devemos notar que Lobachevsky tomou o curso de Bartels sobre a História da Matemática que, seguindo Montucla, considerou em detalhes os Elementos de Euclides e sua teoria de linhas paralelas. Foi este curso que fez Lobachevsky pensar sobre a geometria não euclidiana.

Quando Bartels estava prestes a deixar Kazan em 1820 ele escreveu sobre seu tempo lá, dando uma impressão semelhante àquela na citação de Vinberg:

> Fiquei muito feliz em encontrar lá [Kazan], apesar do pequeno número de alunos, um monte de entusiasmo para o estudo das ciências matemáticas. Em minhas palestras sobre análise mais elevada, eu poderia ter pelo menos vinte ouvintes, de modo que pouco a pouco uma pequena escola de matemática surgiu.
>
> (CONNOR e ROBERTSON, 2017)

Em 1821 Bartels moveu-se para a universidade em Dorpat (agora Tartu em Estónia). Dorpat tinha sido parte da Polônia, depois da Suécia, mas em 1704 foi anexado à Rússia por Pedro o Grande. A universidade de Dorpat tinha sido fundada em 1632 por Gustavo II Adolphus de Sweden em 1632. Contudo fechou em 1710 e remanesceu vazio por quase 100 anos antes de reabrir em 1802 como o Kaiserliche Universität zu Dorpat. Bartels fundou o Centro de Geometria Diferencial em Dorpat, e permaneceu lá até sua morte em 1836.

Bartels fez a maior parte de suas contribuições para a pesquisa matemática depois de ser nomeado para a Universidade de Kazan. No entanto, ele não publicou suas descobertas até depois que ele se mudou para Dorpat e mesmo assim ele não publicá-los todos. Alguns só sabemos porque seus alunos incluíram os resultados em seu próprio trabalho reconhecendo que Bartels lhes tinha dado em seus cursos de palestra. Um desses resultados é o famoso Frenet-Serret fórmulas que foram descobertos primeiro por Bartels. Ele introduziu o método de mover triedros. A cada ponto de uma curva espacial Bartels associou um triedro, que mais tarde se chamou o triedro Frenet, e Bartels obteve as fórmulas agora conhecidas como as fórmulas Frenet-Serret. Só sabemos disso desde que eles foram publicados em um trabalho premiado por seu aluno Carl Eduard Senff em teoremas principais da teoria das curvas e superfícies em 1831, com o devido reconhecimento a Bartels. Frenet deu seis das fórmulas em 1847 e mais tarde Serret deu todos os nove.

Note-se que Bartels correspondia com Gauss desde o tempo em que trabalhava na Suíça. A correspondência continuou ao longo dos anos que ele trabalhou em Kazan e durante os primeiros anos que ele estava em Dorpat. Depois que Gauss tornou-se famoso, um gracejo rodou que Bartels era o melhor matemático na Alemanha porque Gauss era o melhor matemático no mundo.

Dois anos depois de Bartels se mudar para Dorpat, ele se tornou um Conselheiro Privado em 1823. Ele foi homenageado com a eleição para a Academia de Ciências de São Petersburgo. Morreu em 1836.

Mikhail Ostrogradski

Segundo Connor e Robertson (2017), Ostrogradski (1801-1862) nasceu em uma cabana coberta de palha na terra de seu pai. Como a maioria das crianças, ele mostrou grande curiosidade no mundo ao seu redor, mas, ao contrário da maioria, ele obteve grande prazer de medir objetos. Não só mediu as dimensões de seus brinquedos, mas também mediu a profundidade dos poços e dos comprimentos dos campos. Ele sempre carregava uma pedra no bolso, que tinha um longo pedaço de fio amarrado ao redor dele para que ele pudesse medir a profundidade de qualquer poço que ele encontrou. Ele também ficou fascinado por moinhos, sentados durante longos períodos observando as velas girarem, girando a roda da água e girando a pedra do moinho para triturar o grão.

Ele freqüentou o Poltava Gymnasium escola secundária, começando a sua educação lá em 1809. Ele embarcou em uma casa que ofereceu alojamento para a "educação dos filhos de nobres empobrecidos". Seu tutor foi Ivan Petrovych Kotlyarevsky (1769-1838), que fez um nome para si mesmo como escritor, poeta e ativista social. O Ostrogradski não brilhou em seus assuntos acadêmicos no Ginásio. Quando chegou a hora de partir, Ostrogradski expressou o desejo de ter uma carreira militar. Quase certamente Kotlyarevsky influenciou-o nesta decisão desde que tinha servido no exército imperial russo, lutando na guerra russo-turca. No entanto, a família de Ostrogradski não era rica e, apesar de suas tradições militares, sentia-se que o salário de um soldado não era bom o suficiente. Eventualmente, decidiu-se que ele deveria assumir uma carreira na função pública e, a fim de obter uma posição de alta posição de uma educação universitária era necessário. No entanto, ele não tinha os conhecimentos necessários para iniciar os estudos universitários, então ele participou de palestras e estudou por conta própria para obter os conhecimentos necessários

Ostrogradski entrou na Universidade de Kharkov em 1816 e, após um ano preparatório, começou a estudar física e matemática em 1817. Inicialmente, não tinha sido particularmente interessado em estudar na universidade e abordou seus estudos com considerável relutância. No entanto, Andrei Fedorovich Pavlovsky (1789-1875) foi um dos seus professores e ele notou a extraordinária capacidade do jovem e foi capaz de despertar nele um interesse pela ciência. Outro que influenciou Ostrogradski neste tempo era Timofei Fedorovic Osipovsky que era um professor de matemática eo reitor da universidade de Kharkov. Em 1820

Ostrogradski levou e passou os exames necessários para o seu grau, mas o ministro de assuntos religiosos e educação nacional se recusou a confirmar a decisão e exigiu-lhe para retomar os exames. O problema parece ter sido o seu professor de matemática Osipovsky, no ano de 1820, foi suspenso de seu cargo por motivos religiosos. Os oficiais que tomaram esta decisão fizeram o pupilo de Osipovsky sofrer demasiado. Vamos dar mais detalhes sobre este episódio. Em 1816 o Príncipe Aleksandr Nikolaevich Golitsyn (1773-1844) foi nomeado Ministro da Educação e Ministro de Assuntos Religiosos. Realizou uma cruzada religiosa contra "tendências ímpias e revolucionárias", exigindo que a ciência fosse ensinada a partir de princípios cristãos. Kharkov, como outras universidades, recebeu instruções sobre como ensinar de um ponto de vista cristão, demonstrando a onisciência de Deus. Em 1820, seguindo a orientação de Golitsyn, Osipovsky foi demitido pelo Curador da Universidade de Kharkov, Zakharii Iakovlevich Karneev (1747-1828), por causa de uma alegada falta de fervor ao dizer "Deus vive" durante um exame oral de um aluno de pós-graduação. Isto teve uma conseqüência bastante séria para Ostrogradski que tinha sido examinado por Osipovsky em 1820, porque, após a demissão de Osipovsky, o ministério da instrução recusou confirmar a concessão do doutorado de Ostrogradski. Eles exigiram que ele retomasse os exames (oficialmente com base em que ele não tinha assistido a palestras sobre filosofia e teologia), mas, sabendo que a verdadeira razão era que ele tinha sido examinado por Osipovsky, ele se recusou a retomar os exames e nunca recebeu a grau.

