

HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

LICENCIATURA EM MATEMÁTICA



Ministério da Educação - MEC
Coordenação de Aperfeiçoamento
de Pessoal de Nível Superior
Universidade Aberta do Brasil
Instituto Federal de Educação,
Ciência e Tecnologia do Ceará

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Universidade Aberta do Brasil
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará
Diretoria de Educação a Distância

Licenciatura em Matemática

História da Matemática

Francisco Régis Vieira Alves

Fortaleza, CE
2011

CRÉDITOS

Presidente

Dilma Vana Rousseff

Ministro da Educação

Fernando Haddad

Secretário da SEED

Carlos Eduardo Bielschowsky

Diretor de Educação a Distância

Celso Costa

Reitor do IFCE

Cláudio Ricardo Gomes de Lima

Pró-Reitor de Ensino

Gilmar Lopes Ribeiro

Diretora de EAD/IFCE e Coordenadora UAB/IFCE

Cassandra Ribeiro Joye

Vice-Coordenadora UAB

Régia Talina Silva Araújo

Coordenador do Curso de Tecnologia em Hotelaria

José Solon Sales e Silva

Coordenador do Curso de Licenciatura em Matemática

Zelalber Gondim Guimarães

Elaboração do conteúdo

Francisco Régis Vieira Alves

Colaborador

Lívia Maria de Lima Santiago

Equipe Pedagógica e Design Instrucional

Ana Cláudia Uchôa Araújo

Andréa Maria Rocha Rodrigues

Carla Anaíle Moreira de Oliveira

Cristiane Borges Braga

Eliana Moreira de Oliveira

Gina Maria Porto de Aguiar Vieira

Giselle Santiago Cabral Raulino

Glória Monteiro Macedo

Iraci Moraes Schmidlin

Jane Fontes Guedes

Karine Nascimento Portela

Lívia Maria de Lima Santiago

Lourdes Losane Rocha de Sousa

Luciana Andrade Rodrigues

Maria Irene Silva de Moura

Maria Vanda Silvino da Silva

Marília Maia Moreira

Saskia Natália Brígido Bastista

Equipe Arte, Criação e Produção Visual

Ábner Di Cavalcanti Medeiros

Benghson da Silveira Dantas

Davi Jucimon Monteiro

Diemano Bruno Lima Nóbrega

Germano José Barros Pinheiro

Gilvandenys Leite Sales Júnior

José Albério Beserra

José Stelio Sampaio Bastos Neto

Larissa Miranda Cunha

Marco Augusto M. Oliveira Júnior

Navar de Medeiros Mendonça e Nascimento

Roland Gabriel Nogueira Molina

Samuel da Silva Bezerra

Equipe Web

Aline Mariana Bispo de Lima

Benghson da Silveira Dantas

Fabrice Marc Joye

Igor Flávio Simões de Sousa

Luiz Bezerra de Andrade Filho

Lucas do Amaral Saboya

Ricardo Werlang

Samantha Onofre Lóssio

Tibério Bezerra Soares

Thuan Saraiva Nabuco

Samuel Lima de Mesquita

Revisão Textual

Aurea Suely Zavam

Débora Regina Garcia Pinto

Nukácia Meyre Araújo de Almeida

Revisão Web

Antônio Carlos Marques Júnior

Débora Liberato Arruda Hissa

Saulo Garcia

Logística

Francisco Roberto Dias de Aguiar

Virgínia Ferreira Moreira

Secretários

Breno Giovanni Silva Araújo

Francisca Venâncio da Silva

Auxiliar

Ana Paula Gomes Correia

Bernardo Matias de Carvalho

Isabella de Castro Britto

Maria Tatiana Gomes da Silva

Rayssa Miranda de Abreu Cunha

Wagner Souto Fernandes

Catálogo na Fonte: Biblioteca Waldyr Diogo de Siqueira

A474h Alves, Francisco Régis Vieira.
História da matemática / Francisco Régis Vieira Alves; Coordenação
Cassandra Ribeiro Joye. - Fortaleza: UAB/IFCE, 2011.
157p. : il. ; 27cm.

ISBN 978-85-63953-77-3

1. MATEMÁTICA - HISTÓRIA. 2. MATEMÁTICA – MÉTODOS DE EN-
SINO. 3. MATEMÁTICA – ENSINO E APRENDIZAGEM. I. Joye, Cassan-
dra Ribeiro (Coord.). II. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia
do Ceará – IFCE. III. Universidade Aberta do Brasil – UAB. IV. Título.

CDD 510.9

Apresentação 7
Referências 155
Currículo 158

SUMÁRIO

AULA 1 As origens do conhecimento - parte 1 8

- Tópico 1 A sociedade babilônica I 9
- Tópico 2 A sociedade egípcia I 15
- Tópico 3 Os gregos e sua extraordinária matemática I 19
- Tópico 4 A matemática produzida pelos indianos I 29

AULA 2 As origens do conhecimento - parte 2 35

- Tópico 1 A sociedade babilônica II 36
- Tópico 2 A sociedade egípcia II 38
- Tópico 3 Os gregos e sua extraordinária matemática II 40
- Tópico 4 Os gregos e sua extraordinária matemática III 45
- Tópico 5 A matemática produzida pelos árabes 49

AULA 3 Arquimedes e a noção de demonstração 54

- Tópico 1 Matemáticos gregos eminentes e números amigos, perfeitos, abundantes 55
- Tópico 2 Comensurabilidade de grandezas 71
- Tópico 3 O método da exaustão 81

AULA 4 A matemática produzida no oriente 84

- Tópico 1 A matemática produzida pelos chineses 85
- Tópico 2 Construções e formulações lógico-axiomáticas gregas 99
- Tópico 3 A matemática japonesa 107

AULA 5 Evolução e métodos algébricos 109

- Tópico 1 Um problema antigo relacionado à equação polinomial do segundo grau 110
- Tópico 2 As fórmulas de tartaglia ensinadas para cardano 118
- Tópico 3 O surgimento dos complexos 130

AULA 6 História da matemática como metodologia de ensino da matemática 137

- Tópico 1 Problemas na formação de professores de matemática 138
- Tópico 2 História da matemática como metodologia de ensino e o princípio genético 144
- Tópico 3 Uma aplicação de sequência metodológica de ensino por meio de sua história 147

APRESENTAÇÃO

Caro(a) aluno(a),

Quando falamos de História da Matemática (HM) podemos identificar, de modo simplificado, duas categorias de livros que tratam deste assunto. A primeira categoria é identificada por dedicar uma abordagem episódica, novelesca, superficial, retórica e ilustrativa dos episódios e, principalmente, dos matemáticos do passado. O segundo grupo de livros prioriza a análise da Matemática produzida e os motivos pelos quais tais ideias originadas nas antigas civilizações floresceram e adquiriram relevância de saber científico. Lamentamos que a maioria dos livros traduzidos para a Língua Portuguesa pertence à primeira categoria. Esta classe de livros pouco ou quase nada contribui de modo concreto para a futura formação do professor, no que diz respeito à familiarização, domínio e aplicação de uma metodologia de ensino ancorada em pressupostos históricos matemáticos.

Com esta preocupação, apesar de se tratar de um documento inicial, trazemos, em nosso texto, a discussão da Matemática propriamente dita, produzida e sistematizada por algumas civilizações que mereceram destaque. Assim, além de conhecer os métodos matemáticos desenvolvidos no passado, nossa intenção é fazer com que você adquira o domínio e conhecimento, tanto do contexto histórico como destes métodos. Sem isso, qualquer discussão de caráter metodológico ou tentativa de explorar no ensino o “lúdico” ou o “prazeroso” se torna um mero exercício de discussão retórica, de conteúdo vazio e com implicações em práticas inexistentes.

AULA 1

As origens do conhecimento - parte 1

Olá aluno(a)!

Nesta primeira aula discutiremos aspectos históricos e matemáticos das antigas sociedades egípcias, grega e mesopotâmica. Esta última ficou famosa pela escrita cuneiforme e um sistema de numeração sexagesimal que discutiremos na sequência.

Objetivo

- Apresentar os aspectos históricos da origem do conhecimento

TÓPICO 1

A sociedade babilônica I

OBJETIVO

- Apresentar aspectos algébricos do pensamento babilônico para a resolução de problemas

Quando a matemática tem início? Questões inquietantes como esta têm ocupado algum lugar ao longo dos tempos. A resposta, frequentemente, apresenta outra questão, que pode ser resumida por: O que significa matemática?

Dependendo do ponto de vista que possamos admitir, as raízes do conhecimento matemático poderiam ser datadas em momentos distintos do passado. Por exemplo, se tomássemos a matemática como a legítima representante do raciocínio axiomático e argumentado, concluiríamos que a Grécia foi responsável pelo seu surgimento.

Por outro lado, se nos restringimos a um saber rigoroso, no qual as contradições e inconsistências não possuem mais seu lugar, é preciso que consideremos a matemática produzida a partir de alguns matemáticos, como Leibniz, Bolzano e Weiertrass. De acordo com essa perspectiva, a matemática teria surgido na Europa dos séculos XIX e XX.

Acreditamos que estas posições extremistas contribuem apenas para empobrecer a natureza do conhecimento que materializa certos elementos da cognição e racionalidade humana. Neste sentido, Hodgkin (2005, p. 14)



SAIBA MAIS!

Conheça um pouco mais sobre os matemáticos acessando, nesta ordem, os sites:

Leibniz: <http://www.consciencia.org/leibniz.shtml>

Bolzano: <http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm98/icm31/Bolzano.htm>

Weiertrass: <http://www.somatematica.com.br/biograf/weier.php>

“lembra que em muitas culturas anteriores a dos gregos os povos antigos utilizaram operações matemáticas para simples operações de contagem e medida. Eles resolviam problemas com graus variados de dificuldades.”

O mesmo autor lembra que várias civilizações habitaram a região onde hoje é o Iraque. Várias evidências arqueológicas indicam a capacidade daqueles povos ao lidar com problemas matemáticos. Historiadores matemáticos relatam os modelos matemáticos do Iraque antigo, aparentemente, deveriam compor os conteúdos do Ensino Médio para os estudantes. Ainda hoje, tais modelos são identificados.

Um dos modelos matemáticos mais conhecidos trata-se da escrita cuneiforme. Neste sentido, Hodgkin (2005), p. 20) esclarece que *os problemas descritos na escrita cuneiforme se relacionavam às coisas práticas, encontradas no dia-a-dia do império babilônico*. O mais interessante era a tentativa de resolver determinados problemas da álgebra, como a resolução de um problema, que, descrito em linguagem moderna, se estabelece por:

$$8x + 3 + \frac{21}{39}(8x + 3) = 60.$$

Hodgkin (2005, p. 22) destaca alguns aspectos da matemática do império babilônico que ainda estão presentes no modelo atual de ensino, a saber:

- O uso de um sistema sofisticado para a inscrição de números;
- A habilidade de lidar com equações envolvendo quadrados e outras mais elevadas;
- O tratamento e a preocupação com problemas sem uma aplicação imediata na realidade.



VOCÊ SABIA?

“A escrita suméria, grafada em cuneiforme, é a mais antiga língua humana escrita conhecida. A sua invenção deve-se às necessidades de administração (cobrança de impostos, registro de cabeças de gado, medidas de cereal etc.)”. Link disponível no material web.

Escrita cuneiforme de 1 até 60			
∟ 1	∟∟ 2	∟∟∟ 3	∟∟∟∟ 4
∟∟∟ 5	∟∟∟∟ 6	∟∟∟∟∟ 7	∟∟∟∟∟∟ 8
∟∟∟∟∟ 9	< 10	<∟ 11	<∟∟ 12
<∟∟∟ 13	<∟∟∟ 14	<∟∟∟∟ 15	<∟∟∟∟∟ 16
<∟∟∟∟ 17	<∟∟∟∟∟ 18	<∟∟∟∟∟∟ 19	<< 20
<<< 30	<<∟ 40	<<∟∟ 50	∟ 60

Figura 1: Sistema de representação babilônica

A descoberta do **sistema sexagesimal** por alguns pesquisadores foi uma revolução. E para muitos estudiosos o seu surgimento é um mistério. Este sistema era usado já em 1800 antes de Cristo e, particularmente em Astronomia, em 1500 a. C. Assim como o teorema de Pitágoras, que já era conhecido antes dos gregos, algumas histórias sobre determinados conceitos matemáticos são dúbias e não podemos precisar ou apontar este ou aquele matemático como o pai ou inventor da propriedade ou teorema.

O sistema sexagesimal é um pequeno exemplo que demonstra que tanto os egípcios como os babilônicos construíram, ao longo de sua história, um acervo matemático significativo. Desenvolveram a aritmética e a álgebra, até certo ponto. Mas essa matemática suficiente em certas civilizações possuía limitações sob o ponto de vista científico.

Por outro lado, uma nova atitude em relação à matemática teria lugar na Grécia Antiga, por volta de VI a. C. Na verdade, os gregos mudaram a relação do homem com o universo na medida em que, embora sem desprezar totalmente a observação e a experimentação, passaram a adotar a razão como o grande instrumento na busca da verdade.

Identificamos na história modelos matemáticos comuns entre a sociedade babilônicas e a grega, embora as ideias empregadas tivessem sido distintas. De fato, enquanto que os gregos se interessaram inicialmente pela solução geométrica da equação quadrática, os babilônicos desenvolveram métodos algébricos.

Burton ratifica nossa declaração quando afirma que os babilônicos descrevem algumas instruções para a obtenção da fórmula (em linguagem moderna) da solução de $x^2 + ax = b$ a qual, segundo eles, era dada por $x = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b} - \frac{a}{2}$. “Embora os matemáticos babilônicos não tivessem uma fórmula para a equação quadrática, eles resolveram alguns casos particulares por meio de procedimentos engenhosos” (2006, p. 67).

Vamos analisar um problema típico babilônico do perímetro do retângulo, de modo que o seu semiperímetro seja dado por $x + y = a$ e sua área dada por $x \cdot y = b$, onde x e y são respectivamente o comprimento e a altura. Burton (2006, p. 67) pergunta: como eles chegaram à solução deste problema? Como eles especulavam, uma vez que não existe uma explícita indicação nos textos daquele período?

Vamos considerar um caso particular de um retângulo de semiperímetro $x + y = 20$. Assim eles tabulavam o resultado da área para as seguintes variações:

$$\begin{cases} x = \frac{a}{2} + z \\ y = \frac{a}{2} - z \end{cases} (*) \text{ onde } 0 \leq z \leq 9. \text{ Os babilônios obtiveram então a seguinte tabela}$$

(figura 2) de aproximações.

Por exemplo, se temos:

$$z = 0 \leftrightarrow x = \frac{a}{2} + 0 \text{ e } y = \frac{a}{2} - 0 \leftrightarrow x = y \rightarrow 2x = 20 \therefore x = 10 = y$$

Segue que $b = x \cdot y = 100$. Podemos observar na tabela abaixo que as áreas $b = x \cdot y$ decrescem à medida que o valor de z aumenta. Além disso, quando observamos, o valor da expressão $(\frac{a}{2})^2 - b$ se aproxima dos valores de z ao quadrado. Isto é, $(\frac{a}{2})^2 - b = z^2$.

	$x = \frac{a}{2} + z$	$y = \frac{a}{2} - z$	$b = xy$	$(\frac{a}{2})^2 - b$
$z = 0$	10	10	100	0
$z = 1$	11	9	99	1^2
$z = 2$	12	8	96	2^2
$z = 3$	13	7	91	3^2
$z = 4$	14	6	84	4^2
$z = 5$	15	5	75	5^2
$z = 6$	16	4	64	6^2
$z = 7$	17	3	51	7^2
$z = 8$	18	2	36	8^2
$z = 9$	19	1	19	9^2

Figura 2: Tabela de aproximações empregada pelos babilônios

Burton (2006, p. 68) explica que *com certeza em algum momento eles começaram a inverter o procedimento em busca de z , que fornece: $z = \sqrt{(\frac{a}{2})^2 - b}$* . E a

partir de (*), teremos:
$$\begin{cases} x = \frac{a}{2} + \sqrt{(\frac{a}{2})^2 - b} \\ y = \frac{a}{2} - \sqrt{(\frac{a}{2})^2 - b} \end{cases} (**). \text{ Vejam um exemplo.}$$

EXEMPLO 1:

Os babilônios buscaram uma solução para o seguinte problema descrito num tablete

em escrita cuneiforme:
$$\begin{cases} x + y = \frac{13}{2} \\ x \cdot y = \frac{15}{2} \end{cases} . \text{ Encontre-a.}$$

SOLUÇÃO:

Eles usavam (*), obtendo
$$\begin{cases} x = \frac{13}{4} + z \\ y = \frac{13}{4} - z \end{cases} . \text{ Repare que a equação inicial é}$$

satisfeita, uma vez que $x + y = [\frac{13}{4} + z] + [\frac{13}{4} - z] = 2 \cdot \frac{13}{4} = \frac{13}{2}$. Do mesmo modo a

segunda equação é satisfeita, pois $(\frac{13}{4} + z)(\frac{13}{4} - z) = \frac{15}{2}$. Agora buscamos o valor de $(\frac{a}{2})^2 - b = \frac{169}{4} - \frac{15}{2} = z^2$.

Portanto: $z^2 = \frac{169}{4} - \frac{15}{2} = \frac{49}{4} \leftrightarrow z = \frac{7}{4}$. Consequentemente teremos os

seguintes valores: $\begin{cases} x = \frac{13}{4} + \frac{7}{4} = 5 \\ y = \frac{13}{4} - \frac{7}{4} = \frac{3}{2} \end{cases}$. Um raciocínio semelhante pode ser

trabalhado com o problema da diferença descrito por: $\begin{cases} x - y = a \\ x \cdot y = b \end{cases}$. Colocamos agora

$$\begin{cases} x = \frac{a}{2} + z \\ y = z - \frac{a}{2} \end{cases} \text{ . Assim, nossas soluções serão dadas por } \begin{cases} x = \sqrt{(\frac{a}{2})^2 + b} + \frac{a}{2} \\ y = \sqrt{(\frac{a}{2})^2 + b} - \frac{a}{2} \end{cases} (***)$$

Podem ser encontrados outros problemas menos convencionais nos manuscritos babilônicos, como a resolução de: $\begin{cases} x + y = \frac{35}{6} \\ x + y + xy = 14 \end{cases}$, traduzido em notação moderna, claramente. Situações-problema como esta confirmam o potencial abstrativo daquele povo que se ocupou de desafios desta natureza que em nada os remetiam de forma direta às situações concretas da realidade do dia-a-dia.

Vejamos a solução de $\begin{cases} x + y = \frac{35}{6} \\ x + y + xy = 14 \end{cases}$, notando que

$x \cdot y = x + y + xy - (x + y) = 14 - \frac{35}{6} = \frac{49}{6} \therefore x \cdot y = \frac{49}{6}$. Retomamos a forma padrão

$$\begin{cases} x + y = \frac{35}{6} = a \\ x \cdot y = \frac{49}{6} = b \end{cases} \text{ . Pelo mesmo procedimento anterior, escrevemos } \begin{cases} x = \frac{35}{12} + z \\ y = \frac{35}{12} - z \end{cases} \text{ . Agora}$$

buscamos o valor de $(\frac{35}{12})^2 - \frac{49}{6} = (\frac{35}{12})^2 - \frac{49}{6} = \frac{1225}{144} - \frac{49}{6} = \frac{49}{144} = z^2 \leftrightarrow z = \pm \frac{7}{12}$.

Segue que nossa solução final será dada por: $\begin{cases} x = \frac{35}{12} + \frac{7}{12} = \frac{7}{2} \\ y = \frac{35}{12} - \frac{7}{12} = \frac{7}{3} \end{cases}$.

Burton (2006) ressalta ainda um problema padrão nos manuscritos deste povo que consistia em manter constante a equação $x \cdot y = b$ e variar a outra expressão,

como, por exemplo: $\begin{cases} x \cdot y = 600 \\ (x + y)^2 + 120(x - y) = 3700 \end{cases}$.

Aparentemente eles conheciam a identidade $(x + y)^2 = (x - y)^2 + 4xy$, que facilitava a conversão de $(x + y)^2 = (x - y)^2 + 4(600) = (x - y)^2 + 2400$.

Assim, escrevemos:

$$(x + y)^2 + 120(x - y) = 3700$$

$$[(x - y)^2 + 2400] + 120(x - y) = 3700 \leftrightarrow (x - y)^2 + 120(x - y) = 1300$$

Observamos agora que fazendo $t = x - y \leftrightarrow t^2 + 120t - 1300 = 0$. Aplicando a fórmula:

$$\begin{aligned}
 & \begin{cases} x = \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b} \\ y = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b} - \frac{a}{2} \end{cases} \rightarrow x - y \\
 (***) & \sqrt{\left(\frac{120}{2}\right)^2 + 1300} - \frac{120}{2} = \sqrt{4900} - 60 = 70 - 60 = 10
 \end{aligned}$$

Baseando-se nestas relações, propomos o seguinte problema.

EXERCÍCIO RESOLVIDO:

Resolva o problema babilônico que em linguagem moderna é descrito por

$$\begin{cases} x - y = 10 \\ xy = 600 \end{cases}.$$

SOLUÇÃO:

Usando o que é proposto pelos métodos, temos: $x = z + \frac{10}{2}$ e $y = z - \frac{10}{2}$.

$$\text{Agora sabemos que } \begin{cases} x = \sqrt{25 + 600} + 5 = 25 + 5 = 30 \\ y = \sqrt{25 + 600} - 5 = 25 - 5 = 20 \end{cases}.$$

Neste tópico conhecemos alguns métodos algébricos empregados pelos babilônicos. No próximo tópico discutiremos de modo introdutório a sociedade egípcia.

TÓPICO 2

A sociedade egípcia I

OBJETIVO

- Apresentar alguns aspectos do pensamento aritmético e geométrico egípcio

VOCÊ SABIA?

O Papiro de Moscou, também denominado de Golonishev, foi comprado no ano de 1893 no Egito e foi escrito por um escriba desconhecido. O Papiro contém 25 exemplos, quase todos com problemas cotidianos.

Os egípcios não foram somente um povo que estudou geometria antes dos gregos. Eles foram os povos mais avançados daquela região (TABAK , 2004, p. 6).

Burton (2006, p. 33) lembra que *grande parte dos historiadores desenvolveu estudos sobre o Egito Antigo a partir da invasão de Napoleão em 1798*. Grande parte das informações desta antiga nação é oriunda dos Papiros de Rhind e Golenischev. Este último é usualmente chamado de Papiro de Moscou. Uma homenagem clara aos descobridores.

Por meio da análise desses papiros, constatamos que os egípcios se interessaram por geometria de modo muito além de suas necessidades práticas. De fato, eles desenvolveram fórmulas que descreviam propriedades de sólidos geométricos.

De fato, no papiro de Moscou, há 25 problemas que apresentam antigas situações relacionadas à Geometria Plana e Espacial. O problema 14 mostra que os egípcios, em 1850 d.C., já eram familiares da fórmula correta do volume da pirâmide truncada. Em notação moderna, escrevemos:
$$V = \frac{h(a^2 + ab + b^2)}{3}$$
.

SAIBA MAIS!

Conheça mais sobre o Papiro de Rhind acessando o site:

<http://www.matematica.br/historia/prhind.html>

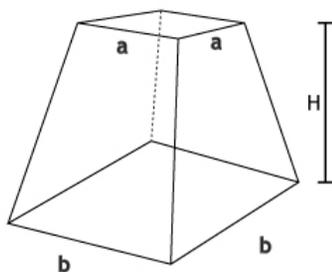


Figura 3: O tronco da pirâmide investigada pelos egípcios.

Burton sublinha que provavelmente eles não conheciam o teorema de modo generalizado que permite trabalhar com este sólido, contudo alguns indícios indicam que o mesmo procedimento era usado em grande parte das pirâmides construídas. *É mais seguro afirmar que eles conheciam a fórmula do volume da pirâmide quadrangular* $V = \frac{h}{3}a^3$. De modo análogo à área do triângulo $\frac{1}{2}bh$, os egípcios podem ter suposto que o volume da pirâmide possuía uma constante de vezes ha^2 (2006, p. 57). Contudo a fórmula $V = \frac{h(a^2 + ab + b^2)}{3}$ pode ter sido apenas uma conjectura.

Outro exemplo interessante é encontrado no papiro de Ahmes, conforme Tabak (2004). Os egípcios cortavam um eixo simétrico no triângulo e montavam a seguinte figura reproduzida.

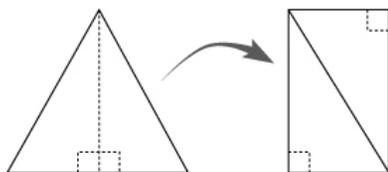


Figura 4: Representação do método geométrico de cálculo da área do triângulo

Quando necessitavam realizar cálculos com frações, os egípcios depararam com inúmeras dificuldades para conceber frações do tipo $\frac{2}{5}$, escrita numa linguagem moderna. Seus cálculos então admitiam preferencialmente frações do tipo $\frac{1}{n}$ chamadas de frações unitárias, onde $n \in \mathbb{N}$. Por exemplo, temos a seguinte representação para $\frac{6}{7} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{14} + \frac{1}{28}$ (*), embora possamos escrever ainda a mesma fração do seguinte modo $\frac{6}{7} = \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7}$. Burton (2006) relata que provavelmente, um antigo escriba egípcio obteve da seguinte maneira (*). Os procedimentos abaixo não são triviais à primeira vista.

Mas vejamos um caso de divisão realizada pelos egípcios, como dividir 35 por 8, ou em termos mais modernos, calcular a divisão $\frac{35}{8}$. Inicialmente, começamos, na primeira coluna, a duplicar o valor de 8, até que ele não exceda o valor de 35. Em seguida, começamos a dividir o divisor 8, até completar o resto. Repare abaixo que destacamos com uma seta os elementos cuja soma correspondente vale o numerador $1 + 2 + 32 = 35$ e $4 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{32 + 2 + 1}{8}$.

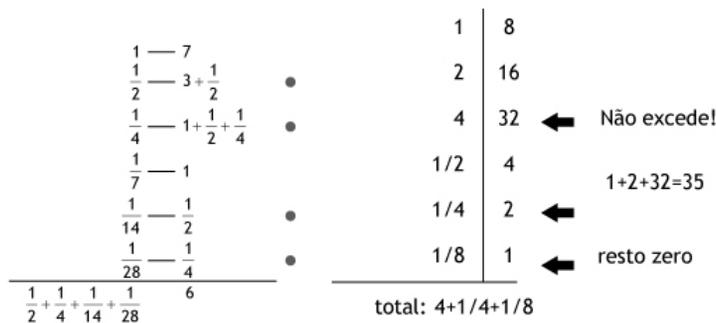


Figura 5: Método de divisão egípcia

Na figura 5, observamos que, inicialmente, multiplicamos 1×7 e depois multiplicamos $\frac{1}{2} \times 7 = \frac{7}{2} = 3 + \frac{1}{2}$. Em seguida, multiplicamos $\frac{1}{4} \times 7 = \frac{7}{4} = 1 + \frac{3}{4} = 1 + \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$. Vemos a seta indicando o aparecimento da unidade 1. A partir daí mudamos o denominador de divisão, trocamos 2, 4, 8, ... por 7, 14, 28, ... na condição em que a soma dos elementos da segunda coluna resulta 6, que é o divisor. Assim, fazemos $\frac{1}{7} \times 7 = 1$; $\frac{1}{14} \times 7 = \frac{1}{2}$; $\frac{1}{28} \times 7 = \frac{1}{4}$. Finalmente, vemos na ilustração do lado esquerdo, com uma marca do lado, os elementos cuja soma resulta $6 = [3 + \frac{1}{2}] + [1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}] + [\frac{1}{2}] + [\frac{1}{4}]$ e, quando destacamos os elementos correspondentes, obteremos: $\frac{6}{7} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{14} + \frac{1}{28}$.

EXERCÍCIO RESOLVIDO:

Divida pelo método egípcio $\frac{4}{5}$ e $\frac{21}{4}$.

SOLUÇÃO:

Observamos que escolhemos os elementos da coluna direita de modo que $4 = [2 + \frac{1}{2}] + 1 + \frac{1}{2}$. Por outro lado, obtemos: $\frac{4}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10}$; todas são frações unitárias. Por outro lado, obtemos $\frac{21}{4} = 5 + \frac{1}{4}$.

1	5		1	4	
1/2	2+1/2	•	2	8	
1/4	1+1/4		4	16	
1/5	1	•	5	20	•
1/10	1/2	•	1/2	2	
1/20	1/4		1/4	1	•
1/2+1/5+1/10=4/5			5+1/4		
4=(2+1/2)+1+(1/2)			21=20+1		

Figura 6: Método de divisão egípcio

TÓPICO 3

Os gregos e sua extraordinária matemática I

OBJETIVO

- Discutir aspectos aritméticos do pensamento grego

VOCÊ SABIA?

A Escola Pitagórica teve seu nome dado em homenagem ao filósofo e matemático grego Pitágoras. A criação denominada de irmandade pitagórica, cujos princípios teóricos influenciaram o pensamento de Platão e Aristóteles. O pensamento reflexivo de Pitágoras também foi determinante para a evolução geral da matemática e da filosofia ocidental.

SAIBA MAIS!

Acesse o site <http://educacao.uol.com.br/filosofia/ult3323u34.jhtm> e conheça um pouco mais sobre as contribuições de Karl Popper.

A contribuição grega à evolução da matemática, do ponto de vista da sistematização e formalização das ideias, é singular. Encontramos em Platão e Aristóteles, raízes e fundamentos filosóficos que ainda são identificados no saber matemático moderno.

Segundo Popper (1972, 104), “parece provável que a teoria das formas de Platão esteja intimamente associada, na sua origem e no seu conteúdo, à teoria pitagórica de que todas as coisas são, essencialmente, números.”

Um exemplo interessante é descrito ainda por Karl Popper. O filósofo austríaco, naturalizado inglês, lembra que *o fundador da ordem pitagórica estava impressionado com duas descobertas: a de que um fenômeno aparentemente quantitativo, como a harmonia musical, dependia*

de razões numéricas - 1:2 ; 2:3 ; 3:4 ; e a de que o ângulo reto refletia as razões numéricas 3:4:5 ou 5:12:13 (POPPER, 1972, p. 105).

Na perspectiva da escola pitagórica, fundada por Pitágoras de Samos, por volta de 560 a. C., a matemática era tratada de maneira muito filosófica e abstrata, desvinculada das exigências da vida prática. Nesse contexto, era natural que separassem o estudo teórico dos números, que chamavam de aritmética, dos cálculos práticos, que denominavam logística.

Uma das aplicações dessa perspectiva foi o tratamento dado para alguns sólidos geométricos planos que tiveram sua interpretação no campo da aritmética. O nosso primeiro caso trata dos números triangulares, que denotaremos por Δ_n . Abaixo temos as seguintes relações:

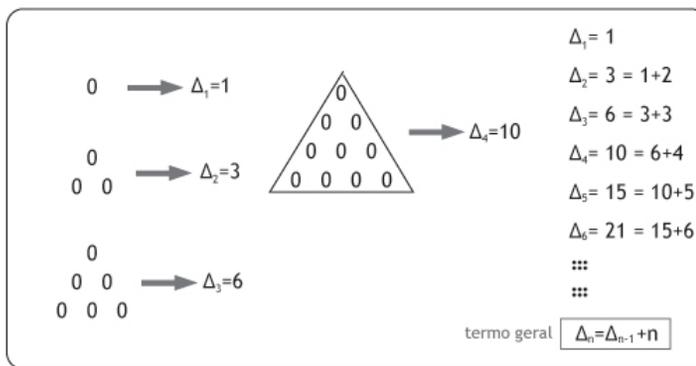


Figura 7: Interpretação geométrica dos números triangulares

Observamos que a relação $\Delta_n = \Delta_{n-1} + n$ para $n \geq 1$ pode ser verificada por Indução Matemática, o que não foi realizado pelos gregos, uma vez que o processo de indução teve sua formulação matemática mais eficaz com Giuseppe Peano. Observe ainda que podemos escrever:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_1 = 1 \\ \Delta_2 = 1 + 2 \\ \Delta_3 = 1 + 2 + 3 \\ \Delta_4 = 1 + 2 + 3 + 4 \\ \dots \\ \Delta_n = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n = \overset{\text{Indução}}{\frac{n(n+1)}{2}} \end{array} \right.$$



ATENÇÃO!

Aos pitagóricos é que se deve a distinção entre números pares e ímpares (DOMINGES, 1991, p. 9).

TEOREMA 1:

O único número triangular primo Δ_n é o 3, onde $n \geq 1$.

DEMONSTRAÇÃO:

De fato, vimos por indução que $\Delta_n = \frac{n(n+1)}{2}$ onde $n \in \mathbb{N} \leftrightarrow \begin{cases} n \text{ é par} \\ n \text{ é ímpar} \end{cases}$. Se n for par, digamos que $n = 2k$ onde $k \in \mathbb{N}$, segue que:

$$\Delta_{2k} = \frac{2k(2k+1)}{2} = k(2k+1)$$

TEOREMA 2:

O único número pentagonal primo é o 5.

Assim, o único caso em que temos um número primo ocorre na condição em que $k = 1$ ou $(2k + 1) = 1 \leftrightarrow k = 0$ o que não ocorre. Assim, só temos a possibilidade para $k = 1 \rightarrow n = 2 \cdot 1 \therefore \Delta_2 = \frac{2(2+1)}{2} = 3$. Na outra situação, pode ocorrer que $n = 2k + 1$ é ímpar. Daí, escrevemos: $\Delta_{2k+1} = \frac{(2k+1)(2k+2)}{2} = (2k+1)(k+1)$ e, neste caso, nenhuma das expressões pode ser a unidade, ou seja: $(2k + 1) = 1$ ou $(k + 1) = 1 \leftrightarrow k = 0$.

Observamos que, na época de Pitágoras, ainda se contava recorrendo-se ao uso de pedrinhas ou de marcas de pontos na areia. Por outro lado eram os pitagóricos observadores atentos de formas geométricas. Sua atenção culminou com o aparecimento dos números figurados. Estes, como o próprio nome sugere, resultam de arranjos com pontos ou pedras, como no caso dos números triangulares. Passaremos ao estudo dos números quadrangulares.

Consideremos agora os seguintes arranjos que se assemelham a quadrados ver figura 8.

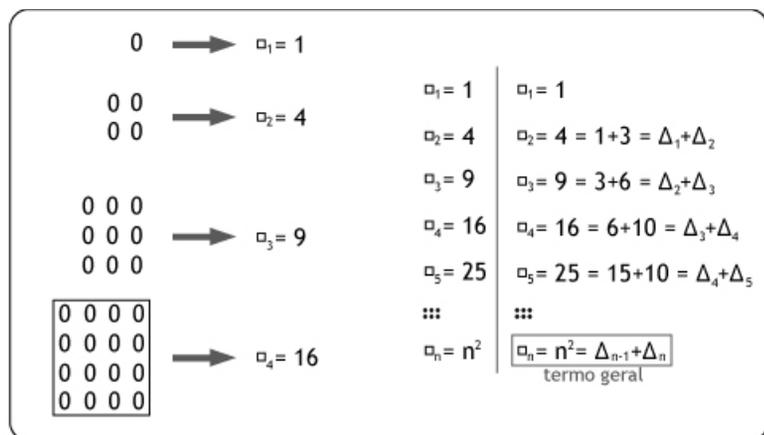


Figura 8: Interpretação geométrica dos números quadrangulares

Repare que $\square_n = \Delta_n + \Delta_{n-1} = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = n^2$, para $n \geq 1$. O termo geral dos números quadrangulares é descrito por $\square_n = n^2$, para $n \geq 1$.

Passaremos à descrição dos números pentagonais, que denotaremos por Pent_n . Para tanto, observemos as seguintes relações.

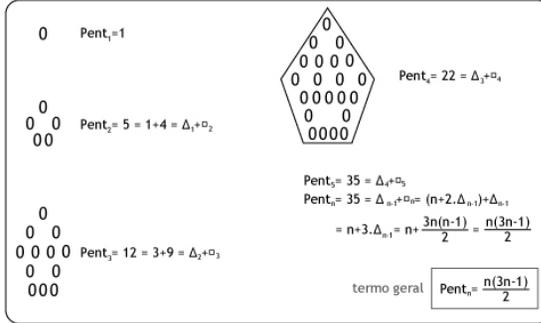


Figura 9: Interpretação geométrica dos números pentagonais gregos

Assim, o termo geral dos números pentagonais será descrito por $\text{Pent}_n = \frac{n(3n-1)}{2}$ para $n \geq 1$. Usando este fato, enunciaremos os teoremas seguintes.

DEMONSTRAÇÃO:

Supondo que n é par, digamos que $n = 2k \therefore \text{Pent}_n = \frac{n(3n-1)}{2}$ para $n \geq 1$.

Assim, teremos $\text{Pent}_{2k} = \frac{2k(3 \cdot 2k - 1)}{2} = k(6k - 1) \leftrightarrow \begin{cases} \text{se } k = 1 \rightarrow 1 \cdot (6 - 1) = 5 \\ \text{se } k > 1 \text{ não pode ser primo!} \end{cases}$

Agora analisemos o caso em que $n = 2k + 1$, observando que

$\therefore \text{Pent}_{2k+1} = \frac{(2k+1)(3(2k+1)-1)}{2} = \frac{(2k+1)(6k+2)}{2} = (2k+1)(3k+1)$ que do mesmo modo não pode ser primo.

TEOREMA 3:

Qualquer número pentagonal é um terço de um número triangular.

DEMONSTRAÇÃO:

Já vimos que $\text{Pent}_n = \frac{n(3n-1)}{2}$. Assim, fazendo

$$m = 3n - 1 \leftrightarrow n = \frac{m+1}{3} \leftrightarrow \frac{m+1}{3} \cdot \frac{m}{2} = \frac{1}{3} \times \frac{m(m+1)}{2} = \frac{1}{3} \times \Delta_m$$

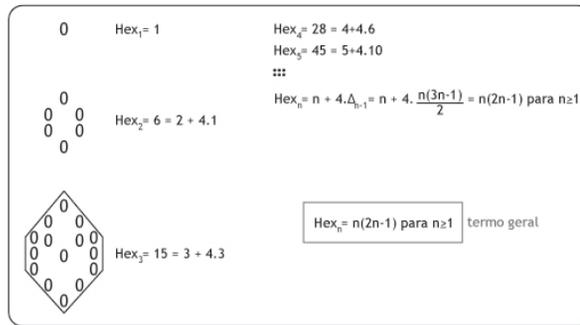


Figura 10: Interpretação geométrica dos números hexagonais

TEOREMA 4:
 Todo número hexagonal é um número triangular.

DEMONSTRAÇÃO:

De fato, sabemos que $\text{Hex}_n = n(2n - 1) = n + 4 \cdot \Delta_{n-1}$. Assim, segue que:

$$\begin{aligned}
 &= (n + \Delta_{n-1}) + 3 \cdot \Delta_{n-1} = \Delta_n + 3 \cdot \Delta_{n-1} \\
 &= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{3n(n-1)}{2} = \frac{4n^2 - 2n}{2} = \frac{(2n-1)(2n-1+1)}{2} \stackrel{m=2n-1}{=} \\
 &= \frac{m(m+1)}{2} = \Delta_m \text{ onde } m=2n-1
 \end{aligned}$$



ATENÇÃO!

Não foi preservado nenhum documento que testemunhe as primeiras reflexões do caráter aritmético da seita religiosa matemática e política denominada de pitagórica. Estes números figurados compõem uma pequena parte de sua obra. No estudo destes números o tipo de representação realça a ligação entre as propriedades numéricas e as formas geométricas (ESTRADA ET AL., 2000, p. 231).

Vejamos agora os números heptagonais descritos abaixo.

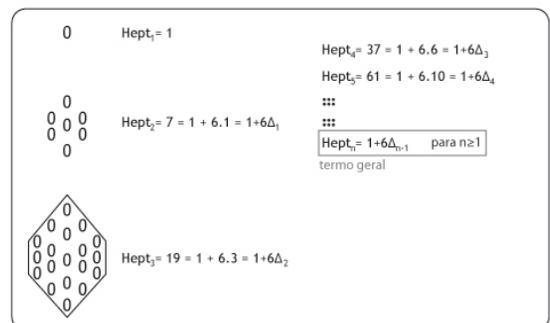


Figura 11: Interpretação geométrica dos números heptagonais

Pode-se provar por indução que $\text{Hept}_n = 1 + 6 \cdot \Delta_{n-1}$ para $n \geq 1$. Por outro lado, desde que:

$$\Delta_{n-1} = \frac{n(n-1)}{2} \rightarrow \text{Hept}_n = 1 + 6 \cdot \Delta_{n-1}$$

$$= 1 + 6 \cdot \frac{n(n-1)}{2} = 1 + 3n(n-1) = 1 - 3n + 3n^2 \text{ é o termo geral para os}$$

números heptagonais.

Para finalizar esta parte, veremos os **números oblongos** ou **números retangulares**.

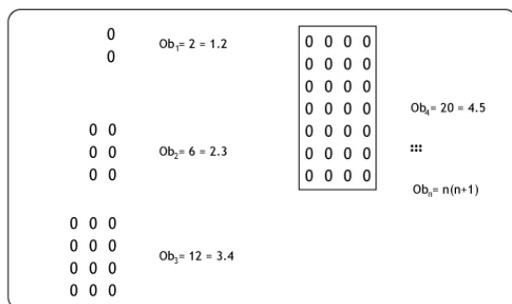


Figura 12: Interpretação geométrica dos números retangulares

Para concluir este tópico, discutiremos brevemente alguns aspectos relacionados à noção de irracionalidade. Os números naturais $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$ são obtidos por meio de um processo abstrato de contagem. Por vezes, os antigos precisaram adicionar quantidades e grandezas e comprimentos. Eves (1983, p. 43) lembra que, *diante de algumas medidas em baixa temperatura, necessitamos do zero ou números inteiros negativos*. Contudo, em virtude de certas operações, necessitamos de certas entidades abstratas, tais como: $\frac{p}{q}$ onde $p, q \in \mathbb{Z}$ e $q \neq 0$. Estes números possuem uma representação geométrica, caso tomemos um segmento $\overline{OI} = u$ e a partir deste construímos qualquer fração.

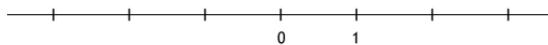


Figura 13: Interpretação geométrica dos números feita por Eves (1983, p. 44)

Eves diz que tivemos um grande momento na história quando os pitagóricos descobriram que, os gregos construíram a diagonal de um quadrado, passando pela origem O , e tomando sua medida, que neste caso vale $\sqrt{2}$ e, em seguida por uma rotação do compasso, marcando este comprimento na reta, os gregos evidenciaram que não existia nenhum número que correspondia a tal segmento de comprimento $\sqrt{2}$. Mas vejamos outros exemplos de números irracionais. Observe a figura 14, representa a interpretação geométrica do número racional $\sqrt{2}$.

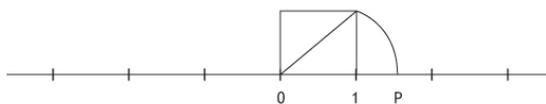


Figura 14: Interpretação geométrica do segmento de comprimento $\sqrt{2}$

No primeiro caso, seguindo uma demonstração que foi mencionada por Aristóteles (384-322 a. C.), assumimos que podemos ter $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ onde $a, b \in \mathbb{Z}$ e $b \neq 0$. Agora vamos admitir sem perda de generalidade que todos os fatores comuns de divisão entre a e b foram cancelados, ou seja, $\text{MDC}\{a, b\} = 1$ são primos entre si. Mas se admitimos que vale $\sqrt{2} = \frac{a}{b} \leftrightarrow 2 = \frac{a^2}{b^2} \leftrightarrow a^2 = 2b^2$. Por outro lado, observamos que $a^2 = 2 \cdot b^2$: a^2 é um número par (*). Assim, $a = 2k$ deve ser par, pois se ele fosse ímpar $a^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4(k^2 + k) + 1$ é um número ímpar! Contrariando a condição. Assim, segue que $a = 2k \rightarrow (2k)^2 = 2b^2 \leftrightarrow 4k^2 = 2b^2 \leftrightarrow 2k^2 = b^2 \leftrightarrow b^2 = 2k^2$. Novamente, com um argumento semelhante, obtemos que $b^2 = 2k^2$ é par e, conseqüentemente, $b = 2c$ onde $c \in \mathbb{Z} - \{0\}$. Mas isto implicaria que o número 2 divide b e o número $2c$ divide a , uma vez que $a = 2k$ e $b = 2c$ onde $c \in \mathbb{Z} - \{0\}$. Por outro lado, isto contraria a nossa escolha inicial de $\text{MDC}\{a, b\} = 1$. Assim, obtemos um absurdo a partir da suposição de que $\sqrt{2}$ fosse um racional. Segue, então, que $\sqrt{2} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

Agora vejamos o caso de $\sqrt{3}$. Para efetivar esta demonstração, enunciamos o seguinte lema.

LEMA:

O quadrado de um número é divisível por 3 se, e somente se, o próprio inteiro o for.



SAIBA MAIS!

Conheça Theodorus de Cyrene que contribuiu muito para o desenvolvimento da matemática
<http://www.dec.ufcg.edu.br/biografias/TeodoroC.html>

DEMONSTRAÇÃO:

Se um número é divisível por 3, escrevemos $n = 3 \cdot k$. Lembrando que, se n não fosse divisível por 3, poderíamos escrever $n = 3 \cdot k + 1$ ou $n = 3 \cdot k + 2$. Daí temos as relações:

$$\begin{cases} n^2 = (3k)^2 = 3 \cdot 3k^2 \\ (3k + 1)^2 = 9k^2 + 6k + 1 + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 2 \\ (3k + 2)^2 = 3(3n^2 + 4n + 1) + 1 \end{cases}$$

Assim, verificamos nossa afirmação a partir da observação das relações acima.

Agora suponhamos que $\sqrt{3} = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ onde $a, b \in \mathbb{Z}$ e $b \neq 0$. Vamos admitir que todos os múltiplos comuns entre a e b foram eliminados por meio de simplificação. Teremos então que $3 = \frac{a^2}{b^2} \leftrightarrow a^2 = 3b^2$. Contudo, observamos que o inteiro $3b^2$ é divisível por 3, assim a^2 também será. Pelo

lema, segue que a será divisível por 3, digamos que $a = 3k$. Substituindo em $a^2 = 3b^2 \leftrightarrow (3k)^2 = 3b^2 \leftrightarrow 9k^2 = 3b^2 \leftrightarrow 3k^2 = b^2$. Ou seja, obtemos agora que b^2 é divisível por 3 e, conseqüentemente, b o será. Mas isto é uma contradição, pois havíamos admitido inicialmente que todos os fatores em comum de a e b foram eliminados, e vimos que 3 divide a e b . Segue que $\sqrt{3} = \frac{a}{b} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

Vejam agora a irracionalidade de $\sqrt{6}$. Novamente admitimos que $\sqrt{6} = \frac{a}{b}$, onde $\text{MDC}\{a, b\} = 1$, ou seja, todos os fatores em comum de a e b foram eliminados. Assim, temos $\sqrt{6} = \frac{a}{b} \leftrightarrow a^2 = 6b^2$, daí a deve ser par, digamos $a = 2c$. $\therefore 4c^2 = 6b^2 \leftrightarrow 2c^2 = 3b^2$, mas observe que $2c^2$ é par, portanto $3b^2$ deve ser par, mas apenas b^2 e, conseqüentemente, b deve ser par, digamos $b = 2d$. Isto seria uma contradição, pois, neste caso, 2 dividiria a e b . Assim, $\sqrt{6} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

Eves (1983, p. 45) lembra que Theodorus de Cyrene (425 d. C.) mostrou a irracionalidade de: $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{15}$, $\sqrt{17}$. Você arriscaria a tentar algum deles?! O mais surpreendente é que a descoberta dos números irracionais demonstra uma crença intuitiva dos gregos que pode ser formalizada e revela a capacidade abstrativa do homem. Mas vale observar que os gregos não acreditavam apenas matematicamente, mas também religiosamente que a reta com os números racionais representava o modelo de continuidade a partir de Pitágoras de Samos (GUILLEN, 1983).



VOCÊ SABIA?

O círculo e o quadrado são duas formas geométricas que aparecem nas civilizações indiana, chinesa, babilônica, egípcia e africana (GASPAR, 2003, p. 101).

TÓPICO 4

A matemática produzida pelos indianos I

OBJETIVO

- Apresentar alguns exemplos do pensamento geométrico da antiga sociedade indiana

O círculo talvez seja o mais antigo símbolo desenhado pela raça humana. Simples de ser executado é uma forma cotidiana encontrada na natureza, vista nos céus como os discos da lua e do sol.

Gaspar (2003, p. 101) lembra que “a primeira noção de retângulo pode ter surgido através da confecção de esteiras e a formação do conceito de círculo a partir da fabricação de formas cada vez mais adequadas às necessidades, observando-se a natureza”.

Encontramos diversas formas geométricas no passado das civilizações mencionadas por Gaspar, relacionadas diretamente ao ritual religioso. Por exemplo, encontra-se no documento indiano chamado Sulbasutras a descrição do altar do falcão. A ideia era a colocação de um pássaro sobre a estrutura descrita na ilustração a seguir.

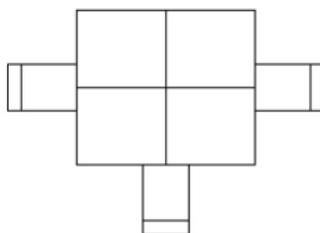


Figura 15: O altar do falcão

O interessante nessa construção concebida para cultos religiosos reside no fato de que, se o altar fosse construído em outro lado, as razões de proporcionalidade

e **semelhanças** de suas figuras constituintes deveriam ser preservadas. Repare que, para executar tal problema, os indianos necessitavam solucionar ainda outro: **construir um quadrado de área igual a um retângulo dado.**

Os indianos resolviam este problema do seguinte modo. Inicialmente, consideramos um retângulo qualquer ABCD. Depois, marcamos o ponto L sobre o lado \overline{AD} , de modo que $\overline{AL} = \overline{AB}$. Em seguida, consideramos o quadrado ABML. Agora, bissectamos o lado \overline{LD} , tomando um ponto médio X, de modo que dividiremos o retângulo LMCD em dois (LMYX e XYCD), a partir da reta \overline{XY} .

O próximo passo envolve um deslocamento do retângulo XYCD para a posição vertical. Em seguida, completamos o quadrado que faltava AQPX. Agora, a partir do ponto P, giramos o lado \overline{PQ} até que ele toque o lado \overline{BY} . O segmento obtido \overline{BT} será o lado do quadrado procurado.

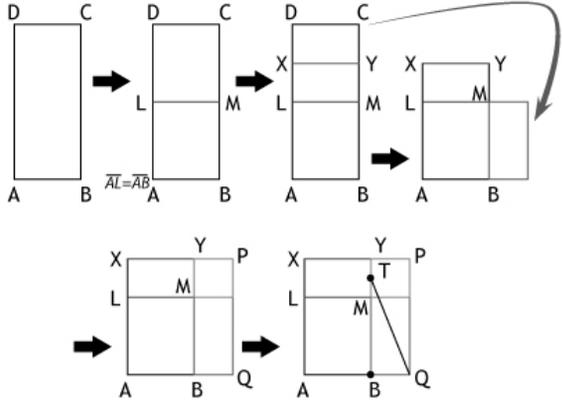


Figura 16: Método geométrico indiano

EXEMPLO 1:

Consideremos um retângulo ABCD de lados 4 e 6. Vamos construir um quadrado de mesma área.

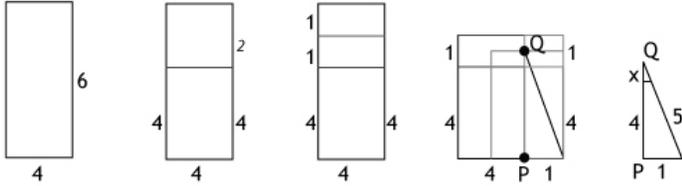


Figura 17: Método geométrico indiano

Seguindo os passos do método indiano e com um pequeno auxílio do teorema de Pitágoras, obteremos, a partir do triângulo retângulo, $25 = (x + 4)^2 + 1 \leftrightarrow (x + 4)^2 = 24 = 4 \cdot 6 \therefore l^2 = 4 \cdot 6$. Assim, se buscamos construir um quadrado de lado l , a partir deste retângulo, concluiremos que $l^2 = 4 \cdot 6$, onde $l = x + 4$.

EXERCÍCIO RESOLVIDO 1:

Dado o retângulo ABCD, de lados “a” e “b”, construa um quadrado de mesma área que o retângulo dado.

SOLUÇÃO:

Consideremos o retângulo ABCD, de lados a e b . Descrevemos o segmento \overline{XY} , determinando dois segmentos, para o lado \overline{BC} : o primeiro de comprimento a , e o restante valendo $(b - a)$. Obtemos, então, um quadrado de lado a . O próximo passo é dividir o segmento de comprimento $(b - a)$ em dois, de modo que tenhamos dois segmentos de comprimento $\frac{b - a}{2}$.

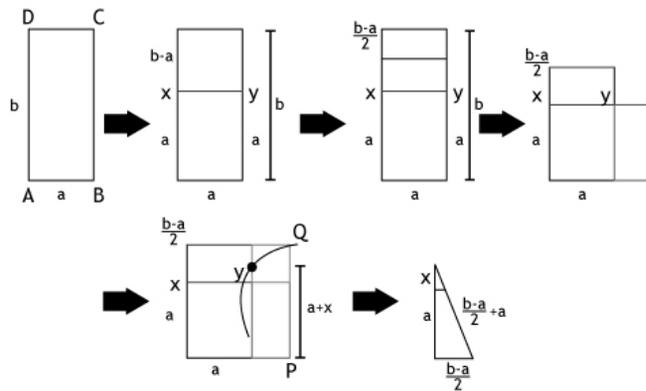


Figura 18: Método geométrico indiano

Transportando o retângulo de dimensões $\frac{b - a}{2}$ e a para a posição vertical e, posteriormente, completando o buraco por um quadrado, obtemos a figura final. Nesta, giramos o segmento \overline{PQ} no sentido anti-horário, até tocar um ponto de um segmento paralelo a \overline{PQ} . O segmento procurado é denotado por $(a + x) = ?$. Finalmente, a partir do triângulo retângulo obtido, de dimensões: $\frac{b - a}{2}$, $\frac{b - a}{2} + a$ e $(a + x)$, por Pitágoras, escrevemos:

$$\left(\frac{b - a}{2} + a\right)^2 = \left(\frac{b - a}{2}\right)^2 + (a + x)^2 \leftrightarrow \left(\frac{b + a}{2}\right)^2 = \left(\frac{b - a}{2}\right)^2 + (a + x)^2$$

$$\text{Segue que: } (a+x)^2 = \left(\frac{b+a}{2}\right)^2 - \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 = \frac{b^2 + 2ab + a^2 - b^2 + 2ab - a^2}{4} = a \cdot b.$$

Portanto, temos $(a+x)^2 = a \cdot b$.

Sobre as resoluções anteriores, vale lembrar que os indianos não possuíam métodos diretos para a extração de raízes quadradas. Como a obtenção do lado do quadrado desejado é indireta, procuramos o valor de $l^2 = ?$, e não o valor de $l = ?$. Além disso, usamos uma notação moderna e aplicamos o teorema de Pitágoras. Alguns historiadores presumem que casos particulares deste teorema fossem conhecidos por algumas civilizações, bem antes dos gregos.

Gaspar (2003, p. 112) lembra “que o livro indiano Baudhayan Sulbasutra não oferece nenhuma prova deste método, mas é possível verificar a veracidade deste método usando Geometria Plana”. Os indianos conheciam ainda outro método para resolver o mesmo problema.

Inicialmente, consideramos o retângulo ABCD. Novamente, determinamos um segmento \overline{FE} , de modo que determinemos um quadrado de lado “a”. Determinamos por meio do segmento \overline{FE} , de modo que tenhamos um quadrado ABEF. Agora, traçamos a mediatriz dos segmentos \overline{FD} e \overline{EC} . Prolongamos agora os lados \overline{FE} até o ponto K e \overline{GH} até o ponto L. Além disso, prolongamos o lado \overline{AB} até o ponto M. De modo que determinemos a seguinte relação: $\overline{FK} = \overline{HL} = \overline{FH} = \overline{AM}$. Chegamos, assim, à determinação do quadrado KFHL.

Por fim, o manuscrito indiano aconselha considerar um retângulo, cuja diagonal será dada pelo segmento \overline{LM} e o seu lado menor será dada por \overline{FH} . A partir do triângulo retângulo determinado de vértices MLP, obtemos a relação: $\overline{LM}^2 = \overline{FH}^2 + x^2$ (*). O livro indiano assegura que o lado do quadrado procurado que possuirá uma área igual a do retângulo fornecido será obtido a partir da relação (*), extraído do triângulo retângulo. Ou seja, o lado do quadrado procurado é dado por: $x^2 = \overline{LM}^2 - \overline{FH}^2$.

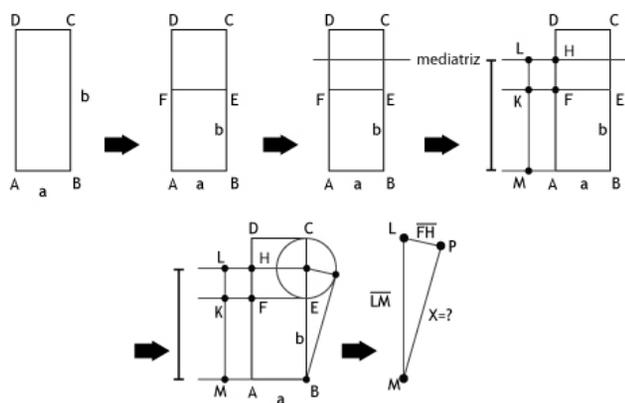


Figura 19: Método geométrico indiano



VOCÊ SABIA?

Um elemento característico dos rituais indianos era a combinação de deuses em um único deus. Na religião indiana, eles representavam um deus por um quadrado. Assim, a combinação de dois deuses resulta no problema matemático de encontrar a área relativa à soma de dois quadrados dados.

EXEMPLO 2:

Considerando um retângulo de área 4×6 , construa um quadrado de mesma área usando o método indiano.

SOLUÇÃO:

Consideremos o retângulo de lados 4 e 6. Observemos o triângulo retângulo que apresenta as seguintes relações:

$$\begin{aligned} x^2 &= \overline{LM}^2 - \overline{FH}^2 = 5^2 - 1^2 = 25 - 1 \\ &= 24 = 4 \cdot 6 \therefore x^2 = 4 \cdot 6 \end{aligned}$$

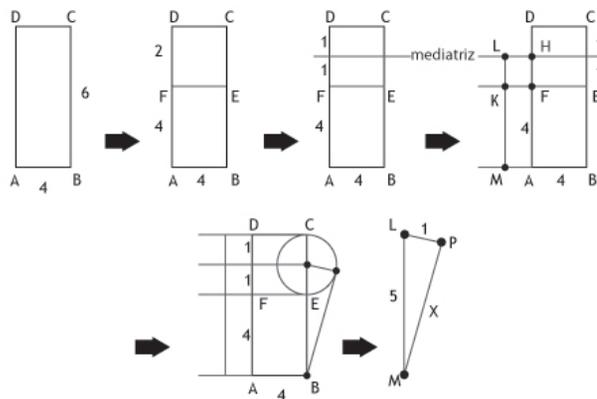


Figura 20: Método geométrico indiano

EXERCÍCIO RESOLVIDO 2:

Considerando um retângulo de dimensões “a” e “b”, construa um quadrado de mesma área.

SOLUÇÃO:

Um método encontrado no manuscrito chamado Satapatha Brahma descrevia a resolução deste problema do seguinte modo: Consideremos dois quadrados ABCD e PQRS. No próximo passo, marcamos um ponto X, sobre o lado \overline{PQ} de modo que: $\overline{PX} = \overline{AB}$. Em seguida o documento orienta considerar o triângulo PXS, de onde extraímos a relação: $\overline{SX}^2 = \overline{PS}^2 + \overline{PX}^2 \overset{\overline{PX} = \overline{AB}}{=} \overline{AB}^2 + \overline{PS}^2 \therefore$ temos o resultado.

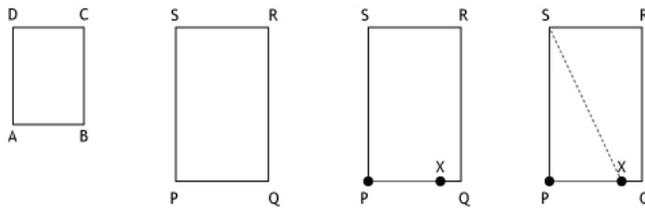


Figura 21: Método geométrico indiano

Para finalizar esta parte relacionada com a matemática produzida pelos indianos, discutiremos o valor aproximado de $\sqrt{2}$, que é calculado em alguns manuscritos indianos, conforme Gaspar (2003, p. 122). De fato, encontramos nos antigos manuscritos o seguinte valor: $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{34} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3}$. Gaspar menciona que, no século XV depois de Cristo, acrescentaram-se os números $\frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 34 \cdot 33} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 34 \cdot 34}$ para melhorar a aproximação. Mas nenhuma indicação é fornecida sobre o modo pelo qual se obtêm estes números que aparentemente fornecem uma razoável aproximação. Gaspar (2003) afirma que um historiador matemático, em 1932, concebeu o seguinte procedimento que supostamente se assemelharia ao que foi feito no passado pelos indianos no manuscrito Sulbasutras.

O procedimento requer a consideração de um quadrado ABCD de lado unitário. Em seguida, devemos tomar outro quadrado equivalente PQRS. Depois traçamos duas faixas dividindo este quadrado em três faixas de mesma área e agrupamos duas delas (faixa 1 e 3) sobre o quadrado inicial ABCD.

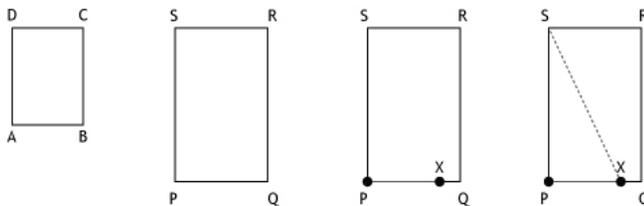


Figura 22: Método geométrico para a aproximação da raiz de 2.

Resta-nos a faixa 2, destacada. Esta faixa é cortada em dois pedaços indicados. Em seguida agrupado o quadrado de área $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}$ formando um outro quadrado. Mas, neste processo, novamente resta-nos o retângulo de área $b \times h = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3}$

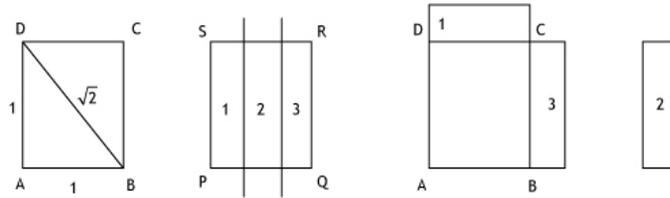


Figura 23: Método geométrico para a aproximação da raiz de 2

Agora, cortamos este retângulo de área $b \times h = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3}$ é em 8 pedaços iguais. Em seguida reagrupamos cada um destes pedaços sobre o quadrado anterior. Observamos que a área de cada pequena faixa é de $b \times h = \left(\frac{1}{3 \cdot 4}\right) \times \frac{1}{8} \left(\frac{2}{3}\right)$. Notamos no quadrado abaixo um pequeno buraco correspondente à falta de um quadrado de área $\frac{1}{12} \times \frac{1}{12}$. Não podemos afirmar que temos um “quase quadrado” XYZT; e o seu lado é $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{8} \left(\frac{2}{3}\right) = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4}$. Imaginemos agora que desejamos determinar um valor para x , de modo que tenhamos a seguinte condição $2x \times \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4}\right) - x^2 \cong \left[\frac{1}{3 \cdot 4}\right]^2$ (*).

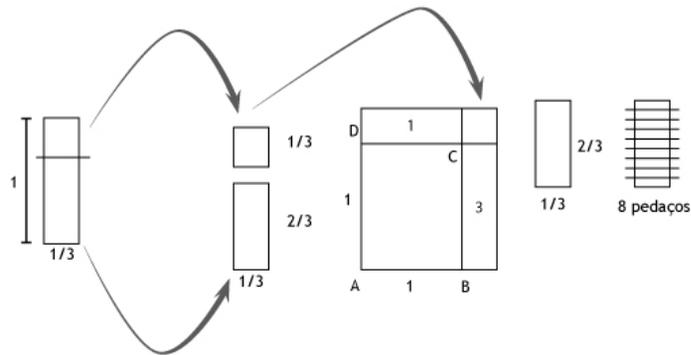


Figura 24: Método geométrico para a aproximação da raiz de 2

Na equação (*), o termo $2x \cdot \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4}\right)$ representa duas vezes a área da faixa que buscamos colocar hipoteticamente para concretizar a situação de um quadrado de fato. Nessas contas estamos repetindo duas vezes a mais a área do pequeno x^2 , assim retiramos esta área uma vez. Como desejamos formar um quadrado e não um “quase quadrado”, e impondo a condição (*), podemos obter o x apropriado e preencher o buraco indicado acima. Mas, em termos de cálculo, o termo $x^2 \rightarrow 0$. Assim, reescrevemos (*) por $2x \cdot \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4}\right) \cong \left[\frac{1}{3 \cdot 4}\right]^2 \leftrightarrow 2x \cdot \left(\frac{17}{3 \cdot 4}\right) \cong \left[\frac{1}{3 \cdot 4}\right]^2 \leftrightarrow x \cong \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 34}$. Entretanto lembramos que tínhamos dois quadrados de área 1, com o total de 2 e

de lado $\sqrt{2}$. Agora construímos um quadrado XYZT que deve ter a mesma área de lado $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - x \cong 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 34} \therefore \sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 34}$.

Encerramos esta aula discutindo alguns modelos matemáticos particulares devidos aos indianos. Nas próximas aulas retornaremos a um contato interessante com esta rica cultura matemática.

AULA 2

As origens do conhecimento - parte 2

Olá aluno(a)!

Nesta aula, continuaremos apresentando alguns exemplos de métodos, algoritmos e construções geométricas das civilizações babilônica, egípcia, grega e árabe. No que se refere aos gregos, evidenciaremos uma particularidade: suas formas peculiares de pensamento se diferenciaram paulatinamente dos modos de pensamento das outras civilizações.

Objetivo

- Conhecer os modelos matemáticos produzidos pelos babilônicos, egípcios, gregos e árabes

TÓPICO 1

A sociedade babilônica II

OBJETIVO

- Conhecer aspectos algébricos do pensamento babilônico para a resolução de problemas

Muitas das informações a respeito da sociedade babilônica são encontradas na tábua de Plimton 322. Atualmente está exposta na Universidade de Columbia e é datada de 1600 antes de Cristo.

A análise de um grupo de figuras da Tábua possibilita a convicção de que o teorema de Pitágoras era conhecido pelos babilônicos (BURTON, 2006). A relação entre comprimentos dos lados do triângulo era descrita por $x^2 + y^2 = z^2$.

Burton (2006) questiona se os babilônicos possuíam um método de solução para a equação (*). Observe que

$$x^2 + y^2 = z^2 \leftrightarrow 1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 = \left(\frac{z}{x}\right)^2 \leftrightarrow \left(\frac{z}{x}\right)^2 - \left(\frac{y}{x}\right)^2 = 1, \text{ e, fazendo } \alpha = \frac{z}{x} \text{ e } \beta = \frac{y}{x},$$

temos $\alpha^2 - \beta^2 = 1$. O problema agora seria construir triângulos retângulos cujos lados possuísem comprimentos racionais 1 , α e β , onde $\alpha^2 - \beta^2 = 1$. Além disso, escrevemos $(\alpha - \beta)(\alpha + \beta) = 1$.

Burton (2006, p. 77) explica que, na equação $(\alpha - \beta)(\alpha + \beta) = 1$, procuramos todos os números racionais que satisfazem o produto igual a 1 , colocando, então, $(\alpha + \beta) = \frac{m}{n}$ onde $m, n \in \mathbb{Z}$, a partir de



SAIBA MAIS!

Plimpton 322 – Tábua de cerca de 1800 a.C., de Larsa, encontra-se atualmente na Universidade de Columbia. A tábua tem quatro colunas de números, em duas das quais, a maior parte dos peritos, acreditam que contém uma lista de dois dos três números de um triplo pitagórico. Disponível em: <http://www.malhatlantica.pt/mathis/Babilonia/Mesopotamia.htm>

$(\alpha - \beta)(\alpha + \beta) = 1 \leftrightarrow \frac{m}{n}(\alpha - \beta) = 1 \leftrightarrow (\alpha - \beta) = \frac{n}{m}$. Assim, resolvemos o sistema:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = \frac{m}{n} \\ \alpha - \beta = \frac{n}{m} \end{cases}. \text{ Conclui-se facilmente que } \alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{m}{n} + \frac{n}{m} \right) \text{ e } \beta = \frac{1}{2} \left(\frac{m}{n} - \frac{n}{m} \right).$$

Ou, ainda, podemos escrever $\alpha = \frac{m^2 + n^2}{2mn}$ e $\beta = \frac{m^2 - n^2}{2mn}$ (**). Por outro lado,

se $\alpha = \frac{z}{x}$ e $\beta = \frac{y}{x}$ (***) $\leftrightarrow y = \beta x$ e $z = \alpha x$. Comparando as equações (**) e (***),

tomando $x = 2mn \rightarrow y = \beta x$ e $z = \alpha x \leftrightarrow z = \frac{m^2 + n^2}{2mn} \cdot x = m^2 + n^2$. Do mesmo modo,

temos $y = m^2 - n^2$. As formas $(x, y, z) = (2mn, m^2 - n^2, m^2 + n^2)$ foram fórmulas também usadas pelos helenos, por Diophantus, um dos mais originais matemáticos da antiguidade (BURTON, 2006, p. 75). Obteremos maiores detalhes sobre essas fórmulas mais adiante, pois muitos dos algoritmos discutidos só tiveram aprofundamento e maior sistematização com os gregos.

No próximo tópico, discutiremos um pouco da Matemática produzida pelos egípcios.

TÓPICO 2

A sociedade egípcia II

OBJETIVO

- Conhecer aspectos do pensamento aritmético dos egípcios

No *Papiro de Rhind*, encontramos problemas que envolvem a decomposição de frações do tipo $\frac{2}{n}$. Burton (2006, p. 43) explica que, para números divisíveis por 3, escrevia-se $\frac{2}{3k} = \frac{1}{2k} + \frac{1}{6k}$. Por exemplo, temos a fração $\frac{2}{3 \cdot 5} = \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{6 \cdot 5}$ transformada na soma de duas unitárias. Na tabela abaixo, vemos algumas relações interessantes.

$\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$	$\frac{2}{31} = \frac{1}{20} + \frac{1}{124} + \frac{1}{155}$	$\frac{2}{53} = \frac{1}{30} + \frac{1}{318} + \frac{1}{795}$	$\frac{2}{77} = \frac{1}{44} + \frac{1}{308}$
$\frac{2}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{28}$	$\frac{2}{35} = \frac{1}{30} + \frac{1}{42}$	$\frac{2}{55} = \frac{1}{30} + \frac{1}{330}$	$\frac{2}{79} = \frac{1}{60} + \frac{1}{237} + \frac{1}{316} + \frac{1}{790}$
$\frac{2}{11} = \frac{1}{6} + \frac{1}{66}$	$\frac{2}{37} = \frac{1}{24} + \frac{1}{111} + \frac{1}{296}$	$\frac{2}{59} = \frac{1}{36} + \frac{1}{236} + \frac{1}{531}$	$\frac{2}{83} = \frac{1}{60} + \frac{1}{332} + \frac{1}{415} + \frac{1}{498}$
$\frac{2}{13} = \frac{1}{8} + \frac{1}{52} + \frac{1}{104}$	$\frac{2}{41} = \frac{1}{24} + \frac{1}{246} + \frac{1}{328}$	$\frac{2}{61} = \frac{1}{40} + \frac{1}{244} + \frac{1}{488} + \frac{1}{510}$	$\frac{2}{85} = \frac{1}{51} + \frac{1}{255}$
$\frac{2}{17} = \frac{1}{12} + \frac{1}{51} + \frac{1}{68}$	$\frac{2}{43} = \frac{1}{42} + \frac{1}{86} + \frac{1}{129} + \frac{1}{301}$	$\frac{2}{65} = \frac{1}{39} + \frac{1}{195}$	$\frac{2}{89} = \frac{1}{60} + \frac{1}{256} + \frac{1}{531} + \frac{1}{890}$
$\frac{2}{19} = \frac{1}{12} + \frac{1}{76} + \frac{1}{114}$	$\frac{2}{47} = \frac{1}{30} + \frac{1}{141} + \frac{1}{470}$	$\frac{2}{67} = \frac{1}{40} + \frac{1}{335} + \frac{1}{536}$	$\frac{2}{91} = \frac{1}{70} + \frac{1}{130}$
$\frac{2}{23} = \frac{1}{12} + \frac{1}{276}$	$\frac{2}{49} = \frac{1}{28} + \frac{1}{196}$	$\frac{2}{71} = \frac{1}{40} + \frac{1}{568} + \frac{1}{710}$	$\frac{2}{95} = \frac{1}{60} + \frac{1}{380} + \frac{1}{570}$
$\frac{2}{25} = \frac{1}{15} + \frac{1}{75}$	$\frac{2}{51} = \frac{1}{34} + \frac{1}{102}$	$\frac{2}{73} = \frac{1}{60} + \frac{1}{219} + \frac{1}{292} + \frac{1}{365}$	$\frac{2}{97} = \frac{1}{56} + \frac{1}{679} + \frac{1}{776}$
$\frac{2}{29} = \frac{1}{24} + \frac{1}{58} + \frac{1}{174} + \frac{1}{232}$			$\frac{1}{101} = \frac{1}{101} + \frac{1}{202} + \frac{1}{303} + \frac{1}{606}$

Figura 1 – Técnica egípcia de representação em frações unitárias

Para Eves (1983, p. 10), “é interessante observar que toda a geometria anterior a 600 antes de Cristo é essencialmente científica. Geometria das tumbas e outros artefatos com boa aproximação”.

Burton (2006, p. 41) relata que “provavelmente eles [os egípcios] conheciam a seguinte fórmula $\frac{2}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n} + \frac{1}{6n}$ ”. Usando esta fórmula, podem-se

decompor as seguintes frações: $\frac{2}{3}$; $\frac{2}{5}$; $\frac{2}{7}$; $\frac{2}{9}$. Neste mesmo papiro, Eves (1983, p. 9) lembra que a matemática egípcia anterior a 1650 antes de Cristo foi capaz de precisar o valor de $\pi = \left(\frac{4}{3}\right)^2 \cong 3,1604\dots$. Num contexto geral, Eves afirma que todas as construções possuíam bases quadrangulares regulares. Aí, encontramos alguns problema relacionados à determinação do tronco da pirâmide.

Por exemplo, se consideramos B_1 a base inferior, B_2 a base superior e h a altura do tronco da pirâmide, sabemos que a fórmula correta é $V_1 = \frac{h(B_1 + \sqrt{B_1 B_2} + B_2)}{3}$. Mas os antigos babilônicos desenvolveram um interesse semelhante aos egípcios, usando a fórmula $V_2 = \frac{h(B_1 + B_2)}{2}$, que apresenta uma péssima aproximação.

Contudo, “depois da descoberta do Egito faraônico, os métodos de construção das pirâmides parecem guardar segredos. Depois que Eisenlohr publicou em 1877 o texto do Papiro de Rhind, preciosas informações vieram à tona” (BENOIT; CHEMLA; RITTER, 1992, p. 51). Deste modo não é muito simples a compreensão clara de alguns dos métodos desenvolvidos na região do Nilo.

Neste sentido, Bunt, Jones e Bedient (1988, p. 39) construíram tabelas que representavam relações recursivas características das progressões geométricas. Os autores indicam que podem ser identificadas nos papiros as relações descritas em relação moderna:

$$\begin{aligned} S_n &= r + r^2 + r^3 + \dots + r^{n-1} + r^n = r(1 + r^1 + r^2 + \dots + r^{n-2} + r^{n-1}) \\ &= r(1 + [r^1 + r^2 + \dots + r^{n-2} + r^{n-1}]) = \\ &= r(1 + [S_{n-1}]) \therefore S_n = r(S_{n-1} + 1) . \end{aligned}$$

Esta fórmula descreve o método da recursão para a obtenção da soma dos termos em P.G. para os egípcios. Compare-a com a fórmula atual!

Discutimos, de modo introdutório, algumas peculiaridades da matemática egípcia; no próximo tópico nos deteremos na matemática concebida pelos gregos.

TÓPICO 3

Os gregos e sua extraordinária matemática II

OBJETIVO

- Discutir aspectos aritméticos do pensamento grego relacionados às demonstrações em geometria

Diz a lenda que Pitágoras sacrificou cem bois em gratidão à inspiração adquirida para o toque final do teorema que há séculos carrega o seu nome. Ainda existem algumas dúvidas sobre a linha de raciocínio empregada pelos gregos na demonstração desse teorema. Burton (2006, p. 107) lembra que, se os métodos do livro II dos Elementos de Euclides foram usados, teríamos, provavelmente, a demonstração a seguir.

Consideremos um quadrado de lado $a + b$ e o dividimos em dois outros quadrados menores de lado a e b , e mais dois retângulos de lados a e b . Em cada retângulo, determinamos a diagonal descrita por c , observada a partir do desenho (I), $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + ab + ab$

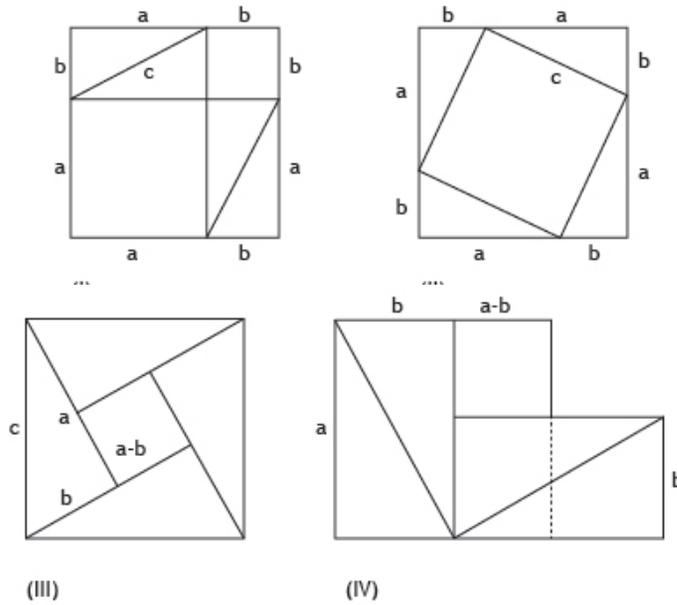


Figura 2 – Relações algébrico-geométricas

VOCÊ SABIA?

Conheça mais sobre o matemático e professor Bhaskara acessando o site: http://www.cefetsp.br/edu/guerato/mat_bio_baskara.htm

Na figura 2 (II), extraímos a relação $(a + b)^2 = c^2 + 4 \cdot \left(\frac{ab}{2}\right)$, onde o termo representa a área dos quatro triângulos retângulos. A prova que se vale da noção de adição de áreas, mostrado em todos os casos acima, pode ter sido empregada de modo independente em várias culturas. De fato, algumas evidências relatam este resultado na cultura chinesa, 600 antes de Cristo. Um diagrama interessante é proposto por Bhaskara em XII

depois de Cristo, ao considerar o diagrama (III) sem explicações mais detalhadas. Dele observamos que $4 \cdot \left(\frac{ab}{2}\right) + (a - b)^2 = c^2 \leftrightarrow 2ab + a^2 - 2ab + b^2 = c^2 \leftrightarrow a^2 + b^2 = c^2$.

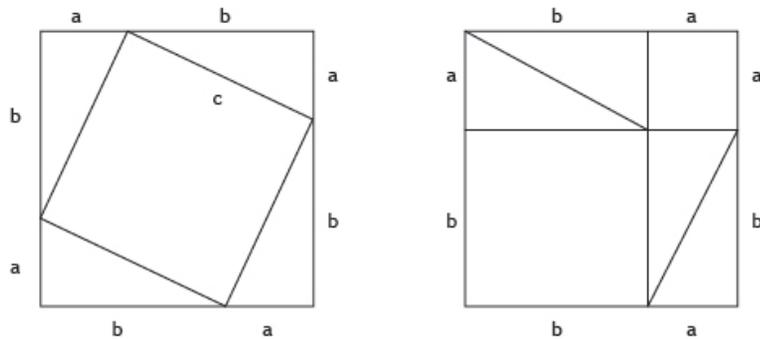


Figura 3 – Relações algébrico-geométricas

Simmons (1992, p. 220) mostra também uma demonstração devida a Bhaskara, usando semelhança de triângulo e assim temos: $\frac{b}{c} = \frac{d}{b}$ e $\frac{a}{c} = \frac{e}{a}$ ou $b^2 = cd$ e $a^2 = ce$. Por meio de adição, temos: $b^2 + a^2 = cd + ce = c(d + e) = c \cdot c = c^2$. Ele explica que esta demonstração foi re-descoberta no século XVII por Issac Newton.

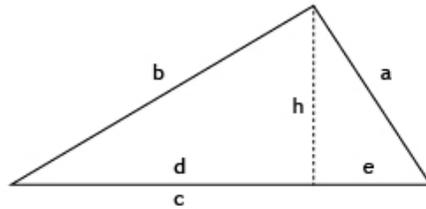


Figura 4 – Relações pitagóricas

O teorema de Pitágoras foi demonstrado de um modo pouco trivial por Euclides. No seu livro chamado de Elementos, encontramos não apenas os postulados de uma Geometria, mas, também, Aritmética e Álgebra.

No que se refere à álgebra, curiosamente os gregos “conseguiram resolver equações polinomiais do primeiro grau, por intermédio da manipulação de grandezas racionais e irracionais que são representadas por segmentos. Além disso, todas as operações de adição e subtração de segmentos” (KOUKI, 2008, p. 47).

O problema foi resolvido pelos gregos, inicialmente com a consideração de um segmento \overline{AB} de comprimento a e um retângulo ACDE de área b. O ponto A estando alinhado B e E é situado entre os dois. Podemos, então, seguir com a construção dos pontos F, G, H e I respeitando o paralelismo da figura 5.

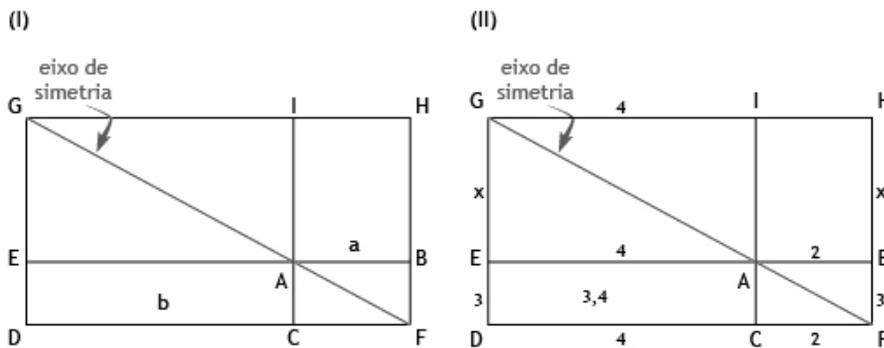


Figura 5 – Resolução geométrica de equações

A incógnita x mede o comprimento do lado \overline{BH} e os triângulos $\triangle FGH \cong \triangle GFD$, $\triangle FAB \cong \triangle AFC$, $\triangle AGI \cong \triangle GAE$ são de mesma área, donde os retângulos ACDE e ABHI, em virtude do eixo de simetria \overline{GF} . Assim, a área do quadrado ABHI deve ser de $a \cdot x = b$.