O principal centro matemático do mundo nessa época era Paris e Ostrogradski tomou a decisão corajosa de estudar lá, chegando em maio de 1822. Tinha sido uma decisão difícil, já que sua família não aprovava e tinha dificuldades financeiras. Para piorar as coisas, ele foi roubado na viagem. Entre 1822 e 1827, ele participou de palestras na École Polytechnique, na Sorbonne e no Collège de France, sobre matemática, física, mecânica e astronomia. Estes foram entregues por Louis Poinsot, por Pierre-Simon Laplace, por Joseph Fourier, por Adrien-Marie Legendre, por Siméon-Denis Poisson, por Jacques Binet e por Augustin-Louis Cauchy. Tornando-se amigável com estes matemáticos líderes, ele fez um rápido progresso e logo começou a publicar artigos na Academia de Ciências de Paris. A primeira delas é Memoir sobre a propagação de ondas em um vaso cilíndrico (1826). Seus trabalhos mostram a influência dos matemáticos em Paris e ele escreveu sobre física e cálculo integral. Por exemplo, ele apresentou seu trabalho Demonstration d'un théorème du calcul intégral à Academia de Ciências de Paris em 13 de fevereiro de 1826. Neste artigo Ostrogradski afirma e prova o teorema de divergência geral. Gauss, sem saber sobre o papel de Ostrogradski, provou casos especiais do teorema da divergência em 1833 e 1839 eo teorema é agora muitas vezes chamado de Gauss. Victor Katz apud Connor e Robertson (2017):

> Ostrogradski apresentou novamente esse teorema em um artigo em Paris, em 6 de agosto de 1827, e finalmente em São Petersburgo, em 5 de novembro de 1828. Essa última apresentação foi a única publicada por Ostrogradski, que apareceu em 1831 em Note sur la Théorie de la Chaleur 1831). As duas apresentações anteriores sobreviveram somente em forma de manuscrito, embora tenham sido publicados em tradução russa.
>
> (VICTOR KATZ, *apud* CONNOR e ROBERTSON, 2017)

De fato, muitos dos papéis de Ostrogradski que escreveu em Paris foram incorporados mais tarde em um trabalho principal na hidrodinâmica com ele publicou em Paris em 1832. Outros resultados que obteve neste tempo na teoria do resíduo apareceram em trabalhos de Cauchy. Seu tempo em Paris, no entanto, teve seus problemas. O pai de Ostrogradski, infeliz que seu filho estava gastando tanto tempo no exterior, parou de lhe enviar dinheiro. Ostrogradski, incapaz de pagar as contas por sua acomodação, acabou ficando mal endividado. Ele foi levado a tribunal por falta de pagamento, mas Cauchy, ouvindo as dificuldades de Ostrogradski, pagou todas as suas dívidas. Cauchy então conseguiu obter Ostrogradski uma posição ensinando no Collège Henri IV (hoje chamado Lycée Henri-IV) para que ele pudesse continuar vivendo em Paris. Kenneth May apud Connor e Robertson (2017) explica que o papel:

> ... descreve quatro manuscritos datados da residência de Ostrogradski em Paris (1822-1827) e descobertos por Yushkevich nos arquivos da Academia Francesa em 1963. Os dois primeiros manuscritos (1824) estão em integrais definidas e documentam o papel de Ostrogradski no desenvolvimento de Cauchy Método dos resíduos. ... o terceiro e o quarto manuscritos (1826 e 1827) foram traduzidos ... Elas incluem um caso especial do teorema de Green, um desenvolvimento geral (o primeiro tal, de acordo com Yushkevich) do método de separação de variáveis , Ea primeira solução do problema de difusão de calor em um prisma triangular.
>
> (KENNETH MAY, *apud* CONNOR e ROBERTSON, 2017)

Ostrogradski deixou a França e foi para São Petersburgo, chegando na primavera de 1828. Embora chegasse a São Petersburgo cheio de entusiasmo procurando criar um ambiente de pesquisa como tinha experimentado em Paris, no entanto, ele foi olhado com desconfiança e suspeita pelo local Policiais que o colocaram sob vigilância. No entanto, foi recebido com entusiasmo pelos matemáticos de São Petersburgo. Ele foi nomeado como professor na Academia Naval (na verdade, chamado Corpo Naval neste momento) em 1828. Mais tarde ganhou postos de professor adicionais, no Instituto de Meios de Comunicação, começando em 1830 e, dois anos depois, começou a ensinar em O Instituto Pedagógico Geral. Ele teve uma segunda visita a Paris em maio de 1830 estando na cidade no momento em que havia desordens de rua e barricadas foram erguidos. Esta foi a revolução de julho de 1830 e Ostrogradski danificou seriamente um de seus olhos no final de sua visita. Parece que isso não foi como resultado de quaisquer distúrbios, mas sim que ele foi descuidado com uma partida de fósforo. Ele ficou cego em seu olho direito. Casou-se com Maria em 1831; Eles tiveram três filhos, duas filhas e um filho. Ostrogradski gostava de brincar com seus filhos, pulando e correndo com eles de uma maneira infantil.

Em São Petersburgo, ele apresentou três importantes artigos sobre a teoria do calor, as integrais duplas e a teoria potencial à Academia de Ciências Imperial (São Petersburgo). Em grande parte pela força desses papéis ele foi eleito um acadêmico na seção de matemática aplicada da

Academia. Ele foi eleito acadêmico junior em dezembro de 1828, promovido a acadêmico associado em 1830, e finalmente se tornou um acadêmico completo em 1832. Ostrogradski apontou alto em sua pesquisa e seu objetivo era fornecer uma teoria combinada de hidrodinâmica, elasticidade, calor e eletricidade. Ele apresentou um relatório à Academia Imperial de Ciências, em 1830, que contém o seguinte objetivo notavelmente ambicioso:

> Os seguidores de Newton desenvolveram a grande lei da gravitação universal em detalhes e aplicaram a análise matemática a numerosos problemas importantes na física geral e na física das substâncias sem peso. A coleção de suas obras sobre o sistema do universo forma os folios imortais de "Mecânica Celestial", da qual os astrônomos levarão os elementos para suas mesas por um longo tempo. No entanto, as teorias físicas e matemáticas ainda não estão unificadas; Eles são distribuídos em numerosas coleções de memórias acadêmicas e são investigados por métodos diferentes, muitas vezes muito duvidosos e imperfeitos; Além disso, existem teorias desenvolvidas mas nunca apresentadas. Eu estabeleci como meu objetivo combinar estas teorias, apresentá-las usando um método uniforme, e indicar suas aplicações mais importantes. Já coletei os materiais necessários sobre o movimento e o equilíbrio dos corpos elásticos, a propagação das ondas na superfície dos líquidos incompressíveis e a propagação do calor dentro dos corpos sólidos e, em particular, no interior do globo. No entanto, estas teorias constituirão apenas uma parte necessária de todo o trabalho, que abrangerá também a distribuição de eletricidade e magnetismo em corpos capazes de serem eletrificados ou magnetizados por influência eletrodinâmica, movimento de fluidos elétricos, movimento e equilíbrio de líquidos, ação de capilaridade , Distribuição de calor em líquidos e teoria de probabilidade; Nesta última parte, vou me debruçar sobre várias questões em que o famoso autor de "Celestial Mechanics" estava aparentemente errado.
>
> (CONNOR e ROBERTSON, 2017)

Claro que isso era muito além do que poderia ser alcançado por qualquer homem, mas, ao visar um grande esquema, ele fez grandes desenvolvimentos em uma ampla gama de áreas. Ele submeteu Mémoire sur le Calcul des Variations des Integrales Multiples Ⓣ à Academia de Ciências de São Petersburgo em 24 de janeiro de 1834. Este é um trabalho importante na teoria de equações diferenciais parciais e foi reimpresso no Diário de Crelle em 1836 e uma tradução em Inglês foi feita Por Todhunter e publicado em 1861. Em 1840 escreveu em balística que introduz o tópico a Rússia. Seu importante trabalho sobre equações diferenciais ordinárias considerou métodos de solução de equações não-lineares que envolveram expansões de séries de potência em um parâmetro alfa. Liouville tinha produzido resultados semelhantes. Também alguns de seus resultados em calor foram semelhantes aos resultados produzidos por Lamé e por Duhamel. Ele deve ser considerado como o fundador da escola russa de mecânica teórica. Além de suas contribuições importantes para equações diferenciais parciais, ele fez avanços significativos para a teoria da elasticidade e álgebra publicação de mais de 80 relatórios e dar palestras. Seu trabalho sobre álgebra foi uma extensão do trabalho de Abel sobre funções algébricas e suas integrais.