Vamos considerar a equação $2x = 12$ e interpretá-la geometricamente. Para tanto, usando o raciocínio anterior, consideramos o segmento $\overline{AB} = 2$ e ACDE

de área $3 \cdot 4$ e representamos os segmentos na figura ao lado (II). Pelo motivo de simetria da figura, teremos $2x = 3 \cdot 4$.

Na revista nº 16 do Meu Professor de Matemática, Oscar Guelli apresenta um problema semelhante: interpretar geometricamente a equação $x + 2x + \frac{x}{3} = 10$. O problema originalmente encontrado no Livro 2 de Euclides sugere a figura. Anexamos a este retângulo, um novo retângulo de lado 5 e $1 + 2 + \frac{1}{3}$. Vamos agora construir outro retângulo com mesma área do retângulo de lados 2 e 5. Por isso, deve-se prolongar a diagonal até cortarmos o prolongamento do lado de comprimento 5.

Comparamos agora as seguintes áreas: $S(A) + S(B) + S(C) = S(A') + S(B') + S(C')$, mas desde que $S(A) = S(A')$ e $S(C) = S(C') \leftrightarrow S(B) = S(B')$. Finalmente, poderemos escrever que $S(B) = S(B') \leftrightarrow x \cdot (1 + 2 + \frac{1}{3}) = 5 \cdot 2$.

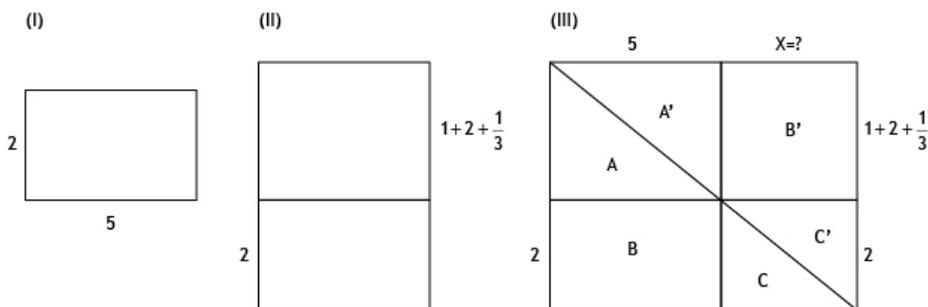


Figura 6 – Resolução geométrica de equações

Vejamos mais dois exemplos do poder do pensamento sistematizado helênico. Krantz (2006, p. 7) lembra a tripla de inteiros (a, b, c) que satisfaz $a^2 + b^2 = c^2$. As triplas pitagóricas mais conhecidas são: $(3, 4, 5); (5, 12, 13); (7, 24, 25); (20, 21, 29)$. Contudo uma pergunta que afetou vários matemáticos desde os gregos se refere à possibilidade de listar ou encontrar todas as triplas pitagóricas.

Kratz (1991, p. 68) sublinha que, sem perda de generalidade, $\text{MDC}\{a, b\} = 1$, ou seja, são primos entre si. Neste caso, dizemos que (a, b, c) é um **terno primitivo** ou um **terno reduzido** (KRANTZ, 2006, P. 7). Além disso, a e b não podem ser pares neste caso. Assim assumimos que a será par e b será ímpar.

Observamos que:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 > a^2 + b^2 \stackrel{\text{definição}}{=} c^2 \therefore c < a + b$$

$$\gamma = a + b - c > 0 \leftrightarrow c = \gamma - (a + b) \text{ para algum inteiro } \gamma \in \mathbb{Z}.$$

Mas sabemos que:

$$a^2 + b^2 = c^2 \leftrightarrow a^2 + b^2 = ((a + b) - \gamma)^2$$

$$= a^2 + b^2 + 2ab - 2\gamma(a + b) + \gamma^2 \leftrightarrow \gamma^2 = 2\gamma a + 2\gamma b - 2ab$$

Assim, observamos que $\gamma^2 = 2(\gamma a + \gamma b - ab) \therefore \gamma = 2m$ é par. Substituindo nesta equação, teremos $(2m)^2 = 2((2m)a + (2m)b - ab) \leftrightarrow 4m^2 = 4ma + 4mb - 2ab$. Segue que, se cancelamos o fator em comum, $ab = 2am + 2bm - 2m^2$. Agora observamos que a expressão $2am + 2bm - 2m^2$ caracteriza um número par (KRATZ, 2006, p. 8). Mas, desde que no início tomamos b como ímpar, concluímos que de fato a deverá ser par. Mas a soma de um par ao quadrado mais um ímpar ao quadrado $\underset{\text{par}}{a^2} + \underset{\text{ímpar}}{b^2} = c^2 \therefore c^2$ é ímpar. Resulta que c deve ser ímpar. Repare que nas triplas iniciais $(3,4,5);(5,12,13);(7,24,25);(20,21,29)$ verificamos tal comportamento.

Além disso, numa tripla pitagórica reduzida, nunca ambos os elementos a e b podem ser pares e ímpares ao mesmo tempo. De fato, observemos que, se ambos fossem ímpares, digamos $a = 2x + 1$ e $b = 2y + 1$, teríamos:

$$c^2 = a^2 + b^2 = (2x + 1)^2 + (2y + 1)^2 = 4(x^2 + x + y^2 + y) + 2 = 2n + 2,$$

o que resulta que num absurdo, pois qualquer quadrado de um número, seja $c = 2n$ ou $c = 2n + 1 \rightarrow c^2 = 4n^2$ ou $c^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 2m + 1$ não pode ser do tipo $2n + 2$ (SIMMONS, 1992, p. 67).

Além disso, desde que assumimos que a é par e b é ímpar e vimos que c deve ser ímpar, escrevemos:

$$a^2 + b^2 = c^2 \leftrightarrow a^2 = c^2 - b^2 = (c - b)(c + b) \text{ par} \leftrightarrow (c - b) = 2r, (c + b) = 2s$$

$$r, s \in \mathbb{Z}^+.$$

Agora observemos que $\begin{cases} c - b = 2r \\ c + b = 2s \end{cases} \Rightarrow c = r + s \therefore b = r - s$. Simmons

(1992, p. 67) observa que $\text{MDC}\{s, r\} = 1$ e, portanto, $\text{MDC}\{c, b\} = 1$ (verifique!). Agora lembramos que $a^2 = (c - b)(c + b) = 2r \cdot 2s = 4rs \therefore a$ é par, digamos $a = 2p \therefore 4p^2 = 4rs \leftrightarrow p^2 = r \cdot s \in \mathbb{Z}$. Mas desde que $\text{MDC}\{s, r\} = 1$ e s possuem uma fatorização única, devem existir $x, y \in \mathbb{Z}$ tal que: $r = x^2$ e $s = y^2$, onde $s = \frac{c + b}{2} > \frac{c - b}{2} = r \therefore y > x$.

Finalmente, em virtude de $a^2 = 4rs = 4x^2y^2 \leftrightarrow a = 2xy$ e $c = x^2 + y^2 \therefore b = x^2 - y^2$. Obtivemos, então, o terno $(a, b, c) = (2xy, x^2 - y^2, x^2 + y^2)$. Você terá oportunidade de trabalhar mais os conceitos apresentados com as atividades de aprofundamento. Vamos passar agora para o próximo tópico.

TÓPICO 4

Os gregos e sua extraordinária matemática III

OBJETIVO

- Refletir sobre a noção de irracionalidade e processos matemáticos que dependiam da noção do infinito grego



SAIBA MAIS!

Da filosofia eleata podemos dizer que, em geral, foi uma notável tentativa de impor-se sobre toda realidade por meio da razão. Disponível no site: <http://historiadafilosofia.wordpress.com/tag/filosofia-dos-eleatas/>

No decorrer do século V. a. C., as concepções pitagóricas foram sujeitas a críticas por parte de várias novas escolas, que iam propondo sistemas alternativos. De todas as correntes filosóficas que se opuseram ao pitagorismo, a mais importante foi fundada por Parmênides de Elea.

Vários aspectos da filosofia eleata se revestiram de grande importância para o desenvolvimento posterior da Matemática. É imprescindível referir que aos pensadores eleatas está associada à invenção da dialética e do método de demonstração por redução ao absurdo, como o fizemos para demonstrar que $\sqrt{2} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. *Este modo de provar uma proposição consiste em aceitar por momentos a sua negação e daí deduzir uma contradição flagrante* (ESTRADA, M. F. ET AL., 2000, p. 240).

No diálogo Parmênides, Platão descreve o encontro, ocorrido por volta de 450 a.C., entre o ainda muito jovem Sócrates e Parmênides, em companhia do discípulo Zenão. Este último seria o autor de um livro em que eram apresentados numerosos argumentos indiretos, originários da escola eleata, que apresentaram durante séculos um desafio para a compreensão de matemáticos e físicos.

Os argumentos estabelecidos pela dicotomia e pelo herói grego Aquiles podem ser interpretados de modo mais moderno relacionados ao problema de convergência de uma série de números reais. Com efeito, consideremos um segmento de reta \overline{AB} , daí tomamos o ponto médio C, determinando o segmento $\overline{AC} = \frac{\overline{AB}}{2}$. Novamente, tomamos o ponto médio, D, de modo que $\overline{AD} = \frac{\overline{AC}}{2}$. Assim, continuaremos o processo indefinidamente.



GUARDE BEM ISSO!

Dicotomia: Não há movimento porque, antes de o móvel percorrer certo espaço, tem de percorrer metade desse espaço; mas, antes de percorrer metade desse espaço, tem que percorrer metade da metade desse espaço; e assim indefinidamente. Portanto, o movimento não pode nem sequer começar.

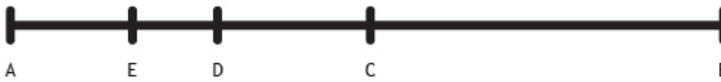


Figura 7 – Processo geométrico da dicotomia

O argumento do matemático grego Zeno chama atenção para $\overline{AB} = \overline{CB} + \overline{DC} + \overline{ED} + \dots + \dots$, isto é, para o fato de que o segmento de reta inicial deve se decompor em infinitos segmentos de reta, todos eles com efetivo comprimento. Em outras palavras, uma grandeza pode ser igual à soma de infinitas grandezas. Numa linguagem mais moderna, escrevemos:

$$\overline{AB} = \frac{\overline{AB}}{2} + \frac{\overline{AB}}{2^2} + \frac{\overline{AB}}{2^4} + \dots + \dots + \frac{\overline{AB}}{2^n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overline{AB}}{2^n} \therefore \overline{AB} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overline{AB}}{2^n}$$

No outro paradoxo, Zeno de Elea, apresenta ainda o paradoxo do estádio, apresentado por Brolezzi (1996, p. 23) do seguinte modo: “Zeno supõe que, por absurdo, que o tempo seja dividido em instantes indivisíveis e que o espaço seja também formado por pontos também indivisíveis”.

Brolezzi (1996, p. 23) apresenta a seguinte figura e discute o seguinte:

		A	B	C	D	E		
F	G	H	I	J	➔			
			➔	K	L	M	N	O

Figura 8 – Ilustração discutida por Brolezzi (1996) no paradoxo do estádio



SAIBA MAIS!

Acesse ao site <http://www.fflch.usp.br/df/opessoa/FiFi-12-Cap-1.pdf> - e conheça a história do Paradoxo do estádio.

Consideremos agora um estádio onde os corredores são pontos indivisíveis. Há três grupos de cinco corredores em uma pista de atletismo: cinco estão imóveis, e os dois outros grupos estão correndo em sentidos contrários. Considerando que a velocidade dos corredores é tal que percorram a distância entre dois pontos em um instante, então o “ponto-corredor” J irá passar de C para D em um “instante”, enquanto o “ponto corredor” K irá passar de C para B no mesmo instante, conforme mostra o esquema abaixo:

		A	B	C	D	E		
	F	G	H	I	J	➔		
			➔	K	L	M	N	O

Figura 9 – Ilustração discutida por Brolezzi (1996)

Entretanto, o corredor K passou por dois “pontos” J e I, encontrando-se agora sob o corredor H. Ora, o tempo necessário para passar por dois pontos é dois instantes; logo, um instante é igual a dois instantes, o que é uma contradição.

Zeno completa seus paradoxos com o Paradoxo da Flecha, que faz par com o do Estádio indo contra a noção de espaço e tempo constituído por partes indivisíveis. Um arqueiro dispara uma flecha, e observamos sua trajetória em direção ao alvo. Supondo que fosse possível considerar a posição da flecha em cada instante de tempo, veríamos que a mesma encontra-se imóvel, ocupando um lugar específico no espaço, que é evidentemente igual ao volume e forma da flecha. Ora, em cada instante, a flecha está imóvel; como o tempo é constituído de instantes, a flecha está, portanto parada em toda sua trajetória. Poderíamos, por exemplo, colocarmo-nos diante dela, e no instante em que ela nos tocasse, estaria parada, e não nos feriria (BROLEZZI, 1996, p. 23).

Conforme Caraça (1970, p. 252), Zeno traz uma argumentação interessante acerca do movimento ao ilustrar a corrida entre Aquiles e a Tartaruga. Caraça conta que construiu duas secessões de posições sucessivas de Aquiles (A) e da Tartaruga (T): $\left\{ \begin{array}{l} A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, \dots \\ T_1, T_2, T_3, \dots, T_n, \dots \end{array} \right.$ “e contemplando-as em atitude estática, finitista, nota que a distância $\overline{A_n T_n}$ nunca é nula e diz que não compreende como A alcança T” (CARAÇA, 1970, p. 253).

Ao matemático moderno é permitida a **operação de passagem ao limite**. Neste modelo matemático, certamente desconhecido em detalhes pelos gregos, o encontro dos dois móveis só poderá ocorrer e será compreendido em

interdependência com os estados vizinhos dos móveis A e T. As distâncias entre os dois móveis nessas posições consecutivas podem ser descritas a partir da sequência $\left(d, \frac{d}{2}, \frac{d}{2^2}, \frac{d}{2^3}, \dots, \frac{d}{2^n}, \dots \right)$, mas como o limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{d}{2^n} \right) = 0$, deve acarretar o anulamento das distâncias entre A e T.

Segundo Carança (1070, p. 253):

Assim, Zenão ou Zeno de Elea, contemplando as suas duas sucessões, infinitas possibilidades, não pode fazer mais do que verificar o desacordo entre a realidade e o esquema racional que queria arruinar – a concepção pitagórica do Universo – mas sem ser capaz de integrar o movimento no seu próprio esquema – a concepção eleática, dominada pelo conceito da continuidade na mobilidade.

Assim, o matemático moderno, com o auxílio de uma poderosa notação, consegue inferir alguns resultados. Verifica teoricamente o que a experiência confirma. Mas isto será um tema para a discussão mais aprofundada quando estudarmos as raízes do *Cálculo Diferencial e Integral*.

TÓPICO 5

A matemática produzida pelos árabes

OBJETIVO

- Discutir elementos do pensamento algébrico dos árabes

No início do século IX, Mohamed Ibn Musa Al-Khawarizmi (780-850) se distinguiu entre os árabes e seus antecessores. Ele apresentou uma teoria das equações. Segundo Kouki (2008, p. 53), “ele buscou fornecer métodos de solução para o cálculo de raízes”.

Dentre as principais noções tratadas por ele, destacam-se equações do primeiro e segundo grau, problemas aritméticos e geométricos, etc. Kouki (2008, p. 54) apresenta uma série de equações que mereceram a sua atenção.

1)	$ax^2 = bx$	2)	$ax^2 = c$	3)	$bx = c$
4)	$ax^2 + bx = c$	5)	$ax^2 + c = bx$	6)	$bx + c = ax^2$

Figura 10 – Modelos algébricos resolvidos pelos árabes

Kouki (2008, p. 55) explica que “na resolução dos itens acima, Al-Khawarizmi usou vários documentos babilônicos e gregos antigos”. Um dos métodos utilizados por ele, inspirado no livro dos Elementos de Euclides, era

trabalhar com uma equivalência de áreas. Em outros casos, como na equação $x^2 + px = q$, apresenta uma argumentação em seu

trabalho e obtém $x = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} - \frac{p}{2}$.

Em outros casos para $x^2 = px + q$ e $x^2 + q = px$,

Kouki (2008, p. 55) explica que ele obtém as raízes

$x = \frac{p}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ e analisa os seguintes casos:

$$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q > 0; \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 0; \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0.$$

Conclui que neste último caso é impossível.

Kouki (2008, p. 55) destaca que “as provas pragmáticas apresentadas por ele foram baseadas na leitura de diagramas que não satisfizeram toda a comunidade de matemáticos árabes”. Por um lado, existiam os que sustentavam que todo o raciocínio deveria se apoiar nos modelos dos Elementos e, por outro lado, os novos algebristas árabes desejavam romper esta tutela euclidiana.

Todavia, Burton (2006, p. 241) sublinha que “o legado intelectual grego foi um dos mais importantes tesouros encontrados nas terras que foram posteriormente dominadas pelos árabes”. Mas vejamos um pouco da sua matemática, quando resolveu a equação $x^2 + 10x = 39$. Na solução proposta por ele, deve-se considerar um quadrado ABCD.

Os lados desse quadrado valem todos x . Agora, adicionamos a área $10x$, mas esta área deverá ser dividida em quatro partes, de valor $\frac{10x}{4}$, e esta área representa

a área dos retângulos na figura. Na figura, observamos que $x^2 + 10x = x^2 + 4 \cdot \frac{10x}{4}$.

Agora, se desejamos transformar a figura no quadrado maior de lado $x + \frac{10}{2}$, devemos acrescentar a área dos pequenos quadrados de área $\left(\frac{10}{4}\right)^2$. Assim, teremos a seguinte equivalência entre as áreas:

$$\begin{aligned} \left(x + \frac{10}{2}\right)^2 &= (x^2 + 10x) + 4 \times \left(\frac{10}{4}\right)^2 = 39 + \left(\frac{10}{2}\right)^2 \\ &= 39 + 25 = 64. \therefore x + \frac{10}{2} = 8 \rightarrow x = 3 \end{aligned}$$



VOCÊ SABIA?

Kratz (2006, p. 101) adverte que os árabes não lidavam com números negativos. Assim a outra raiz $x = -13$ da equação $x^2 + 10x = 39$ era desconsiderada.

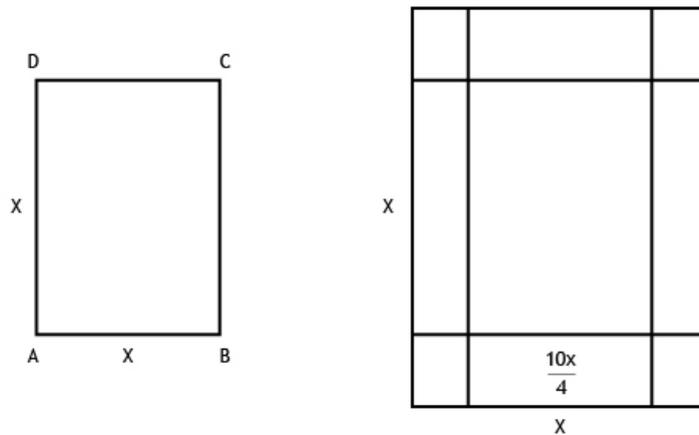


Figura 11 – Resolução algébrico/geométrica

Com um raciocínio semelhante, Burton (2006) descreve que $x^2 + px = q \cdot \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = x^2 + px + 4 \times \left(\frac{p}{4}\right)^2 = q + \left(\frac{p}{2}\right)^2 \leftrightarrow x = \sqrt{q + \left(\frac{p}{2}\right)^2} - \frac{p}{2}$.

Burton (2006, p. 243) relata que Al-Khawarizmi resolve a equação $x^2 + 10x = 39$ por meio de um segundo modo geométrico. Inicialmente, ele considera o quadrado de lado x e dois retângulos de lados x e $\frac{10}{2}$. Observe que a área de cada retângulo vale $\frac{10}{2} \cdot x$, daí a área total compreendida vale $x^2 + 2 \cdot \left(\frac{10}{2} \cdot x\right)$. Mas para completar a figura, precisamos de um quadrado de área $\left(\frac{10}{2}\right)^2$, daí obteremos um quadrado de lado $x + \frac{10}{2}$ e sua área poderá ser expressa por $\left(x + \frac{10}{2}\right)^2 = x^2 + 2 \cdot \left(\frac{10}{2}\right)x + \left(\frac{10}{2}\right)^2 = 39 + 25 = 64 \therefore x + \frac{10}{2} = 8$.

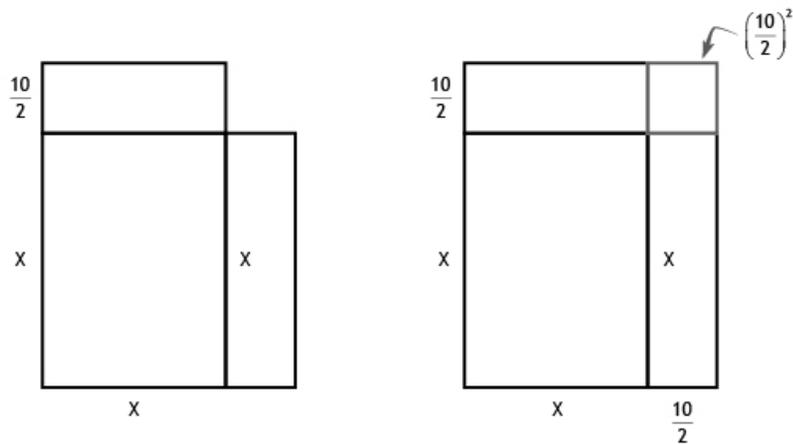


Figura 12 – Resolução algébrico/geométrica

O procedimento no caso geral para a solução de $x^2 + px = q$ é feito com a adição de um quadrado de lado $\frac{p}{2}$ à figura, que passa a ter uma área de $x^2 + 2\left(\frac{p}{2}\right) \cdot x$, resultando: $\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = [x^2 + 2\left(\frac{p}{2}\right) \cdot x] + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = q + \left(\frac{p}{2}\right)^2$, o que permite concluir $x = \sqrt{q + \left(\frac{p}{2}\right)^2} - \frac{p}{2}$.

Burton (2006, p. 243) sublinha que, “com os trabalhos de Al-Khawarizmi, todavia, vemos no início suas limitações, entretanto as explicações geométricas vêm auxiliar um novo e predominante raciocínio algébrico”. O seu trabalho destaca um progresso e a evolução da antiga prática matemática que passa a adquirir métodos e instrumentos mais poderosos.

Burton (2006, p. 245) descreve também a matemática produzida por Abû Kâmi (850-930). Este árabe adicionou alguns métodos de solução aos problemas do seu brilhante antecessor. Ele se interessou por equações do tipo

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 4 \frac{1}{4} \end{cases}$$

No próximo passo, ele toma

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{x^2 + y^2}{xy} \therefore x^2 + y^2 = 4 \frac{1}{4} xy$$

Substitui, então, $y = 10 - x$ na equação $x^2 + y^2 = 4 \frac{1}{4} xy$

e obtém uma solução de valor $x = 2$. Para finalizar, Abû Kâmi trabalhou com a seguinte expressão $\sqrt{9} - \sqrt{4} = \sqrt{9 + 4 - 2\sqrt{9 \cdot 4}} = 1$. Isto evidenciou que ele conhecia a seguinte expressão $\sqrt{a} \pm \sqrt{a} = \sqrt{a + b \mp 2\sqrt{a \cdot b}} = 1$. Verifique-a!

Outra figura importante na matemática árabe foi Abu Bakr al-Karajî (d. C. 1029). Segundo Burton (2006, p. 248), ele conseguiu o padrão para as expansões binomiais $(a + b)^3$ e $(a + b)^4$. Deduziu ainda que $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k$ onde $C_n^k = C_{n-1}^{n-k} C_{n-1}^k$ cujos valores iriam compor no século XVII o triângulo de Pascal.

Abu Bakr al-Karajî mostrou que

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \left(\frac{2n}{3} + \frac{1}{3}\right)(1 + 2 + 3 + \dots + n)$$

e também que $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2$. E o seu sucessor, Al-

Samwa'al, refinou o resultado para $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Vejamos alguns dos seus argumentos utilizados no caso de $n = 10$.



ATENÇÃO!

Domingues (1991, p. 71) diz que um triângulo retângulo se diz pitagórico se as medidas de seus lados são números naturais.

Consideremos a soma $1 + 2 + 3 + \dots + 10$ parcionada na figura abaixo.

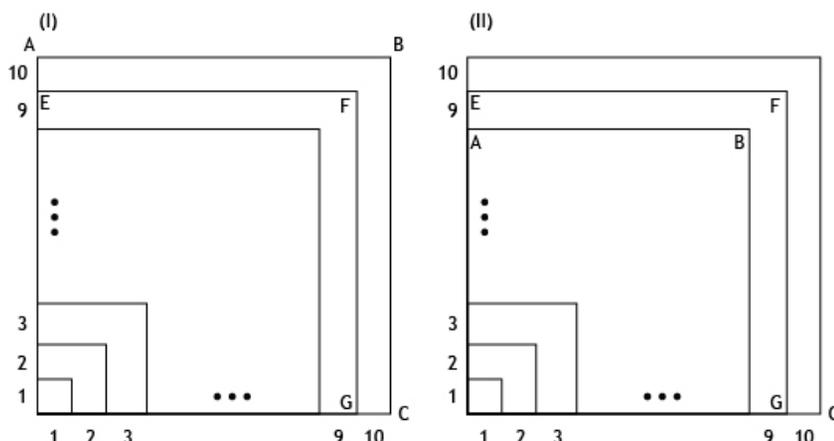


Figura 13 – Figura apresentada por Burton (2006, p. 249)

Agora, observemos a faixa ABCGFE vista como dois retângulos congruentes e um quadrado de área 10^2 . Portanto, sua área será de $2 \times 10 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 9) + 10^2$. Mas observamos que:

$$(1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 9) = \frac{9(1+9)}{2} \therefore 2(1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 9) = 10 \cdot 9,$$

segue que

$$10 \times 2 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 9) + 10^2 = 10 \times 10 \cdot 9 + 1 \cdot 10^2 = 10 \cdot 10^2 = 10^3$$

Agora considerando a região EFGJIH, com o mesmo raciocínio, obtemos $2 \times 9 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 8) + 9^2$ e de novo usando

$$(1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 8) = \frac{8(1+8)}{2} \therefore 2 \times 9 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 8) + 9^2 = 9^3$$

Continuando o processo, finalizemos com o último quadrado de área 1^3 . Poderemos, assim, escrever $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + 10^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + 10)^2$, neste caso particular.

Nesta aula estudamos um pouco da Matemática egípcia, grega e árabe. Nas próximas aulas continuaremos a discutir métodos intrigantes devidos a tais sociedades antigas.

AULA 3

Arquimedes e a noção de demonstração

Olá aluno(a)!

Nesta aula, continuamos nosso estudo sobre a antiga matemática produzida pelos gregos. Vale observar que a Matemática básica discutida aqui envolve conhecimentos de Álgebra e Geometria pré-requisitos estudados nas disciplinas de Fundamentos de Matemática.

Objetivo

- Refletir sobre a Matemática grega

TÓPICO 1

Matemáticos gregos eminentes e números amigos, perfeitos, abundantes

OBJETIVOS

- Refletir sobre a matemática desenvolvida por Arquimedes e as repercussões atuais deste pensamento
- Relacionar as argumentações apresentadas por Arquimedes com alguns números especiais conhecidos pelos gregos



SAIBA MAIS!

Conheça um pouco mais do matemático grego Arquimedes acessando o site: <http://www.ime.unicamp.br/~calculo/history/arquimedes/arquimedes.html>

Após Euclides, um grande matemático grego foi Arquimedes (287-212 a. C.), nascido em Siracusa, na ilha da Sicília. Ele estudou em Alexandria e é considerado um cientista universal. A ele se devem inúmeras invenções na Física e na Matemática. Maor (2007, p. 51) lembra que *no livro do Comprimento do Círculo, Arquimedes mostrou que o valor de π*

reside entre $3\frac{10}{71}$ e $3\frac{10}{70}$. Sua ideia foi dividir um círculo.

Simmons (1992, p, 26) lembra que

Arquimedes e Democritus descobriram teoremas maravilhosos a respeito dos sólidos da geometria, como o caso do volume de um cone, que representa um terço do volume de um cilindro. E que o volume de uma pirâmide é um terço do volume de um prisma de mesma base.

O volume da esfera também é devida a Arquimedes.

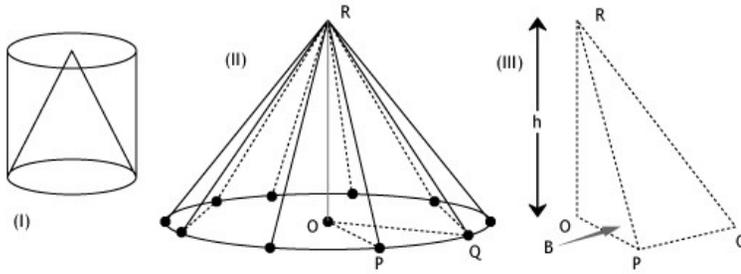


Figura 1: Explicação da obtenção do volume do cone

Mais adiante, Simmons (1992, p.26) explica que a figura do cone (I), e a partir dela, podemos compreender de onde vem a fração $\frac{1}{3}$ presente na fórmula $V_{\text{cone}} = \frac{1}{3} B \cdot h$. De fato, nesta base B, inscrevemos um polígono regular de n lados. Em seguida, construímos uma pirâmide no seu interior. No entanto, se o n aumenta de valor progressivamente (figura 1-II), o volume do cone será o valor limitante para o valor do volume da pirâmide.

“Mas desde que podemos dividir a pirâmide em n pirâmides congruentes, mostradas em (III), será suficiente mostrar que o volume que buscamos é válido para este caso especial envolvendo pirâmides” (SIMMONS, 1992, p. 26).

Agora, considerando a base OPQ (IV), construímos um prisma de altura h e de base B. Este prisma pode ser dividido em três pirâmides como podemos ver na figura 2-V.

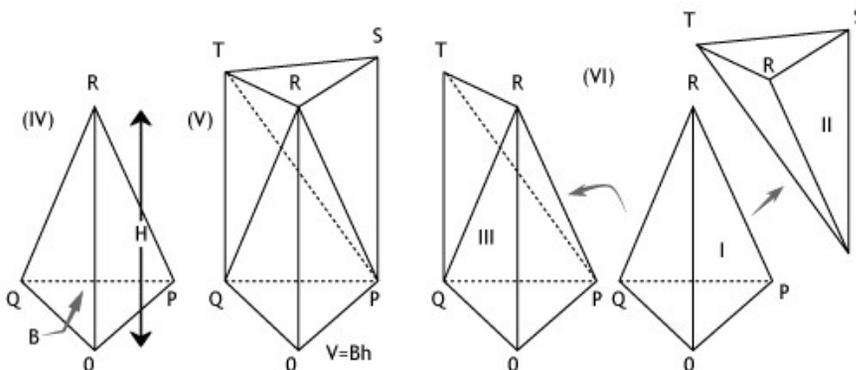


Figura 2: Decomposição do prisma

Observemos na figura 2, em (VI), que as pirâmides I e II possuem altura H e os triângulos da base $\triangle OPQ$ e $\triangle RST$ de mesma área, portanto elas devem possuir o mesmo volume. Por outro lado, as pirâmides II e III possuem também a mesma altura (a distância de R até o plano $PQST$) e bases triangulares $\triangle PST$ e $\triangle PQT$ de mesma área. Assim, II e III possuem também o mesmo volume. Por meio deste raciocínio, vemos que o volume de cada pirâmide I, II e III possui um terço do volume do prisma da figura (V).

Simmons (1992, p. 27) adverte que:

Existe uma lacuna no raciocínio na verificação das duas pirâmides de mesmo volume, no caso em que possuem a mesma altura e mesma base. Isto é aceitável, mas difícil de ser provado. Esta demonstração depende do tipo de atomismos geométrico que teve atenção e análise por parte do matemático italiano Bonaventura Cavalieri, no século XVII.

Costumeiramente o estudante é apresentado à **progressão geométrica** infinita do tipo $1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n + \dots$. Vamos admitir provisoriamente que $0 < q < 1$ e realizar alguns malabarismos algébricos, inicialmente tomando

$$\begin{cases} S_n = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n \text{ (I)} \\ q \times S_n = q + q^2 + q^3 + q^4 + \dots + q^n + q^{n+1} \text{ (II)} \end{cases} \text{ Fazendo (I) - (II), obtemos:}$$

$$\begin{aligned} S_n - q \times S_n &= \\ [1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n] - [q + q^2 + q^3 + q^4 + \dots + q^n + q^{n+1}] &= \\ = 1 - q^{n+1} \therefore (1 - q) \cdot S_n = 1 - q^{n+1} & \end{aligned}$$

$$\text{Ou seja, } S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{(1 - q)} \text{ (III).}$$

A **série geométrica** descrita na figura 1-III surgiu em um dos trabalhos de Arquimedes, segundo Ávila (2007, p. 158). Este raciocínio foi empregado pelo antigo pensador jônico, para calcular a área de um segmento de parábola, delimitado por um arco parabólico Ab e um segmento retilíneo AB .

O procedimento é o seguinte: pelo ponto médio de AB , traça-se uma reta paralela ao eixo da parábola, que vai encontrar a parábola em C , resultando no triângulo $\triangle ACB$. A seguir, repete-se o processo nos trechos AC e CB da parábola, o que resultará nos triângulos $\triangle ADC$ e $\triangle CEB$. O passo seguinte resume-se em repetir o processo nos trechos AD , DC , CE e EB da parábola, o que deve resultar em quatro novos triângulos.

(***) $S_n + \frac{a_n}{3} = S_{n-1} + \frac{a_{n-1}}{3} \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Agora, raciocinando indutivamente e diminuindo os índices na expressão (***) tem-se:

$$\begin{aligned} S_n + \frac{a_n}{3} &= S_{n-1} + \frac{a_{n-1}}{3} = S_{n-2} + \frac{a_{n-2}}{3} = S_{n-3} + \frac{a_{n-3}}{3} = \dots \\ &= S_{n-(n-1)} + \frac{a_{n-(n-1)}}{3} = S_{n-n} + \frac{a_{n-n}}{3} \end{aligned}$$

Ou seja, $S_n + \frac{a_n}{3} = S_0 + \frac{a_0}{3} = \frac{4S_0}{3}$. Se utilizássemos nossa linguagem atual, que possibilita a passagem ao limite, podemos ainda concluir que:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[S_n + \frac{a_n}{3} \right] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{4S_0}{3} \right] = \frac{4S_0}{3} \rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} [S_n] + \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{a_n}{3} \right] = \frac{4S_0}{3}$$

$$\text{Mas observe que } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{a_n}{3} \right] = 0 \therefore S_{\text{área}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} [S_n] = \frac{4S_0}{3}.$$

Contudo, este método envolveria trabalhar diretamente com a noção do infinito, simbolizado em notação moderna por “ ∞ ”, o que era radicalmente evitado pelos gregos, conforme as explicações de Ávila (2007, p. 160). Por outro lado, Simmons (1992, p. 235), acrescenta ao raciocínio de Arquimedes o argumento de coordenadas cartesianas.

Neste sentido, vamos considerar na figura 3-II uma parábola descrita por $y = a \cdot x^2$ e os pontos de coordenadas $A(x_0, ax_0^2)$ e $B(x_2, ax_2^2)$. Se tomarmos o ponto x_1 como a abcissa do ponto C, então, usando um argumento do Cálculo, podemos encontrar o ângulo de uma reta tangente no ponto C, dada por $\frac{dy}{dx} = 2ax_1$.

Simmons (1992, p. 235) acrescenta que desde que tenhamos uma reta tangente em C paralela ao segmento \overline{AB} , podemos escrever: $2ax_1 = \frac{ax_0^2 - ax_2^2}{x_0 - x_2}$ ou $x_1 = \frac{x_0 + x_2}{2}$. Isto nos diz que a linha vertical que passa em C bissecta a corda \overline{AB} , no ponto P e será suficiente verificar que $BCE = \frac{1}{4}BCP$ (a). Para fazer isso, iniciamos completando o paralelogramo CPBQ.

Por meio desse raciocínio, concluímos que a linha vertical que passa no ponto E bissecta a corda \overline{BC} no ponto G, e, além disso, bissecta o segmento \overline{BP} no ponto H. Podemos mostrar que $EG = \frac{1}{2}GH$ (b). Mas isto implica que $BEG = \frac{1}{2}BGH$ e $CEG = \frac{1}{2}BGH$. Assim, concluímos que $BCE = BGH$, mas desde que temos claramente a relação $BGH = \frac{1}{4}BCP$, com isto concluímos que $BCE = \frac{1}{4}BCP$ (a). Mas vejamos a demonstração proposta por Simmons para este fato.

Para provar o item (b), Simmons (1992) declara que é suficiente ver que $FE = \frac{1}{4}FH$, e podemos fazer isso, verificando que $FE = \frac{1}{4}QB$. Para tanto, basta observar as contas que seguem:

$$\begin{aligned}
 FE &= a \left[\left(\frac{1}{2}(x_1 + x_2) \right)^2 - \left[ax_1^2 + 2ax_1 \cdot \frac{1}{2}(x_2 - x_1) \right] \right] \\
 &= \frac{1}{4} a \left[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1^2 - 4x_1(x_2 - x_1) \right] = \\
 &= \frac{1}{4} a (x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2) = \frac{1}{4} a (x_1 - x_2)^2
 \end{aligned}$$

E também que:

$$QB = ax_2^2 - [ax_1^2 + 2ax_1(x_2 - x_1)] = a(x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2) = a(x_1 - x_2)^2$$

Encontramos a série geométrica também no problema de Aquiles e a Tartaruga

$$S = d + \frac{d}{2} + \frac{d}{2^2} + \frac{d}{2^3} + \dots + \frac{d}{2^n} + \dots = d \left(\frac{1}{2^0} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots \right)$$

pode ser considerada também como uma progressão geométrica, de um modo geral por:

$$1 + r + r^2 + r^3 + \dots + r^{n-1} = \frac{1 - r^n}{1 - r}. \text{ Simmons (1992, p. 227) lembra que, no caso particular de } r = 2 \leftrightarrow 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n-1} = \frac{1 - 2^n}{1 - 2} = 2^n - 1. \text{ A expressão}$$

$2^n - 1$ caracteriza uma expressão que foi objeto de profunda reflexão para os pitagóricos, e relaciona-se aos **números perfeitos**.

Para esclarecer sobre o que estamos falando, costumeiramente, em teoria dos números, definimos a função sigma $\sigma(n) := a$ soma de todos os divisores de um número $n \in \mathbb{N}^*$. Por exemplo, $\sigma(12) = 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 12 = 28$. Segundo Domingues (1991, p. 64), a função sigma é usada para caracterizar os números perfeitos como sendo os objetos que satisfazem a relação $\sigma(n) - n = n \leftrightarrow \sigma(n) = 2 \cdot n$. Ore (1948, p.

91) observa que “os gregos excluía da definição sua própria parte”.

Domingues (1991, p. 64) lembra que os gregos só conheciam os quatro primeiros: $P_1 = 6$, $P_2 = 28$, $P_3 = 496$ e $P_4 = 8128$. Mas Euclides, nos seus Elementos, provou que: *Se $2^k - 1$ é primo, onde $k > 1$ então $n = 2^{k-1} \cdot (2^k - 1)$ será um número perfeito.*

Por outro lado, algumas questões relacionadas aos números perfeitos não parecem ser triviais. De fato, Simmons (1992) lembra que o conhecimento sobre tais números sempre foi limitado. Vamos agora conhecer algumas propriedades da função sigma $\sigma(n)$.



VOCÊ SABIA?

Número perfeito é um número natural cuja soma de seus próprios divisores, com exceção dele mesmo, resulta no próprio número. Exemplo: Os divisores de 6 são 1, 2, 3 e 6. Para verificarmos se o 6 é um número perfeito, realizamos a soma de todos os seus divisores, com exceção do 6; logo $1 + 2 + 3 = 6$. Portanto 6 é um número perfeito.

LEMA:

Se $a, b \in \mathbb{Z}^+$ e $\text{MDC}\{a, b\} = 1$ então $\sigma(a \cdot b) = \sigma(a) \cdot \sigma(b)$

DEMONSTRAÇÃO:

Inicialmente, como admitimos que a e b não possuem divisores em comum, isto é, $\text{MDC}\{a, b\} = 1$, então o produto de $a \cdot b$ será constituído de números da forma $a_i \cdot b_j$ onde a_i são os fatores de a e b_j os fatores que dividem b . Daí, qualquer divisor de $a \cdot b$ pode ser descrito como $d = a_i \cdot b_j$. Mas sabemos que $\{1, a_1, a_2, \dots, a\}$ são os divisores de a e $\{1, b_1, b_2, \dots, b\}$ os divisores de b . Pela definição, escrevemos $\sigma(a) = 1 + a_1 + a_2 + \dots + a$ e $\sigma(b) = 1 + b_1 + b_2 + \dots + b$.

Agora vamos considerar todos os divisores de $d = a_i \cdot b_j$ mantendo o termo a_i fixado. Teremos $a_i \cdot 1 + a_i \cdot b_1 + a_i \cdot b_2 + \dots + a_i \cdot b = a_i \cdot (1 + b_1 + b_2 + \dots + b) = a_i \cdot \sigma(b)$, para um único divisor a_i de a , mas, se desejamos todos os divisores, precisamos considerar a soma:

$$\begin{aligned} & 1 \cdot \sigma(b) + a_1 \cdot \sigma(b) + a_2 \cdot \sigma(b) + \dots + a \cdot \sigma(b) \\ &= (1 + a_1 + a_2 + \dots + a) \cdot \sigma(b) = \sigma(a) \cdot \sigma(b) \end{aligned}$$

Um valor interessante que pode ser calculado com a função sigma é $\sigma(p^{n-1}) = 1 + p + p^2 + p^{n-1} = \frac{1-p^n}{1-p}$. Já vimos que, no caso particular, obtemos $r = 2 \leftrightarrow \frac{1-2^n}{1-2} = 2^n - 1$.

TEOREMA 1: (EUCLIDES)

Se $n \in \mathbb{Z}^+$ tal que $2^n - 1$ é primo, onde $n > 1$ então $a = 2^{n-1} \cdot (2^n - 1)$ será um número perfeito.

**ATENÇÃO!**

Segundo Ore (1948, p. 92) a demonstração do teorema de Euclides está presente no IX livro dos Elementos de Euclides.

DEMONSTRAÇÃO:

Para $n \in \mathbb{Z}^+$ tal que $2^n - 1$ é primo, buscamos mostrar que $m = 2^{n-1} \cdot (2^n - 1)$ é perfeito. Mas note que nestas condições a deve ser par. Observe ainda que $\text{MDC}\{2^{n-1}, 2^n - 1\} = 1$, assim, pelo lema anterior, escrevemos: $\sigma(2^{n-1} \cdot (2^n - 1)) = \sigma(2^{n-1}) \cdot \sigma(2^n - 1)$. Por hipótese, a expressão $2^n - 1$ é um número primo, portanto seus únicos divisores são 1 e $2^n - 1$. Segue que:

$$\begin{aligned}\sigma(a) &= \sigma(2^{n-1} \cdot 2^n - 1) = \sigma(2^{n-1}) \cdot \sigma(2^n - 1) \\ &= \sigma(2^{n-1}) \cdot (1 + 2^n - 1) = \sigma(2^{n-1}) \cdot 2^n = (1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n-1}) \cdot 2^n \\ &= \left[\frac{1 - 2^n}{1 - 2} \right] \cdot 2^n = (2^n - 1) \cdot 2^n = 2 \cdot [2^{n-1}(2^n - 1)] = 2 \cdot a\end{aligned}$$

TEOREMA 2:

Se o número $a = 2^{n-1}(2^n - 1)$ é par e perfeito, então, para algum inteiro positivo, temos que $(2^n - 1)$ será primo.

DEMONSTRAÇÃO:

Considerando que $a = 2^{n-1}(2^n - 1)$, podemos escrever $a = m \cdot 2^{n-1}$ onde m é ímpar e $n - 1 \geq 1$. Mostraremos que $m = (2^n - 1)$ é primo. Como $a = 2^{n-1}(2^n - 1)$ é perfeito, escrevemos $\sigma(a) = 2 \cdot a$ e teremos então:

$$m \cdot 2^n = 2a = \sigma(a) = \sigma(m2^{n-1}) = \sigma(m) \cdot \sigma(2^{n-1}) = \sigma(m) \cdot (2^n - 1) \therefore \sigma(m) = \frac{m \cdot 2^n}{(2^n - 1)}$$

Contudo, lembramos que devemos considerar que:

$$\sigma(m) = \frac{m \cdot 2^n}{(2^n - 1)} \in \mathbb{Z} \leftrightarrow (2^n - 1) \text{ divide } m \cdot 2^n \leftrightarrow (2^n - 1) \text{ deverá}$$

dividir, pois $\text{MDC}\{2^{n-1}, 2^n - 1\} = 1$.

Podemos escrever ainda que

$$\sigma(m) = \frac{m \cdot 2^n}{(2^n - 1)} = m + \frac{m}{(2^n - 1)}$$

Assim, vemos que a expressão que envolve os divisores de m , que é a função $\sigma(m)$, apresenta m e $\frac{m}{(2^n - 1)}$,

apenas dois divisores, mas isto só pode ocorrer se $m = (2^n - 1)$ for primo, e que $\frac{m}{(2^n - 1)} = 1$, ou

seja, $\sigma(m) = m + 1$.

Acima, tanto no teorema devido a Euclides quanto no teorema demonstrado por Leonhard Euler (1707-1783), identificamos a expressão $2^n - 1$, que foi chamada de termo geral para os primos de Mersenne $M_p = 2^p - 1$, em homenagem a Marin Mersenne (1588-1648),



VOCÊ SABIA?

O quinto número perfeito foi encontrado muitos séculos mais tarde, mais precisamente no século XVI por Huldalrichus Regius e corresponde a $P_5 = 33 \cdot 350 \cdot 336$, conforme Domingues (1991, p. 65).



SAIBA MAIS!

Leonhard Euler foi um importante matemático. Conheça um pouco mais de sua história acessando o site <http://www.somatematica.com.br/biograf/euler.php>

que apenas conjecturou que para $p = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127$ e 257 temos números primos.

Ore (1967, p. 18) lembra que alguns destes números chamaram a atenção de Euclides. Ore observa ainda que Mersenne encontrou vários casos em que não temos primos, como $M_{11} = 2^{11} - 1 = 23 \cdot 89$.

Para concluir este tópico, destacamos os matemáticos gregos Apollonius (262-190 d. C.) e Heron (1º século antes de Cristo). Apollonius produziu diversos escritos envolvendo a noção de cônicas. As cônicas têm sido estudadas desde de um século e meio após Apollonius. Ele introduziu os nomes: *elipse*, *hipérbole* e *parábola*.

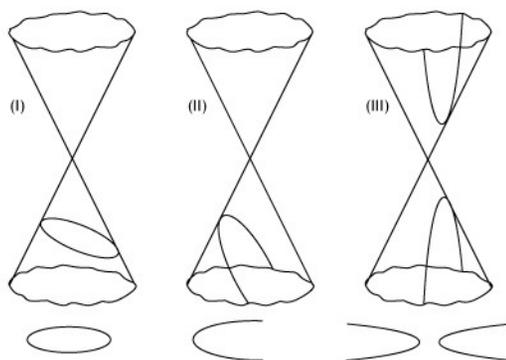


Figura 4: Geração das cônicas em Simmons (1992, p. ?)

Heron se tornou famoso pela fórmula da área do triângulo de lados a , b e c , descrita por $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, onde s é o semi-perímetro. Dunham (1990, p. 119) lembra que “recorrendo-se a esta fórmula, não necessitamos de sua altura. Além disso, a presença da raiz quadrada e o semi-perímetro parece ser ímpar, a fórmula parece não apresentar um apelo intuitivo”.

Antes de sua demonstração de fato, necessitamos de algumas preliminares presentes nos Elementos de Euclides.

PROPOSIÇÃO 1:

Os ângulos bissetores de um triângulo se encontram num ponto que é o centro do triângulo inscrito.

OBSERVAÇÃO:

O ponto onde os ângulos bissetores se encontram é chamado de incentro. Além disso, esta proposição pode ser encontrada como a proposição IV.4 dos Elementos de Euclides.

PROPOSIÇÃO 2:

Se num triângulo retângulo, baixamos uma perpendicular do ângulo reto à base, os triângulos determinados serão semelhantes.

OBSERVAÇÃO:

Esta proposição pode ser encontrada como a proposição VI.8 dos Elementos de Euclides.

PROPOSIÇÃO 3:

Num triângulo retângulo, o ponto médio da hipotenusa é equidistante dos três vértices.

DEMONSTRAÇÃO:

Consideremos inicialmente um triângulo retângulo $\triangle ABC$, bissectamos o lado \overline{AB} no ponto indicado na figura 5, de modo que tenhamos a relação $\overline{BM} = \overline{MC}$, e traçamos o segmento \overline{DM} perpendicular ao segmento \overline{AB} .

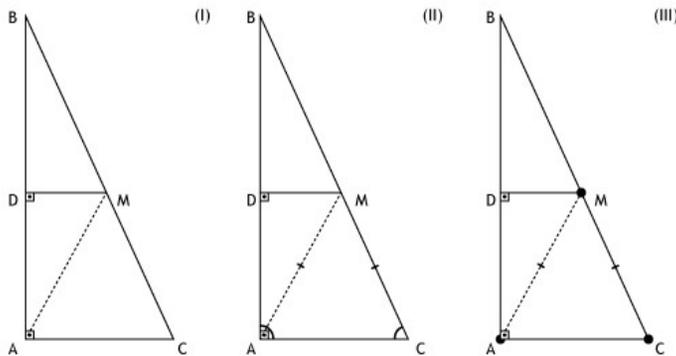


Figura 5: ilustração apresentada em Dunham (1990, p. 120)

No próximo passo, desenhamos o segmento (pontilhado) \overline{MA} e afirmamos que o $\triangle MAD \cong \triangle MBD$ são congruentes. De fato, percebemos na figura que os triângulos possuem um ângulo em comum de 90° . Além disso, possuem ainda o lado \overline{DM} em comum. Deste modo, por um caso de congruência (LAL), entre triângulos retângulos, os segmentos $\overline{AD} = \overline{BD}$ são congruentes.

Assim, por um caso de congruência, temos também $\overline{MA} = \overline{MB}$ e, conseqüentemente, os ângulos $\widehat{MAD} \equiv \widehat{MBD}$. Agora observamos que: $\widehat{ACM} \stackrel{\text{correspondentes}}{=} \widehat{DMB} = 90^\circ - \widehat{MBD} \stackrel{\text{isósceles}}{=} 90^\circ - \widehat{MAD} = \widehat{DMA} \stackrel{\text{alternos}}{=} \widehat{MAC}$. Segue que $\widehat{ACM} = \widehat{MAC}$. Conclusão, o triângulo $\triangle AMC$ é isósceles, conseqüentemente,

temos $\overline{MC} = \overline{MA}$. Mas considerando que os segmentos \overline{MA} , \overline{MB} e \overline{MC} possuem o mesmo comprimento o ponto médio da hipotenusa equidista dos três vértices, como observamos na figura acima em (III).

Na próxima proposição, lidaremos com quadrilátero inscrito em um círculo.

PROPOSIÇÃO 4:

Se $AHBO$ é um quadrilátero com diagonais \overline{AB} e \overline{OH} , e se os ângulos \hat{HAB} e \hat{HOB} são ângulos retos, então podemos traçar um círculo passando através dos vértices A , O , B e H .

DEMONSTRAÇÃO:

Consideremos $AHBO$ um quadrilátero na figura abaixo. Bissectamos os lados \overline{BH} no ponto M , de modo que $\overline{BM} \equiv \overline{MH}$, e observamos que o ponto M é o médio na hipotenusa do triângulo retângulo $\triangle BAH$ e do outro triângulo retângulo $\triangle BOH$. Pela proposição anterior, este ponto equidista dos pontos A , O , B e H .

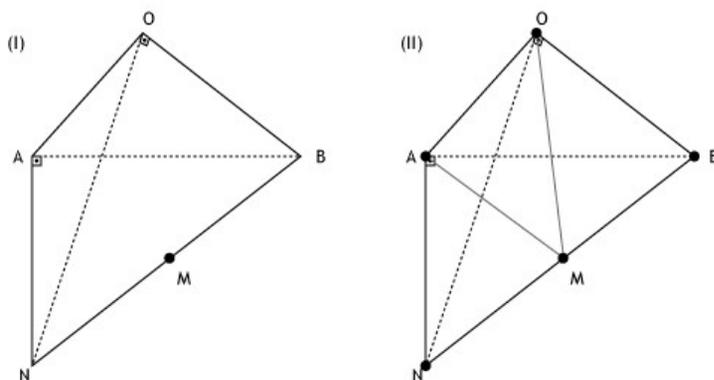


Figura 6: Trapézio apresentada em Dunham (1990, p. 121)

Desse modo um círculo centrado em M , de raio $R = \overline{MH}$ passará pelos quatro vértices A , O , B e H , o que inscreverá o quadrilátero numa circunferência.

PROPOSIÇÃO 5:

Os ângulos opostos de um quadrilátero inscrito equivalem a soma de dois ângulos retos.

OBSERVAÇÃO:

Aparece como a proposição III.22 do livro Elementos de Euclides.

Com essas cinco proposições, podemos demonstrar, conforme Dunham (1990), o teorema devido a Heron de Alexandria.

TEOREMA (HERON):

Para um triângulo de lados a , b , c , sua área pode ser calculada por $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, onde $s = \frac{a+b+c}{2}$ é o semi-perímetro.

DEMONSTRAÇÃO:

Dunham (1990, p. 121) explica que Heron iniciou inscrevendo um círculo num triângulo arbitrário de lados a , b e c . *Seu insight foi usar o incentro do triângulo como um elemento chave para a determinação de sua área* (DUNHAM, 1990, p. 121). Considerando o ponto O o centro do círculo inscrito e denotando por r seu raio, vemos que $r = \overline{OD} = \overline{OE} = \overline{OF}$. Agora aplicamos a fórmula da área para os seguintes triângulos:

$$\text{Área}(\triangle AOB) = \frac{1}{2}(\text{base}) \cdot (\text{altura}) = \frac{1}{2} \overline{AB} \cdot \overline{OD} = \frac{1}{2} c \cdot r$$

$$\text{Área}(\triangle BOC) = \frac{1}{2}(\text{base}) \cdot (\text{altura}) = \frac{1}{2} \overline{BC} \cdot \overline{OE} = \frac{1}{2} a \cdot r$$

$$\text{Área}(\triangle COA) = \frac{1}{2}(\text{base}) \cdot (\text{altura}) = \frac{1}{2} \overline{AC} \cdot \overline{OF} = \frac{1}{2} b \cdot r$$

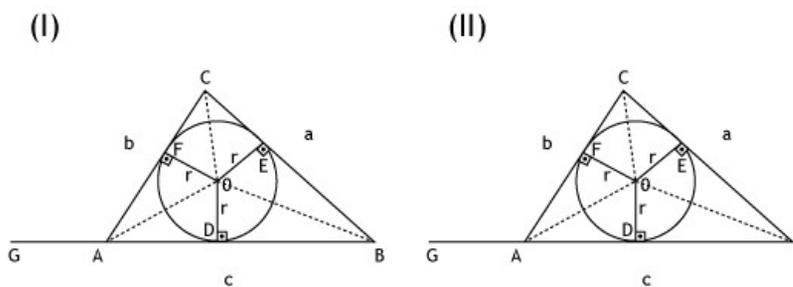


Figura 7: Argumentação geométrica do teorema de Heron descrita por Dunham (1990, p. ?)

Por outro lado, notemos que sua área total é dada por:

$$\begin{aligned} \text{Área}(\triangle ABC) & \overset{\text{soma das áreas}}{=} \text{Área}(\triangle AOB) + \text{Área}(\triangle BOC) + \text{Área}(\triangle COA) \\ & = \frac{1}{2}c \cdot r + \frac{1}{2}a \cdot r + \frac{1}{2}b \cdot r = \frac{1}{2}r \cdot (a + b + c) \end{aligned}$$

Neste ponto, Dunham (1990) destaca que Heron realiza a conexão entre a área e o semi-perímetro. Recordando o processo de inscrição círculo, decomparamos o triângulo $\triangle ABC$ em três outros congruentes $\triangle AOD \cong \triangle AOF$, $\triangle BOD \cong \triangle BOE$ e $\triangle COE \cong \triangle COF$, que decorrem do caso de congruência AAL, encontrado no livro dos Elementos (proposição I.26, Vol II).

Desse modo, teremos os segmentos correspondentes:

$$\overline{AD} = \overline{AF}, \overline{BD} = \overline{BE} \text{ e } \overline{CE} = \overline{CF}$$

No que diz respeito aos ângulos, temos também $\hat{AOD} = \hat{AOF}$, $\hat{BOD} = \hat{BOE}$ e $\hat{COE} = \hat{COF}$. Neste ponto, Heron estendeu a base do triângulo \overline{AB} até o ponto G, de modo que $\overline{AG} = \overline{CA}$.

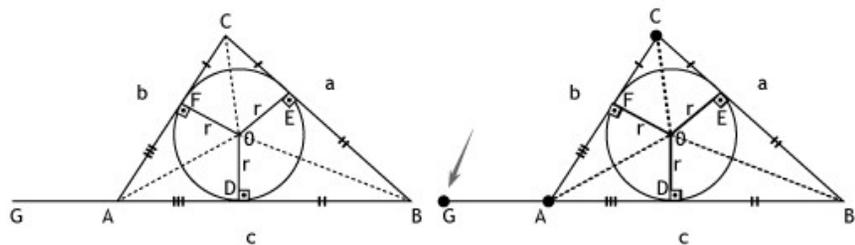


Figura 8: Argumentação geométrica do teorema de Heron

Em seguida, Dunham (1990, p. 123) menciona que Heron argumenta:

$$\begin{aligned} \overline{BG} &= \overline{BD} + \overline{AD} + \overline{AG} = \overline{BD} + \overline{AD} + \overline{CE} \text{ (por construção)} \\ &= \frac{1}{2}(2\overline{BD} + 2\overline{AD} + 2\overline{CE}) = \\ &= \frac{1}{2}([\overline{BD} + \overline{BE}] + [\overline{AD} + \overline{AF}] + [\overline{CE} + \overline{CF}])(\text{por congruência}) = \\ &= \frac{1}{2}([\overline{BD} + \overline{AD}] + [\overline{BE} + \overline{CE}] + [\overline{AF} + \overline{CF}])(\text{por congruência}) \\ &= \frac{1}{2}([\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC}]) = \frac{1}{2}[c + a + b] = s \end{aligned}$$

Consequentemente, o segmento $\overline{BG} = s$ possui um comprimento igual ao semiperímetro. Sabendo disto, podemos descrever com facilidade que:

$$\begin{aligned} s - c &= \overline{BG} - \overline{AG}, \\ s - b &= \overline{BG} - \overline{AC} = [\overline{BD} + \overline{AD} + \overline{AG}] - [\overline{AF} + \overline{CF}] \\ &= [\overline{BD} + \overline{AD} + \overline{CE}] - [\overline{AD} + \overline{CE}] = \overline{BD} \end{aligned}$$

E considerando que $\overline{AD} = \overline{AF}$ e $\overline{AG} = \overline{CE} = \overline{CF}$, de modo semelhante, obteremos:

$$s - a = \overline{BG} - \overline{BC} = [\overline{BD} + \overline{AD} + \overline{AG}] - [\overline{BE} + \overline{CE}]$$

$$= [\overline{BD} + \overline{AD} + \overline{CE}] - [\overline{BD} + \overline{CE}] = \overline{AD}$$

já que $\overline{BD} = \overline{BE}$ e $\overline{AG} = \overline{CE}$.

Assim, encontramos que o semiperímetro s e as quantidades $(s - a)$, $(s - b)$ e $(s - c)$ comparecem de modo curioso nos segmentos do diagrama.

Na última parte de sua demonstração, Heron inicia com o triângulo inscrito na circunferência, entretanto, estenderemos o diagrama de Heron para compreendermos melhor o seu raciocínio.

Heron desenhou \overline{OL} perpendicular ao segmento \overline{OB} , cortando o segmento \overline{AB} no ponto K . No próximo passo, ele construiu o segmento \overline{AM} perpendicular ao segmento \overline{AB} encontrando \overline{OL} no ponto H . E, finalmente, ele desenhou o segmento \overline{BH} , que resulta na determinação do quadrilátero $AHBO$ em que usaremos as proposições anteriores (proposição 4 e proposição 5).

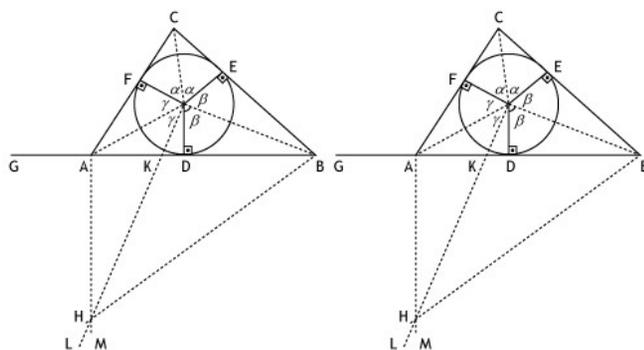


Figura 9: Desenho explicativo proposto por Dunham (1990, p. ?)

Sabemos que ângulos opostos possuem soma de dois ângulos retos, isto é, $\hat{A}HB + \hat{A}OB = 2 \times (90^\circ)$. Finalmente, examinamos os ângulos relacionados ao incentro O . Por meio da congruência discutida anteriormente, temos os seguintes ângulos: $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 4 \cdot (\text{ângulos retos})$, ou, ainda, $\alpha + \beta + \gamma = 2 \cdot (\text{ângulos retos})$.

Porém, temos $\beta + \gamma = \hat{A}OB$ e assim,

$$\alpha + \hat{A}OB = 2 \cdot (\text{ângulos retos}) = \hat{A}HB + \hat{A}OB$$

Concluimos que $\hat{A}HB = \alpha$, o que pode parecer insignificante, mas foi empregado de modo crucial por Heron. De fato, Dunham (1990, p. 125) observou que o $\triangle COF$ é semelhante ao $\triangle BHA$, para os ângulos $\hat{C}FO$ e $\hat{B}AH$ ambos ângulos retos. Em virtude de um comentário anterior, temos $\hat{A}HB = \alpha$. A partir da semelhança, escrevemos:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AH}} = \frac{\overline{CF}}{\overline{OF}} = \frac{\overline{AG}}{r}$$

E considerando que $\overline{CF} = \overline{AG}$ e $\overline{OF} = r$, obtemos a seguinte equação: $\frac{\overline{AB}}{\overline{AG}} = \frac{\overline{AH}}{r}$ (*). Dunham (1990, p. 125) relata que Heron percebeu que o $\triangle KAH$ é igualmente semelhante ao $\triangle KDO$. E os ângulos $\hat{K}AH$ e $\hat{K}DO$ são ambos retos, enquanto os ângulos verticais $\hat{A}KH$ e $\hat{D}KO$ são iguais. Por meio desta semelhança, escrevemos: $\frac{\overline{AH}}{\overline{AK}} = \frac{\overline{OD}}{\overline{KD}} = \frac{r}{\overline{KD}}$. $\therefore \frac{\overline{AH}}{r} = \frac{\overline{AK}}{\overline{KD}}$. Combinando estas últimas equações com (*), obteremos: $\frac{\overline{AB}}{\overline{AG}} = \frac{\overline{AK}}{\overline{KD}}$.

Dunham (1990) destaca que, neste ponto, Heron observou o $\triangle BOK$ com altura $\overline{OD} = r$. E por meio das proposições anteriores (proposição 2), sabemos que o $\triangle KDO$ é semelhante ao $\triangle ODB$, e, assim, escrevemos: $\frac{\overline{KD}}{r} = \frac{r}{\overline{BD}}$. $\therefore \overline{KD} \cdot \overline{BD} = r^2$. Dunham ressalta que os gregos diziam que r é a média proporcional entre as magnitudes \overline{KD} e \overline{BD} . Neste estágio, Heron adiciona a unidade em ambos os lados e obtém: $\frac{\overline{AB}}{\overline{AG}} = \frac{\overline{AK}}{\overline{KD}} \leftrightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{AG}} + 1 = \frac{\overline{AK}}{\overline{KD}} + 1 \leftrightarrow \frac{\overline{AB} + \overline{AG}}{\overline{AG}} = \frac{\overline{AK} + \overline{KD}}{\overline{KD}} \leftrightarrow \frac{\overline{BG}}{\overline{AG}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{KD}}$.

Esta última equação, por meio de uma multiplicação pela fração $\frac{\overline{BG}}{\overline{BG}}$ do lado esquerdo e $\frac{\overline{BD}}{\overline{BD}}$ do lado direito, resulta em: $\frac{\overline{BG}}{\overline{AG}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{KD}} \leftrightarrow \frac{\overline{BG}}{\overline{AG}} \times \frac{\overline{BG}}{\overline{BG}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{KD}} \times \frac{\overline{BD}}{\overline{BD}}$, e, assim, temos:

$$\frac{\overline{BG}}{\overline{AG}} \times \frac{\overline{BG}}{\overline{BG}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{KD}} \times \frac{\overline{BD}}{\overline{BD}} \leftrightarrow \frac{\overline{BG}^2}{\overline{AG} \cdot \overline{BG}} = \frac{\overline{AD} \cdot \overline{BD}}{r \cdot r} \leftrightarrow r^2 \cdot \overline{BG}^2 = (\overline{AG} \cdot \overline{BG}) \cdot (\overline{AD} \cdot \overline{BD})$$

No final, Heron junta todas as peças de sua argumentação para obter o resultado desejado. Fazendo agora as devidas substituições, concluímos: $r^2 \cdot s^2 = (s - c) \cdot s \cdot (s - a)(s - b) = s(s - a)(s - b)(s - c)$. $\therefore r \cdot s = \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}$, fornecendo ao final que $A = \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}$.

Historiadores identificaram fatos curiosos a respeito desta fórmula interessante encontrada em manuscritos árabes. Na escola islâmica Abu'l Raiban, al-Birune criticou este resultado devido a Heron, embora acredite-se ser devido a Arquimedes. Todavia, não temos encontrado nos escritos de Arquimedes indícios que sustentem tal afirmação.

Dunham (1990), de modo inesperado, afirma que a fórmula de Heron conduz à demonstração do teorema de Pitágoras. De fato, vamos supor que temos um triângulo retângulo de lados a , b e c , como vemos na Figura 10.

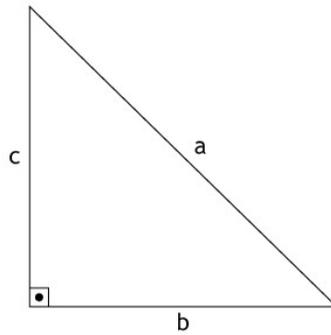


Figura 10: Triângulo retângulo em Dunham (1990, p. 127)

Sabemos que $s - a = \frac{a + b + c}{2} - a = \frac{a + b + c - 2a}{2} = \frac{-a + b + c}{2}$. De modo similar, escrevemos $s - b = \frac{a - b + c}{2}$ e $s - c = \frac{a + b - c}{2}$. Dunham (1990, p. 128) desenvolve algumas manipulações algébricas:

$$\begin{aligned} & (a + b + c)(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c) \\ &= 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - (a^4 + b^4 + c^4) \end{aligned}$$

Retornando à fórmula de Heron, escrevemos $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} =$

$$\begin{aligned} & \sqrt{\left(\frac{a + b + c}{2}\right)\left(\frac{-a + b + c}{2}\right)\left(\frac{a - b + c}{2}\right)\left(\frac{a + b - c}{2}\right)} \\ &= \sqrt{\frac{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - (a^4 + b^4 + c^4)}{16}} \end{aligned}$$

Por outro lado, sabemos que $K = \frac{1}{2} \text{base} \times \text{altura} = \frac{bc}{2}$. Por outro lado, temos então:

$$\begin{aligned} \frac{b^2c^2}{4} &= \frac{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - (a^4 + b^4 + c^4)}{16} \leftrightarrow 4b^2c^2 \\ &= 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - (a^4 + b^4 + c^4) \end{aligned}$$

Podemos agora simplificar:

$$\begin{aligned} & 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - (a^4 + b^4 + c^4) \leftrightarrow \\ & \leftrightarrow (b^2 + c^2)^2 - 2a^2(b^2 + c^2) + a^4 = 0 \therefore [(b^2 + c^2 - a^2)]^2 = 0 \end{aligned}$$

Mas isto implica que $b^2 + c^2 - a^2 = 0 \leftrightarrow b^2 + c^2 = a^2$ o que verifica nosso resultado.

Notamos que $\text{teo. Heron} \rightarrow \text{teo. Pitágoras}$, e o que poderíamos dizer a respeito de $\text{teo. Heron} \xrightarrow{?} \text{teo. Pitágoras}$. No próximo tópico, discutiremos a noção de comensurabilidade e incomensurabilidade de grandezas.

TÓPICO 2

Comensurabilidade de grandezas

OBJETIVO

- Refletir sobre a noção de grandezas comensuráveis e incomensuráveis

Em coerência com o princípio de que tudo é número, os pitagóricos davam à aritmética a primazia entre todas as ciências. O conhecimento dos números naturais e de suas propriedades era o saber fundamental. Assim, a geometria pitagórica aparece subordinada à aritmética.

Um dos aspectos mais curiosos desta subordinação era a convicção de que duas grandezas do mesmo tipo admitiriam sempre uma unidade como divisor comum. Desse modo, encontramos a seguinte definição: dizem-se comensuráveis duas grandezas que admitem uma medida comum, isto é, se α e β são **comensuráveis**, deve existir $m, n \in \mathbb{N}$ tais que $\alpha = n \cdot u$ e $\beta = m \cdot u$ onde u é a medida comum.

Nosso primeiro exemplo envolvendo a noção de comensurabilidade e incomensurabilidade é relacionado à *subtração recíproca entre o lado e a diagonal de um quadrado*. Os geômetras pitagóricos procuraram saber qual a razão entre o lado

e a diagonal de um quadrado. Assim, consideremos, na figura abaixo, o quadrado ABCD, de lado l e diagonal d . Construiremos um segmento de reta $l - d$, pois de imediato temos $l > d$.

Sobre a diagonal do quadrado, marque um ponto E, de modo que $\overline{AE} = \overline{AB} = l$. Obtemos um segmento $\overline{EC} = d - l$. Desse modo, obtemos o segundo par de segmentos do processo de subtração. Traçamos agora uma perpendicular à diagonal \overline{AC} , pelo ponto E.

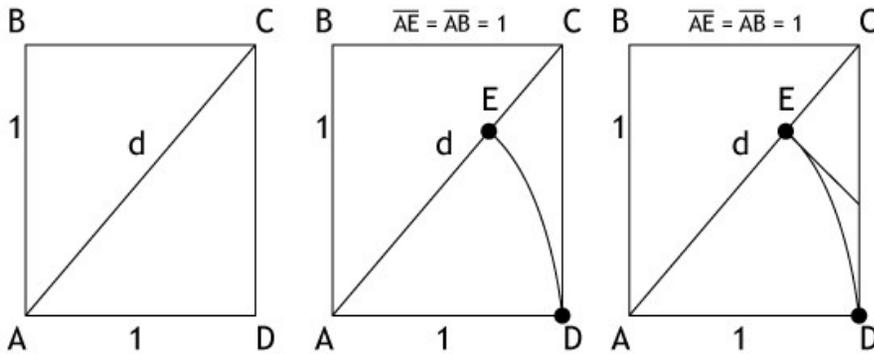


Figura 11: Razão de incomensurabilidade entre o lado e a diagonal

Chamamos de F o ponto de intersecção dos segmentos \overline{EF} com \overline{CD} . Assim, observamos que o segmento de reta $\overline{FD} = d - l$ e, portanto, o segmento de reta $\overline{CF} = l - (d - l) = 2l - d$.

De fato, considerando que o ângulo \widehat{ECF} é a metade de um ângulo de 90° , teremos que o triângulo $\triangle ECF$ é isósceles, determinando que $\overline{EC} = \overline{EF}$. Além disso, como os triângulos $\triangle AEF$ e $\triangle ADF$ são congruentes (por serem ambos retângulos e hipotenusas e um cateto em comum) e $\overline{EF} = \overline{FD}$, segue que $\overline{EC} = \overline{EF} = \overline{FD}$.

Assim, obtemos o terceiro par de segmentos no processo de subtração $(d - l)$ e $(2l - d)$. Recapitulando até este momento, obtemos:

$$\left\{ \begin{array}{l} d \text{ e } l \\ l \text{ e } d - l \\ d - l \text{ e } (2l - d) \\ (2l - d) \text{ e } (3l - 2d) \\ (3l - 2d) \text{ e } (3d - 4l) \\ \vdots \end{array} \right. \quad (*)$$

Prosseguindo o processo, após a obtenção do quadrado EFGC, repetimos o processo para seu lado e diagonal. Em (*) continuaríamos indefinidamente essa construção geométrica com a determinação de quadrados cada vez menores.

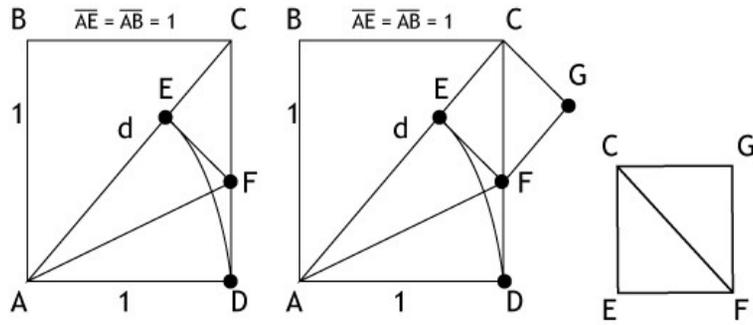


Figura 12: Construção geométrica dos gregos

Observamos que em (*) nunca obteremos dois segmentos de mesmo comprimento, sempre um segmento do par será maior do que o outro elemento do mesmo par. Isto indica que se pode continuar indefinidamente este processo. Mas se admitirmos por contradição que o par inicial em (*) fosse **comensurável**, existiriam $n, m \in \mathbb{N}$ tais que $l = m \cdot u$ e $d = n \cdot u$ (**) e estaríamos admitindo, então, que, após um número de passos finitos, finalizaríamos este processo, o que não pode ocorrer em virtude do que obtemos em (*), que se prolonga indefinidamente; assim também não pode ocorrer (**). Logo d e l são incomensuráveis.

Nosso segundo exemplo envolve a perspectiva de Aristóteles. Consideremos de novo o quadrado ABCD, de lado l e diagonal d . Admitindo que o lado e a diagonal constituem-se em segmentos comensuráveis, de acordo com a definição, existem dois números naturais e um segmento u que os mede ao mesmo tempo, de modo que $l = m \cdot u$ e $d = n \cdot u$.

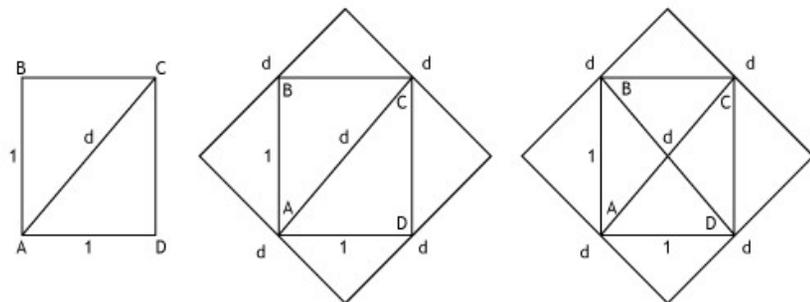


Figura 13: Construção geométrica analisada por Aristóteles

Observamos que os números $n, m \in \mathbb{N}$ não podem ser ambos pares; com efeito, se tanto m como n fossem pares, então o segmento de reta $2 \cdot u$ ainda seria uma medida de l e d ao mesmo tempo. Deste modo, poderíamos tomar sucessivamente as medidas: $u ; 2u ; 4u ; 8u ; 16u ; 32u ; \dots$ e acabaríamos por obter segmentos maiores do que l e d (e que portanto não os podem medir). Teremos de, antes disso, obter uma medida comum a que correspondam números inteiros positivos dos quais, pelo menos um, é ímpar.

Desenhemos, na figura 13, um quadrado de lado d . É fácil concluir que este novo quadrado tem área dupla da do quadrado inicial. Basta ver que a Figura 13 construída em (II) pode ser decomposta como em III: o quadrado inicial em (I) se decompõe em apenas quatro triângulos retângulos, enquanto o quadrado de lado d se decompõe em oito destes triângulos retângulos.

Deste modo, as áreas dos quadrados de lado l e d , construído em (II), serão comensuráveis; mais precisamente, o quadrado de lado u é medida comum dos quadrados cujos lados são l e d ; o quadrado de lado l equivale, no que a área diz respeito, a m^2 quadrados de lado u e o quadrado de lado d equivale a n^2 quadrado de lado u . Portanto o número n^2 é o dobro do número m^2 , assim, o número n^2 é par. E, assim, n será par, o que implica que m deverá ser ímpar. Mas se n é par, n^2 será múltiplo de quatro; e sendo o dobro de m^2 , este será múltiplo de quatro, m^2 será par e, finalmente, m será par, o que implica uma contradição, pois m não pode ser par e ímpar ao mesmo tempo.

Estrada et al.(2000, p. 246) destaca que:

possivelmente este caso foi o primeiro relacionado à demonstração de uma proposição por redução ao absurdo, presente nos Elementos de Euclides. Mas não nos leva a crer que corresponda ao modo como a incomensurabilidade do lado e da diagonal de um quadrado foi descoberta. De fato, dificilmente um geômetra que nem sequer suspeitasse da existência de grandezas incomensuráveis se lembraria de seguir o raciocínio indireto acima exposto.

Vejamos mais um exemplo exaustivamente analisado pelos gregos que diz respeito a não comensurabilidade *entre a diagonal e o lado do pentágono regular*. Verificaremos o seguinte problema: em um pentágono regular qualquer, o lado e a diagonal são segmentos incomensuráveis.

DEMONSTRAÇÃO:

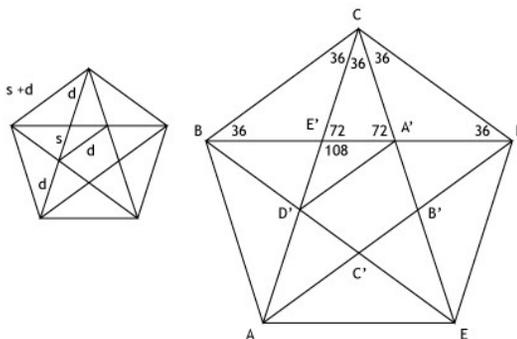


Figura 14: Pentágono regular

1º PASSO:

Mostrar que as diagonais de um pentágono regular qualquer formam um outro pentágono regular, contido no primeiro, e que são válidas as relações métricas na Figura 14;

Portanto, seja o pentágono regular $ABCDE$ e suas diagonais $\overline{AC}, \overline{AD}, \overline{EB}, \overline{EC}$ e \overline{BD} . Da fórmula da soma dos ângulos internos de um polígono regular temos, para esse polígono:

$Si = 180^\circ(n - 2) \Rightarrow Si = 180^\circ(5 - 2) = 540^\circ$. Logo, cada ângulo interno do pentágono regular $ABCDE$ é igual a 108° .

Temos ainda o $\triangle CDE$ isósceles com $\overline{CD} = \overline{DE}$. Portanto, $\hat{E}CD = \hat{C}ED$. Sendo assim temos:

$$\begin{aligned} \hat{E}CD + \hat{C}ED + \hat{C}DE &= 180^\circ \Rightarrow 2\hat{E}CD \\ &= 180^\circ - \hat{C}DE \Rightarrow 2\hat{E}CD = 180^\circ - 108^\circ \Rightarrow \hat{E}CD = 36^\circ. \end{aligned}$$

De modo análogo, $\hat{A}CB = 36^\circ$. Por outro lado, temos:

$$\hat{A}CB + \hat{ACE} + \hat{E}CD = 108^\circ \Rightarrow 36^\circ + \hat{ACE} + 36^\circ = 108^\circ \Rightarrow \hat{ACE} = 36^\circ.$$

Portanto, os três ângulos formados pelas diagonais e lados do pentágono regular $ABCDE$ formam ângulos de 36° .

Temos no $\triangle CE'B$:

$$\hat{B}CE' + \hat{C}BE' + \hat{C}E'B = 180^\circ \Rightarrow 36^\circ + \hat{C}E'B + 36^\circ = 180^\circ \Rightarrow \hat{C}E'B = 108^\circ.$$

Como $\hat{C}E'B$ é oposto pelo vértice com $\hat{D}E'A'$, logo $\hat{D}E'A' = 108^\circ$ e pelo mesmo motivo os outros ângulos internos do pentágono $A'B'C'D'E'$ têm a mesma medida.

Por outro lado, $\hat{D}E'A' = 108^\circ$ é suplementar de $\hat{C}E'A'$, logo $\hat{C}E'A' = 72^\circ$. Da mesma forma, $\hat{C}A'E', \hat{D}A'B', \hat{D}B'A', \dots, \hat{B}E'D'$ medem 72° cada um. Sendo assim temos:

$$\overline{CE'} = \overline{CA'} = \overline{DA'} = \overline{DB'} = \dots$$

Seja essa medida comum igual a d , tais triângulos são congruentes:

$$CE'A', DA'B', EB'C', AC'D' \text{ e } BD'E'. \text{ Logo, } A'B' = B'C' = C'D' = D'E' = E'A'.$$

Portanto está demonstrado que o pentágono $A'B'C'D'E'$ é regular. Seja s a medida do lado desse pentágono.

Assim como ocorre no pentágono maior, $\hat{A'D'E'} = 36^\circ$ e o $CD'A'$ é isósceles. Sendo assim, $CA' = A'D' = d$ e todas as diagonais do pentágono regular $A'B'C'D'E'$ valem d . Concluindo, o $CD'B$ é isósceles, pois $\hat{CD'B} = \hat{C'D'B} = 72^\circ$ e $BC = CD' = s + d$.

2º PASSO:

Mostrar que o lado e a diagonal do pentágono regular são segmentos incomensuráveis. Para tanto, usaremos a seguinte notação:

- a_1 e d_1 , respectivamente, para o lado e a diagonal do pentágono maior e
- a_2 e d_2 , respectivamente, para o lado e a diagonal do pentágono menor.