A partir de 1847 foi inspetor-chefe para o ensino de ciências matemáticas em escolas militares. Escreveu muitos livros finos e estabeleceu as condições que permitiram a escola de Chebyshev florescer em São Petersburgo. No entanto, essa enorme contribuição tomou muito do seu tempo que ele poderia ter sido capaz de se dedicar a fazer maiores progressos na física matemática. Chebyshev escreveu o seguinte sobre Ostrogradski:

> Um homem, sem dúvida, de mente brilhante, não conseguiu nem metade do que poderia ter feito se não estivesse "atolado" com trabalhos pedagógicos permanentes e cansativos.
>
> (CHEBYSHEV)

Victor Katz apud Connor e Robertson (2017):

> Infelizmente, algumas das descobertas mais importantes de [Ostrogradski] parecem ter sido totalmente ignoradas, pelo menos na Europa Ocidental. Não só deu a primeira generalização do teorema da mudança de variável a n variáveis, como também provou e, mais tarde, generalizou o teorema da divergência, escreveu integrais de n-formas sobre "hipersuperfícies" n-dimensionais e ... Deu a primeira prova do teorema da mudança da variável para integrals dobro usando conceitos infinitesimal. Todos esses resultados foram eventualmente repetidos por outros matemáticos sem crédito para Ostrogradski.
>
> (VICTOR KATZ, *apud* CONNOR e ROBERTSON, 2017)

Ostrogradski era um homem alto e alto, com uma voz alta. Sua aparência era formidável, especialmente com a perda de seu olho direito, mas tinha um caráter alegre e uma mente excepcionalmente aguda. Apaixonadamente amou sua terra natal, seu povo e sua cultura. Ele amava a literatura clássica francesa e russa, embora sua língua de escolha quando em casa era sempre ucraniano. Ele adorava recitar os monólogos de Molière e Corneille, mas seu escritor favorito era Taras Hryhorovych Shevchenko, o poeta e escritor ucraniano. Ostrogradski conhecia muitas das obras de Shevchenko de cor e freqüentemente as recitava. Ostrogradski encontrou-se com Shevchenko em 1858 quando o poeta veio permanecer com ele.

Por fim, vamos mencionar o trabalho notável que Ostrogradski fez no final de sua vida. As circunstâncias são interessantes e foram descritas por Aleksei Nikolaevich Krylov Apud Connor e Robertson (2017):

> Em 1856, de acordo com o tratado de Paris, a Rússia foi privada do direito de ter uma frota no Mar Negro. Um grande número de trabalhadores de escritório teve que ser ateado fogo e, para melhorar suas circunstâncias, foi decidido estabelecer um fundo de aposentadoria no departamento naval, e começar pagar pensões em 1859. O seguro de vida era então uma novidade, e cálculos conectados com O trabalho dos fundos de aposentadoria, ou com a determinação do montante das pensões de

> acordo com as deduções pertinentes de salários eram conhecidos ainda menos. Por esta razão, ambos os matemáticos que eram membros da Academia de Ciências de São Petersburgo, Ostrogradski e Bunyakovsky, foram incluídos no comitê encarregado de elaborar uma carta do fundo. Eles realmente fizeram todos os cálculos necessários e forneceram sua justificativa teórica. As transações da comissão foram publicadas sem demora; Eles contêm uma nota notável por Ostrogradski ...
>
> (ALEKSEI NIKOLAEVICH KRYLOV *apud* CONNOR e ROBERTSON 2017)

Observamos que o Tratado de Paris de 1856 terminou a guerra da Criméia que a Rússia travou contra a Turquia apoiada pela Grã-Bretanha e pela França. Era uma guerra famosa pela incompetência de ambos os lados. Deve ter doído Ostrogradski muito para ver a Rússia ea França em lados opostos.

Sempre um ucraniano de coração, Ostrogradski especificou em sua vontade que ele deveria ser enterrado em sua aldeia natal de Pashennaya. No verão de 1861, quando ele estava tomando banho, notou-se que ele tinha um abscesso nas costas. Ele foi operado e o abscesso foi removido, mas sua saúde rapidamente se deteriorou e ele morreu em janeiro do ano seguinte. Observamos que algumas fontes dão sua data de morte como 1861, em vez de 1862, uma vez que a data do calendário estilo antigo era 20 de dezembro de 1861. Seus desejos foram realizados e ele foi enterrado no cofre da família em Pashennaya.

Lobachevsky: personagem em destaque

Nicolai Ivannovitch Lobachevsky (1793 – 1856), é natural da cidade de Gorki na Rússia. Segundo Matos e Neves (2010, p. 82), ele era um dos três irmãos de uma família muito pobre.

Ainda segundo os autores supracitados, em 1800 aos sete anos de idade, seu pai faleceu e sua mãe resolveu se mudar para a cidade de

Kazan, nas proximidades da fronteira com a Sibéria. Foi a partir daí que ele começou seus estudos, financiado sempre por bolsas escolares.

Segundo Eves (2004, p. 542), "Lobachevsky passou a maior parte de sua vida na Universidade de Kazan, primeiro como aluno, depois como professor de matemática e finalmente como reitor."

Roberto Bonola (1954, p.84) em seu livro *Non-Euclidean Geometry,* afirma que

> He took his degree in 1813 and remained in the University, first as Assistant, and then as Professor. In the later position he lectured upon mathematics in all its branches and also upon physics and astronomy.[13]
>
> (BONOLA, 1954, p.84)

Como podemos perceber, Lobachevsky começou seus estudos tardiamente, entretanto aos vinte anos de idade recebeu seu diploma, equivalente à graduação de hoje, da Universidade de Kazan. Logo depois passou a lecionar matemática, física e astronomia nessa mesma instituição.

Sua vida acadêmica sempre esteve vinculada à Universidade de Kazan, aonde veio ocupar o cargo de reitor de 1827 até 1846. Além dos trabalhos envolvendo as geometrias não-euclidianas, Lobachevsky também desenvolveu trabalhos em álgebra, mas precisamente nas aproximações numéricas às raízes das equações algébricas. Ele faleceu na cidade de Kazan, Rússia, em 1856.

A seguir, iremos retomar o tema proposto para explicar e esclarecer alguns pontos importantes para o melhor entendimento do mesmo. Além disso, iremos traçar o caminho, por nós escolhido, para explicar como se deu a evolução do tema e quais foram os personagens que, de certa forma, contribuíram para tal desenvolvimento.

---

[13] Ele pegou seu diploma em 1813 e permaneceu na universidade, primeiramente como assistente, e então como professor. Na última posição ele lecionou sobre matemática em todos os seus ramos e também sobre física e astronomia. (Tradução livre)

A evolução dos conteúdos temáticos

Para tratarmos das geometrias não-euclidianas precisamos primeiramente nos reportar à geometria euclidiana, organizada pelo matemático e filósofo grego Euclides por volta do ano 300 a.C. Para Eves (2004, p.167) pouco sabemos da vida e da personalidade de Euclides. Mas, ainda segundo o autor, tudo indica que foi ele o fundador da famosa escola de matemática de Alexandria, da qual foi professor.

Segundo Eves (2004, p.167), Euclides desenvolveu diversos trabalhos, pelo menos dez, entretanto o que lhe trouxe notoriedade foi a obra intitulada "*Os elementos*". Para o mesmo autor,

> Nenhum trabalho, exceto a Bíblia, foi tão largamente usado ou estudado e, provavelmente, nenhum exerceu influência maior no pensamento científico. Mais de mil edições impressas dos *Elementos* já apareceram desde a primeira delas em 1482; por mais de dois milênios esse trabalho dominou o ensino de geometria.
>
> (EVES, 2004, p.167-168)

Na sua estrutura, *Os elementos* de Euclides estão organizados em treze livros os quais tratam de diferentes objetos matemáticos. Os livros I ao VI, trazem a Geometria no seu escopo.

A forma como Euclides organizou a Geometria Plana nos seus livros, está baseada no método axiomático ou postulacional. Este método consiste em aceitar como verdadeiras algumas afirmações, *axiomas ou postulados,* previamente estabelecidos e, a partir desses, demonstrar outras proposições de forma dedutiva.