No 1º passo foi mostrado que o lado do pentágono menor somado a sua diagonal é igual ao lado do pentágono maior, portanto temos:

$$\begin{cases} a_1 = a_2 + d_2 \text{ (I);} \\ d_1 = a_2 + 2d_2 \text{ (II).} \end{cases}$$

De (II) temos $d_1 > 2d_2$ e, ainda manipulando (I) e (II), temos:

$$\begin{cases} a_2 = 2a_1 - d_1; \\ d_2 = d_1 - a_1; \\ d_2 < \frac{1}{2}d_1. \end{cases}$$

Do pentágono menor, se traçarmos as suas diagonais, obtemos outro pentágono regular valendo as mesmas propriedades com lado a_3 e diagonal d_3 . Como valem as mesmas propriedades, temos:

$$\begin{cases} a_2 = a_3 + d_3 \text{ (I);} \\ d_2 = a_3 + 2d_3 \text{ (II).} \end{cases}$$

De (II) temos $d_2 > 2d_3$ e, ainda manipulando (I) e (II), temos:

$$\begin{cases} a_3 = 2a_2 - d_2; \\ d_3 = d_2 - a_2; \\ d_3 < \frac{1}{2}d_2. \end{cases}$$

Continuando de forma indefinida, obtemos pentágonos regulares cada vez menores com lados $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ e respectivas diagonais $d_1, d_2, d_3, \dots, d_n, \dots$ obedecendo as relações acima.

Para aplicar o **Método da Exaustão**, vamos supor que a_1 e d_1 são segmentos comensuráveis, portanto existe um $\varepsilon > 0$ tal que a_1 e d_1 são múltiplos de ε . Sendo assim temos:

$$a_1 = n\varepsilon \text{ e } d_1 = m\varepsilon, \text{ com } m, n \in \mathbb{N}^*.$$

Logo, a_2 e d_2 também são múltiplos de ε , pois:

$$\begin{cases} a_2 = 2a_1 - d_1 \Rightarrow a_2 = 2n\varepsilon - m\varepsilon = \varepsilon(2n - m); \\ d_2 = d_1 - a_1 \Rightarrow d_2 = m\varepsilon - n\varepsilon = \varepsilon(m - n). \end{cases}$$

De modo análogo, os lados a_3, \dots, a_n, \dots e respectivas diagonais d_3, \dots, d_n, \dots também serão múltiplos de ε . Obtemos d_k múltiplo de ε , para todo k , logo $d_k > \varepsilon$. Como $d_{k+1} < \frac{1}{2}d_k$ para todo k , pelo Método da Exaustão concluímos que existe um k tal que $d_k < \varepsilon$. Portanto chegamos a uma contradição, pois supomos que o lado e a diagonal do pentágono regular são segmentos comensuráveis.

Sendo assim, o lado e a diagonal de um pentágono regular qualquer são segmentos incomensuráveis.

Estrada et al. (2000, p. 246) lembram que:

A constatação de que nem todos os segmentos de reta admitem uma medida comum abalou profundamente os princípios da filosofia pitagórica. Afinal, nem tudo é número: por exemplo, a geometria não podia ser reduzida à aritmética. As questões de geometria deveriam ser abordadas de outro modo.

O teorema de Tales é enunciado do seguinte modo: dadas duas retas, r e s , intersectando-se num ponto O , e duas retas paralelas, p e q , intersectando r nos pontos A e B , respectivamente, e s nos pontos C e D , respectivamente, vale a proporção $\frac{\overline{OA}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{CD}}$.

Uma das consequências deste abalo epistemológico foi a separação dos domínios numérico e geométrico. A matemática cindiu-se em dois domínios: a **aritmética** e a **geometria**. Alguns historiadores matemáticos chamam este momento de **divórcio grego**.

Vejamos nosso último exemplo envolvendo a noção de comensurabilidade relacionada ao teorema dito de Tales. Os primeiros pitagóricos desenvolveram um geometria fundamentada nos princípios aritméticos e, em particular, na teoria das proporções de números naturais.

Um resultado importante nessa teoria geométrica foi o que hoje conhecemos como **Teorema de Talles** (625-547 a. C.). Simmons (1992, p.21) lembra que Talles foi um dos mais produtivos filósofos pré-socráticos da antiga Grécia.

“A história marca que o mesmo, em visita ao Egito, enquanto caminhava nas proximidades das pirâmides, calculou sua altura aproximada usando semelhança de triângulos obtidos por meio das sombras.”

No primeiro caso, consideraremos de modo particular quando $\overline{OA} = \overline{AB}$. Pelo ponto C, traçamos uma reta paralela à reta r, e seja o ponto E, a intersecção desta reta com a reta q. Como ABEC é um paralelogramo, $\overline{AB} = \overline{CE}$ e, portanto, $\overline{OA} = \overline{CE}$. Pela igualdade dos ângulos correspondentes determinados por um sistema de duas retas paralelas por uma reta transversal, tem-se a igualdade dos seguintes ângulos: $\hat{COA} = \hat{DCE}$. E também teremos $\hat{OAC} = \hat{CED}$. Logo, os triângulos ΔOAC e ΔCED serão congruentes e, portanto, teremos $\overline{OC} = \overline{CD}$. Consequentemente, neste caso particular, vale a proporção $\frac{\overline{OA}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{CD}}$.

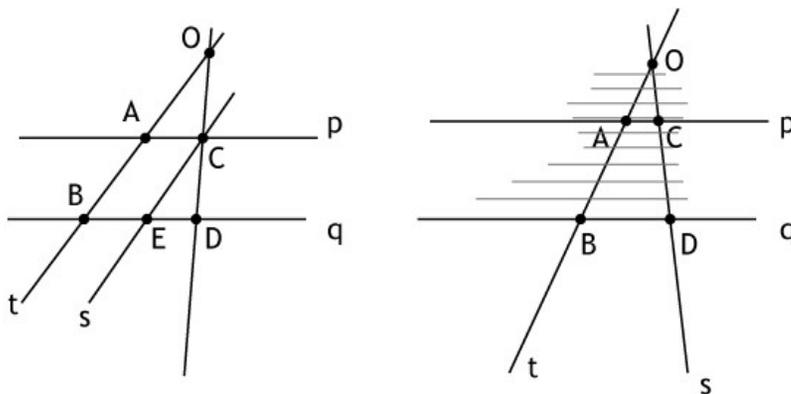


Figura 15: Caso comensurável do teorema de Talles

Admitamos agora que os segmentos de reta \overline{OA} e \overline{AB} possam ser distintos, mas suponha que os mesmos sejam comensuráveis. Seja então, de acordo com a definição formal, u a medida comum a estes segmentos. Digamos: $\overline{OA} = m \cdot u$ e $\overline{AB} = n \cdot u$, logo, teremos $\frac{\overline{OA}}{\overline{AB}} = \frac{m}{n}$ (*). Reparem que os segmentos \overline{OA} e \overline{AB} decompõem-se em m e n segmentos de reta (Figura 15-II), respectivamente, todos iguais a u . As paralelas ao segmento \overline{AC} traçadas pelas extremidades de cada um destes segmentos determinam na reta \overline{OD} as extremidades de segmentos de reta, todos iguais entre si (em virtude do caso particular demonstrado há pouco), m dos quais compõem \overline{OC} e n dos quais compõem \overline{CD} . Consequentemente, teremos $\frac{\overline{OC}}{\overline{CD}} = \frac{m}{n}$ (**). Conclui-se a partir de (*) e (**) que $\frac{\overline{OA}}{\overline{AB}} = \frac{m}{n} = \frac{\overline{OC}}{\overline{CD}}$.

“Deste resultado, decorre facilmente que, dada a situação acima descrita, vale também a proporção $\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BD}}$ ”. (ESTRADA ET AL., 2000, p. 263).

Com efeito, traça-se por A uma reta paralela que intersecte BD num ponto F (Figura 16-III). Pela parte já demonstrada do teorema, poderemos escrever: $\frac{\overline{BA}}{\overline{AO}} = \frac{\overline{BF}}{\overline{FD}}$, de onde se conclui que $\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{AO}}{\overline{BA + FD}} = \frac{\overline{FD}}{\overline{BF + FD}} = \frac{\overline{FD}}{\overline{BD}}$

Finalmente, temos $\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BD}}$.

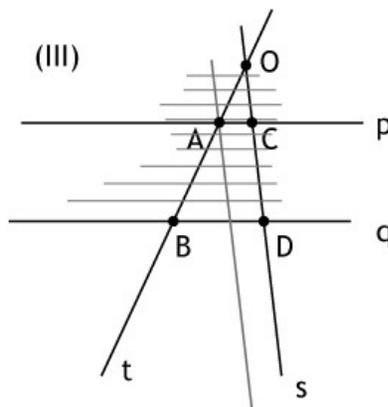


Figura 16: Teorema de Talles

Observe-se que, tal como acontece com a primeira demonstração, a segunda demonstração do teorema dito de Talles não está ainda demonstrada com a generalidade possível. Apenas se estabeleceu o resultado particular correspondente ao caso em que os segmentos de reta envolvidos são comensuráveis (ESTRADA ET AL., 2000, p. 263).

No próximo tópico, estudaremos um modelo matemático que proporciona a verificação de vários fatos e propriedades na Matemática básica escolar.

TÓPICO 3

O método da exaustão

OBJETIVO

- Analisar a forma de raciocínio grego que inspirou a teoria atual sobre limites

O Axioma de Eudoxo de Cnido (408 a.C - 355 a.C), provável criador do cálculo integral, foi criado com o objetivo de poder comparar grandezas irracionais. Sua formulação original não pode ser considerada rigorosa para os padrões atuais, mas deu ensejo, por exemplo, à axiomatização dos números reais, bem como a posterior construção deste conjunto através dos cortes de Richard Dedekind (1912).

AXIOMA DE EUDOXO:

Sejam α e β dois números positivos quaisquer, então existe um número inteiro positivo n tal que $n\beta > \alpha$.

DEMONSTRAÇÃO:

Temos $n\beta > \alpha$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$. Da Tricotomia vale uma das condições:

$\alpha = \beta \rightarrow$ Escolha $n > 1 \Rightarrow n\beta > \beta = \alpha$. Logo $n\beta > \alpha$;

$\alpha > \beta \rightarrow$ Em algum momento vai existir um n tal que $n\beta > \alpha$, pois $\beta + \beta + \dots \Rightarrow n\beta > \alpha$.

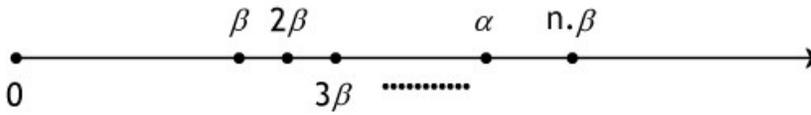


Figura 17: Semi-reta auxiliar na ideia de $n\beta > \alpha$

$\alpha < \beta \rightarrow$ Escolha $n = 1$.

MÉTODO DA EXAUSTÃO OU PRINCÍPIO DE EUDOXO:

Sejam $M_0, M_1, M_2, M_3, \dots$ números positivos tais que $M_1 < \frac{1}{2}M_0, M_2 < \frac{1}{2}M_1, M_3 < \frac{1}{2}M_2, \dots$, seja $\varepsilon > 0$, então existe um número inteiro positivo N tal que $M_N < \varepsilon$.

DEMONSTRAÇÃO:

Escolha $\varepsilon > 0$ e $M_0 > 0$. Do Axioma de Eudoxo $\exists N$ tal que $N\varepsilon > M_0$. Por outro lado $(N+1)\varepsilon > N\varepsilon > M_0$. Portanto $(N+1)\varepsilon > M_0$. Sendo assim, temos:

$$2N\varepsilon = N\varepsilon + N\varepsilon \geq N\varepsilon + \varepsilon > M_0 \Rightarrow 2N\varepsilon > M_0 \Rightarrow N\varepsilon > \frac{1}{2}M_0 > M_1.$$

Para $N=1$, $\varepsilon > M_1$ e está demonstrado. Agora é preciso demonstrar se $N \geq 2$. Como $N\varepsilon > M_1$, temos:

$$2(N-1)\varepsilon = 2N\varepsilon - 2\varepsilon = N\varepsilon + N\varepsilon - 2\varepsilon = N\varepsilon + \varepsilon(N-2).$$

Como $N \geq 2$, temos:

$$\text{Para } N=2 \Rightarrow N\varepsilon + \varepsilon(N-2) = N\varepsilon \text{ e}$$

$$\text{Para } N > 2 \Rightarrow N\varepsilon + \varepsilon(N-2) > N\varepsilon.$$

$$\text{Logo, } N\varepsilon + \varepsilon(N-2) \geq N\varepsilon > M_1 \Rightarrow 2(N-1)\varepsilon > M_1 \Rightarrow (N-1)\varepsilon > \frac{1}{2}M_1 > M_2.$$

Para $N=2$, $\varepsilon > M_2$ está demonstrado. Agora vamos a $N \geq 3$. Como $(N-1)\varepsilon > M_2$, temos:

$$2(N-2)\varepsilon = 2N\varepsilon - 4\varepsilon = N\varepsilon + N\varepsilon - 3\varepsilon - \varepsilon = \varepsilon(N-1) + \varepsilon(N-3).$$

Observe que para $N \geq 3$, $\varepsilon(N-3) \geq 0$. Por outro lado $\varepsilon(N-1) > M_2$. Logo,

$$2(N-2)\varepsilon \geq \varepsilon(N-1) > M_2 \Rightarrow (N-2)\varepsilon > \frac{1}{2}M_2 > M_3.$$

Para $N=3$, $\varepsilon > M_3$ e está demonstrado. Agora passamos a $N \geq 4$. Como $(N-2)\varepsilon > M_3$, temos:

$$2(N-3)\varepsilon = 2N\varepsilon - 6\varepsilon = N\varepsilon + N\varepsilon - 4\varepsilon - 2\varepsilon = \varepsilon(N-4) + \varepsilon(N-2).$$

Observe que para $N \geq 4$, $\varepsilon(N-4) \geq 0$. Por outro lado $\varepsilon(N-2) > M_3$. Logo,
 $2(N-3)\varepsilon \geq \varepsilon(N-2) > M_3 \Rightarrow (N-3)\varepsilon > \frac{1}{2}M_3 > M_4$.

Para $N = 4$, $\varepsilon > M_4$ e está demonstrado. Se continuar o raciocínio chega-se a qualquer inteiro positivo N que se queira, ou seja:

$$(N - (N - 1))\varepsilon > M_N, \text{ ou } \varepsilon > M_N.$$

Para finalizar este tópico, salientamos que, usando o fato de que o volume de um prisma qualquer é igual à área de sua base multiplicada pela sua altura, o Método da Exaustão nos permite mostrar que o volume de uma pirâmide qualquer é igual à terça parte do produto da área de sua base pela sua altura. Usando o fato de que o volume de um prisma qualquer é igual à área de sua base multiplicada pela altura, o Método da Exaustão nos permite obter o mesmo resultado para o cilindro. De modo análogo, podemos mostrar que o volume de um cone circular qualquer é igual à terça parte do produto da área de sua base pela altura. Além disso, os antigos sabiam da existência da constante π como razão entre a área de um disco qualquer e o quadrado de seu raio. A princípio, os matemáticos só tinham justificativas heurísticas para isso, mas, com o *Método da Exaustão*, puderam construir demonstrações.

AULA 4

A matemática produzida no oriente

Olá aluno(a)!

Diferentemente da matemática grega, outros povos se destacaram por produzir uma matemática essencialmente ligada às necessidades do dia-a-dia. Dentre alguns povos que proporcionaram alguma contribuição, os chineses merecem lugar de destaque. Será a sua matemática o objeto desta nossa lição.

Objetivo

- Conhecer a história da Matemática desenvolvida no continente oriental

TÓPICO 1

A matemática produzida pelos chineses

OBJETIVO

- Apresentar as construções especiais que envolvem pirâmides desenvolvidas pelos chineses, egípcios e babilônicos

Discutiremos agora um pouco da matemática chinesa. Sublinhamos que a abordagem será breve e o enfoque será dado aos métodos matemáticos, mesmo que, em determinados casos, como nos alerta Martzloff (1987), o objetivo de determinados métodos não tenha sido esclarecido completamente.

Para qualquer pessoa escrever sobre a história de uma ciência, as formas de raciocínio constituem a essência das questões de ordem da suprema importância. Contraditoriamente, a matemática chinesa contraria tais preceitos ao insistir na apresentação de resultados, e a ideia inicial, a *raison d'être*, permanece pouco esclarecida (MARTZLOFF, 2006, p. 69).

Segundo Gaspar (2003, p. 181), o comentarista do manuscrito chinês, Liu Hui, utiliza quatro sólidos elementares chamados de: *lifang*, *quiandu*, *yangma* e *o bienuam*. Para se obter o *quiandu*, interceptamos o *lifang* com um plano que contém a diagonal dividindo o sólido em duas pirâmides congruentes (Figura 1). Repare que $1 \text{ lifang} = 2 \text{ quiandu}$.

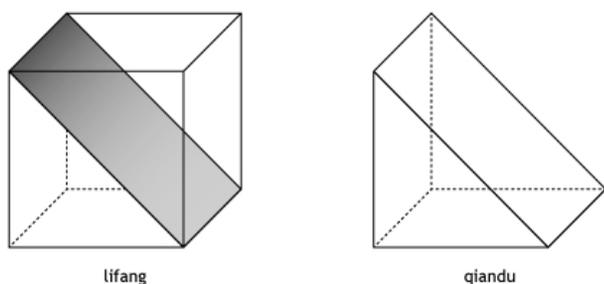


Figura 1: Representação da construção inicial (GASPAR, 2003, p. 181)

Em seguida, ao interceptar o prisma *qiandu* com um plano determinado pelo diagonal da face lateral e da face não perpendicular à base do *qiandu*, obteremos a pirâmide *yangma* e a *bienaum* (Figura 2).

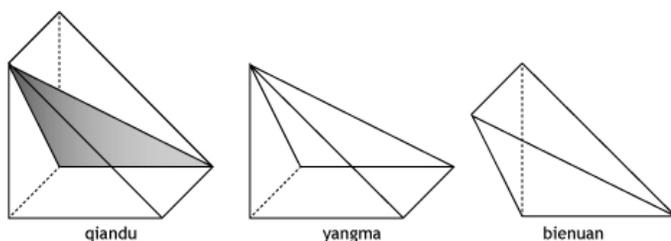


Figura 2: Prisma *qiandu* (GASPAR, 2003, p. 182)

Repare agora que $1\text{qiandu} = 1\text{yangma} + 1\text{bienaum}$. Finalmente, se interceptarmos a pirâmide *yangma* com um plano que contém a diagonal da base e o vértice que não pertence à base, obteremos a pirâmide *yangma* e a *bienaum* (Figura 3).

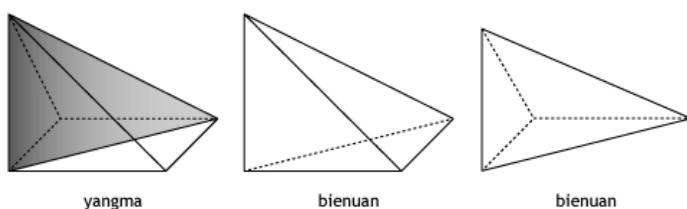


Figura 3: Decomposição da pirâmide segundo Gaspar (2003, p. 182)

Concluimos, assim, a relação $1\text{yangma} = 2\text{bienaum}$. Gaspar (2003) explica a importância de se adotar os nomes dos sólidos segundo os textos de história da matemática chinesa consultados. Agora, denotemos por V_{qiandu} ; V_{yangma} e V_{bienaum} os volumes do *qiandu*, da pirâmide *yangma* e da pirâmide *bienaum*.

Sabemos que $V_{\text{quiandu}} = \frac{1}{2}ab \cdot h$ e vale as relações $V_{\text{quiandu}} = V_{\text{yangma}} + V_{\text{bienaum}}$,
 $V_{\text{yangma}} = 2 \cdot V_{\text{bienaum}}$. Segue que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}ab \cdot h &= V_{\text{quiandu}} = V_{\text{yangma}} + V_{\text{bienaum}} = V_{\text{yangma}} + \frac{1}{2}V_{\text{yangma}} \\ &= \frac{3}{2}V_{\text{yangma}} \therefore V_{\text{yangma}} = \frac{1}{3}ab \cdot h \end{aligned}$$

Por outro lado, o volume da bienaum pode ser calculado por
 $\frac{1}{3}ab \cdot h = V_{\text{yangma}} = 2 \cdot V_{\text{bienaum}} \leftrightarrow V_{\text{bienaum}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}ab \cdot h = \frac{(\text{área da base}) \cdot h}{3}$.

No cálculo do volume da pirâmide yangma, Liu Hui, não satisfeito com as manipulações algébricas, também usa a ideia de passagem ao limite e o método da exaustão (GASPAR, 2003). O procedimento de Liu Hui pode ser descrito do seguinte modo (Figura 4): interceptando a pirâmide com um plano paralelo à base e três planos perpendiculares à base, passando pelos pontos médios das arestas, decomparamos a pirâmide dada em um paralelepípedo, duas pirâmides semelhantes e dois *quiandu*.

Se V é o volume da pirâmide dada, temos: $V = V_{\text{paralelepipedo}} + 2 \cdot V_{\text{quiandu}} + 2 \cdot V_1$,
 onde $V_{\text{paralelepipedo}}$ é o volume do paralelepípedo de arestas $\frac{a}{2}; \frac{b}{2}; \frac{h}{2}$ e V_{quiandu} o volume do quiandu de base o retângulo de lado $\frac{a}{2}$ e $\frac{b}{2}$ e altura $\frac{h}{2}$. Portanto, temos: $V_{\text{paralelepipedo}} = \frac{abh}{2^3}$.

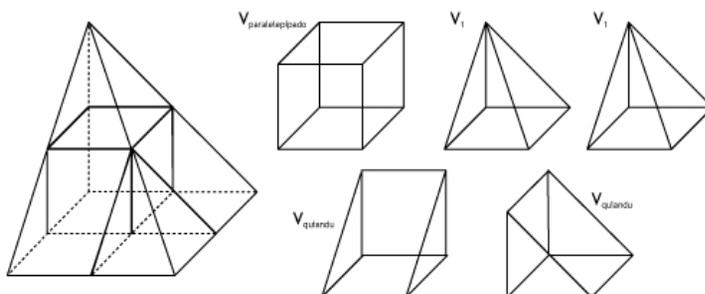


Figura 4: Decomposição da pirâmide (GASPAR, 2003, p. 183)

Assim, a partir de $V = V_{\text{paralelepipedo}} + 2 \cdot V_{\text{quiandu}} + 2 \cdot V_1$, obtemos:

$$\begin{aligned} V &= V_{\text{paralelepipedo}} + 2 \cdot V_{\text{quiandu}} + 2 \cdot V_1 = V_{\text{paralelepipedo}} + V_{\text{paralelepipedo}} + 2 \cdot V_1 \\ &= 2 \cdot V_{\text{paralelepipedo}} + 2 \cdot V_1 = \\ &= 2 \cdot \frac{abh}{2^3} + 2 \cdot V_1 = \frac{abh}{2^2} + 2 \cdot V_1 \end{aligned}$$

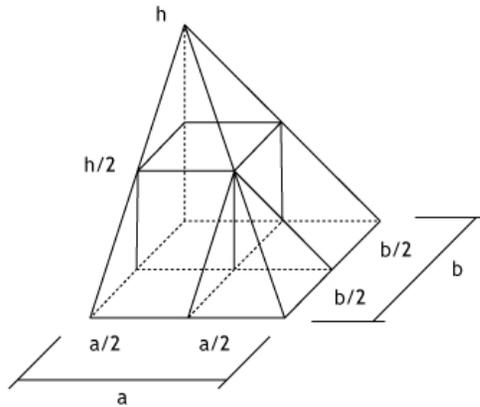


Figura 5: Método chinês (GASPAR, 2003)

Repetimos o mesmo processo para a pirâmide de volume V_1 e obtemos as relações:

$$\begin{aligned} V_1 &= V_{\text{paralelepipedo}} + 2V_{\text{quiandu}} + 2 \cdot V_2 = V_{\text{paralelepipedo}} + V_{\text{paralelepipedo}} + 2 \cdot V_2 \\ &= 2 \cdot V_{\text{paralelepipedo}} + 2 \cdot V_2 = \\ &= 2 \frac{abh}{(2^2)^3} + 2 \cdot V_2 \therefore V_1 = 2 \frac{abh}{(2^2)^3} + 2 \cdot V_2 . \end{aligned}$$

Segue que:

$$\begin{aligned} V &= \frac{abh}{2^2} + 2 \cdot V_1 = \frac{abh}{2^2} + 2 \cdot \left(2 \frac{abh}{(2^2)^3} + 2 \cdot V_2 \right) = \frac{abh}{2^2} + 2^2 \frac{abh}{(2^2)^3} + 2^2 \cdot V_2 = \\ &= \frac{abh}{2^2} + \frac{abh}{(2^2)^2} + 2^2 \cdot V_2 . \text{ De modo semelhante, obteremos } V_2 = \end{aligned}$$

Assim, repetindo processo um número de n vezes, temos:

$$\begin{aligned} V &= \frac{abh}{(2^2)^1} + \frac{abh}{(2^2)^2} + \frac{abh}{(2^2)^3} + \frac{abh}{(2^2)^4} + \dots + \frac{abh}{(2^2)^n} + 2^n \cdot V_n \\ &= \frac{abh}{(2^2)} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{(2^2)^2} + \dots + \frac{1}{(2^2)^{n-1}} \right) + 2^n \cdot V_n \end{aligned}$$

onde V_n é o volume do yangma de dimensões $\frac{a}{2^n}; \frac{b}{2^n}; \frac{h}{2^n}$. Repare que, se utilizamos métodos de passagem ao limite, fazendo $n \rightarrow +\infty$, obteremos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (V_n) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{abh}{(2^2)} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{(2^2)^2} + \dots + \frac{1}{(2^2)^{n-1}} \right) + 2^n \cdot V_n .$$

Neste cálculo, o comportamento do produto $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n \cdot V_n$ é omitido por Gaspar (2003, p. 185), uma vez que teremos também $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty$. Assim, desprezando este termo, escrevemos:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{abh}{(2^2)^n} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{(2^2)^2} + \dots + \frac{1}{(2^2)^{n-1}} \right) = \frac{abh}{(2^2)^n} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2^2}} \right) = \frac{abh}{(2^2)^n} \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{abh}{3}$$

Gaspar (2003, p. 185) lembra que:

as pirâmides são consideradas uma prova visual da capacidade matemática dos egípcios. Eles construíram numerosas pirâmides como o lugar do sepultamento de faraós e é de se estranhar que não existe nenhum documento explícito sobre o procedimento do cálculo do seu volume.

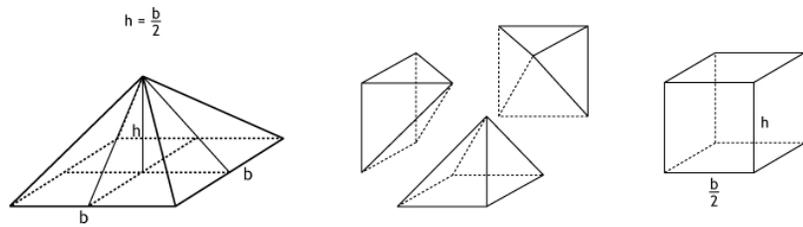


Figura 6: Pirâmides congruentes (GASPAR, 2003, p.185)

A partir da Figura 7 (abaixo), inferimos que:

$$V_{\text{cubo}} = \frac{3}{4} V_{\text{piramide}} \cdot \left(\frac{b}{2} \right)^3 = \frac{3}{4} V_{\text{piramide}} \leftrightarrow V_{\text{piramide}} = \frac{4}{3} \frac{b^3}{8} = \frac{1}{3} b^2 \frac{b}{2} = \frac{b^2 \cdot h}{3},$$

onde sua altura é dada por $h = \frac{b}{2}$. Outro método de se construir 6 pirâmides congruentes de base quadrada de lado b , e altura $h = \frac{b}{2}$ é juntá-las para formar um cubo conforme mostra a Figura 7.

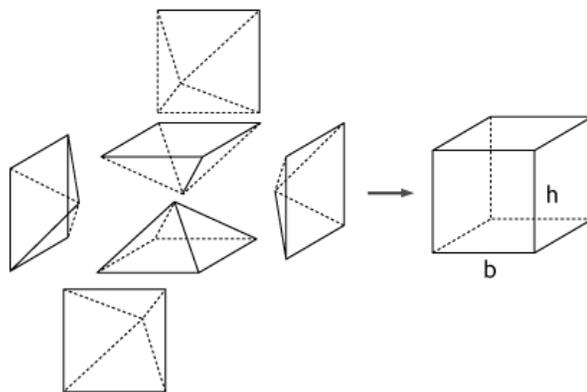


Figura 7: Decomposição da pirâmide (GASPAR, 2003)

Neste caso temos:

$$V_{\text{cubo}} = 6 \cdot V_{\text{piramide}} \leftrightarrow b^2 h = 6 \cdot V_{\text{piramide}} \rightarrow V_{\text{piramide}} = \frac{1}{6} b^2 \frac{h_{\text{cubo}}}{2} = \frac{b^2 h_{\text{piramide}}}{3}$$

Gaspar (2003, p. 191) lembra que “num tablete babilônico, encontramos o cálculo do volume de uma pirâmide, do tipo $V = \frac{abh}{3}$. Aparentemente eles estavam familiarizados com esta fórmula”. De fato, em alguns textos, encontramos $V = \frac{hb}{3} \left(a + \frac{c}{2} \right)$, que representa o volume reproduzido na Figura 8.

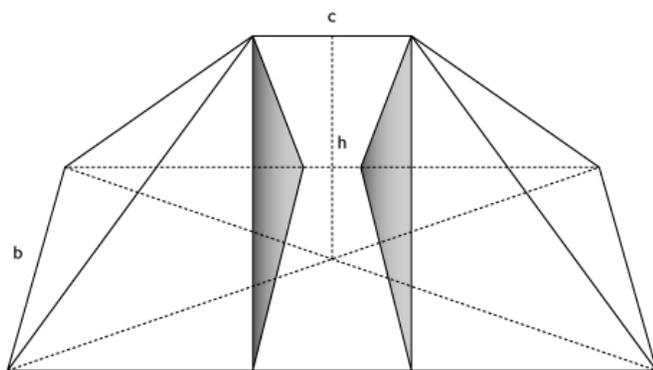


Figura 8: Decomposição da pirâmide (GASPAR, 2003, p. 191)

Apesar de não encontramos no texto como chegaram a tal resultado, a decomposição pode ser deduzida usando-se o método comum na antiguidade de decompor em outros sólidos de volumes conhecidos (Figura 9). “Podemos decompor o sólido em duas pirâmides de bases retangulares de lados a e b e altura h “(GASPAR, 2003, p. 192).

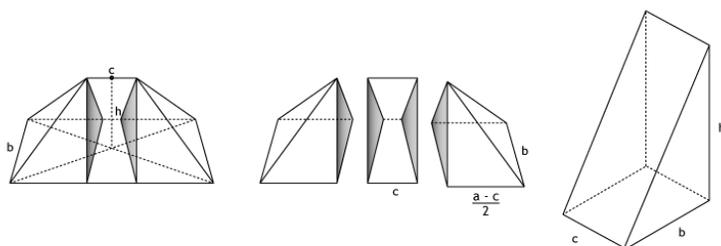


Figura 9: Decomposição do sólido (GASPAR, 2003, p. 192)

O volume do sólido obtido é:

$$V = \frac{bch}{2} + \frac{2h}{3} \left(\frac{(a-c)b}{2} \right) = \frac{bch}{2} + \frac{abh}{3} - \frac{bch}{3} = \frac{bch}{6} + \frac{abh}{3} = \frac{bh}{3} \left(a + \frac{c}{2} \right)$$

Encontramos um método usado por Liu Hui para a fórmula chinesa da barraca de base quadrada, que era dada por $V = \frac{1}{3}(a^2 + ab + b^2)h$ (Figura 10.I). O método reside em separar o sólido em: 1 lifang, 4 quiandu e 4 yangma (Figura 10.II).

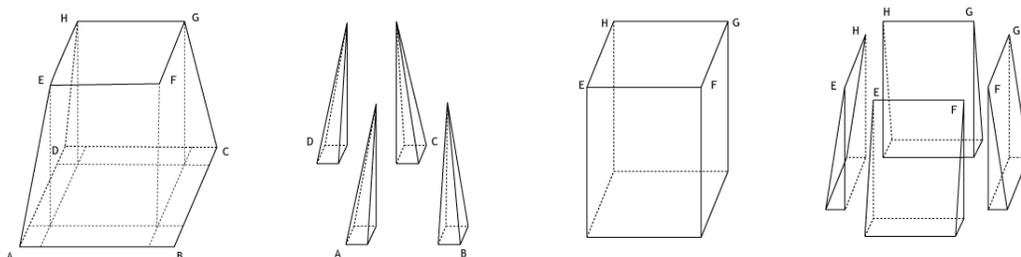


Figura 10: Método descrito por Gaspar (2003)

Gaspar (2003, p. 198) orienta que devemos inverter alguns dos objetos para obter a figura representada a seguir.

Chega-se a:

$$V = abh + 4 \frac{1}{3} \left(\frac{a-b}{2} \right)^2 \cdot h = abh + \frac{1}{3} (a-b)^2 \cdot h = abh + \frac{1}{3} (a^2 - 2ab + b^2) \cdot h .$$

Finalmente, escrevemos: $V = \frac{1}{3} (a^2 + ab + b^2) h .$

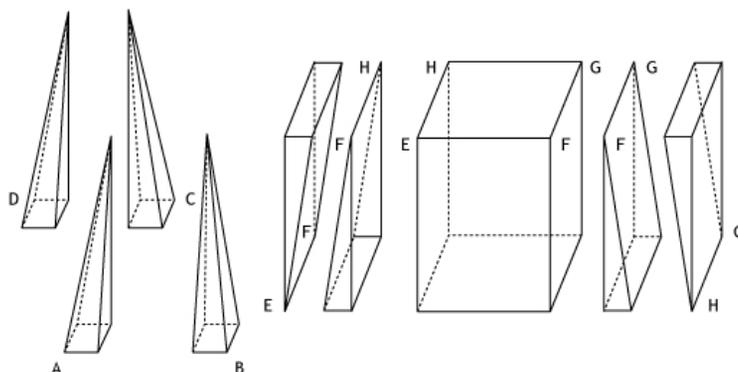


Figura 11: Decomposição da pirâmide (GASPAR, 2003, p. 198)

Agora, em vez da posição descrita na Figura 11, vamos considerar a posição descrita em Figura 12. Usando agora esta outra argumentação, obteremos:

$$V = \frac{4}{3} \left(\frac{a-b}{2} \right)^2 \cdot h + \left[\left(\frac{b+a}{2} \right)^2 - \left(\frac{a-b}{2} \right)^2 \right] \cdot h = \left[\left(\frac{b+a}{2} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{a-b}{2} \right)^2 \right] \cdot h ,$$

“que é a fórmula babilônica para o volume do tronco da pirâmide” (GASPAR, 2003, p. 200).

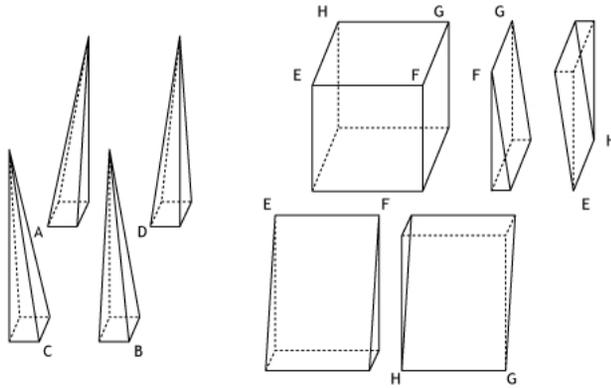


Figura 12: Método descrito por Gaspar (2003, p.199)

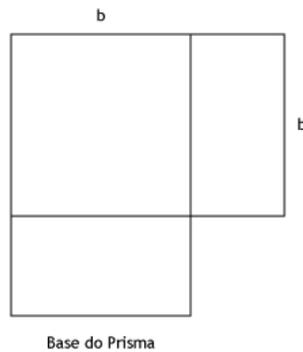


Figura 13: Base do prisma (GASPAR, 2003, p. 199)

Para calcular o volume de vários sólidos, Liu Hui utiliza métodos semelhantes aos que acabamos de descrever. Por exemplo, o volume do Chu Méng, conforme representado na Figura 14. Neste caso teremos:

$$\begin{aligned}
 V_{\text{ChuMeng}} &= \frac{4h}{3} \left(\frac{a-c}{2} \cdot \frac{b}{2} \right) + c \cdot \frac{b}{2} \cdot h = \frac{h}{3} [ab - cb] + \frac{cb}{2} \cdot h \\
 &= \frac{bh}{6} [2a - 2c + 3c] = \frac{bh}{6} [2a + c]
 \end{aligned}$$

a qual coincide com a fórmula babilônica.

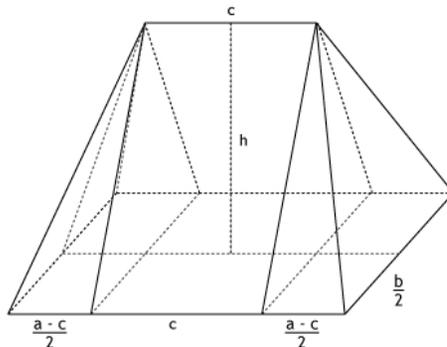


Figura 14: Volume do Chu Méng (GASPAR, 2003)

Na figura 15 que seguem, vemos outros sólidos estudados pelos chineses. O primeiro chamado de Xian Chu pode ser decomposto em dois ou quatro tetraedros com um prisma entre eles. Segundo Gaspar (2003) o Fang Zhui é calculado como o volume de quatro pirâmides. No ultimo caso, do Chu Thong, como o volume de dois cubos, oito prismas e quatro pirâmides.

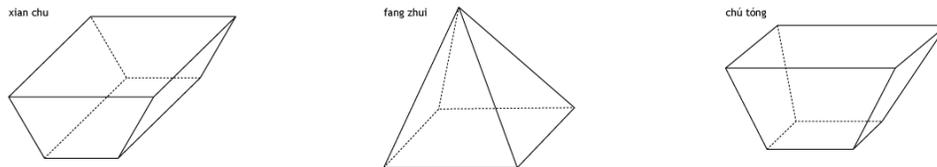
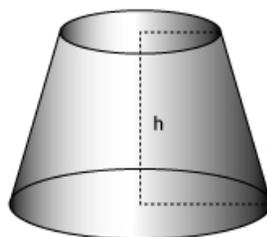


Figura 15: Objetos analisados pelos chineses (GASPAR, 2003, p. 200)

Entre as fórmulas apresentadas para calcular volumes de sólidos na quinta seção do livro Jiuzhang Suansu (China), encontramos o cálculo do volume de um tronco de cone. Tomando a grosseira aproximação de $\pi = 3$, é escrito:

$$V = \frac{1}{36} [2\pi r_1 \cdot 2\pi r_2 + 4 \cdot \pi^2 r_1^2 + 4 \cdot \pi^2 r_2^2]$$

$$= \frac{\pi^2 h}{36} [4r_1 r_2 + 4r_1^2 + 4r_2^2] = \frac{\pi h}{3} [r_1 r_2 + r_1^2 + r_2^2]$$



$$V = \frac{1}{36} [C_1 C_2 + C_1^2 + C_2^2] h$$

“ C_1 ” é o comprimento da circunferência superior
 “ C_2 ” é o comprimento da circunferência inferior
 “ h ” é a altura do tronco de cone

Figura 16: Volume do tronco (GASPAR, 2003, p. 221)

Em relação a esta argumentação, Gaspar (2003, p. 221) destaca que:

A partir do conhecimento da fórmula chinesa para o cálculo do volume do tronco de cone e do fato de que eles usavam para π o valor 3, chegar a uma fórmula que envolva o número π permite encontrar um candidato para o cálculo do volume do tronco de cone, e demonstrá-lo usando o método dedutivo.

Mais adiante, Gaspar destaca que Liu Hui desenvolve um comentário acerca do Jiuzhang Suanshu relativo ao cálculo do volume do tronco de cone e compara o volume de um pavilhão circular com um pavilhão quadrado, como vemos na figura a seguir.

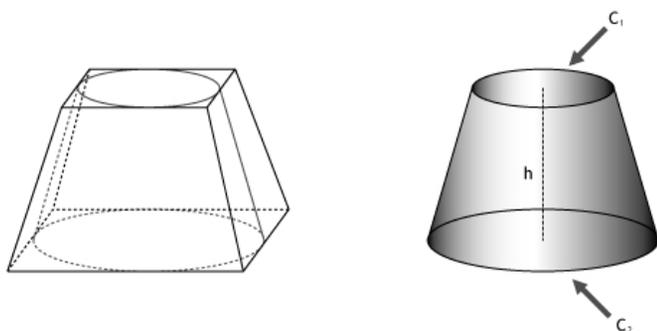


Figura 17: Estudo do cilindro feito por Gaspar (2003)

Para realizar tal tarefa, Gaspar (2003, p. 222) explica que Liu Hui usa o fato de que “a razão entre o volume dos dois sólidos é igual a razão entre a área do círculo e a do quadrado circunscrito, que ele usa como sendo $\frac{3}{4}$ ”. Assim, temos:

$$\frac{\text{pavilhão circular}}{\text{pavilhão quadrado}} = \frac{\text{área do círculo}}{\text{área do quadrado circunscrito}} = \frac{3}{4}.$$

Na sequência, o autor discute o método chinês para a determinação do volume de uma esfera. Antes, porém, Gaspar indica que o teorema relacionado a tal propriedade pode ser encontrado no Livro de Euclides (Livro XII). Gaspar (2003, p. 223) destaca que: “considero que o método utilizado por Zu Geng para calcular o volume da esfera é um dos exemplos significativos da História da Matemática que deve ser incluído no estudo do Princípio de Cavalieri como no da esfera.”

O cálculo do volume da esfera possui uma história longa e rica na China. O *Jiuzhang Suanchu*, por exemplo, traz fórmulas para o cálculo do volume de vários corpos e, entre estas, a fórmula $V = \frac{9}{16}D^3$, para uma esfera de diâmetro D . Esta fórmula é aplicada na solução de dois problemas. Duas justificativas aparecem para tal formulação: uma de natureza empírica e outra de natureza heurística.

Com respeito à argumentação empírica, Gaspar (2003, p. 224) destaca que os antigos raciocinavam em termos do seguinte quociente: $\frac{V_{\text{esfera}}}{V_{\text{cubo}}} = \frac{9}{16} \Rightarrow \frac{V_{\text{esfera}}}{D^3} = \frac{9}{16} \Rightarrow V_{\text{esfera}} = \frac{9}{16} \cdot D^3$, onde D é o diâmetro de um cubo. No que se refere à argumentação heurística, Gaspar (2003, p. 224) comenta ainda que:

Um círculo ocupa $\frac{3}{4}$ da área do quadrado que o circunscribe. Passando do círculo para o cilindro circular reto de altura igual ao diâmetro do círculo e do quadrado para o cubo de aresta igual ao lado do quadrado, temos que o volume do cilindro ocupa $\frac{3}{4}$ do volume do cubo.

Na sequência, expressando em notações modernas, teremos:
 $A_{\text{circulo}} = \frac{3}{4}A_{\text{quadrado}} \Rightarrow V_{\text{cilindro}} = \frac{3}{4}V_{\text{cubo}}$. Mas o volume da esfera é igual a $\frac{3}{4}$ do volume do cilindro que a circunscreve, assim: $V_{\text{esfera}} = \frac{3}{4}[V_{\text{cilindro}}] = \frac{3}{4}\left[\frac{3}{4}V_{\text{cubo}}\right] = \frac{9}{16}V_{\text{cubo}}$.
 Mais adiante, Gaspar (2003, p. 225) sublinha: “apesar dos comentários de Liu Hui com relação à necessidade de verificação da razão $\frac{9}{16}$ entre o volume da esfera e do cubo de aresta igual ao diâmetro da esfera, este valor constante permanece invariante por diferentes dinastias”.

Mas vejamos outra argumentação para o mesmo resultado, devido ao matemático chinês Zu Geng. Gaspar (2003, p. 227) declara que seu método segue os seguintes passos:

- 1ª) Inscreva a esfera de raio r em um cubo;
- 2ª) Inscreva no cubo um par de cilindros cujos eixos são perpendiculares entre si e paralelos à base do cubo;
- 3ª) Estes cilindros circunscrevem a esfera;
- 4ª) A superfície *mou he fang gai* [dupla abóbada], interseção dos dois cilindros, também circunscreve a esfera. Qualquer plano horizontal intercepta a dupla abóbada em um quadrado e a esfera em um círculo inscrito neste quadrado.

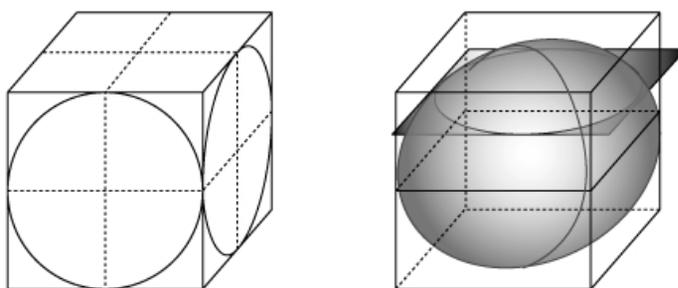


Figura 18: O método de Zu Geng descrito por Gaspar (2003, p. 227)

Dividindo o cubo em 8 partes iguais, cada um dos pequenos cubos da divisão fica decomposto em um oitavo da dupla abóbada mais três peças. Na sequência, consideramos um plano que intercepta o cubo a uma altura h da base.

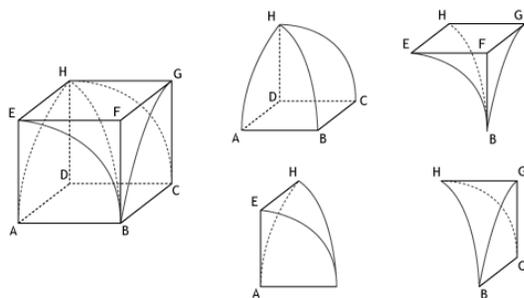


Figura 19: O método de Zu Geng descrito por Gaspar (2003, p. 227)

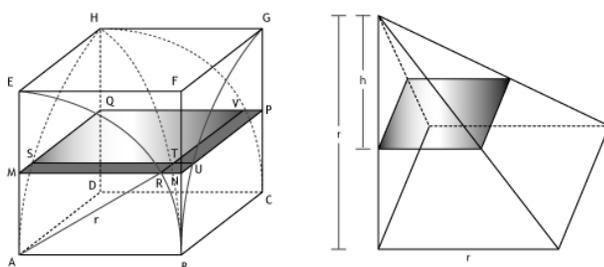


Figura 20: O método de Zu Geng descrito por Gaspar (2003, p. 227)

Considere $\overline{MR} = \overline{ST} = x$. Deste modo, teremos:

$$\text{Área}(\text{MNPQ}) = \text{Área}(\text{STVQ}) + 2 \cdot \text{Área}(\text{MRTS}) + \text{Área}(\text{RNUT})$$

Assim, escrevemos que:

$$\begin{aligned} \text{Área}(\text{STUV}) &= x^2 \cdot \text{Área}(\text{MNPQ}) + r^2 \cdot 2 \cdot \text{Área}(\text{MRTS}) + \text{Área}(\text{RNUT}) \\ &= r^2 - x^2 = h^2 \end{aligned}$$

Por outro lado, a área da interseção da pirâmide com um plano paralelo à base e a uma distância h do vértice é: h^2 . Assim, temos:

$$V_{3\text{peças}} = V_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{3}r^3$$

$$V_{\text{dupla abóbada}} = \frac{16}{3}r^3$$

$$V_{\frac{1}{8}\text{ dupla abóbada}} = V_{\frac{1}{8}\text{ cubo}} - V_{3\text{peças}} = r^3 - \frac{1}{3}r^3 = \frac{2}{3}r^3$$

$$V_{\text{esfera}} = \frac{\pi}{4} V_{\text{dupla abóbada}} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Figura 21: O método de Zu Geng descrito por Gaspar (2003, p. 228)

Gaspar (2003, p. 229) conclui a seção mencionando que:

Considero que, em um curso de formação de professores, conhecer a gênese e o desenvolvimento histórico das ideias, noções e métodos utilizados por diversas culturas para resolver os problemas que emergiram das necessidades desta cultura, daria a eles condições para trabalharem essas ideias, noções e métodos no ensino fundamental e médio. De fato, ao propiciar aos professores-alunos a oportunidade de se familiarizarem com um dos caminhos históricos que levaram os antigos chineses da descoberta empírica de uma fórmula para o cálculo do volume da esfera até à demonstração matemática de uma outra fórmula, alguns séculos depois da descoberta da primeira, estaríamos permitindo que estes acompanhem um processo da arte da descoberta e sintam-se encorajados a desenvolverem seus próprios processos de descobrir resultados e métodos para resolver problemas. Seria interessante que o professor-aluno tivesse a oportunidade, em sua formação, de comparar o método utilizado pelos chineses com os utilizados por Arquimedes e outros e, acompanhar o desenvolvimento histórico deste método através da análise dos exemplos significativos que aparecem no decorrer da história.

Para concluir esta parte em que apresentamos informações interessantes sobre a matemática chinesa, destacamos o matemático Zhu Sijie, pertencente a uma dinastia Mongol. Katz (1998, p. 209) apresenta o seguinte diagrama e fornece as seguintes

relações descritas numa moderna notação: $\begin{cases} d \cdot a \cdot b = 24 \\ a + c = 9 \end{cases}$. O matemático Zhu Sijie obtém $\begin{cases} a^2 + b^2 = c^2 \\ d = b - (c - a) \end{cases}$. Katz (1998) salienta que “infelizmente, como observamos

nos textos chineses, seu método de solução é brevemente comentado e no final, o autor apresenta de modo resumido a equação $b^5 - 9b^4 - 81b^3 + 729b - 3888 = 0$ ”. Verifique!

Em seu método, Zhu Sijie não esclarece como obtém uma solução $b = 3$. Katz (1998, p. 210) acrescenta que:

Os matemáticos chineses eram habilidosos na solução de vários problemas algébricos. Muitos métodos provavelmente eram originados a partir de considerações geométricas, porém, no final, explicitados apenas em termos de procedimentos algébricos. A partir destes textos observamos que aparentemente a matemática escolar chinesa se voltava à solução de problemas da própria burocracia chinesa.

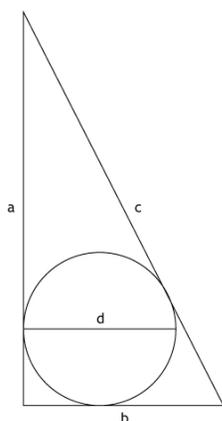


Figura 22: Problema atacado por Zhu Sijie conforme Katz (1988)

Para concluir este tópico, sublinhamos as considerações de Martzloff (1987, p. 291) quando explica que:

Seria interessante comparar a demonstração devida à Arquimedes e a prova fornecida por Zu Xuang com respeito ao método para a determinação de volume das esferas. Todavia, apenas um antigo e incompleto manuscrito permanece que foi divulgado pela primeira vez em 1899 pelo paleógrafo grego Papadopoulos Cerameus que nos reporta sobre manuscritos gregos. Infelizmente, partes importantes do manuscrito não foram resgatados.

Observamos, a partir do depoimento de autores como Gaspar (2003), Martzloff (1987), os traços semelhantes da matemática produzida por povos de origem distinta e em tempos distintos no período histórico. O pitoresco, e que nos chama a atenção, é que as ideias matemáticas envolvidas são as mesmas, apesar de observarmos a aplicação de modos distintos de resolução. Na próxima seção, voltamos a discutir a matemática grega.

TÓPICO 2

Construções e formulações lógico-axiomáticas gregas

OBJETIVO

- Apresentar alguns resultados matemáticos devidos à a Euclides

Neste tópico, nos deteremos em algumas construções lógico-axiomáticas devidas a **Euclides de Alexandria**, que foi professor, matemático platônico e escritor, possivelmente grego, muitas vezes referido como o “Pai da Geometria”.

TEOREMA EUCLIDES:

Qualquer divisor comum de dois números a e b divide também o seu maior divisor.

DEMONSTRAÇÃO:

Para verificar esta demonstração, Ore (1948, p. 41) introduz o procedimento conhecido por algoritmo euclidiano, *que ocorre no sétimo livro dos Elementos (300 antes de Cristo)*. *Mas certamente tinha uma origem anterior*. Dados dois inteiros $a, b \in \mathbb{Z}^+$ com $a \geq b$. Na primeira divisão, obteremos: $a = q_1 \cdot b + r_1$ com $0 \leq r_1 < b$. O próximo passo é realizar a divisão de b por r_1 , obtendo-se: $b = q_2 \cdot r_1 + r_2$ com $0 \leq r_2 < r_1$. Realizando mais um passo, teremos: $r_1 = q_3 \cdot r_2 + r_3$ com $0 \leq r_3 < r_2$. Mas agora, sublinhamos que, se continuarmos o mesmo processo, construiremos a seguinte seqüência decrescente de restos $b \geq r_1 \geq r_2 \geq r_3 \geq \dots \geq r_n \geq 0$. E é de se esperar que, em algum momento, deveremos obter que $r_{n+1} = 0$. Mas assim, construímos as seguintes relações:

$$\left\{ \begin{array}{l} a = q_1 \cdot b + r_1 \\ b = q_2 \cdot r_1 + r_2 \\ r_1 = q_3 \cdot r_2 + r_3 \\ r_2 = q_4 \cdot r_3 + r_4 \\ \dots \\ r_{n-2} = q_n \cdot r_{n-1} + r_n \\ r_{n-1} = q_{n+1} \cdot r_n \end{array} \right.$$

Assim, vimos a argumentação que nos fornece uma ideia para o algoritmo da divisão.

Vejamos agora a demonstração propriamente dita. Para tanto, consideremos um número $b \in \mathbb{N} - \{0\}$. Se $a \in \mathbb{N}$, então ou a é múltiplo de b ou está entre múltiplos consecutivos de b , isto é: $b \cdot q \leq a < b(q+1)$ (*). Isto significa que $(q+1)$ será o menor elemento de modo que $\Pi = \{n \in \mathbb{N} \text{ tal que } b \cdot n > a\}$. Assim, o conjunto $\Pi \neq \emptyset$, pois contém $(a+1)$, visto que $b \geq 1 \rightarrow a \cdot b \geq a \cdot 1 \rightarrow (a+1) \cdot b = a \cdot b + b \geq a \cdot 1 + b = a + b > a \therefore (a+1) \cdot b > a$.

Segue $(a+1) \in \Pi$. Por outro lado, vemos que $b \cdot q \leq a$ e, assim, existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $a = b \cdot q + r$.

Mostraremos agora que $r < b$. Se ocorresse o contrário, digamos:

$$a = b \cdot q + r \leftrightarrow r$$

$$= a - b \cdot q \geq b \leftrightarrow a - b \cdot q + (bq) \geq b + (bq) \leftrightarrow a + 0 \geq b + (bq) = b(1+q)$$

segue que $a \geq b(1+q)$, o que não é possível em virtude de (*). Deste modo, segue que $a = b \cdot q + r$, onde $r < b$.

Domingues (1991, p. 32) lembra que o que foi deduzido até o momento pode ser sintetizado do seguinte modo: Dados $a, b \in \mathbb{N}$, com $b \neq 0$, existem $q, r \in \mathbb{N}$ de modo que $a = b \cdot q + r$, onde $r < b$. Veremos agora uma questão de unicidade. Neste sentido, supor que ocorre $a = b \cdot q + r = b \cdot q_1 + r_1$, onde $r < b$ e $r_1 < b$. Admitamos que se pudesse ter a seguinte possibilidade $r_1 \neq r$, digamos, por exemplo, que $0 < r - r_1 < b$, uma vez que $r < b \leftrightarrow 0 < r - r_1 < b - r_1 < b$ (*).

Pode outro lado, observamos a seguinte igualdade:

$$b \cdot q + r = b \cdot q_1 + r_1 \leftrightarrow bq + (r - r_1) = b \cdot q_1$$

Mas isto implica que $b \overset{\text{divide}}{\mid} bq - b \cdot q_1 = (r - r_1)$. $\therefore b$ divide a expressão $(r - r_1)$.

Entretanto isto não pode ocorrer, uma vez que em (*) vimos que $0 < r - r_1 < b$. Assim, chegamos a uma contradição devido ao fato de havermos feito a suposição de que $r_1 \neq r$, logo, $r_1 = r$. Assim, teremos ainda $b \cdot q + r = b \cdot q_1 + r_1 \leftrightarrow b \cdot q = b \cdot q_1 \overset{b \neq 0}{\leftrightarrow} q = q_1$.

Uma extensão imediata deste teorema é a possibilidade de obter o M.D.C entre dois números. De fato, supor que $a = b \cdot q_1 + r_1$, onde $r_1 < b$, se ocorrer que $r_1 = 0 \therefore a = b \cdot q \rightarrow \text{mdc}(a, b) = b$. Por outro lado, se $0 \neq r_1 < b$, dividimos b por este resto,

obtendo: $b = r_1 \cdot q_2 + r_2$, onde $0 \leq r_2 < r_1$. De modo semelhante, caso $0 = r_2 < r_1$, encontramos de novo o nosso M.D.C. Caso contrário, teremos $0 < r_2 < r_1$. Assim, dividiremos r_1 por r_2 e teremos: $r_1 = r_2 \cdot q_3 + r_3$, onde $0 \leq r_3 < r_2$.

Burton (2006, p. 176) argumenta que se $b > r_1 > r_2 > r_3 > \dots > r_n \geq 0$, obtemos as seguintes equações:

$$\begin{aligned} a &= b \cdot q_1 + r_1 \\ b &= r_1 \cdot q_2 + r_2 \\ r_1 &= r_2 \cdot q_3 + r_3 \\ r_2 &= r_3 \cdot q_4 + r_4 \\ &\dots \\ &\dots \\ r_{n-3} &= r_{n-2} \cdot q_{n-1} + r_{n-1} \text{ onde } 0 < r_{n-1} < r_{n-2} \\ r_{n-2} &= r_{n-1} \cdot q_n + r_n \text{ onde } 0 < r_n < r_{n-1} \\ r_{n-1} &= r_n \cdot q_{n+1} + 0 \end{aligned}$$

A partir destas equações, encontraremos $r_n = r_{n-2} - q_n \cdot r_{n-1}$.

Com respeito às aplicações deste algoritmo, Ore (1948, p. 44) desenvolve várias propriedades relacionadas ao M.D.C. Vejamos os teoremas:

DEMONSTRAÇÃO:

Desde que a e b sejam relativamente primos entre si, Ore (1948, p. 44) escreve:

$$\begin{aligned} a &= q_1 \cdot b + r_1 \\ b &= r_1 \cdot q_2 + r_2 \\ &\dots \\ r_{n-2} &= q_n \cdot r_{n-1} + 1 \end{aligned}$$

Uma vez que o último resto obtido pelo algoritmo euclidiano $r_n = 1$. Na sequência, o autor multiplica todas as equações por c , obtendo:

$$\begin{aligned} a \cdot c &= q_1 \cdot b \cdot c + r_1 \cdot c \\ b \cdot c &= r_1 \cdot q_2 \cdot c + r_2 \cdot c \\ &\dots \\ r_{n-2} \cdot c &= q_n \cdot r_{n-1} \cdot c + c \end{aligned}$$

Agora, usando o fato de que $a \cdot c$ é divisível por um fator b , a partir de nossa hipótese, observando que $a \cdot c - q_1 \cdot b \cdot c = r_1 \cdot c$, concluímos que $r_1 \cdot c$ é divisível por b . Em seguida, o autor recorre à segunda equação $b \cdot c - r_1 \cdot c \cdot q_2 = r_2 \cdot c$ e concluímos que $r_2 \cdot c$. Prosseguindo o mesmo raciocínio, concluiremos que $r_n \cdot c = 1 \cdot c$ é divisível por b . Vejamos outra aplicação do mesmo algoritmo.

TEOREMA:

Com respeito ao máximo divisor entre dois números, temos a propriedade $M.D.C(m \cdot a, m \cdot b) = m \cdot M.D.C(a, b)$.

DEMONSTRAÇÃO:

Mais uma vez empregando o algoritmo euclidiano com respeito aos números a e b , escrevemos:

$$a = b \cdot q_1 + r_1$$

$$b = r_1 \cdot q_2 + r_2$$

$$r_1 = r_2 \cdot q_3 + r_3$$

$$r_2 = r_3 \cdot q_4 + r_4$$

....

...

$$r_{n-3} = r_{n-2} \cdot q_{n-1} + r_{n-1} \text{ onde } 0 < r_{n-1} < r_{n-2}$$

$$r_{n-2} = r_{n-1} \cdot q_n + r_n \text{ onde } 0 < r_n < r_{n-1}$$

$$r_{n-1} = r_n \cdot q_{n+1} + 0$$

Agora cada uma destas equações é multiplicada por m obtendo:

$$m \cdot a = m \cdot b \cdot q_1 + m \cdot r_1$$

$$m \cdot b = m \cdot r_1 \cdot q_2 + m \cdot r_2$$

$$m \cdot r_1 = m \cdot r_2 \cdot q_3 + m \cdot r_3$$

$$m \cdot r_2 = m \cdot r_3 \cdot q_4 + m \cdot r_4$$

....

...

$$m \cdot r_{n-2} = m \cdot r_{n-1} \cdot q_n + m \cdot r_n$$

$$m \cdot r_{n-1} = (m \cdot r_n) \cdot q_{n+1} + 0$$

Portanto, teremos de imediato o resultado.

Para concluir, vejamos outro resultado intrigante devido a Euclides, que trata da infinidade dos números primos. Burton (2006, p. 183) descreve que a demonstração é encontrada no Livro IX, proposição 20 dos Elementos. Burton descreve-a como ingênua e simples. De fato, Burton comenta que, empregando uma moderna notação, Euclides escreve a seguinte listagem de primos: $2, 3, 5, 7, 11, \dots$ em ordem crescente. Por outro lado, Euclides considerou o número $N = (2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot p) + 1$.

Burton argumenta que o número N é formado pelo produto de todos os primos de $2, \dots, p$. E considerando que $N = (2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot p) + 1 > 1$, podemos usar o teorema

Fundamental para afirmar que este número deverá ser divisível por algum primo q , onde $q > 1$. Entretanto, na listagem do produto, a partir das suposições de Euclides, em algum momento na expressão $(2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots p)$, o fator q deve comparecer, mas isto forçaria que q dividisse a seguinte combinação $N - (2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots p) = 1$. Assim, a fortiori, deveríamos ter $q = 1$, o que é uma contradição flagrante. E tal absurdo é devido ao fato de termos feito a suposição de que o conjunto dos primos fosse finito.

Burton (2006, p. 183) faz um comentário importante. Menciona que a prova de Euclides demonstra a existência de algum primo maior do que p , entretanto não garante a existência de qualquer primo anterior após o uso do primo p e da expressão construída $N = (2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots p) + 1$, empregada na argumentação que vimos há pouco. Por exemplo, quando aplica de modo particular a construção acima, vemos que $N = (2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots 13) + 1 = 30.031 = 59 \cdot 509$.

Aqui vemos que temos um primo $q = 59$ bem distante do primo fornecido $p = 13$. Mas um problema interessante apontado por Burton (2006, p. 183) é: como determinar se um inteiro particular é primo ou a composição de primos ou outros fatores e como encontrar um divisor não trivial?

Burton (2006) menciona que a abordagem mais aplicável para este problema seria o algoritmo das divisões sucessivas até que possamos encontrar um divisor. *Embora útil, na prática o método pode fornecer algumas dificuldades uma vez que exige vários cálculos* (BURTON, 2006, p. 183). Por outro lado, o autor sugere o seguinte: Se temos um inteiro $a > 1$ é não primo, o mesmo pode ser escrito por $a = b \cdot c$, onde $1 < b < a$ e $1 < c < a$. Mas sem perda de generalidade, vamos assumir que $b \leq c$, sem deixar de notar que $0 < b \leq c \therefore 0 < b^2 = b \cdot b \leq c \cdot b = a$. Assim, temos $0 < b \leq c \therefore b^2 \leq a \rightarrow 0 < b \leq \sqrt{a}$. Mas desde que $1 < b < a$, devemos considerar que existe pelo menos um fator primo que divide b e, deste modo, escrevemos: $p \leq b \leq \sqrt{a}$. Obtemos ainda que p divide a . Assim, se temos um inteiro positivo não primo, podemos garantir que existe um fator primo p que divide a , de modo que $p \leq \sqrt{a}$. Com respeito a este critério, enunciaremos o seguinte teorema:

TEOREMA:

Se $a > 1$ é um número composto, então há um número primo p tal que $p \mid a$ (p divide a) e $p \leq \sqrt{a}$.

Antes de discutir sua demonstração, vale observar que o critério discutido por Burton (2006) e demonstrado por Domingues (1991, p. 58) é chamado de “Crivo de

Erastótenes”, que é um algoritmo e um método simples e prático para encontrar números primos até um certo valor limite. Segundo a tradição, foi criado pelo matemático grego Eratóstenes (c. 285-194 a.C.), o terceiro bibliotecário-chefe da Biblioteca de Alexandria. Mas vejamos sua demonstração.

DEMONSTRAÇÃO:

Por hipótese, a pode ser decomposto da seguinte maneira $a = b \cdot c$, onde vamos supor que $2 \leq b \leq c < a$. O resto da demonstração pode ser observado na argumentação desenvolvida por Burton (2006) que discutimos há pouco.

Por outro lado, se $a > 1$ não é divisível por nenhum dos primos tais que $p \leq \sqrt{a}$, então tal número $a > 1$ deverá ser um número primo (*).

Vejamos agora um exemplo.

EXEMPLO:

O número 271 é primo?

Primeiro observamos que $16 \leq \sqrt{271} < 17$. Assim, segundo os critérios do Crivo de Eratóstenes, os primos que não superam 16 são: 2, 3, 5, 7, 11 e 13. Mas reparamos que nenhum deles divide 271. Logo, a partir da observação (*), tal número deve ser primo.

EXEMPLO:

O número 2093 é primo?

SOLUÇÃO:

Notamos que $45 \leq \sqrt{2093} < 46$. Assim, precisamos examinar todos os primos que satisfazem $p \leq \sqrt{2093}$. Por outro lado, podemos concluir que $299 = 13 \cdot 23$ e $2093 = 7 \cdot 299$. Passamos, então, a outro problema resolvido pelo método do Crivo: encontrar $17 \leq \sqrt{299} < 18$. Temos, desse modo 2, 3, 5, 7, 11, 13 e 17. Assim, obtemos que, conclusão $2093 = 7 \cdot 13 \cdot 23$.

Por meio desse método, podemos identificar todos os primos, por exemplo, que não excedem o valor $n = 100$. Por exemplo, Burton (2006, p. 188) diz que reconhecendo certamente 2 como primo, passamos uma cruz (X) em todos os pares de nossa lista, exceto no próprio 2. Na sequência, todos os múltiplos de 3, exceto o 3 (/). Removemos também os múltiplos de 5 (10, 15, 20, ...). Na figura abaixo, encontrada em Burton (2006, p. 188), vemos todos os números desejados.

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Figura 23: Identificação dos primos menores que 100 (BURTON, 20006, p. 188)

Vamos finalizar este tópico discutindo um pouco mais da Álgebra Geométrica grega. Bunt, Jones e Bedient (1988) explicam que a primeira proposição do Livro II dos Elementos de Euclides lida diretamente com propriedades algébrico-geométricas. Por exemplo: se existem duas linhas, uma das quais é dividida em um número de partes, o retângulo contido por uma das duas linhas possui área igual aos retângulos não divididos pela linha e as várias outras partes divididas pela linha.

Bunt, Jones e Bedient (1988) explicam a propriedade usando uma formulação moderna: se o retângulo ABCD possui um lado de comprimento a e o outro consiste em três partes de comprimentos b, c e d, então $a \cdot (b + c + d) = ab + ac + ad$. Esta identidade representa a propriedade distributiva obtida por meio da multiplicação (BUNT, JONES; BEDIENT, 1988, p. 183), como vemos na Figura 24(i).

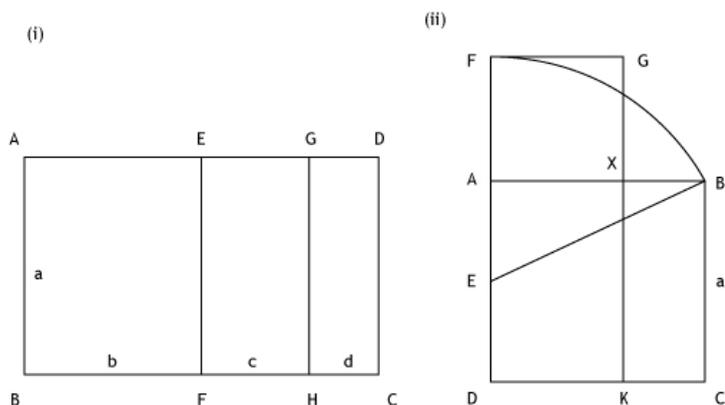


Figura 24: Propriedades discutidas por Bunt, Jones e Bedient (1988, p. 184)

Mais adiante, os mesmos autores mencionam a Proposição II Figura 19(ii), que envolve um problema de álgebra-geométrica ao resolver o problema de equações quadráticas. *O problema é descrito como segue: para dividir uma linha reta em duas partes*

iguais de modo que retângulo contido por uma destas partes seja de igual área ao quadrado da outra parte (BUNT; JONES; BEDIANT, 1988, p. 183).

Em termos atuais, Bunt, Jones e Bedient (1988, p. 184) orientam que: se \overline{AB} é um segmento dado, devemos construir um ponto X neste segmento de modo que o retângulo de lados \overline{AB} e \overline{XB} possua a mesma área do quadrado de lado \overline{AX} e assim tomando $\overline{AB} = a$ e $\overline{AX} = x$. Então construímos as equações: $a(a - x) = x^2$ e $x^2 + ax - a^2 = 0$, que possui como solução $x_1 = \frac{a(\sqrt{5} - 1)}{2}$ e $x_2 = \frac{a(-\sqrt{5} - 1)}{2}$.

TÓPICO 3

A matemática japonesa

OBJETIVO

- Adquirir noções introdutórias sobre a matemática japonesa

Smith e Mikami (1914, p. 1) explicam que a História da Matemática japonesa pode ser dividida em seis períodos:

- **O primeiro período** até o ano de 522, quando observamos intensa influência chinesa.
- **O segundo período** de aproximadamente mil anos (552 - 1600) foi marcado pela influência do tipo de aprendizagem chinesa na Korea.
- **O terceiro período** teve menos de um século de duração (1600 - 1675) marcado pela influencia de Seki. Este período pode ser chamado como Renascimento da matemática japonesa.
- **O quarto período** (1675 - 1775) pode ser comparado de modo sincrônico ao mesmo período na Europa. Justamente com uma iniciativa de Descartes, Newton e Leibnitz preparam o caminho para os trabalhos de Bernoulli, Euler e Laplace. Os trabalhos do grande matemático japonês Seiki e de seu aprendiz Takebe evoluíram bastante neste período.

- O quinto período se estende de 1775 a 1868. É o período de culminância da influência da Matemática Japonesa (SMITH; MIKAMI, 1914, p. 2).
- O sexto período inicia com a incursão da cultura japonesa em outros países.

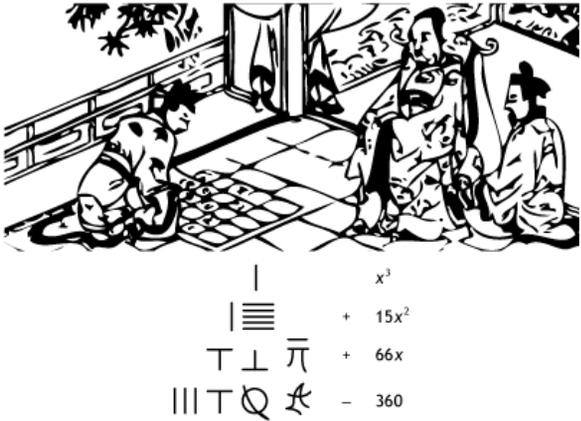


Figura 25: Os quadrados mágicos estudados na cultura matemática japonesa

Smith e Mikami (1914, p. 96) discutem o problema seguinte, ilustrado na figura 26. No problema de Sawaguchi, exibimos dois círculos inscritos em um círculo maior. A área restante é de 120 unidades. O diâmetro comum dos dois círculos menores vale 5 unidades. É requerido o valor dos diâmetros.

Na solução atual, temos dado $x =$ diâmetro do círculo menor e $y =$ diâmetro do círculo maior, então $x + 5$.

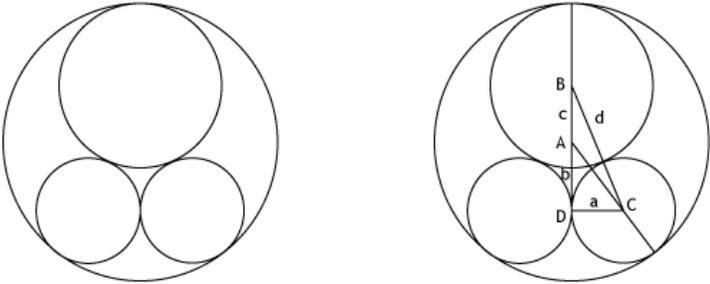


Figura 26: Problema de Sawaguchi (SMITH; MIKAMI, 1914, p.)

AULA 5

Evolução e métodos algébricos

Olá aluno(a)!

Nesta aula discutiremos alguns modelos algébricos que evoluíram à medida que as ideias empregadas pelos matemáticos em épocas históricas distintas se sofisticaram. O aumento de precisão das notações e simbologias foi uma dessas sofisticções. Vamos lá, então?

Objetivos

- Compreender o processo evolutivo dos métodos algébricos
- Conhecer os problemas antigos que envolviam equações polinomiais
- Entender os métodos analíticos para resolução de equações cúbicas

TÓPICO 1

Um problema antigo relacionado à equação polinomial do segundo grau

OBJETIVO

- Apresentar situações-problema de civilizações antigas que envolvem a equação quadrática

Indiscutivelmente problemas que culminam com a resolução de grau dois são facilmente identificados em várias civilizações, tanto ocidentais como orientais. Neste sentido, Katz (1988, p.35) explica que:

Problemas envolvendo o produto de valores desconhecidos e equações de grau dois eram estudados e conhecidos hoje como relacionados às funções quadráticas. Por exemplo, problemas relacionados ao Teorema de Pitágoras produzem tais equações. Tais equações tinham grande fonte na matemática babilônica e chinesa. Em ambas civilizações os métodos eram baseados em ideias geométricas.

No contexto da matemática oriental, Katz sublinha que alguns problemas do livro *Jiuzhang* podem ser traduzidos em sistemas de equações. Ele exemplifica

com as relações $\begin{cases} x - y = 6,8 \\ x^2 + y^2 = 100 \end{cases}$. A solução chinesa se baseia na ideia do teorema de

Pitágoras e, se escrita de forma genérica, pode ser representada por $\begin{cases} x - y = d \\ x^2 + y^2 = c^2 \end{cases}$.

A figura usada no problema genérico sugere $(x + y)^2 = 4xy + (x - y)^2$ e também $c^2 = 2xy + (x - y)^2$ ou $4xy = 2c^2 - 2(x - y)^2$. Segue então que

$(x + y)^2 = 2c^2 - (x - y)^2 \therefore (x + y) = \sqrt{2c^2 - (x - y)^2}$. Finalmente no antigo

manuscrito encontramos $\frac{(x + y)}{2} = \sqrt{\frac{c^2}{2} - \left(\frac{d}{2}\right)^2}$. Verifique! No final encontramos

$x = 9,6$ e $y = 2,8$. Verifique também!

Embora o livro chinês *Jiuzhang* contenha outros problemas que podem ser traduzidos em sistemas lineares e equações quadráticas, aparentemente a fonte babilônica contém exemplos de textos bem antigos. De fato, em vários tablets babilônicos encontramos $\begin{cases} xy = c \\ x + y = b \end{cases}$ e alguns dos textos sugerem a relação com relações de perímetro e área de retângulos.

Nos tempos antigos, havia a crença de que a área dependia apenas do perímetro. “E existem várias histórias indicando que quem conhecia melhor este conhecimento poderia tomar vantagem com respeito a quem admitia tal crença equivocada (KATZ, 1988, p. 36)”. Para demonstrar que retângulos de mesmo perímetro podem possuir áreas diferentes, os babilônios construíram tabelas de área c , para um dado perímetro $2b$.

Um desses problemas descrito por $\begin{cases} x - y = b \\ x^2 + y^2 = c \end{cases}$ possui solução dada por $x = \sqrt{\frac{c}{2} - \left(\frac{b}{2}\right)^2} + \frac{b}{2}$ e $y = \sqrt{\frac{c}{2} - \left(\frac{b}{2}\right)^2} - \frac{b}{2}$. Verifique!

Em outros problemas, encontramos a tentativa de solução geométrica da equação $x^2 + bx = c$, que, em termos atuais, pode ser verificada por

$$x = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} - \frac{b}{2}.$$

Fonte: DEAD/IFCE adaptado de Katz (1988)

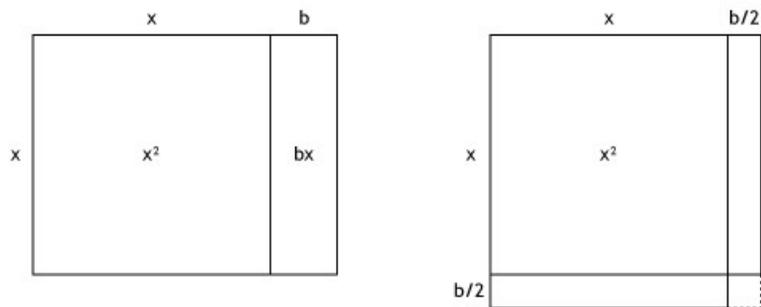


Figura 1: Solução geométrica da equação quadrática pelos babilônios (KATZ, 1988, p. 38)

O problema de achar dois números conhecendo-se sua soma s e o seu produto p é um dos mais antigos da Matemática. Ele já se encontrava em texto cuneiforme, 1700 a.C., como comentamos há pouco. Em termos modernos, podemos reformulá-lo por: *determinar os lados de um retângulo, do qual se conhecem o semiperímetro s e a área p .*

Lima (2002) esclarece que os números procurados, digamos α e β , são raízes da equação $x^2 - sx + p = 0$. De fato, admitindo que $\alpha + \beta = s$ e $\alpha \cdot \beta = p$, então o trinômio $x^2 - sx + p = 0$ se anula em $x = \alpha$ e $x = \beta$, o que pode ser

verificado facilmente. Este problema descrito pelo matemático Elon Lages Lima sempre despertou interesse nos matemáticos do passado. Neste sentido, Katz (1988, p. 175) sublinha que “a maior parte dos problemas de Diophantus de Alexandria, conhecido como o pai da Álgebra, pode ser descrito por um conjunto de equações com k indeterminadas”.

Problema₁: Dividir um número em duas partes possuindo sua diferença.

Segundo Katz, Diophantus apresenta a solução para o caso em que o número 100 é fornecido e a diferença vale 40. Ele escreve $2 \cdot x + 40 = 100$. O método de Diophantus funciona para um dado a e uma dada diferença b , de modo que $b < a$; a equação é descrita por $2 \cdot x + b = a$. Assim, o número desejado é $x = \frac{a-b}{2}$.

Problema₂: Dividir um número dado em outros dois números tais que duas frações (diferentes) quando somadas produzem o dado número.

Katz (1988, p. 176) explica que, em notação moderna, temos a, b, r, s ($r < s$) e desejamos encontrar u e v de modo que $\begin{cases} u + v = a \\ \frac{u}{r} + \frac{v}{s} = b \end{cases}$. Katz sublinha que Diophantus conclui que, para a solução do problema, é necessário que $\frac{a}{s} < b < \frac{a}{r}$.

Ele apresenta o seguinte caso particular resolvido: $a = 100$; $b = 30$; $r = 3$ e $s = 5$. Assim, as partes desejadas são 75 e 25.

Problema₃: Encontrar dois números tais que sua soma e a soma dos seus quadrados sejam conhecidos.

Katz (1988, p. 176) discute que, no caso geral, temos $\begin{cases} x + y = a \\ x^2 + y^2 = b \end{cases}$. Tal sistema já era conhecido pelos babilônios. Por outro lado, Diophantus obtém a seguinte solução: $x = \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{2b-a^2}}{2}$ e $y = \frac{a}{2} - \frac{\sqrt{2b-a^2}}{2}$. Neste caso, devemos ter necessariamente um número racional, conforme Katz (1988). O autor questiona a possibilidade de Diophantus poder ter tido acesso aos escritos babilônicos de onde obteve inspiração, apesar de esse antigo matemático manifestar bastante originalidade nos seus métodos.

Problema₄: Dividir o quadrado de um número em dois quadrados.

Por exemplo, dividir $16 = 4^2$ em dois quadrados. Temos que encontrar x^2 e o outro $a = 16 - x^2$ o segundo número. Podemos também escrever $x^2 + y^2 = 16$.

Problema: Ore (1948, p. 181) discute o problema elaborado por Diophantus “encontrar dois números tais que sua soma é dada na proporção da razão dos seus quadrados”.

Em notação moderna, temos $\frac{x^2 + y^2}{x + y} = p$. Ore (1948) escreve a equação $x^2 - xp + y^2 - yp = 0$, que pode ser considerada como uma equação de grau dois. Exibe as soluções $x = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - y^2 + py}$. Considerando que o problema deve ser resolvido em termos de números racionais, o número $\frac{p^2}{4} - y^2 + py$ deve ser quadrado. Em seguida, Ore (1948) escreve $r = \frac{p}{2} + t \cdot y$ e devemos impor a condição

$$\begin{aligned} \left(\frac{p}{2} + t \cdot y\right)^2 &= \frac{p^2}{4} - y^2 + py \leftrightarrow \frac{p^2}{4} + 2\frac{p}{2} \cdot t \cdot y + t^2 \cdot y^2 \\ &= \frac{p^2}{4} - y^2 + py \leftrightarrow p \cdot t + t^2 \cdot y = \\ &= -y + p \cdot t + y \cdot t^2 = p - p \cdot t \leftrightarrow y(1 + t^2) \\ &= p - p \cdot t \leftrightarrow y = p \frac{1 - t}{1 + t^2} \quad (*) \end{aligned}$$

Desse modo, para um racional t qualquer, o valor correspondente de y é dado por (*) e torna a expressão $\left(\frac{p}{2} + t \cdot y\right)^2 = \frac{p^2}{4} - y^2 + py$ um quadrado perfeito. Assim, escrevemos:

$$\begin{aligned} \left(\frac{p}{2} + t \cdot y\right)^2 &= \left(\frac{p}{2} + t \cdot p \frac{1 - t}{1 + t^2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2} + \frac{pt - pt^2}{1 + t^2}\right)^2 = \left(\frac{p + pt^2}{2(1 + t^2)} + \frac{2pt - 2pt^2}{2(1 + t^2)}\right)^2 = \\ &= \left(\frac{p}{2(1 + t^2)} + \frac{2pt - pt^2}{2(1 + t^2)}\right)^2 = \left(\frac{p + 2pt - pt^2}{2(1 + t^2)}\right)^2 = \left(\frac{p \cdot (1 + 2t - t^2)}{2(1 + t^2)}\right)^2 \end{aligned}$$

Retornando à equação:

$$\begin{aligned} x &= \frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - y^2 + py} = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2} + t \cdot y\right)^2} \\ &= \frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p \cdot (1 + 2t - t^2)}{2(1 + t^2)}\right)^2} = \frac{p}{2} \pm \left(\frac{p \cdot (1 + 2t - t^2)}{2(1 + t^2)}\right) \end{aligned}$$

Dessa forma, obtemos dois valores para x dados por

$$x_1 = \frac{p}{2} + \left(\frac{p \cdot (1 + 2t - t^2)}{2(1 + t^2)}\right) = \frac{p + pt^2 + p + 2pt - pt^2}{2(1 + t^2)} = \frac{2p + 2pt}{2(1 + t^2)} = p \frac{1 + t}{1 + t^2} \quad e$$

teremos também:

$$x_2 = \frac{p}{2} - \left(\frac{p \cdot (1 + 2t - t^2)}{2(1 + t^2)}\right) = \frac{p + pt^2 - p - 2pt + pt^2}{2(1 + t^2)} = \frac{-2pt + 2pt^2}{2(1 + t^2)} = p \frac{t^2 - t}{1 + t^2} = p \frac{t(t - 1)}{1 + t^2}$$

Problema₆: Encontrar três números tais que um deles é média proporcional dos outros.