Segundo Howard Eves,

> Certamente um dos grandes feitos dos matemáticos gregos antigos foi a criação da forma postulacional de raciocínio. A fim de se estabelecer uma afirmação num sistema dedutivo, deve-se mostrar que essa afirmação é uma consequência lógica necessária de algumas afirmações previamente estabelecidas. Estas, por sua

> vez, devem ser estabelecidas a partir de outras também estabelecidas previamente e assim por diante.
>
> (EVES, 2004, p.179)

Segundo Eves (2004, 179), grande parte dos matemáticos gregos antigos diferenciavam "postulado" e "axioma". Há evidências de pelo menos três distinções defendidas por diferentes grupos, como segue:

> 1. Um axioma é uma afirmação assumida como auto-evidente e um postulado é uma construção de algo assumida como auto-evidente; assim, os axiomas e os postulados estão entre si, em grande parte, como os teoremas e os problemas de construção.
> 2. Um axioma é uma suposição comum a todas as ciências ao passo que um postulado é uma suposição peculiar a uma ciência particular em estudo.
> 3. Um axioma é uma suposição de algo que é, ao mesmo tempo, óbvio e aceitável para o aprendiz; um postulado é uma suposição de algo que não é nem necessariamente óbvio nem necessariamente aceitável pelo aprendiz.
>
> (EVES, 2004, p.179)

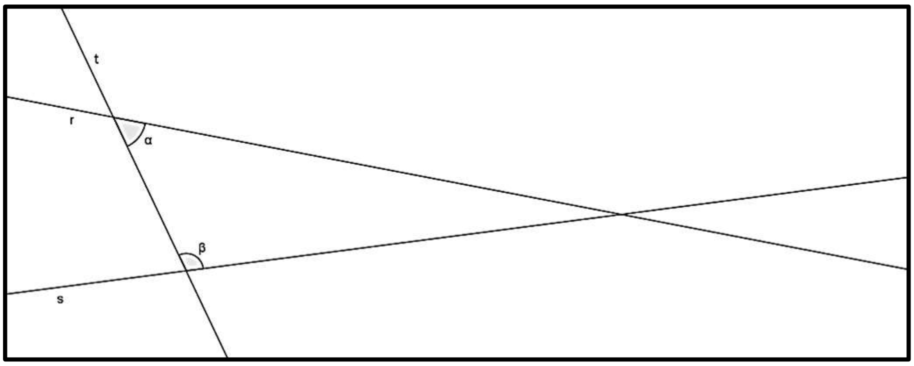
Para o mesmo autor supracitado, há evidências de que Euclides tenha optado pela segunda distinção anterior. Possivelmente ele tenha assumido os equivalentes as dez afirmações seguintes, sendo cinco "axiomas" ou noções comuns e cinco "postulados" geométricos:

> *A1*: Coisas iguais à mesma coisa são iguais entre si.
> *A2*: Adicionando-se iguais a iguais, as somas são iguais.
> *A3*: Subtraindo-se iguais de iguais, as diferenças são iguais.
> *A4*: Coisas que coincidem uma com a outra são iguais entre si.
> *A5*: O todo é maior do que a parte.
> *P1*: É possível traçar uma linha reta de um ponto qualquer a outro ponto qualquer.
> *P2*: É possível prolongar uma reta finita indefinidamente em linha reta.

> *P3*: É possível descrever um círculo com qualquer centro e qualquer raio.
> *P4*: Todos os ângulos retos são iguais entre si.
> *P5*: Se uma reta intercepta duas retas formando ângulos interiores de um mesmo lado menores do que dois retos, prolongando-se essas duas retas indefinidamente elas se encontrarão no lado em que os dois ângulos são menores do que dois ângulos retos.
> (EVES, 2004, p.179-180)

Esses *axiomas* e *postulados* pretendiam deduzir todas as 465 proposições de *Os elementos.* Como podemos observar, o quinto postulado diferencia-se dos demais, seja pela sua extensão ou por não ser tão auto-evidente. A figura a seguir, ilustra o quinto postulado de Euclides. Segundo o postulado se $\alpha + \beta < 180^o$, então as retas *r* e *s* irão se encontrar.

Figura 2: **Quinto postulado de Euclides**



Fonte: Ribeiro (2012)

Segundo Eves (2004, p. 539):

> [...] para os gregos antigos parecia mais uma proposição do que um postulado. Ademais, Euclides não fez nenhum uso desse postulado até alcançar a Proposição I 29. Assim, era natural ter a curiosidade de saber se esse postulado era realmente necessário e cogitar que talvez ele pudesse ser reduzido, como teorema, dos outros nove "axiomas" e "postulados" ou, pelo menos, ser substituído por um equivalente mais aceitável.
> (EVES, 2004, p.539)

Dentre os vários substitutivos encontrados para o quinto postulado de Euclides, o mais conhecido e usado nos tempos modernos foi atribuído ao matemático e físico escocês John Playfair (1748-1819). De acordo com Eves (2004, p. 539), "é o substituto mais comum nos atuais textos elementares de geometria: *Por um ponto fora de uma reta dada não há mais do que uma paralela a essa reta."*

Várias foram as tentativas de demonstração do postulado das paralelas de Euclides a partir dos nove "axiomas" e "postulados". Por mais de dois mil anos, diferentes geômetras se ocuparam nessa tarefa. Segundo Eves (2004, p. 539), esse fato contribuiu significativamente para o desenvolvimento da matemática moderna.

O estudo do postulado das paralelas, como ficou conhecido o quinto postulado de Euclides, abriu portas para o surgimento de outras geometrias, as denominadas de geometrias não-euclidianas.

Neste trabalho, apresentamos uma proposta de evolução das geometrias não-euclidianas a partir de alguns personagens que contribuíram de alguma forma para o tema. Os personagens escolhidos neste trabalho para tratarmos do processo evolutivo das geometrias não-euclidianas, foram: Girolamo Saccheri (1667-1733), Johann Heinrich Lambert (1728-1777); Adrien-Marie Legendre (1752-1833); Nicolai Ivanovitch Lobachevsky (1793-1856); Janos Bolyai (1802-1860) e Bernhard Riemann (1826-1866).

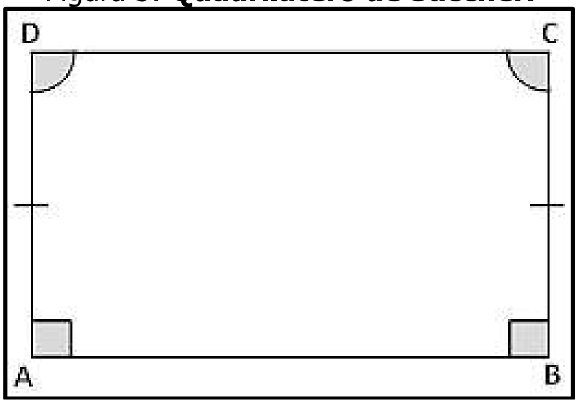
Girolamo Saccheri

Segundo Eves (2004, p. 540), Saccheri nasceu em São Remo, Itália. Aos vinte e três anos concluiu seu noviciado na Ordem Jesuíta e passou o resto de sua vida ocupando cargos de professor universitário. Ele leu a obra *Os Elementos* de Euclides quando ensinava retórica, filosofia e teologia no Colégio Jesuíta de Milão. Saccheri ficou encantado com o método utilizado por Euclides de *reductio ad absurdum* (redução ao absurdo) ao tratamento da lógica formal.

Ainda de acordo com Eves, Saccheri publicou em Turin, quando ensinava filosofia, a obra intitulada *Lógica demonstrativa*. Nessa obra, Saccheri passou a aplicar o poderoso método de redução ao absurdo ao tratamento da lógica formal. Alguns anos depois, ele resolveu aplicar esse método ao estudo do postulado das paralelas de Euclides. Foi então que escreveu um livro intitulado *Euclides ab omni naevo vindicatus* (Euclides Livre de Toda Imperfeição) que foi publicado em Milão no ano de 1733, alguns meses depois do seu falecimento.

Nesse trabalho sobre o quinto postulado de Euclides, Saccheri construiu um quadrilátero com dois lados opostos congruentes e perpendiculares a mesma base, como mostra a figura a seguir.

Figura 3: **Quadrilátero de Saccheri**

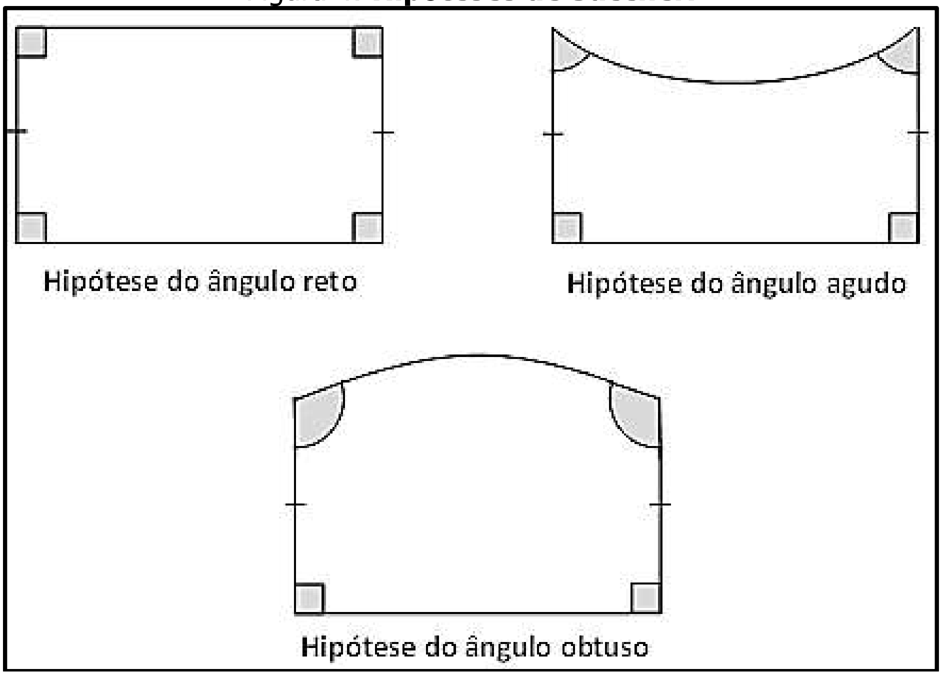


Fonte: Ribeiro (2012)

Esse quadrilátero ficou conhecido como quadrilátero de Saccheri. Traçando as diagonais *AC* e *BD,* Ele mostrou que os ângulos *C* e *D* são congruentes, apoiando-se em algumas proposições de congruências, que estão entre as vinte oito proposições iniciais de Euclides.

De posse dessa conclusão, Saccheri verificou que havia três possibilidades de medidas para os ângulos *C* e *D*: agudos, retos ou obtusos. De acordo com Eves (2004, p.540), essas hipóteses ficaram conhecidas como: *hipótese do ângulo agudo, hipótese do ângulo reto* e *hipótese do ângulo obtuso*. O trabalho de Saccheri consistiu em mostrar que a suposição da hipótese do ângulo agudo e a do ângulo obtuso levavam a uma contradição e, por redução ao absurdo, validava-se a hipótese do ângulo reto, o que mostrou implicar no postulado das paralelas.

Figura 4: **Hipóteses de Saccheri**



Fonte: Ribeiro (2012)

De acordo com Eves (2004), Saccheri eliminou logo a hipótese do ângulo obtuso ao assumir tacitamente a infinitude da reta. Porém, na hipótese do ângulo agudo tornou-se complexo. Eves (2004) diz que:

> Após obter muitos dos teoremas agora clássicos da chamada geometria não-euclidiana, Saccheri, de maneira insatisfatória e inconvincente, forçou uma contradição no desenvolvimento de suas ideias através de noções nebulosas sobre elementos infinitos. Não tivesse ele se mostrado tão ávido de exibir uma contradição e, em vez

> disso, tivesse assumido sua incapacidade de alcançá-la e, sem dúvida, os méritos da descoberta da geometria não-euclidiana caberiam a ele.
>
> (EVES, 2004, p.540)

Ribeiro (2012, p.46), reforça esse fato ao dizer que:

> Mesmo tendo demonstrado muitos teoremas da geometria hiperbólica, Saccheri é reconhecido apenas como precursor das geometrias não-euclidianas, já que não admitiu que tais fatos poderiam ser considerados em outro tipo de geometria, além de não substituir efetivamente o quinto postulado de Euclides por outro. Mas, sem dúvidas, pode-se colocá-lo em um patamar diferenciado dentre os precursores por ser o primeiro a explorar com tanta profundidade as três hipóteses.
>
> (RIBEIRO, 2012, p.46)

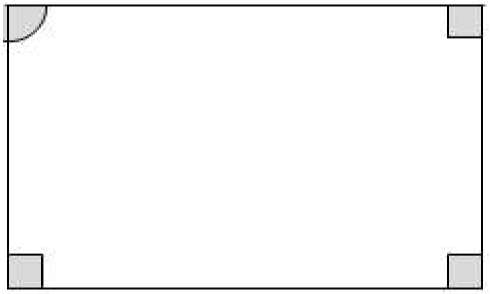
O trabalho de Saccheri não recebeu o devido reconhecimento por seus contemporâneos e ficou por muitos anos esquecido.

Johann Heinrich Lambert

Três décadas depois da publicação da obra de Saccheri, o matemático suíço Johann Heinrich Lambert (1728-1777), fez uma investigação semelhante intitulada *Die Theorie der Parallellinien*, publicada somente após sua morte. (EVES, 2004, p.541)

A partir de um quadrilátero, mas não o quadrilátero de Saccheri, contendo três ângulos retos ele levantou três hipóteses conforme o quarto ângulo fosse agudo, reto ou obtuso.

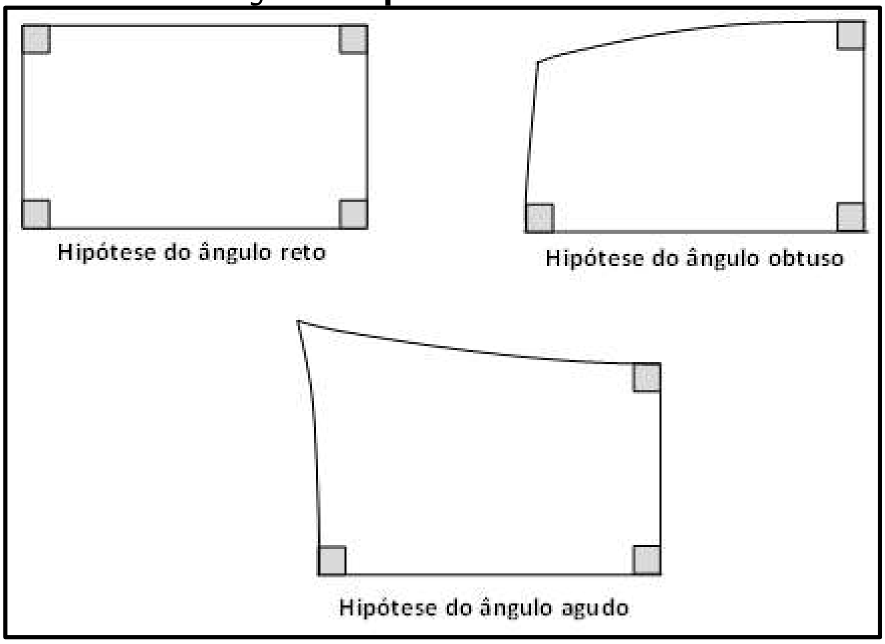
Figura 5: **Quadrilátero de Lambert**



Fonte: Ribeiro (2012)

Hipóteses levantadas por Lambert conforme o quarto ângulo:

Figura 6: **Hipótese de Lambert**



Fonte: Ribeiro (2012)

Segundo Eves (2004, p. 541), Lambert, assim como Saccheri, mostrou que de acordo com as três hipóteses levantadas, a soma dos ângulos internos de um triângulo é menor que (hipótese do ângulo agudo), igual a (hipótese do ângulo reto) ou maior que (hipótese do ângulo obtuso) dois ângulos retos, ou seja, 180º.

Lambert eliminou a hipótese do ângulo obtuso pela mesma suposição (infinitude da reta) de Saccheri. Porém, suas conclusões a respeito da hipótese do ângulo agudo, de acordo com Eves (2004, p.541), foram imprecisas e insatisfatórias.

Para Ribeiro (2012, p.48), uma importante contribuição de Lambert para pesquisas futuras das geometrias não-euclidianas, foi a relação estabelecida por ele entre a hipótese do ângulo obtuso com a esfera.

> Lambert percebeu que não seria capaz de encontrar contradição nesta hipótese caso considerasse o círculo máximo de uma esfera como reta (ROSENFELD, 1988, p.100) e chega até mesmo considerar o triângulo esférico como um triângulo que possui propriedades tais como as impostas pela hipótese do ângulo obtuso, já que o defeito deste triângulo é proporcional a sua área.
> (RIBEIRO, 2012, p.48)

Além disso, Lambert "conjecturou que a geometria decorrente da hipótese do ângulo agudo poderia talvez se verificar numa esfera de raio imaginário" (EVES, 2004, p.541), ou seja, antecipou a existência da figura que hoje denominamos de pseudoesfera.