Em termos de modernas notações, Ore (1948, p. 183) escreve que $x > y > z$

são três números racionais, de modo que
$$\begin{cases} x - y = a^2 \\ y - z = b^2 \\ x - z = c^2 \end{cases}$$
. Para satisfazer as duas

primeiras condições, precisamos ter
$$\begin{cases} x = y + a^2 \\ z = y - b^2 \end{cases}$$
. Concluimos, assim, que

$a^2 + b^2 = (x - y) + (y - z) = (x - z) = c^2$. $\therefore a^2 + b^2 = c^2$ (*). Notamos que temos que satisfazer as hipóteses do problema relativas a $y^2 = x \cdot z$. Por outro lado, a partir da relação (*), evidenciamos que os números a, b e c devem satisfazer as condições de uma *terna pitagórica* do tipo $a = 2tr$; $b = (t^2 - 1)r$; $c = (t^2 + 1)r$, onde $r, t \in \mathbb{Q}$.

Na sequência, Ore (1948, p. 183) estabelece que:

$$\begin{aligned} y^2 = x \cdot z &= (y + a^2)(y - b^2) = y^2 - b^2y + a^2y - a^2b^2 \therefore y^2 \\ &= y^2 - b^2y + a^2y - a^2b^2 \leftrightarrow 0 = -b^2y + a^2y - a^2b^2 \\ \leftrightarrow y &= \frac{a^2b^2}{a^2 - b^2} \rightarrow x = \frac{a^4}{a^2 - b^2} \text{ e } z = \frac{b^4}{a^2 - b^2} \end{aligned}$$

Orienta ainda que, para obter uma solução, devemos substituir os valores para a, b e c . Desde que as soluções sejam positivas, escolhemos os lados do triângulo pitagórico com $a > b$. Ore comenta que Diophantus ilustra o método fornecendo a terna $(a, b, c) = (4, 3, 5)$, encontrando $(x, y, z) = \left(\frac{256}{7}, \frac{144}{7}, \frac{81}{7}\right)$.

Heath (1910, p. 58) comenta que “Diophantus estava apto a resolver equações de primeiro e segundo grau, de uma cúbica encontramos em sua Aritmética somente um exemplo com respeito a um caso especial”. Bunt, Jones e Bedient (1988, p. 200) sublinham também que *Diophantus* conseguia escrever polinômios de modo muito conciso e preciso, tais como:

$$\begin{aligned} \Delta\Upsilon\gamma\text{Mi}\bar{\epsilon} &\equiv 3x^2 + 15 \\ \Delta\Upsilon\Delta\gamma\text{Mi}\bar{\epsilon}\eta\Delta\Upsilon\bar{\zeta} &\equiv x^4 - 60x^2 + 900 \end{aligned}$$

A originalidade do trabalho de Diophantus e a aceitação da obra *Arithmetica* na Europa Ocidental no tempo da Renascença é marcada pela influência do matemático de Alexandria no que se refere às notações algébricas e, posteriormente, na teoria dos números. Em sua obra, encontramos o seguinte teorema.

Teorema₁: Se α e β são as raízes de $x^2 - p \cdot x + q = 0$, com p e $q > 0$ e se $\alpha > \beta$, então (a) para que tenhamos $x^2 - p \cdot x + q > 0$, devemos ter $x > \alpha$ ou $x < \beta$; (b) para que tenhamos $x^2 - p \cdot x + q < 0$, devemos ter $x < \alpha$ ou $x > \beta$;

Heath (1910, p. 61) acrescenta que Diophantus exibe a equação $17x^2 - 72x + 17 = 0$, com raízes $\Delta = 5184 - 4 \cdot 17 \cdot 17 = 4028 = 4 \cdot 1007$; assim, $x_1 = \frac{36 + \sqrt{1007}}{17}$ e $x_2 = \frac{36 - \sqrt{1007}}{17}$. De fato, pelo gráfico, observamos que, se $\frac{36 - \sqrt{1007}}{17} < x < \frac{36 + \sqrt{1007}}{17}$, temos $17x^2 - 72x + 17 < 0$, de acordo com que Diophantus concluiu há séculos atrás. Diophantus discute também a equação $19x^2 - 72x + 19 = 0$ e, nesse caso, temos $\Delta = 4 \cdot 935$; assim, $x_1 = \frac{36 + \sqrt{1007}}{19}$ e $x_2 = \frac{36 - \sqrt{1007}}{19}$. Podemos constatar na Figura 2 que o teorema é verificado neste caso particular.

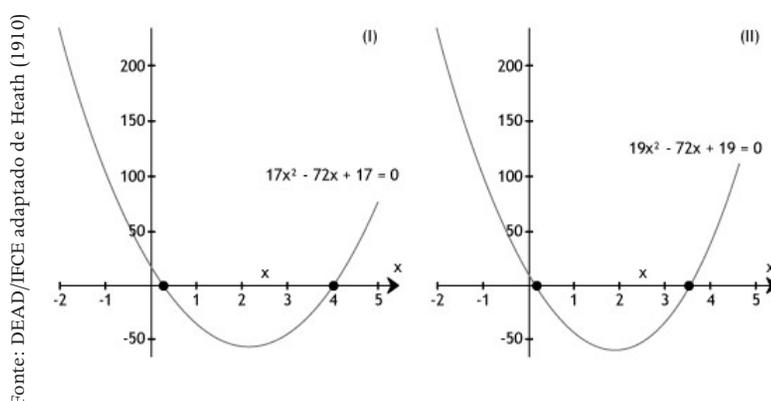


Figura 2: Casos particulares discutidos por Diophantus

Encontramos também na obra de Diophantus a solução de sistemas de equações que envolvem equações quadráticas, por exemplo $\begin{cases} \xi + \eta = 2a \\ \xi \cdot \eta = B \end{cases}$.

Admitiremos que $\xi > \eta$, assim escrevemos $\xi = a + x$ e $\eta = a - x$, o que satisfaz a equação $\xi + \eta = 2a$. Na sequência, Diophantus propunha que $\xi \cdot \eta = B \leftrightarrow (a + x)(a - x) = B \leftrightarrow a^2 - x^2 = B \leftrightarrow x^2 = a^2 - B$.

Em seguida, para obter uma equação quadrática, ele escreve $\begin{cases} \xi + \eta = 2a \\ \xi \cdot \eta = B \end{cases} \leftrightarrow (2a - \eta) \cdot \eta = B \therefore \eta^2 - 2a \cdot \eta - B = 0$. Completando os quadrados, temos ainda $\eta^2 - 2a \cdot \eta - B + a^2 = a^2 \leftrightarrow (\eta - a)^2 = a^2 - B$ e observamos também que $x^2 = a^2 - B$ se, e somente se $x^2 = a^2 - B = (\eta - a)^2 \therefore x = (\eta - a)$ a solução desejada.

Diophantus discute ainda os casos (a) $\begin{cases} \xi + \eta = 2a \\ \xi^2 + \eta^2 = B \end{cases}$ e (b) $\begin{cases} \xi - \eta = 2a \\ \xi \cdot \eta = B \end{cases}$.

No primeiro caso, temos $\xi = a + x$ e $\eta = a - x$, portanto $\xi^2 + \eta^2 = B \leftrightarrow (a + x)^2 + (a - x)^2 = B$, assim:

$$(a^2 + 2ax + x^2) + (a^2 - 2ax + x^2) = B \leftrightarrow 2(a^2 + x^2) = B \leftrightarrow x^2 = \frac{B - 2a^2}{2}$$

Voltando ao sistema:

$$\begin{cases} \xi + \eta = 2a \\ \xi^2 + \eta^2 = B \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} \xi = 2a - \eta \\ \xi^2 + \eta^2 = B \end{cases} \therefore (2a - \eta)^2 + \eta^2 = B \leftrightarrow 4a^2 - 4a\eta + 2\eta^2 = B.$$

Por fim escrevemos:

$$2\eta^2 - 4a \cdot \eta + 4a^2 = B \leftrightarrow \eta^2 - 2a \cdot \eta + a^2 = \frac{B}{2} - a^2 \leftrightarrow (\eta - a)^2 = \frac{B}{2} - a^2. \text{ Desse}$$

modo, teremos $x^2 = \frac{B - 2a^2}{2} \leftrightarrow x^2 = \frac{B}{2} - a^2 = (\eta - a)^2 \leftrightarrow x = (\eta - a)$. Heath (1910,

p. 66) menciona que a solução de $\begin{cases} \xi - \eta = 2a \\ \xi \cdot \eta = B \end{cases}$ é semelhante ao primeiro caso, segundo Diophantus.

Problema 7: Adicionar o mesmo número a um cubo e fazê-lo igual ao cubo da soma de ambos.

Katz (1988, p. 181) descreve a seguinte notação moderna $x^3 + y = (x + y)^3$. O autor diz que Diophantus assumiu que $x = 2y \therefore x^3 + y = (x + y)^3 \leftrightarrow (2y)^3 + y = (2y + y)^3 \leftrightarrow 8y^3 + y = (3y)^3$, assim temos $8y^3 + y = 27y^3 \leftrightarrow y = 19y^2 \leftrightarrow 1 = 19y^2$. Desse modo, obtemos um número que não é quadrado perfeito, mas *Diophantus* buscava um quadrado perfeito. Por outro lado, ele observou que $19 = 3^3 - 2^3$. No entanto, reparamos que desejamos encontrar dois números consecutivos z e $z+1$ de modo que tenhamos $(z+1)^3 - z^3 = \text{quadrado perfeito} \leftrightarrow (z+1)^3 - z^3 = 3z^2 + 3z + 1$. Katz comenta que, nos cálculos de Diophantus, encontramos a condição $(1-2z)^2$, produzindo o valor $z=7$ e $z+1=8$. Retornando agora ao problema inicial $x^3 + y = (x + y)^3$, devemos impor que $x = 7y$. Assim, substituímos:

$$x^3 + y = (x + y)^3 \leftrightarrow (7y)^3 + y = (7y + y)^3 \leftrightarrow 343y^3 + y = 512y^3 \leftrightarrow 1 = 169y^2$$

Segue que $y = \frac{1}{13}$ e o valor desejado é de $\frac{7}{13}$.

Problema 8: Segundo Katz (1988, p. 357), Pedro Nunes foi um matemático português que se destacou por uma obra de 1532, intitulada Livro de Álgebra. Ele resolveu o seguinte problema: Encontre dois números cujo produto e soma dos seus quadrados sejam conhecidos. O produto dado como 10, e a soma dos quadrados 30.

Numa notação moderna, Katz(1988) escreve:

$$\begin{cases} x^2 \cdot y^2 = 10 \\ x^2 + y^2 = 30 \end{cases} \therefore x^2 + \left(\frac{10}{x^2}\right) = 30 \leftrightarrow x^4 - 30x^2 + 10 = 0. \text{ Seguindo a fórmula}$$

de Al-Kharismi, temos $x^2 = 15 \pm \sqrt{125}$, e os dois números desejados são $\sqrt{15 - \sqrt{125}}$ e $\sqrt{15 + \sqrt{125}}$.

Finalizamos este tópico destacando, por meio dos problemas discutidos, a grande importância do papel atribuído às equações quadráticas. De fato, vimos que, em várias culturas, por meio de métodos distintos ou semelhantes, as antigas civilizações, por motivos às vezes distintos e particulares, se interessaram pela resolução dos mesmos problemas de Matemática. Na próxima seção, discutiremos um pouco da história sobre as soluções das equações do tipo $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ e os casos possíveis de *resolução da quártica* $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$, que *envolveu muitos matemáticos italianos, com ênfase para Fra Luca Pacioli (1445-1514)*, além de discutir com alguma brevidade os problemas relacionados com a insolubilidade da *quintica* $ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0$.

Neste tópico estudamos equação de grau dois, que se mostrou sempre envolvida na resolução de vários problemas. Na sequência, continuaremos o estudo de equações, só que nossa atenção estará voltada para a cúbica.

TÓPICO 2

As fórmulas de tartaglia ensinadas para cardano

OBJETIVO

- Apresentar os métodos analíticos para a solução da cúbica

Iniciamos nosso tópico abordando um pouco da história dos matemáticos italianos Tartaglia e Cardano.

Tartaglia nasceu muito pobre. Tinha sete anos quando uma tropa francesa, ao saquear Brescia, irrompeu em um templo, onde grande parte da população se refugiara. Um soldado deu-lhe um golpe com um sabre no meio do rosto. Depois disso, o menino gaguejou anos a fio. Por isso os amigos o apelidaram de “Tartaglia” (tartamudo ou gago). Tartaglia contribuiu para a matemática com a redescoberta da resolução de algumas equações cúbicas. Envolveu-se em disputas com Cardano, que publicou primeiro sua solução, mesmo havendo jurado que não o faria. A disputa terminou quando o discípulo de Cardano, Lodovico Ferrari, de posse da solução da equação do quarto grau, propôs questões que Tartaglia não conseguiu resolver. **Fonte:** <http://www.somatematica.com.br/biograf/tartaglia.php>



<https://pt.wikipedia.org>

Figura 3: Imagens de Girolamo Cardano (1501-1576) e Niccolò Tartaglia (1499-1557)



VOCÊ SABIA?

Girolamo Cardano foi um cientista e sábio à moda de seu tempo, matemático, filósofo, médico. Seguindo o conselho de um amigo, foi para Sacco, uma pequena aldeia a 15 km de Pádua onde se dedicou à medicina não sendo muito bem sucedido. Numa busca desesperada de uma mudança de sorte os Cardanos mudaram-se para Milão. Cardano teve a sorte de obter o antigo posto de ensino em matemática de Fazio, seu pai, na fundação Piatti em Milão.

Fonte: <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/renascenca/cardano.htm>

Rosa (1998, p. 45) recorda que:

Na época em que Tartaglia ensinou a Cardano a fórmula da resolução de uma equação do terceiro grau, os matemáticos não dispunham de uma notação para tratar as equações e não podiam expressar suas fórmula de modo resumido como fazemos hoje. Portanto, não é estranho que Tartaglia comunicasse a Cardano o segredo de sua descoberta através de versos.

Rosa explica que os casos analisados foram: $x^3 + ax = b$, $x^3 = ax + b$ e $x^3 + b = ax$. Rosa ressalta que Tartaglia introduziu duas novas variáveis ao chamar $U - V = b$. Ao longo do seu texto, encontramos também a relação $U \cdot V = \left(\frac{a}{3}\right)$, mas vejamos sua argumentação de modo mais detalhado.

O caso considerado inicialmente foi o da equação $x^3 + ax = b$. O autor recorda a

fórmula $(u - v)^3 = u^3 - 3u^2v + 3uv^2 - v^3$, que pode ser escrita de outro modo: $(u - v)^3 = 3uv^2 - 3u^2v + (u^3 - v^3) \Leftrightarrow (u - v)^3 = -3u \cdot v(u - v) + (u^3 - v^3)$. Por fim temos $(u - v)^3 + 3u \cdot v(u - v) = (u^3 - v^3)$. Vamos agora comparar as equações

$$\begin{cases} x^3 + ax = b \\ (u - v)^3 + 3u \cdot v(u - v) = (u^3 - v^3) \end{cases} \xRightarrow{\text{fazendo}} \begin{cases} 3u \cdot v = a \therefore u \cdot v = \frac{a}{3} \\ (u^3 - v^3) = b \end{cases} \quad \text{Resta-nos a}$$

expressão $(u - v)^3 + 3u \cdot v(u - v) = (u^3 - v^3) \Leftrightarrow (u - v)^3 + a(u - v) = b$. Agora podemos inferir que $x = u - v$ e satisfaz a relação $(u - v)^3 + a(u - v) = b$, uma vez que $x^3 + ax = b$.

A partir daí passamos a resolver o problema $\begin{cases} u \cdot v = \frac{a}{3} \\ (u^3 - v^3) = b \end{cases}$, pois, achando

os valores de u e v , encontraremos os valores correspondentes para x , uma vez que

$x = u - v$. Por outro lado, reparamos que $\begin{cases} u^3 \cdot v^3 = \frac{a^3}{27} \\ (u^3 - v^3) = b \end{cases}$. Fazemos agora a seguinte

$$\text{substituição } \begin{cases} u^3 = U \\ v^3 = V \end{cases} \therefore \begin{cases} u^3 \cdot v^3 = \frac{a^3}{27} \\ (u^3 - v^3) = b \end{cases} \begin{matrix} \xrightarrow{u=U} \\ \leftrightarrow \\ \xrightarrow{v=V} \end{matrix} \begin{cases} U \cdot V = \frac{a^3}{27} \\ (U - V) = b \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} U \cdot V = \frac{a^3}{27} \\ (U + (-V)) = b \end{cases}$$

Rosa (1998, p. 48) aconselha que este último sistema pode ser visto como satisfazendo a condição da soma e produto das raízes U e $-V$ da equação quadrática dada por $X^2 - b \cdot X + \left(-\frac{a}{3}\right)^3 = 0$. Aplicando o método de resolução usual, escrevemos

$$X = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot \left(-\frac{a}{3}\right)^3}}{2 \cdot 1} = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}$$

e temos duas raízes, mas Rosa destaca

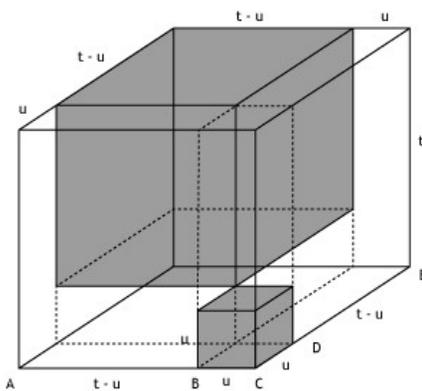
que uma raiz será U e a outra raiz $-V$. Entretanto, recordamos, desde o início,

que $x = u - v = \sqrt[3]{U} - \sqrt[3]{V}$. Na sequência, escolhemos $U = \frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}$ e

$-V = \frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3} \therefore V = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3} - \frac{b}{2}$. Segue que:

$$\begin{aligned} x = u - v &= \sqrt[3]{U} - \sqrt[3]{V} = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3} - \frac{b}{2}} \\ &= \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}} \\ x &= \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}} \end{aligned}$$

Esta última fórmula resolve equações do tipo $x^3 + ax = b$. Dunham (1990) acrescenta que Cardano descobriu como resolver a equação de uma cúbica geral do tipo $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$, onde os coeficientes b, c e d são não nulos.



Fonte: DEAD/IFCE adaptado Dunham (1990)

Figura 4: Interpretação geométrica descrita por Cardano (DUNHAM, 1990, p. 143)

Dunham (1990) explica que Cardano imaginou um cubo largo, possuindo lado AC , cujo comprimento denotamos por $\overline{AC} = t$. O lado $\overline{AC} = t$ é dividido no ponto B , em um segmento $\overline{BC} = u$, e portanto o segmento $\overline{AB} = t - u$, onde as variáveis u e t são auxiliares. Como a figura 4 sugere, o cubo deverá ser repartido em seis pedaços, e cada um com um volume:

- o pequeno cubo de volume u^3 ;
- o cubo maior de volume $(t-u)^3$;
- $u^2 \cdot (t-u)$;
- $u \cdot (t-u)^2$.

Claramente, o volume de todo o cubo é:

$$\overline{AC}^3 = t^3 = (t-u)^3 + 2tu(t-u) + u^2(t-u) + u(t-u)^2$$

$$(t-u)^3 + [2tu(t-u) + u^2(t-u) + u(t-u)^2] = t^3 - u^3$$

$$(t-u)^3 + 3tu(t-u) = t^3 - u^3$$

Dunham (1990, p. 144) explica que o leitor moderno notará que podemos deduzir o mesmo resultado usando uma álgebra mais moderna.

De um ponto de vista algébrico, Cardano resolveu a equação $x^3 + 6x = 20$, como explica Dunham (1990, p. 146). Devemos observar que, neste caso, temos

$a = 6$ e $b = 20$. $\therefore \begin{cases} u \cdot v = 2 \\ (u^3 - v^3) = 20 \end{cases}$. Por outro lado é mais fácil obter as raízes de

$X^2 - 20 \cdot X - 8 = 0$. Mas observamos que $\Delta = 368$, assim $X = 10 \pm \sqrt{100 + 4}$.

Teremos, então, duas raízes $X_1 = 10 + \sqrt{108}$ e $X_2 = 10 - \sqrt{108}$, por termos

$$x = \sqrt[3]{10 + \sqrt{108}} + \sqrt[3]{10 - \sqrt{108}}.$$

Vamos considerar agora a equação $x^3 + 3x = 10$. Neste caso, temos $a = 3$ e $b = 10$. Encontramos a equação $X^2 - 10 \cdot X - 1 = 0$ e, na sequência, temos

$\frac{10}{2} + \sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{3}\right)^3} = 5 + \sqrt{26}$ e $\frac{10}{2} - \sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{3}\right)^3} = 5 - \sqrt{26}$, que são suas

raízes e, então, encontramos $x = \sqrt[3]{5 + \sqrt{26}} + \sqrt[3]{5 - \sqrt{26}}$. Quando recorremos

aos recursos tecnológicos, podemos observar os comportamentos das funções

$f(x) = x^3 + 6x - 20$ e $f(x) = x^3 + 3x - 10$. É interessante observar que, no caso

(I) abaixo, vemos que $f(2) = 2^3 + 6 \cdot 2 - 20 = 0$, ou seja, $x = 2$ é raiz. O mesmo não

podemos inferir para o caso (II).

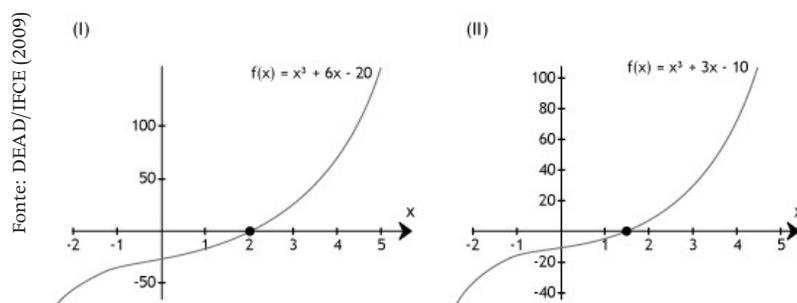


Figura 5: Interpretação geométrica das equações

Vamos agora discutir a argumentação devida a Dunham (1990, p. 147) para o caso de $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$. Dunham faz a seguinte substituição

$x = y - \frac{b}{2a}$. Assim, temos:

$$ax^2 + bx + c = 0 \leftrightarrow a\left(y - \frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(y - \frac{b}{2a}\right) + c = 0 \leftrightarrow$$

$$a\left(y^2 - \frac{b}{a}y + \frac{b^2}{4a^2}\right) + by - \frac{b^2}{2a} + c = 0 \leftrightarrow ay^2 - by + \frac{b^2}{4a^2} + by + c = 0$$

$$ay^2 = \frac{b^2}{2a} - \frac{b^2}{4a^2} - c$$

$$ay^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a} \therefore y = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Segue que obtemos as raízes conhecidas. Mas esta substituição $x = y - \frac{b}{2a}$ elimina o termo na variável de grau 1. Dunham (1990, p. 148) salienta que Cardano realiza a seguinte substituição $x = y - \frac{b}{3a}$, para o caso de $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \leftrightarrow a\left(y - \frac{b}{3a}\right)^3 + b\left(y - \frac{b}{3a}\right)^2 + c\left(y - \frac{b}{3a}\right) + d = 0$. Fazendo as devidas operações, devemos obter:

$$\left(ay^3 - by^2 + \frac{b^2}{3a}y - \frac{b^3}{27a^2}\right) + \left(by^2 - \frac{2b^2}{3a}y + \frac{b^3}{9a^2}\right) + \left(cy - \frac{cb}{3a}\right) + d = 0$$

Reparamos que o termo de y^2 deve cancelar-se. Re-escrevemos:

$$ay^3 + \frac{b^2}{3a}y - \frac{b^3}{27a^2} - \frac{2b^2}{3a}y + \frac{b^3}{9a^2} + cy - \frac{cb}{3a} + d = 0$$

$$ay^3 + \left(c - \frac{b^2}{3a}\right)y + \left[\frac{b^3}{9a^2} - \frac{cb}{3a} + d - \frac{b^3}{27a^2}\right] = 0$$

e, portanto,

$$y^3 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2}\right)y + \left[\frac{b^3}{9a^2} - \frac{cb}{3a^2} + \frac{d}{a} - \frac{b^3}{27a^3}\right] = y^3 + py - q = 0 \therefore y^3 + py = q$$

Onde tomamos $p = \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2}\right)$ e $q = \left[-\frac{b^3}{9a^2} + \frac{cb}{3a^2} - \frac{d}{a} + \frac{b^3}{27a^3}\right]$. Vejamos um caso de aplicação para $2x^3 - 30x^2 + 162x - 350 = 0$.

Nesse caso, seguindo o raciocínio acima, fazemos $x = y - \frac{(-30)}{6} = y + 5$.

Assim, temos:

$$2x^3 - 30x^2 + 162x - 350 = 0 \leftrightarrow 2(y + 5)^3 - 30(y + 5)^2 + 162(y + 5) - 350 = 0 \leftrightarrow$$

$$2y^3 + 12y - 40 = 0 \leftrightarrow y^3 + 6y = 20$$

E já sabemos que $y = 2$ é solução para tal equação, conseqüentemente, $x = y + 5 = 2 + 5 = 7$ é solução para $2x^3 - 30x^2 + 162x - 350 = 0$.

Outro matemático que se destacou pelo interesse em equações algébricas foi François Viète, que nasceu em Fontenay, no ano de 1540, e morreu em Paris, no ano de 1603. Não foi um matemático de profissão, porém seu lazer era dedicado à Matemática.

Seu método de resolução $ax^2 + bx + c = 0$ consiste em fazer:

$$x = u + v \therefore a(u + v)^2 + b(u + v) + c = 0 \leftrightarrow a(u^2 + 2uv + v^2) + b(u + v) + c = 0$$

Viète escreve esta equação na incógnita v , do seguinte modo: $a \cdot v^2 + (2au + b) \cdot v + au^2 + bu + c = 0$. Viète transforma tal equação em uma incompleta do 2º grau fazendo $(2au + b) = 0 \leftrightarrow u = \frac{-b}{2a}$ e obtém, assim, a equação restante:

$$a \cdot v^2 + 0 \cdot v + au^2 + bu + c = 0$$

$$a \cdot v^2 + a \left(\frac{-b}{2a} \right)^2 + b \left(\frac{-b}{2a} \right) + c = 0 \leftrightarrow v^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$\text{Setivermos } b^2 - 4ac \geq 0 \therefore v = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \leftrightarrow x = u + v = \left(\frac{-b}{2a} \right) \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

que é a conhecida fórmula de Bhaskara, podemos aplicar facilmente seu método na equação $x^2 - 3x + 2 = 0$ e concluir que $u = \frac{3}{2}$ e $v = \pm \frac{1}{2}$. Verifique!

Redfield (2001, p. 19) discute um caso um pouco mais geral para $x^3 + px + q = 0$. A ideia é observar que a solução da equação $w^6 + Bw^3 + C = 0$ pode ser auxiliada pela solução de $(w^3)^2 + B(w^3) + C = 0$. Por outro lado, o autor comenta ainda que $w^6 + Bw^3 + C = 0$ é equivalente à equação $w^6 + B + \frac{C}{w^3} = 0$, e a substituição $x = \left(w + \frac{a}{w} \right)$ pode realizar tal conversão para nós. Assim, Redfield escreve:

$$x^3 + px + q = 0 \leftrightarrow \left(w + \frac{a}{w} \right)^3 + p \left(w + \frac{a}{w} \right) + q = 0$$

$$w^3 + (p + 3a)w + (3a^2 + ap) \frac{1}{w} + \frac{a^3}{w^3} + q$$

Na sequência, o autor impõe a condição $(p + 3a) = 0 \leftrightarrow a = \frac{-p}{3}$. Como consequência, alguns dos coeficientes deve se anular. De fato, observamos que:

$$w^3 + 0 \cdot w + (3a^2 + ap) \frac{1}{w} + \frac{a^3}{w^3} + q = 0$$

$$w^3 + \left(3 \left(\frac{-p}{3} \right)^2 + \left(\frac{-p}{3} \right) p \right) \frac{1}{w} + \frac{\left(\frac{-p}{3} \right)^3}{w^3} + q = 0$$

$$w^3 + \left(\frac{p^2}{3} - \frac{p^2}{3} \right) \frac{1}{w} - \frac{p^3}{27} \frac{1}{w^3} + q = 0$$

$$w^3 + -\frac{p^3}{27} \frac{1}{w^3} + q = 0 \leftrightarrow (w^3)^2 + q \cdot w^3 - \frac{p^3}{27} = 0$$

Pode ser resolvida como uma equação quadrática como:

$$(w^3)^2 + q \cdot w^3 - \frac{p^3}{27} = 0 \leftrightarrow (w^3)^2 + [q] \cdot w^3 + [-\frac{p^3}{27}] = 0 \therefore w^3 = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

Neste ponto, Redfield (2001, p. 20) toma $\alpha = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$ e, considerando que $x = \alpha - \frac{p}{3\alpha}$, resolve a equação original. De fato, observamos que:

$$\begin{aligned} x^3 + px + q = 0 &\leftrightarrow \left(\alpha - \frac{p}{3\alpha}\right)^3 + p\left(\alpha - \frac{p}{3\alpha}\right) + q = 0 \\ \left(\alpha - \frac{p}{3\alpha}\right)\left(\alpha^2 - 2\alpha \cdot \frac{p}{3\alpha} + \frac{p^2}{9\alpha^2}\right) + p\alpha - \frac{p^2}{3\alpha} + q &= 0 \\ \left(\alpha - \frac{p}{3\alpha}\right)\left(\alpha^2 - \frac{2p}{3} + \frac{p^2}{9\alpha^2}\right) + p\alpha - \frac{p^2}{3\alpha} + q &= 0 \\ \left(\alpha^3 - \frac{2p\alpha}{3} + \frac{p^2}{9\alpha}\right) + \frac{2p\alpha}{3} + \frac{2p^2}{9\alpha} - \frac{p^3}{27\alpha^3} - \frac{p^2}{3\alpha} + q &= 0 \\ \left(\alpha^3 + \frac{p^2}{9\alpha}\right) + \frac{2p^2}{9\alpha} - \frac{p^3}{27\alpha^3} - \frac{p^2}{3\alpha} + q &= 0 \\ \left(\alpha^3 + \frac{p^2}{9\alpha}\right) + \frac{2p^2}{9\alpha} - \frac{p^3}{27\alpha^3} - \frac{p^2}{3\alpha} + q &= 0 \\ \left(\alpha^3\right) - \frac{p^3}{27\alpha^3} + q = 0 &\leftrightarrow (\alpha^3)^2 + q \cdot \alpha^3 - \frac{p^3}{27} = 0 \end{aligned}$$

Por outro lado, vimos anteriormente que $(w^3)^2 + q \cdot w^3 - \frac{p^3}{27} = 0$. Assim,

decorre realmente o que o autor sustenta. Além disso, tomando $\beta = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$ e, em seguida, fazendo $y = \beta - \frac{p}{3\beta}$, seguindo o mesmo raciocínio, inferimos que esta expressão resolve a equação $(w^3)^2 + q \cdot w^3 - \frac{p^3}{27} = 0$ e, portanto, resolve também a equação original. Desse modo, podemos escrever uma solução geral para $x^3 + px + q = 0$ na forma $x = \alpha + \beta = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$ (REDFIELD, 2001, p. 20).

Redfield (2001, p. 21) comenta que as outras soluções são combinações de α e β , do tipo $a \cdot \alpha + b \cdot \beta$, observando que vale a relação:

$$\alpha \cdot \beta = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \cdot \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} = -\frac{p}{3}$$

Além disso, o autor escreve:

$$\begin{aligned}
 & (a \cdot \alpha + b \cdot \beta)^3 + p \cdot (a \cdot \alpha + b \cdot \beta) + q = \\
 & = a^3 \alpha^3 + 3a^2 \alpha^2 \beta + 3a \alpha b^2 \beta + b^3 \beta^3 + pa \alpha + pb \beta + q = \\
 & = a^3 \alpha^3 + 3a^2 \alpha b \left(\frac{-p}{3} \right) + 3ab^2 \beta \left(\frac{-p}{3} \right) + b^3 \beta^3 + pa \alpha + pb \beta + q = \\
 & = (a^3 \alpha^3 + b^3 \beta^3 + q) + pa \alpha (-ab + 1) + pb \beta (-ab + 1)
 \end{aligned}$$

Redfield (2001, p. 21) observa que:

$$\alpha^3 + \beta^3 = \left(\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \right)^2 + \left(\sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \right)^3 = -q.$$

Assim, a expressão $(a^3 \alpha^3 + b^3 \beta^3 + q) + pa \alpha (-ab + 1) + pb \beta (-ab + 1)$ será zero se $a^3 = 1$ e $b^3 = 1$. $\therefore ab = 1$. De fato, fazendo as devidas operações, observamos que:

$$\begin{aligned}
 & (a^3 \alpha^3 + b^3 \beta^3 + q) + pa \alpha (-ab + 1) + pb \beta (-ab + 1) \leftrightarrow \\
 & \leftrightarrow (1 \cdot \alpha^3 + 1 \cdot \beta^3 + q) + pa \alpha (-ab + 1) + pb \beta (-ab + 1) \\
 & (-q + q) + pa \alpha (-ab + 1) + pb \beta (-ab + 1) \leftrightarrow \\
 & \leftrightarrow (-abpa \alpha + pa \alpha) + (-abpb \beta + pb \beta) \leftrightarrow \\
 & (-pa \alpha + pa \alpha) + (-pb \beta + pb \beta) = 0 + 0 = 0
 \end{aligned}$$

Em particular, a e b devem resolver $z^3 - 1 = 0 \leftrightarrow (z - 1)(z^2 + z + 1)$. Entretanto, 1 é solução, e, pelas outras possibilidades de raízes de $(z^2 + z + 1)$, encontramos $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{-3}}{2}$ e $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{-3}}{2}$.

Redfield (2001, p. 21) argumenta que existem apenas três possibilidades para a , se $a = 1$. $\therefore b = ab = 1$, e teremos a solução $x = \alpha + \beta$ fornecida pela fórmula de Cardano. Para as outras possibilidades, temos $ab = 1$ e $b = a^{-1}$, e desde que $\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{-3}}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{-3}}{2}\right) = 1$ e também $\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{-3}}{2}\right)^{-1} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{-3}}{2}$ e $\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{-3}}{2}\right)^{-1} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{-3}}{2}$, devemos ter $a = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{-3}}{2}$ e $b = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{-3}}{2}$ e, se $a = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{-3}}{2}$, teremos $b = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{-3}}{2}$. Concluimos que as soluções completas para $x^3 + px + q = 0$ são $x = \alpha + \beta$; $\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{-3}}{2}\right) \cdot \alpha + \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{-3}}{2}\right) \cdot \beta$

$$e \quad \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{-3}}{2}\right) \cdot \alpha + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{-3}}{2}\right) \cdot \beta, \quad \text{onde} \quad \alpha = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \quad e$$

$$\beta = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

EXEMPLO 1:

Vamos considerar $f(x) = x^3 - 3x + 1$ e resolver $f(x) = 0$. Seguindo o modelo acima, realizamos a substituição $x = w - \frac{-3}{3x} = w + \frac{1}{w}$ para obter

$$x^3 - 3x + 1 \leftrightarrow \left(w + \frac{1}{w}\right)^3 - 3\left(w + \frac{1}{w}\right) + 1 = w^3 + 1 + \frac{1}{w^3} \leftrightarrow w^6 + w^3 + 1 = 0, \quad e,$$

assim, temos $w^3 = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{-3}}{2} \therefore x = w + \frac{1}{w} = \sqrt[3]{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{-3}}{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{-3}}{2}}}.$

Podemos agora obter $\alpha = \sqrt[3]{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{-3}}{2}}$ e $\beta = \sqrt[3]{-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{-3}}{2}}$ e encontrar as outras duas soluções. Neste ponto, Redfield (2001, p. 22) escreve outra solução como

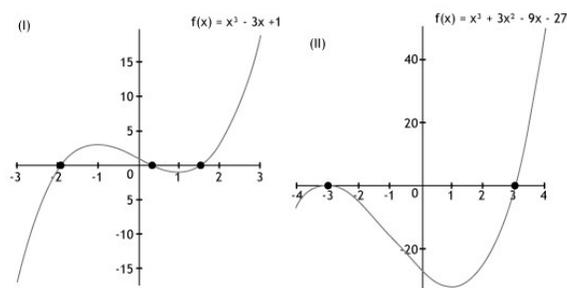
$$x = \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{-3}}{2}\right) \cdot \sqrt[3]{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{-3}}{2}} + \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{-3}}{2}\right) \cdot \sqrt[3]{-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{-3}}{2}}; \text{ a terceira solução}$$

$$\text{é } x = \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{-3}}{2}\right) \cdot \sqrt[3]{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{-3}}{2}} + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{-3}}{2}\right) \cdot \sqrt[3]{-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{-3}}{2}}.$$

Redfield (2001, p. 23) acrescenta que:

Escrito deste modo, as soluções $f(x) = 0$ não parecem reais. Todavia, se usamos algumas técnicas do Cálculo em uma variável real, podemos obter o gráfico de $f(x) = x^3 - 3x + 1$ e construir o seu gráfico como exibimos abaixo. Pelo mesmo, vemos que seu gráfico toca o eixo das abscissas em três pontos distintos, determinando três raízes reais e distintas.

Analicamente, temos ainda $f(-3) = -17 < 0$, $f(0) = 1 > 0$, $f(1) = -1 < 0$ e $f(2) = 3 > 0$. E pelo teorema do valor intermediário, obteremos nossas raízes como vemos na Figura 6-I.



Fonte: DEAD/IFCE (2009)

Figura 6: Representação geométrica

EXEMPLO 2:

Vamos considerar $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 27$.

SOLUÇÃO:

Na Figura 6-II, vemos o gráfico da função polinomial de grau 3. Descrita por $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 27$, vamos realizar a substituição $x = y - \frac{3}{3} = y - 1$, portanto temos $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 27 \leftrightarrow f(y-1) = (y-1)^3 + 3(y-1)^2 - 9(y-1) - 27$. Podemos escrever ainda que:

$$\begin{array}{r} (y-1)^3 : y^3 - 3y^2 + 3y - 1 \\ 3(y-1)^2 : 3y^2 - 6y + 3 \\ -9(y-1) : -9y + 9 \\ -27 : -27 \\ \hline y^3 - 12y - 16 \end{array}$$

Na sequência, Redfield (2001, p. 23) discute $y^3 - 12y - 16 = 0 \therefore y = w - \frac{-12}{3w} = w + \frac{4}{w}$. Feita a substituição, teremos:

$$\begin{aligned} y^3 - 12y - 16 = 0 &\leftrightarrow \\ \left(w + \frac{4}{w}\right)^3 - 12\left(w + \frac{4}{w}\right) - 16 = 0 &\leftrightarrow w^3 + 12w + \frac{48}{w} + \frac{64}{w^3} - 12w - \frac{48}{w} - 16 = 0 \leftrightarrow \\ w^6 - 16w^3 + 64 = 0 &\therefore (w^3 - 8)^2 = 0 \leftrightarrow w^3 = 8 \end{aligned}$$

Assim, escrevemos $y = 2 + \frac{4}{2} = 4$ e $x = 4 - 1 = 3$, que é uma solução para $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 27$. Para encontrar as outras raízes, Redfield emprega as fórmulas de Cardano para $y^3 - 12y - 16 = 0$. Ele argumenta que 4 e $2\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{-3}}{2}\right) + 2\left(\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{-3}}{2}\right) = -2$ são raízes desta equação.

Dessa forma, as soluções de $x^3 + 3x^2 - 9x - 27 = 0$ são ± 3 . Realizando a divisão deste polinômio por $(x-3)$, Redfield (2001, p. 24) escreve $x^3 + 3x^2 - 9x - 27 = (x-3)(x^2 + 6x + 9) = (x-3)(x+3)^2$.

EXEMPLO 3:

Redfield (2001, p. 24) discute o seguinte polinômio: $P(x) = x^3 - 3x^2 + x - 3$.