Adrien-Marie Legendre

Adrien-Marie Legendre (1752-1833), matemático francês contribuiu significativamente para a popularização do problema do quinto postulado. Seus esforços foram publicados em várias edições de seus *Éléments de Géométrie*, obra amplamente adotada. (EVES, 2004, p.541)

Segundo Eves (2004, p.541), Legendre começou seu trabalho considerando as hipóteses de a soma dos ângulos internos de um triângulo ser menor que, igual a ou maior que 180º (dois ângulos retos). Eliminou a terceira hipótese, pela mesma suposição de Saccheri (infinitude da reta). Entretanto, não foi capaz de eliminar a primeira hipótese.

Segundo Eves (2004),

> Não é de se surpreender que não se tenha encontrado nenhuma contradição sob a hipótese do ângulo agudo, pois hoje se sabe que a geometria desenvolvida a partir de uma coleção de axiomas compreendendo um conjunto básico acrescido da hipótese do ângulo agudo é tão consistente quanto a geometria euclidiana desenvolvida a partir do mesmo conjunto básico acrescido da hipótese do ângulo reto, isto é, o postulado das paralelas é independente dos demais postulados e devido a isso não pode ser deduzido dos demais.
>
> (EVES, 2004, p.541)

Para esse autor, os primeiros a suspeitarem desse fato foram: o alemão Gauss, o húngaro Bolyai e o russo Lobachevsky. Todos trabalharam com esse problema considerando o postulado das paralelas de acordo com Playfair, conforme as seguintes possibilidades: "por um ponto dado pode-se traçar mais do que uma, exatamente uma ou nenhuma paralela a uma reta dada." (p.541-542)

De acordo com Eves, provavelmente Gauss tenha sido o primeiro a alcançar resultados contundentes relativos à hipótese do ângulo agudo, porém nunca publicou algo referente a esse assunto. Desta forma, atribui-se a Bolyai e Lobachevsky a descoberta desse tipo de geometria não-euclidiana.

Janos Bolyai

Janos Bolyai (1802-1860) nasceu na Hungria, foi oficial do exército austríaco. Seu pai, Farkas Bolyai, era professor de matemática e amigo de Gauss. Não restam dúvidas de que Bolyai recebeu incentivos de seu pai para estudar o postulado das paralelas, pois em tempos anteriores havia se interessado pelo problema. (EVES, 2004, p.542)

De acordo com Eves, por volta do ano 1823 Janos Bolyai percebeu a dimensão da natureza do problema que tentava resolver. Mas, se mostrou motivado com o seu trabalho, o que fez questão de compartilhar com seu pai através de uma carta escrita ao mesmo naquele ano. Nessa carta, comunicou-o que tinha interesse em publicar seus estudos sobre a teoria das paralelas, mas precisaria de um tempo para organizar seu material. Bolyai exclamou dizendo: "Do nada eu criei um universo novo e estranho."

Seu pai insistiu para que o trabalho fosse publicado como um apêndice de um trabalho, em dois volumes, de matemática elementar desenvolvido por ele. Mas, somente em 1829, Bolyai submeteu seus manuscritos ao seu pai e, em 1832, o trabalho foi publicado como um apêndice de vinte e seis páginas do volume 1 da obra do seu pai.

Ribeiro ratifica esse fato em seu trabalho de pesquisa ao afirmar que Em 1832, Bolyai finalmente publicou seu trabalho intitulado de *Ciência Absoluta do Espaço* como apêndice de um livro de seu pai, intitulado *Tentamen.* (RIBEIRO, 2012, p.54)

Bolyai mostrou que existia uma coleção de proposições que independiam do postulado das paralelas e que, portanto, tinham validade tanto na geometria euclidiana quanto na não-euclidianas.

Segundo Bonola (1912) *apud* Ribeiro (2012, p.54), os principais resultados do trabalho de Bolyai foram:

- A própria definição de retas paralelas e suas consequências imediatas;
- o círculo e a esfera com raios infinitos;
- a trigonometria esférica é independente do quinto postulado;
- a utilização da trigonometria para o cálculo de áreas e volumes na geometria hiperbólica;
- a impossibilidade da quadratura do círculo na geometria euclidiana.

(RIBEIRO, 2012, p.54)

Como podemos perceber, Bolyai obteve resultados significativos para o avanço do entendimento da existência de outras geometrias diferentes da euclidiana. A lentidão no processo de publicação do trabalho de Bolyai fez com que o mérito da descoberta da existência de outras geometrias ficasse com Lobachevsky, pois publicou seus trabalhos antes, como veremos a seguir.

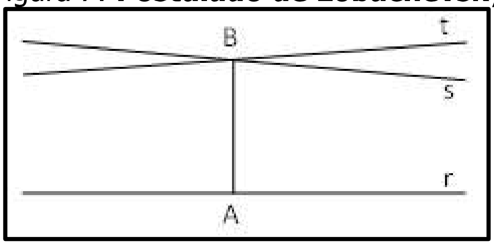
Nicolai Ivanovitch Lobachevsky

Segundo Halsted (1914) *apud* Ribeiro (2012, p.49), Lobachevsky, foi o primeiro a publicar um trabalho de substituía o postulado das paralelas por outro que supunha sua negação e que, não tinha a intenção de mostrar uma inconsistência para então demonstrar o quinto postulado, em 1829.

De acordo com Greenberg (1994) *apud* Ribeiro (2012, p.50), primeiramente Lobachevsky denominou a nova geometria de imaginária e, posteriormente de *pangeometria.* Por ter sido publicada inicialmente em russo, sua obra ficou desconhecida do restante do mundo acadêmico por um longo período. Somente em 1840 esse quadro começou a ser revertido, pois ele publicou um tratado em alemão intitulado *Geometrische Untersuchungen Zur Theorie der Parallellinien* (Investigações Geométricas sobre a Teoria das Paralelas).

De acordo com Bonola (1912) *apud* Ribeiro (2012, p.50), Lobachevsky considerou o seguinte postulado: por um ponto fora de uma reta dada, passam mais de uma reta que não intersectam a primeira.

Figura 7: **Postulado de Lobachevsky**



Fonte: Ribeiro (2012)

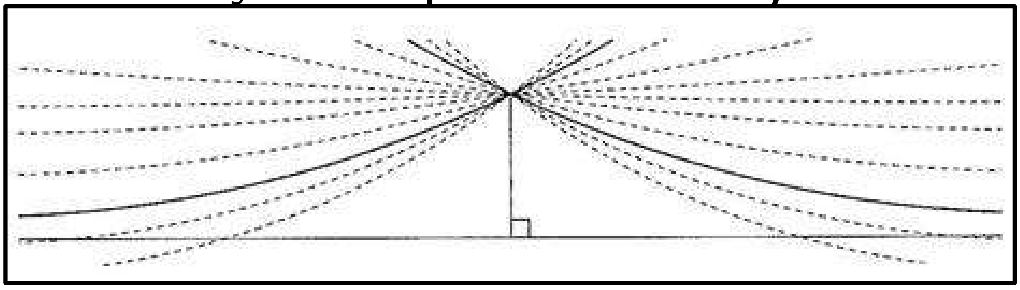
Assim, de acordo com esse postulado, o matemático russo define retas não-secantes e retas paralelas. As não-secantes seriam todas as retas que não intersectam a reta **r** e, reta paralela como a primeira que não a intersecta. (LOBACHEVSKY, 1914, p.13 *apud* RIBEIRO, 2012, p.50)

De acordo com Ribeiro (2012), Lobachevsky definiu da seguinte maneira uma reta paralela:

> Given a line and a point in a plane, I call parallel to the given line drawn from the given point a line passing through the given point and which is the limit between the lines that are drawn in the same plane, that pass through the same point and that, when extended from one side of the perpendicular dropped from that point on the given line, and those that do not cut it.[14]
>
> (LOBACHEVSKY, 2010, *apud* RIBEIRO, 2012, p. 50)

A Figura 8 representa as retas não-secantes e as concorrentes à reta dada.

Figura 8: **Retas paralelas – Lobachevsky**

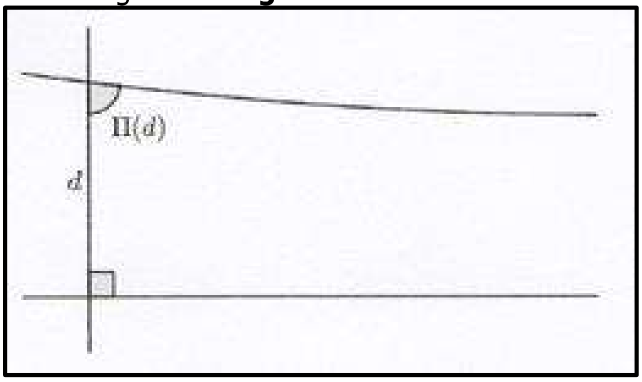


Fonte: Ribeiro (2012)

Segundo Ribeiro (2012), um outro conceito de suma importância utilizado por Lobachevsky em suas análises é o ângulo de paralelismo. Isso nada mais é do que o ângulo formado entre a reta paralela por um ponto à reta dada e a perpendicular a reta dada também traçada por esse ponto. A Figura 9 ilustra melhor essa situação.

[14] Dados uma reta e um ponto no plano, chamo de paralela à reta dada pelo ponto dado uma reta que passa por tal ponto e que seja o limite das retas coplanares que tenham este ponto em comum e que, quando prolongadas a um dos lados da perpendicular que liga o ponto à reta dada, intersectam esta reta e aquelas que não a intersectam. (Tradução, RIBEIRO, 2012)

Figura 9: **Ângulo de Paralelismo**



Fonte: Ribeiro (2012)

Segundo Ribeiro (2012), o ângulo de paralelismo depende da distância *d* do ponto à reta dada. O fato é que quanto maior for a distância *d* menor será o ângulo de paralelismo e, tenderá a 90º quanto mais próximo estiver da reta dada.

Segundo Bonola (1912) *apud* Ribeiro (2012), as principais propriedades as principais propriedades deduzidas por Lobachevsky foram:

> - Se uma reta *s* é paralela a *r* no ponto *P*, então *s* será paralela a *r* em qualquer ponto de *s* na mesma direção;
> - Se *s* é paralela a *r*, então *r* é paralela a *s*;
> - Se *r* é paralela a *r* e *s* é paralela a *t*, então *r* é paralela a *t*;
> - Se *r* é paralela a *s*, então *r* é assintótica a *s*.
>
> (BONOLA, 1912, p.87-88, *apud* RIBEIRO, 2012, p.51)

Além disso, segundo Ribeiro, Lobachevsky apresentou o teorema cuja a soma dos ângulos internos de um triângulo é menor que 180º e, também, deduções em trigonometria que, de acordo com Bonola (1912), corresponde a uma das partes mais importantes de seu trabalho.

Bernhard Riemann

Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866), nasceu em Hanover na Alemanha e faleceu em Selasca, cidade italiana. Um de seus principais professores foi Gauss. Era de uma família modesta, porém teve boas instruções. Primeiramente em Berlim e mais tarde em Gottingen, onde se tornou Doutor. (MATOS e NEVES, 2010, p.95)

Segundo Ribeiro (2012, p.55), Riemann "surpreendeu a todos com sua teoria que apresentava ao mundo uma ideia muito mais ampla de geometria". Agora, Riemann deu um sentido a hipótese do ângulo obtuso, aproveitando as suposições de Lambert e de Bolyai.

Riemann percebeu que Euclides assumiu sem prova, ou seja, tacitamente, que a reta era ilimitada. Entretanto, ele mostrou que seria possível supor que uma reta pode ser infinita, mas limitada.

Neste sentido, Eves (2004) ratifica esse fato ao dizer que:

> Em 1854, Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) mostrou que, descartando-se a infinitude da reta, e admitindo-se simplesmente que a reta seja ilimitada, então, com alguns outros ajustamentos pequenos nos demais postulados, pode-se desenvolver uma outra geometria não-euclidiana consistente a partir da hipótese do ângulo obtuso.
>
> (EVES, 2004, p.544)

Riemann assumiu no lugar do quinto postulado de Euclides o seguinte postulado: "Dada uma reta r e um ponto P que não pertence a r, não existe nenhuma reta paralela a r que passe por P." (RIBEIRO, 2012, p.55)

Segundo Eves (2004, p.544), em 1871 Klein denominou as três geometrias, a de Bolyai e Lobachevsky, a de Euclides e a de Riemann; de geometria hiperbólica, geometria parabólica e geometria elíptica, respectivamente.

O Quadro 1 seguinte sintetiza as principais características de cada geometria para uma melhor compreensão das mesmas.

Quadro 1: **Características de algumas geometrias**

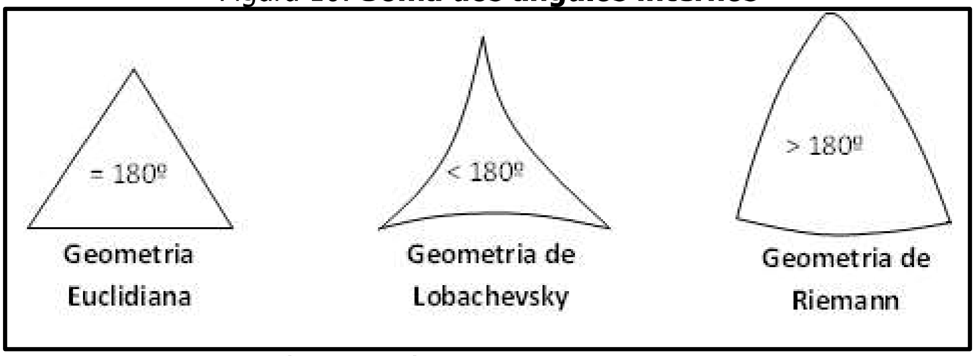
	Geometria Parabólica	**Geometria Hiperbólica**	**Geometria Elíptica**
Dois pontos determinam	Uma reta	Uma reta	Uma ou mais retas
Toda reta é	Infinita	Infinita	Finita
Um ponto e uma distância determinam	Um círculo	Um círculo	Um círculo
Todos os ângulos retos são	Iguais	Iguais	Iguais
Um ponto fora de uma reta determina	Somente uma reta paralela	Mais de uma reta paralela	Nenhuma reta paralela
A hipótese de Saccheri válida é	Ângulo reto	Ângulo agudo	Ângulo obtuso
Duas retas distintas e perpendiculares a uma mesma reta	São paralelas	São paralelas	Interceptam-se
Linhas paralelas	São equidistantes	Nunca são equidistantes	Não existem
Uma linha	É separada em duas partes por um ponto	É separada em duas partes por um ponto	Não é separada em duas partes por um ponto
Dois triângulos que têm ângulos correspondentes congruentes são	Semelhantes	Congruentes	Congruentes
A soma dos ângulos internos de um triângulo é	Igual a 180º	Menor que 180º	Maior que 180º

Fonte: Adaptado de Sá (1997, *apud* Matos e Neves, 2010, p. 98-99)

Duas situações chamam nossa atenção na tabela anterior. A primeira delas diz respeito a questão de que apenas na geometria euclidiana podemos ter dois triângulos semelhantes mas não congruentes, fato que não ocorre nas outras duas geometrias, pois para que os triângulos sejam semelhantes necessariamente eles têm que ser congruentes.

A outra situação refere-se à questão da soma dos ângulos internos de um triângulo. É muito comum o professor de matemática na educação básica se valer do discurso, apoiado inclusive em livros didáticos, de que "a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é igual a 180º." E como vimos, isso só é válido na geometria plana euclidiana. A Figura 9 a seguir ilustra melhor esse fato.

Figura 10: **Soma dos ângulos internos**



Fonte: A matemática através dos tempos

A seguir mostraremos algumas aplicações do tema abordado e também contribuições em outras áreas do conhecimento.

Outros olhares, análises e interpretações temáticos

A prova de que o quinto postulado de Euclides era independente dos demais, pôs fim a um problema de mais de dois mil anos, culminando na criação de novas geometrias (não-euclidianas).

A possibilidade de ampliação para novas geometrias consistentes, fez com que o homem interpretasse o mundo a sua volta de outras formas. Não queremos com isso dizer que uma geometria é melhor do que a outra. Mas, dependendo do que se esteja trabalhando, os resultados serão mais satisfatórios e eficientes de acordo com o tipo de geometria utilizada para a realização do trabalho.

> Se você for um consultor, um agrimensor ou um carpinteiro do tipo "faça você mesmo", então a geometria euclidiana é a mais simples de usar; funciona para tudo isso. Se você for um astrônomo estudando galáxias distantes, poderia preferir a geometria riemanniana; ela é mais eficiente que a euclidiana para tais coisas. Se você for um físico teórico, a geometria de Lobachevsky poderia ser melhor para você que qualquer uma das outras.
>
> (BERLINGHOFF e GOUVÊA, 2010, p. 202)

A descoberta de novas geometrias, representou um avanço significativo para a matemática. O paradigma de que a geometria euclidiana era uma verdade absoluta foi quebrado. Eves (2004, p.544), refere-se a esse fato como sendo "A libertação da geometria".

Para Kaleff (2010), as novas geometrias possibilitaram aos cientistas buscar novas explicações ao mundo físico que nos cerca, por meio de ferramentas teóricas ligadas à Teoria da Relatividade. Segunda esta autora, "os antigos conceitos geométricos não descreviam tão bem as formas fragmentadas e irregulares, como aquelas normalmente encontradas na natureza."

A autora cita Penrose (1996), dizendo que:

> Foi a partir da descoberta das novas teorias geométricas que os meios científicos buscaram entender a geometria do universo e suas medidas, tentando decifrar os enigmas das formas microscópicas às macroscópicas, para entender melhor as leis que regem o Universo e o Cosmo, a aleatoriedade e o Caos.
>
> (KALEFF, 2010, p.3)

Hoje sabe-se que o estudo das novas geometrias "permitem o estabelecimento de logísticas na engenharia de transportes, tanto em situações relacionadas ao controle do curso de aviões como no estabelecimento de linhas de metrôs, ruas e avenidas nos grandes centros urbanos." (KALEFF, 2010, p.4)

Considerações Finais

Nas últimas décadas observamos um crescimento das pesquisas relacionadas a História das Ciências e em especial a História da Matemática. Mendes e Chaquiam (2016, p. 77) destacam que esse desenvolvimento se constitui em um valioso elemento para a melhoria do ensino e aprendizagem da Matemática nas diferentes áreas e níveis, permitindo compreender as origens das ideias que deram forma a nossa cultura, assim como, observar os diversos aspectos do seu desenvolvimento, e perceber que as teorias que hoje aparecem acabadas e elegantes, resultaram de desafios enfrentados com grandes esforços e, em grande parte, numa ordem diferente daquela apresentada após todo o processo de formalização.

Neste sentido, a utilização da História da Matemática em sala de aula através do diagrama metodológico elaborado por Chaquiam (2016, p 94) se constitui em uma possibilidade para o estudo de Geometria.

A metodologia proposta oferece ao aluno visitar ou revisitar os cenários sociocultural, pluridisciplinar e técnico-científico do período recortado relacionado ao ensino da Geometria e ao personagem destacado, Lobachevsky.

No contexto sociocultural, destacamos a história da humanidade em que viveu Lobachevsky. Os personagens contemporâneos à Lobachevsky estão inseridos no contexto pluridisciplinar. Já os personagens que contribuíram para a evolução da Geometria fazem parte do contexto técnico-científico. As maiores dificuldades que encontramos foi a escassez de literatura nacional sobre alguns componentes do diagrama, sobretudo na obtenção de informações atuais sobre pontos de vista sobre

Lobachevsky e biografia de seus contemporâneos, o que nos impulsionou para alguns sites da internet.

Sugerimos que o professor utilize esta metodologia a partir da construção do diagrama seguindo a ordem de prioridades citada no artigo e em seguida, disponibilize o material escrito como suporte teórico para ensino e aprendizagem de Geometria.

Nosso objetivo foi de contribuir, com aporte matemático e histórico, à formação profissional de professores de diversas áreas no estudo das Geometrias, em especial a não Euclidiana, pois sabemos que seu campo de aplicação não se restringe a Matemática como também a astronomia e navegação por exemplo.

Neste passeio pelas Geometrias, desde Euclides até Riemann, fizemos algumas escolhas vistas durante o artigo que não tornam menos importantes outros matemáticos, personagens contemporâneos ao principal e acontecimentos históricos. Não temos também a pretensão de ter esgotado o assunto.

Logo, sugerimos a construção de outros diagramas metodológicos deste mesmo tema, Geometrias, que envolvam outros personagens e contexto mundial para que tenhamos a perspectiva de aprofundamento deste trabalho o qual acreditamos que não se esgota aqui.

Bibliografia consultada e mencionada

ALMEIDA, Manoel de Campos. **O Nascimento da Matemática: a neurofisiologia e a pré-história da matemática.** 1ª ed. – São Paulo: Editora Livraria da Física, 2013.

AMARAL, Daniel A. **"Carl Friedrich Gauss": Faculdade de Engenharia Mecânica.** Disponível em: http://www.fem.unicamp.br/-em313/paginas/person/gauss.htm. Acesso em 11 de abril de 2017.

BERLINGHOFF, Willian P.; GOUVÊA, Fernando Q. **A Matemática através dos Tempos: um guia fácil para professores e entusiastas**. 2. ed. São Paulo: Blucher, 2010.

BONOLA, Roberto. **Non-Euclidean Geometry.** Editora: Dover Science, 1954.

CHAQUIAM, M. Um diagrama, um texto. In: MENDES, I. A.; CHAQUIAM, Ml. **História nas aulas de Matemática: fundamentos e sugestões didáticas para professores.** Belém: SBHMat, 2016.

CHAQUIAM, Miguel. **História da Matemática nas aulas de Matemática: uma proposta para professores.** Anais do XII Seminário Nacional de História da Matemática. Itajubá (MG): SBHMat, 2017.

CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. **"Johann Christian Martin Bartels"**. Disponível em: http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/Biographies/Bartels.html. Acesso em 11 de abril de 2017.

CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. **"Mikhail Ostrogradski".** Disponível: http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/Biographies/Ostrogradski.html. Acesso em 11 de abril de 2017.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática.** Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas, São Paulo. Editora da Unicamp, 2004.

FERNANDES, Cláudio. **"Independência do Brasil": História do Mundo.** Disponível em: http://historiadomundo.uol.com.br/idade-contemporanea/independencia-brasil.htm. Acesso em 09 de abril de 2017.

GOMES, Cristiana. **"Revolução Industrial": InfoEscola.** Disponível em:<http:// http://www.infoescola.com/historia/revolucao-industrial/>. Acesso em 09 de abril de 2017.

JANOS BOLYAI. **In: Universidade de Coimbra.** Disponível em: http://www.uc.pt/fctuc/dmat/departamento/bibliomat/servicos/copy_of_matematicos/Bolyai-J. Acesso em 11 de abril de 2017.

KALEFF, Ana Maria M. R. **Geometrias não-euclidianas na educação básica: utopia ou possibilidade?** X Encontro Nacional de Educação

Matemática. Educação Matemática, Cultura e Diversidade. Salvador-BA, Julho de 2010. Disponível em: http://www.lematec.net.br/CDS/ENEM10/artigos/PA/Palestra21.pdf. Acesso em: 16/04/2017.

MACIEL, Willyans. **"Immanuel Kant": InfoEscola.** Disponível em: http://www.infoescola.com/biografias/immanuel-Kant/. Acesso em 11 de abril de 2017.

MATOS, Edilande Rodrigues; NEVES, Raul Edgar Borges das. **A Geometria Euclidiana e as Geometrias Não-Euclidianas**. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – UEPA, Belém, 2010.

MELLO, Vico Denis S. de; DONATO, Manuela Riane A. **"O Pensamento Iluminista e o Desencantamento do Mundo: Modernidade e a Revolução Francesa como marco paradigmático"**. Revista Crítica Histórica, ano II, nº 4, dez. 2011.

MENDES, Iran Abreu; CHAQUIAM, Miguel. **História nas aulas de Matemática: fundamentos e sugestões didáticas para professores.** Belém: SBHMat, 2016.

PACIEVITCH, Patrícia. **"Iluminismo": InfoEscola.** Disponível em http://www.infoescola.com/historia/iluminismo/. Acesso em 09/04/2017.

RIBEIRO, Renato Douglas Gomes Lorenzetto. **O ensino das geometrias não-euclidianas: um olhar sob a perspectiva da divulgação científica.** Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2012.

SÉCULO XIX. **In: WIKIPÉDIA, a enciclopédia livre.** Flórida: Wikimedia Foundation, 2017. Disponível: https://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=S%C3%A9culo_XIX&oldid=48359272. Acesso: 24/03/17.

SOUSA, Rainer Gonçalves. **"Inconfidência Mineira": Brasil Escola.** Disponível em http://brasilescola.uol.com.br/historiab/inconfidencia-mineira.htm. Acesso em 10 de abril de 2017.