SOLUÇÃO:

Para usar as fórmulas de Cardano, substituímos:

$$x = y - \frac{-3}{3} = y + 1. \therefore P(x) = x^3 - 3x^2 + x - 3$$

$$P(y+1) = (y+1)^3 - 3(y+1)^2 + (y+1) - 3 \leftrightarrow$$

$$y^3 - 2y - 4 = 0. \therefore y = w - \frac{-2}{3w} = w + \frac{2}{3w}$$

Substituindo mais uma vez, temos:

$$y^3 - 2y - 4 = 0 \leftrightarrow \left(w + \frac{2}{3w}\right)^3 - 2\left(w + \frac{2}{3w}\right) - 4 = 0$$

$$w^3 + \frac{8}{27w^3} - 4 = 0 \leftrightarrow w^6 - 4w^3 + \frac{8}{27} = 0$$

Resolvendo, temos:

$$w^3 = \frac{4}{2} \pm \frac{\sqrt{16 - 4 \cdot \frac{8}{27}}}{2} = 2 \pm \frac{10}{9}\sqrt{3}$$

Assim, as soluções de

$$P(x) = x^3 - 3x^2 + x - 3 \text{ serão}$$

$$\sqrt[3]{2 + \frac{10}{9}\sqrt{3}} + \sqrt[3]{2 - \frac{10}{9}\sqrt{3}} + 1 \text{ e}$$

$$\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{-3}}{2}\right) \sqrt[3]{2 + \frac{10}{9}\sqrt{3}} + \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{-3}}{2}\right) \left(\sqrt[3]{2 - \frac{10}{9}\sqrt{3}} + 1\right).$$

Por outro lado,

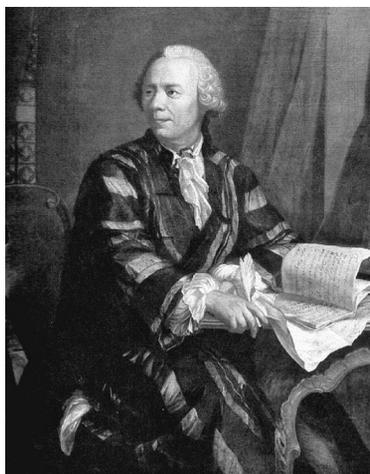
$$P(3) = 3^3 - 3 \cdot 3^2 + 3 - 3 = 0. \therefore P(x) = (x-3)(x^2+1) = (x-3)(x-\sqrt{-1})(x+\sqrt{-1})$$

possui raízes $3, \sqrt{-1}, -\sqrt{-1}$.



SAIBA MAIS!

O Teorema Fundamental da Álgebra (abreviadamente, TFA) é atualmente conhecido como a proposição de que todo o polinômio complexo não constante, numa indeterminada, possui, pelo menos, uma raiz complexa. Mais http://www.amma.com.pt/cm/af33/trf1/trigo_p79-84.htm



Fonte: <https://pt.wikipedia.org>

Figura 7: Gravuras de Gaus e Euler

UM POUCO DE HISTÓRIA

Gauss voltou posteriormente a fazer mais três demonstrações do TFA, a última das quais em 1849. A questão essencial era a da decomposição em fatores reais (isto é, com coeficientes reais) lineares ou quadráticos (quer dizer, de uma das formas $ax + b$ ou $ax^2 + bx + c$), questão que é, aliás, equivalente à da existência de raízes em \mathbb{C} . Naquela época, a Álgebra ainda era entendida como essencialmente a teoria dos polinômios com coeficientes reais ou complexos ou, se quisermos, como a teoria das equações algébricas, sendo o TFA considerado como o teorema fundamental desta teoria. Mas, ao contrário da ênfase que tinha sido posta no passado, não era tanto a obtenção de soluções de equações da forma $P(x) = 0$ como a questão da existência de soluções (em \mathbb{C}) que ocupava o centro do interesse de Gauss, pois, mesmo para Binômios da forma $x^n - a$, com $n \geq 5$, a existência de raízes era considerada uma questão longe de trivial.

Na primeira parte da tese de Gauss, ele critica e aponta as deficiências das “demonstrações” propostas por Euler e por D’Alembert (bem como as de outros matemáticos), mas reconhece o valor da ideia principal da argumentação de D’Alembert e exprime a sua convicção de que ela pode ser elaborada de modo a produzir uma demonstração rigorosa. É exatamente isso que Argand consegue fazer em 1814.

Em todas as demonstrações conhecidas até ao presente há, todavia, um elemento comum, que é o fato de todas elas utilizarem algum método ou conceito essencialmente analítico, no sentido de não algébrico, embora o enunciado do TFA (sob qualquer das formas possíveis $\frac{3}{4}$ existência de raiz complexa, ou decomposição em fatores reais lineares ou quadráticos) pareça ser de natureza inteiramente algébrica.

http://www.amma.com.pt/cm/af33/trf1/trigo_p79-84.htm

No próximo tópico, discutiremos alguns aspectos históricos sobre o surgimento dos números complexos.

TÓPICO 3

O surgimento dos complexos

OBJETIVO

- Discutir o surgimento da noção de números complexos

A apresentação dos números complexos na escola é problemática e, de forma até redundante, diríamos que é complexa a situação do seu ensino. Isto se deve, em grande parte, ao modo pelo qual o conteúdo é apresentado nos livros escolares e à insuficiência do saber matemático específico em relação a este conceito no âmbito da formação do professor.

Por outro lado, no âmbito da história da Matemática, segundo Rosa (1998, p. 49), “o surgimento dos números complexos começa com os trabalhos de Raphael Bombelli, um admirador da obra *Ars Magna* de Cardano”. Rosa decidiu escrever um livro sobre o assunto de modo mais claro, para que um principiante pudesse obter algum entendimento.

Bombelli publicou *L'Algebra*, em 1572, na cidade de Veneza. Ao analisar a cúbica $x^3 = 15x + 4$ e resolvendo-a com o uso da fórmula de Cardano, encontrou

a seguinte expressão: $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$. Conforme Servelli (1998, p. 50),

ele percebeu que $x = 4$ era uma solução para tal equação. Surge então, pela primeira vez, uma situação na qual apesar do resultado apresentar raízes quadradas de números negativos, existe verdadeiramente uma solução para ela. Tal fato estimula a Bombelli tentar compreender o que esta acontecendo.

Kleiner (2007, p. 7) declara que “Bombelli, por meio destas argumentações, forneceu sentido a algo sem sentido, por pensar sobre o impensável, nomeando raízes quadradas de números negativos e manipulando de certo modo que se obtinha resultados significantes”.

Frequentemente encontramos nos livros didáticos a equação $x^2 + 1 = 0$ que motiva, segundo vários autores e a metodologia de muitos professores, o surgimento dos números complexos. Neste sentido, Berlinghoff e Gouvêa (2004, p. 177) sublinham que a reação mais esperado dos estudantes diante desta questão é: Por quê?

Com referência ao mesmo problema, Lima (2001, p. 215) apresenta a seguinte crítica:

A apresentação dos Números Complexos nos livros didáticos tem sido insatisfatória. A abordagem costuma ser meramente algébrica, e o número 'i' “cai do céu”. Sente-se uma pressa em livrar-se dessas dificuldades iniciais, e cair o mais rápido possível nos exercícios do tipo: “calcule $\frac{2+i}{3-2i}$ ”, etc. [...] enquanto muitos livros afirmam, sem maiores explicações, que os números complexos nasceram da necessidade de resolver equações do 2º grau com discriminante negativo, o presente livro ressalta corretamente que esta necessidade só surgiu no contexto de resolução de equações do 3º grau.

O fato é que, durante alguns séculos, matemáticos de reconhecida capacidade empregavam, calculavam e obtinham resultados a partir de números do tipo $\sqrt{-1}$. De fato, Berlinghoff e Gouvêa (2004, p. 177) relatam que, certa vez, Girolamo Cardano lançou-se à investigação do seguinte problema: encontrar dois números cuja soma vale 10 e o seu produto vale 40. Os autores destacam que Cardano concluiu não existirem tais entidades que satisfazem ao questionamento.

De fato, admitindo a existência de solução para o problema, Girolamo Cardano encontrou as expressões $5 + \sqrt{-15}$ e $5 - \sqrt{-15}$ graças à fórmula quadrática. *Ele*

manifesta aversão à falta de sentido relacionado com o cálculo de tais expressões e repudia este tipo de jogo intelectual. Em outro livro, Cardano diz que $\sqrt{9}$ vale $+3$ ou -3 , todavia $\sqrt{-9}$ não é nem $+3$ e -3 , mas sim um tipo de coisa misteriosa (BERLINGHOFF; GOUVÊA, 2004, p. 177).

Berlinghoff e Gouvêa (2004, p. 177) recordam um fato semelhante que envolveu ninguém menos do que Réne Descartes (1596-1650), que, no século XVII, indicava que, para encontrar os pontos de interseção entre uma circunferência C e uma linha r (figura 8), encontramos uma equação quadrática, e tal equação conduz a raízes quadradas de grandezas negativas justamente quando $C \cap \{r\} = \emptyset$. Assim, para a maior parte, o sentimento de aparência de soluções “impossíveis” ou “imaginárias” já dava um sinal de que o problema não possuía qualquer solução.

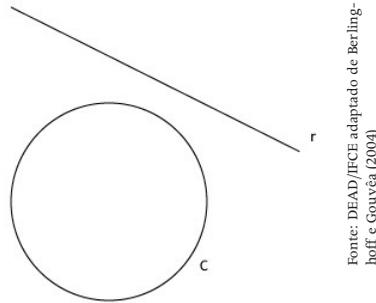


Figura 8: Figura concebida por Descartes

Mesmo diante de um quadro de cautela e negação destas novas entidades conceituais, Bombelli admite então a possibilidade da existência de uma expressão do tipo $a + \sqrt{-b}$ que seja a raiz cúbica de $2 + \sqrt{-121}$. Assim, temos $(a + \sqrt{-b})^3 = 2 + \sqrt{-121}$. A partir daí, evidenciamos a genialidade do matemático em questão. De fato, para calcular essa raiz, ele supõe que a raiz cúbica de $2 - \sqrt{-121}$ seja $a - \sqrt{-b}$ e, pelo fato de que $x = 4 \rightarrow 4^3 = 15 \cdot 4 + 4$ é uma raiz, temos que ter $2a = (a + \sqrt{-b}) + (a - \sqrt{-b}) = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = x = 4 \therefore a = 2$.

Tendo este resultado, ele retornou a $(2 + \sqrt{-b})^3 = 2 + \sqrt{-121}$ para encontrar o valor de b , do seguinte modo:

$$8 + 12\sqrt{-b} - 6b - b\sqrt{-b} = 2 + \sqrt{-121}$$

$$8 + 12\sqrt{b}\sqrt{-1} - 6b - b\sqrt{b}\sqrt{-1} = 2 + 11\sqrt{-1}$$

Assim, resulta o sistema
$$\begin{cases} 8 - 6b = 2 \\ 12\sqrt{b} - b\sqrt{b} = 11 \end{cases} \therefore b = 1. \text{ Servelli (1998, p. 50)}$$

relata que Bombelli obteve $(2 + \sqrt{-1}) = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}}$, e analogamente temos $(2 - \sqrt{-1}) = \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$. Atônito com tal descoberta, Bombelli declara: *Eu achei uma espécie de raiz cúbica muito diferente. A princípio a coisa toda me pareceu baseada em sofismas, mas eu procurei até que achei uma prova* (SERVELLI, 1998, p. 50).

Segundo Kleiner (2007, p. 8),

Bombelli inicia o cálculo de números complexos por meio das regras iniciais: $(+\sqrt{-1})(+\sqrt{-1}) = -1$ e $(+\sqrt{-1})(-\sqrt{-1}) = 1$. E definiu a adição e multiplicação para números complexos específicos. Nos próximos dois séculos os complexos permaneceram um mistério, até que em 1831, Gauss os representou no plano.

Rosa (1998, p. 52) sublinha que:

Com seu raciocínio engenhoso, Bombelli mostrou, seu papel importante, que os números conjugados iriam desempenhar no seu futuro; mas na época a observação não ajudou na operação efetiva de resolver equações cúbicas, pois Bombelli precisava saber antecipadamente o valor de uma de suas raízes. Mas aí a equação já estaria resolvida, e não se precisaria da fórmula. Qualquer tentativa para achar algebricamente as raízes cúbicas dos números imaginários na regra de Cardano leva à própria equação cúbica.

No excerto, Rosa(1998) destaca o trabalho particular de Rafaell Bombelli, todavia um movimento semelhante pode ser observado por matemáticos em outros períodos e civilizações. Na dissertação da Silva (2005, p. 23), encontramos alguns comentários esclarecedores a este respeito:

Historicamente, várias civilizações vêm trabalhando diversas representações que possibilitaram a construção de um sistema com propriedades que expressam a mensurabilidade dos fenômenos, através de representação matemática. A evolução das ideias incorporadas pela cultura matemática gerou classificações bem ordenadas para os fenômenos e foram organizadas e denominadas, conforme as suas particularidades, em: números naturais, inteiros, racionais e reais. O avanço do conhecimento, porém, ressentiu-se de respostas a novos problemas e a Matemática, como ressaltamos anteriormente, expandiu a noção de número relacionando algebricamente o número real a certo número imaginário – os números complexos. Um número complexo é um número composto por uma parte real com formas de representações reais e uma parte concebida mentalmente. A História da Matemática, particularmente a História do Conhecimento dos Números Complexos, foi sendo construída num processo de evolução muito longo, o qual não é objeto de nosso trabalho, embora sejam alguns dados que julgamos importantes para a compreensão dos números complexos pelos alunos. Nossa concepção é, portanto, de que a História da Matemática é um recurso motivador que serve para desenvolver raciocínios lógicos, mostrar a Matemática como uma forma de comunicação humana e ensinar conceitos matemáticos.

As considerações de Silva são esclarecedoras e indicam as limitações dos métodos matemáticos daquela época. De modo específico, Silva (2005, p.109) esclarece que:

Os alunos do ensino secundário não passam pelas hesitações de Bombelli, antes de publicar os seus trabalhos, nem pelos escrúpulos Cartesianos, ou pelas audácias Gaussianas. Em compensação, parece-me desejável que os alunos leiam alguns textos onde esteja presente a construção da teoria dos números. A história dos problemas irá certamente contribuir para uma melhor percepção do processo de construção dos conceitos, ao descrever as surpresas, as limitações, as estratégias utilizadas para contornar o problema, o enquadramento na teoria mais vasta.

A autora acrescenta que as tentativas para a implementação de uma proposta metodológica em Portugal de uma efetiva aplicação em sala de aula tem sido tímida. Parte destes entraves pode ser identificada como relacionada às próprias características epistemológicas destes objetos.

No campo operatório, as transformações conceptuais para a aceitação dos complexos têm de ser ainda mais radicais. Por exemplo, o argumento da soma não é a soma dos argumentos; as partes reais e imaginárias do produto não são os produtos respectivos das partes reais e imaginárias. É necessário renunciar à relação de ordem e, por outro lado, dissociar a relação de ordem das operações. A representação geométrica das operações implica uma concepção dinâmica dessas mesmas operações: a adição associada à construção do paralelogramo de forças paralelas estudadas em mecânica e a multiplicação apoiada na rotação em torno da origem das coordenadas. Considerados geometricamente, os complexos têm lugar num plano concebido dinamicamente, onde traduzem movimento.

Aleksandrov; Kolmogorov; Lavrent'ev (1963, p. 269) lembram que, pouco depois da resolução da cúbica, com Ferrari (1522-1565), a quártica (equações de grau quatro) é também resolvida por meio de radicais. O método de Ferrari considera $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \rightarrow x^4 + ax^3 = -bx^2 - cx - d$. E adicionando a expressão $\frac{a^2x^2}{4}$ em ambos os lados, teremos:

$$\left(\frac{a^2x^2}{4}\right) + x^4 + ax^3 = \left(\frac{a^2x^2}{4}\right) - bx^2 - cx - d$$

$$\left(x^2 + \frac{ax}{2}\right)^2 = x^4 + 2 \cdot x^2 \cdot \frac{ax}{2} + \frac{a^2x^2}{4} = [x^4 + ax^3 + \frac{a^2x^2}{4}] = \left(\frac{a^2}{4} - b\right)x^2 - cx - d$$

Agora, adicionaremos a ambos os lados da equação a expressão $\left(x^2 + \frac{ax}{2}\right)y + \frac{y^2}{4}$, onde y é uma nova variável à qual impomos a condição que tenhamos do lado esquerdo um quadrado perfeito. Assim teremos:

$$\begin{aligned}
\left(x^2 + \frac{ax}{2}\right)^2 &= \left(\frac{a^2}{4} - b\right)x^2 - cx - d \\
\left(x^2 + \frac{ax}{2}\right)^2 + \left[\left(x^2 + \frac{ax}{2}\right)y + \frac{y^2}{4}\right] &= \left(\frac{a^2}{4} - b\right)x^2 - cx - d + \left[\left(x^2 + \frac{ax}{2}\right)y + \frac{y^2}{4}\right] \\
\Rightarrow \left(x^2 + \frac{ax}{2}\right)^2 + \left(x^2 + \frac{ax}{2}\right)y + \frac{y^2}{4} &= \left(\frac{a^2}{4} - b\right)x^2 - cx - d + \left(x^2 + \frac{ax}{2}\right)y + \frac{y^2}{4} \\
\Rightarrow \left(x^2 + \frac{ax}{2}\right)^2 + \left(x^2 + \frac{ax}{2}\right)y + \frac{y^2}{4} &= \left(\frac{a^2}{4} - b\right)x^2 - cx + x^2y + \frac{ax}{2}y + \left(\frac{y^2}{4} - d\right) \\
\Rightarrow \left(x^2 + \frac{ax}{2}\right)^2 + \left(x^2 + \frac{ax}{2}\right)y + \frac{y^2}{4} &= \left(\frac{a^2}{4} - b + y\right)x^2 - cx + \frac{ax}{2}y + \left(\frac{y^2}{4} - d\right) \\
\Rightarrow \left(x^2 + \frac{ax}{2}\right)^2 + \left(x^2 + \frac{ax}{2}\right)y + \frac{y^2}{4} &= \left(\frac{a^2}{4} - b + y\right)x^2 + \left(\frac{ay}{2} - c\right)x + \left(\frac{y^2}{4} - d\right)
\end{aligned}$$

Repare agora que:

$$\begin{aligned}
\left(x^2 + \frac{ax}{2} + \frac{y}{2}\right)^2 &= \left(x^2 + \frac{ax}{2}\right)^2 + 2 \cdot \left(x^2 + \frac{ax}{2}\right) \cdot \frac{y}{2} + \frac{y^2}{4} \\
&= \left(x^2 + \frac{ax}{2}\right)^2 + \left(x^2 + \frac{ax}{2}\right) \cdot \frac{y}{1} + \frac{y^2}{4}
\end{aligned}$$

Concluindo, observamos que reduzimos o problema de uma para duas incógnitas. No lado direito de $\left(x^2 + \frac{ax}{2} + \frac{y}{2}\right)^2$, temos um trinômio quadrático em x , cujos coeficientes dependem de y . Escolhemos, então, em $\left(\frac{a^2}{4} - b + y\right)x^2 + \left(\frac{ay}{2} - c\right)x + \left(\frac{y^2}{4} - d\right)$ um y de modo que se torne um quadrado de 1º grau, ou seja, $\frac{a^2}{4} - b + y = 0 \Leftrightarrow y = b - \frac{a^2}{4}$. E neste caso, escrevemos:

$$\begin{aligned}
\left(x^2 + \frac{ax}{2} + \frac{y}{2}\right)^2 &= \\
&= \left(\frac{a^2}{4} - b + y\right)x^2 + \left(\frac{ay}{2} - c\right)x + \left(\frac{y^2}{4} - d\right) \stackrel{\text{condi}^\circ}{\Leftrightarrow} 0 \cdot x^2 + \left(\frac{ay}{2} - c\right)x + \left(\frac{y^2}{4} - d\right)
\end{aligned}$$

Por outro lado, para chegarmos a tal condição, observando a equação $Ax^2 + Bx + C$, se tornar algo do tipo $\alpha \cdot x + \beta$ é suficiente que $B^2 - 4AC = 0$. De fato, Aleksandrov, Kolmogorov e Lavrent'ev (1963, p. 269) argumentam que, se $B^2 - 4AC = 0 \therefore B = 2\sqrt{AC} \rightarrow (\sqrt{Ax} + \sqrt{C})^2 = Ax^2 + 2\sqrt{AC}x + C^2 = Ax^2 + Bx + C$, temos $\left(\sqrt{\quad} + \sqrt{\quad}\right)^2 = \left(\quad\right)^2$, onde $\alpha = \sqrt{A}$ e $\beta = \sqrt{C}$.

Consequentemente, se escolhermos na equação anterior $\left(\frac{a^2}{4} - b + y\right)x^2 + \left(\frac{ay}{2} - c\right)x + \left(\frac{y^2}{4} - d\right)$ comparada com $Ax^2 + Bx + C$, devemos

impor que $B^2 - 4AC = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{ay}{2} - c\right)^2 - 4\left(\frac{a^2}{4} - b + y\right)\left(\frac{y^2}{4} - d\right) = 0$. Escrevemos agora que:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{ay}{2} - c\right)^2 - 4\left(\frac{a^2}{4} - b + y\right)\left(\frac{y^2}{4} - d\right) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{a^2y^2}{4} - 2c \cdot \frac{ay}{2} + c^2\right) - 4\left(\frac{a^2}{4} \frac{y^2}{4} - b \frac{y^2}{4} + y \frac{y^2}{4}\right)\left(-d \frac{a^2}{4} + bd - yd\right) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{a^2y^2}{4} - acy + c^2\right) - \left(\frac{a^2y^2}{4} - by^2 + y^3\right)\left(-\frac{a^2d}{4} + bd - yd\right) = 0 \Leftrightarrow \\ &\left(\frac{a^2y^2}{4} - acy + c^2\right) \\ &- \left(\frac{a^4y^2d}{16} + \frac{a^2y^2bd}{4} - \frac{a^2y^3d}{4} + \frac{a^2y^2bd}{4} - b^2y^2d + bdy^3 - \frac{a^2y^3d}{4} + bdy^3 - y^4d\right) = 0 \\ &\frac{a^2y^2}{4} - acy + c^2 - \frac{a^4y^2d}{16} - \frac{a^2y^2bd}{4} + \frac{a^2y^3d}{4} - \frac{a^2y^2bd}{4} \\ &+ b^2y^2d - bdy^3 + \frac{a^2y^3d}{4} - bdy^3 + y^4d = 0 \end{aligned}$$

Vejamos o seguinte exemplo discutido por $x^4 + 8x + 4 = 0$. Observemos seu gráfico abaixo.

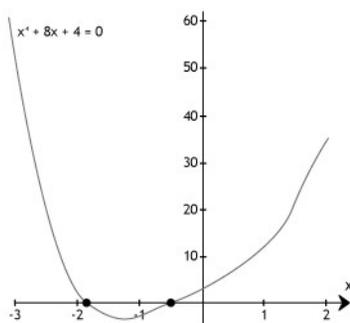


Figura 9: Gráfico de uma quártica

Nessa aula conhecemos um pouco da história e dos métodos analíticos, desenvolvidos por importantes matemáticos, para a resolução de equações polinomiais. Além disso apresentamos a visão de alguns autores a respeito desse assunto. Espero que tenha ficado curioso a buscar mais informações sobre o conteúdo. Até a próxima aula.

AULA 6

História da matemática como metodologia de ensino da matemática

Olá aluno(a)!

Nesta nossa última aula, apresentaremos discussões em torno do uso/exploração e aplicação de um ensino de História da Matemática por meio de sua história. Destacaremos mais uma vez a inexequibilidade da exploração do que discutimos até o momento, em sala de aula, sem o estudo dos modelos e problemas (Aritmética, Álgebra e Geometria) de Matemática. Para finalizar, abordaremos alguns aspectos metodológicos e as barreiras no âmbito da formação de professores, que, muitas vezes, impedem uma exploração efetiva do que estudamos até este ponto.

Objetivo

- Discutir problemas na formação de professores

TÓPICO 1

Problemas na formação de professores de matemática

OBJETIVO

- Discutir problemas relacionados com a formação de professores e a instrumentalização dos conteúdos de História da Matemática

No prefácio de sua obra intitulada *A History of Elementary Mathematics with Hints on Methods of Teaching*, o matemático suíço Florian Cajori (1859-1930) aconselhava que:

A educação de uma criança deveria ser de acordo tanto com o modo de consideração da educação tomando-a historicamente; em outras palavras, a gênese do conhecimento de um indivíduo devia seguir o mesmo curso da gênese do conhecimento na raça. [...] Se este princípio sustentado por Pestalozzi a Froebel estivesse correto, então pareceria que o conhecimento da história da ciência deve ser um efeito casual no ensino da ciência. Sendo tal doutrina verdadeira ou falsa, certamente que a experiência de muitas instruções estabelece a importância da História da Matemática no ensino (CAJORI, 1896, prefácio).

Fica evidente, desde o início de sua obra sui generis na área de História da Matemática – HM, a preocupação de Cajori com o ensino dessa disciplina em nível elementar, apoiada no contexto histórico evolutivo. Notamos a importância dada pelo autor, à compreensão da evolução do conhecimento no indivíduo, tal qual a evolução de sua raça.

Por outro lado, Cajori delinea uma preocupação extra, além de simplesmente buscar compreender a evolução do saber e, em particular, do saber matemático. De fato, Cajori se dedica aos métodos de ensino de Matemática referendados numa perspectiva histórica. Além disso, ainda identificamos, em suas obras emblemáticas (1952a; 1952b), considerações sem precedentes a respeito da evolução das formas de cognição humana e das notações matemáticas.

Vale destacar que parte de suas ideias e de outros investigadores do século passado preserva seu valor contemporâneo quando encontramos trabalhos acadêmicos (REED, 2007. p. 134) que apontam os seguintes aspectos relevantes do emprego da HM no ensino:

- A história pode aumentar a motivação do estudante e desenvolver uma atitude positiva com respeito à Matemática;
- Alguns obstáculos do passado podem auxiliar na compreensão do motivo pelo qual determinados tópicos se apresentam como problemáticos para os estudantes e isto pode conduzir os professores ao desenvolvimento de metodologias mais apropriadas que possibilitem a superação destes entraves;
- A história possibilita a compreensão do pensamento real e originário do matemático, as razões que o conduziram na elaboração e concepção de determinados modelos, além dos simples algorítmicos.

Em sua tese de doutoramento, Reed (2007) se referenda nos trabalhos de Barbin (2000), que, semelhantemente ao professor Florian Cajori, nos fornece considerações atualizadas com respeito à integração da história ao ensino de Matemática. Neste sentido, Barbin (2000, p. 80) destaca que:

Um grande número de artigos tem aparecido em quantidade crescente nestes tempos, incluindo reflexões de experiências de ensino. Este material fornece argumentos diferentes a favor da inclusão da dimensão histórica no ensino de matemática, e frequentemente contém razões do motivo pelo qual o professor acredita ser efetivo.

Fica explícita, então, a partir das considerações de Reed (2007) e Barbin (2000), bem como de outros investigadores em História da Matemática, a dimensão histórico-epistemológica no âmbito do ensino do saber matemático. Note-se que não podemos perder de vista o sentido do significado do saber matemático, tanto

no que diz respeito ao professor, quanto no que diz à figura não menos importante, que é a do estudante.

Nesse sentido, a abordagem por meio da História da Matemática pode fornecer um sentido/significado mais amplo e conceitualmente rico para ambos os atores. Por outro lado, quando falamos de “sentido” ou “significado”, vale destacar que “estas noções são baseadas no assunto e no objeto do conhecimento” (RADFORD, 2006, p. 40). Além do mais, o “significado” adquirido por um assunto ou por um objeto do conhecimento, neste caso do professor de Matemática, pode ser compreendido como um ato intencional, que sempre envolve uma construção subjetiva.

Aqui deparamos com um sério problema, uma vez que a ação didático-metodológica do professor nem sempre envolve um “ato intencional” que acrescente uma valorização do viés histórico. Vale observar que, quando falamos sobre o professor de Matemática, não podemos negligenciar que esse profissional manifesta as concepções construídas no decorrer de seu processo formativo e as fontes de referência teórica que marcaram o seu conhecimento acadêmico. Por outro lado, somos conscientes de determinados problemas apontados Ocanã (2002), Gaspar (2003), Bianchi (2006) e Feliciano (2008). Estes dois últimos investigadores alertam respectivamente para o fato de que:

Alguns historiadores da Matemática discutem como a presença da HM aparece nos Livros Didáticos, mencionando muitas vezes que estes itens se encontram soltos, sem articulação com o conteúdo. [...] Muitas vezes a ideia que o aluno tem do conteúdo é de que foi inventado por apenas uma pessoa e totalmente por acaso (BIANCHI, 2006, p. 84).

Alguns exemplos de uso da História da Matemática em sala de aula retratados no livro de Fauvel & Van Maanen (2000) trazem conclusões desanimadoras com relação a esse uso, sendo uma das limitações para o desenvolvimento desse trabalho, a falta de preparo do professor. Sugerem que a História da Matemática não deve ser incluída no currículo oficial, pois para isso necessitaria que os professores tivessem um treinamento sólido e específico, a este respeito (FELICIANO, 2008, p. 104).

Nos excertos acima identificamos elementos preocupantes nas afirmações de Bianchi (2006) e de Feliciano (2008). De fato, uma vez que o professor disponha somente de livros didáticos com a sua estrutura condenada acima por Bianchi e deparamos com concepções indesejadas manifestas pelos estudantes, como proceder diante do seu despreparo?



SAIBA MAIS!

Acesse o site: <http://portal.mec.gov.br/index.php?Itemid=313> e obtenha mais informações sobre o ENADE.

Se tencionarmos evitar determinadas ideias equivocadas nos estudantes e instrumentalizar o universo de reflexão do professor para que identifique determinadas falhas conceituais e estruturais nos livros didáticos, é necessária uma ação prática e situada por parte dos formadores de professores de Matemática. Entretanto, nem mesmo as obras na área de HM proporcionam um

saber de caráter situacional e prático para o futuro professor. Neste sentido, Neto (2009, p. 90) alerta que:

Ao estudar estes livros selecionados constatamos que poucas as obras instrumentalizam o professor de maneira mais direta, com propostas já prontas para a aplicação em sala de aula. [...] Nota-se, entretanto, que a maioria das obras busca uma reflexão acerca de temas históricos, onde a preocupação com fatores práticos para a implantação da abordagem histórica é inexistente ou pouco aparece.

Neto ainda acrescenta outro quadro preocupante. Notamos que, em muitos casos, diante do grau limitado de discernimento do recém formado no que diz respeito ao “como”, “onde” e “de que modo” desenvolver uma aula, o professor necessita de um “recurso de apoio” envolvendo HM com um viés de aplicação imediata em sala de aula. Mas na prática o futuro docente dificilmente contará com este suporte prático-teórico inicial, embora os exames oficiais, como no caso do Exame Nacional de Desempenho de Estudantes – ENADE (Figura 1), exijam habilidades diversificadas, como podemos ver no exemplo de um trecho da prova do referido exame.

Fonte: Enade (2008)

QUESTÃO 30

As potencialidades pedagógicas da história no ensino de matemática têm sido bastante discutidas. Entre as justificativas para o uso da história no ensino da matemática, inclui-se o fato de ela suscitar oportunidades para a investigação. Considerando essa justificativa, um professor propôs uma atividade a partir da informação histórica de que o famoso matemático Pierre Fermat [1601-1665] que se interessava por números primos, percebeu algumas relações entre números primos ímpares e quadrados perfeitos.

Para que os alunos também descobrissem essa relação, pediu que eles completassem a tabela a seguir, verificando quais números primos ímpares podem ser escritos como soma de dois quadrados perfeitos. Além disso, solicitou que observassem alguma propriedade comum a esses números.

3	5	7	11	13	17	19	23	29
	1+4			4+9	1+16			
não	sim	não	não	sim	sim			

A partir da atividade de investigação proposta pelo professor, analise as afirmações seguintes:

- I Todo Número primo da forma $4n + 1$ pode ser escrito como a soma de dois quadrados perfeitos.
- II Todo Número primo da forma $4n + 3$ pode ser escrito como a soma de dois quadrados perfeitos.
- III Todo Número primo da forma $2n + 1$ pode ser escrito como a soma de dois quadrados perfeitos.

Figura 1: Enade (2008, p. 13)

Com respeito a determinados entraves relacionados à formação de professores em torno dos conteúdos de História da Matemática, Feliciano (2008, p. 104) identificou no seu estudo empírico que:

Sobre os professores entrevistados, nenhum dos nove docentes considerados demonstraram dominar e utilizar, de fato, a História da Matemática como recurso pedagógico, uma vez que nenhum deles retrata alguma experiência que comprove esse domínio. Eles apostam no valor didático da História da Matemática, mas evidenciam que não têm condições para efetua-lo. Dão indícios de que é necessário um apoio de instituições de ensino superior, de modo a capacitá-los para o trabalho histórico-pedagógico do conteúdo matemático. Vêem necessidade de materiais que sejam voltados ao professor de Matemática, com uma linguagem acessível e que possa ser utilizado dentro da sala de aula. Todavia, um elemento ao qual se deve dar toda a atenção é à presença da História da Matemática no processo de formação.

Os dados identificados por Feliciano são recorrentes em várias instituições de ensino superior (IES) no Brasil. De fato, em várias disciplinas acadêmicas, o futuro professor é instrumentalizado com respeito a um conhecimento informacional vinculado a determinado assunto, todavia o conhecimento operacional que subsidiará as ações efetivas em sala de aula, o gerenciamento efetivo das aprendizagens no transcorrer de uma aula é, na maioria dos casos, negligenciado. Reparamos que o saber relacionado aos conteúdos de HM é apenas mais um exemplo deste quadro de negligência.

No próximo tópico, abordaremos alguns pontos de vista mais pertinentes a uma proposta metodológica para sua exploração em sala de aula. Para concluir este tópico, destacamos os conselhos de Dambros (2006, p. 40), para um ensino mais produtivo:

- Mencione anedotas de matemáticos do passado;
- Faça introduções históricas a conceitos que são novos aos alunos;
- Encoraje os alunos a buscar entender os problemas históricos para os quais os conceitos que eles estão aprendendo são respostas;
- Dê lições de “história da matemática”;

- Conceber, em sala de aula ou como lição de casa, exercícios usando textos matemáticos do passado;
- Dirija atividades dramáticas que reflitam a interação matemática;
- Encoraje a criação de cartazes ou outros projetos com um tema histórico;
- Desenvolva projetos sobre atividades matemáticas locais no passado;
- Use exemplos críticos do passado para ilustrar técnicas ou métodos;
- Explore visões de concepções falsas/erros/alternativas do passado para ajudar a entender e solucionar as dificuldades dos estudantes de hoje;
- Invente uma abordagem pedagógica para um tópico com base em seu desenvolvimento histórico;
- Faça a ordenação e estruturação dos tópicos do programa baseando-se em informações históricas.

Após estas considerações de ordem metodológica, que podem se tornar inférteis sem o estudo da própria Matemática, apresentaremos no tópico seguinte um princípio educativo a ser explorado no ensino de Matemática por meio de sua história.

TÓPICO 2

História da matemática como metodologia de ensino e o princípio genético

OBJETIVO

- Discutir o princípio genético no ensino por meio de sua história

Em sua tese de doutorado, Dambros (2006) desenvolveu uma pesquisa em torno do uso da História da Matemática no ensino de Matemática. No capítulo 2, a autora discute o Princípio Genético originado a partir das ideias de Ernest Haeckel. Dambros explica que:

O Princípio Genético foi baseado nas ideias de Ernest Haeckel (1834- 1919), defensor da teoria da evolução natural de Charles Darwin (1809-1882). Haeckel, em seus estudos, buscou reconstituir o ciclo completo de evolução dos seres vivos desde os animais unicelulares até o homem. Baseado nesses estudos e nas ideias de Darwin, passou a defender que um embrião, ao se desenvolver, passa por todos os estágios evolutivos de seus ancestrais. Haeckel colocava o homem no alto da cadeia genealógica, considerando o progresso humano como uma consequência da evolução. Foi na obra “Os Enigmas do Universo” que ele expôs essas ideias condensando-as na chamada “lei biogenética fundamental”, a qual, dizia que os seres vivos, ao longo do processo individual de desenvolvimento (ontogênese), recapitulam estágios do desenvolvimento da espécie (filogênese) (DAMBROS, 2006, p. 21).



VOCÊ SABIA?

Haeckel nasceu em Potsdam, no dia 16 de fevereiro de 1834. A sua obra principal é a História da Criação dos seres organizados. Vêm, a seguir, pela ordem da importância científica, a Antropogenia e a Filogenia sistemática. É aí que se condensa a sua teoria biológica.

Fonte: <http://www.infoescola.com/biografias/ernest-haeckel/>

A autora resgata vários autores que proporcionam uma interpretação moderna do referido princípio, como: “o aprendizado efetivo requer que cada aprendiz refaça os principais passos na evolução histórica do assunto estudado”. Na educação matemática, foi utilizada por muitos para justificar “cientificamente” a necessidade dos estudos históricos em Matemática. Há que se considerar que, à época em que o *princípio genético* foi elaborado, havia a forte influência da corrente filosófica conhecida como positivismo. É importante conhecer um pouco desse momento histórico e, principalmente, as consequências disso em solo brasileiro.

Fonte: <http://www.rioeduca.net/blog/Views.php?id=1129>



Figura 2: Euclides Roxo

De fato, no Brasil, uma figura a se destacar que foi influenciada por esse princípio foi Euclides Roxo (1890-1950). Roxo foi professor de Matemática, diretor do Colégio Pedro II, de 1925 a 1935, e autor de diversos trabalhos, dentre os quais a coleção de livros de Matemática “Curso de Matemática Elementar”, de 1929. O *princípio genético* aparece nos escritos de Roxo por meio dos trabalhos de Klein e Poincaré, na sua defesa pelo uso do “método histórico” no ensino. Foi catedrático do Colégio Pedro II, autor de livros textos de Matemática e de diversos artigos, além de ter ocupado outros cargos “que evidenciavam sua participação política”.

Fonte: <https://pt.wikipedia.org>



Figura 3: Poincaré

Vale observar que o Imperial Colégio de D. Pedro II foi criado em 1837, com o intuito de servir de modelo para as escolas secundárias do País. Segundo Valente (1999), as condições de ingresso nesse colégio praticamente definiam o que se deveria entender por escolarização primária em Matemática, a qual consistia em contar e ter conhecimento das quatro operações fundamentais da aritmética. O ensino nesse colégio servia como referência para os livros didáticos. Porém, a visão intelectualista de que o ensino deveria passar pelas principais etapas do desenvolvimento histórico da Matemática acabou influenciando, apenas superficialmente, o ensino da Matemática da época, restringindo-se, quase que exclusivamente, ao acréscimo de trechos sobre a história da Matemática em alguns livros.

Nos dias atuais, identificamos com facilidade o caráter superficial e episódico assumido pela exploração do caráter histórico dos conteúdos. Neste sentido, Dambros (2006, p. 36) sublinha ainda que:

Uma outra forma de entender a importância da história da matemática para o ensino de matemática, surge das pesquisas que relacionam a epistemologia, a filosofia, a história da matemática e a educação matemática, e que buscam ver na matemática, não apenas o seu produto final, mas também o seu processo de criação, e não apenas nas suas relações internas, também em todas as suas relações externas. A matemática, concebida desse modo, revelaria toda a sua força social e cultural, levando o professor à compreensão de que o seu trabalho com matemática em sala de aula não é neutro. Pelo contrário, o conhecimento matemático pode ser uma agente de transformação individual e consequentemente social.

Em suas ponderações, sublinhamos a ênfase dada pelo autor ao comentar todo o interesse por parte dos pesquisadores na atualidade para a compreensão das potencialidades de sua exploração em sala de aula. De fato, Feliciano (2008, p. 105) nos fornece dados empíricos reveladores ao comentar:

Outro ponto se revela, ao analisar as entrevistas dos professores menos experientes, que possuem menor tempo de trabalho. Em vários momentos, demonstram que essa inexperiência faz com que eles não tenham tido tempo de tomar contato com livros didáticos e paradidáticos. Também pode lhes ter faltado tempo apto para desenvolver algum tipo de formação continuada, no sentido de utilizar a História da Matemática. Professores que, como Everton, quando questionado sobre as formas como a História da Matemática poderia ser aproveitada em sala de aula, dizem: “Eu não tenho muita experiência, pode até ser que haja maneiras mais, é... Outras formas melhores de você utilizar (...)”.

Na prática, é complexa a tarefa de implementação efetiva de uma abordagem guiada por meio de um princípio genético ou qualquer outra metodologia de ensino. Na próxima seção, discutiremos uma proposta de exploração efetiva em sala de aula. A referida proposta é guiada pelos pressupostos de uma metodologia de ensino testada há alguns anos no estado do Ceará, na Universidade Federal do Ceará – UFC.

No tópico seguinte veremos um exemplo de aplicação metodológica de História da Matemática.

TÓPICO 3

Uma aplicação de sequência metodológica de ensino por meio de sua história

OBJETIVO

- Apresentar uma aplicação de uma sequência de ensino para conteúdos de História da Matemática

Grugnetti & Rogers (2000, p. 53) explicam que a História da Matemática pode atuar não apenas como um fator de ligação entre tópicos de Matemática, como também as ligações entre a Matemática e outras disciplinas. Os referidos autores desenvolvem uma análise na perspectiva da História da Matemática e discutem como determinados saberes podem ser mediados no ensino.

Entretanto, no âmbito do ensino de Matemática, assumimos a necessidade da adoção de uma proposta metodológica que viabilize a abordagem de conteúdos matemáticos por meio de sua história. Assim, adotaremos a “proposta teórico-metodológica apresentada por um grupo de Educadores Matemáticos do Estado do Ceará” (BORGES et al, 2001, p. 3) denominada *Sequência Fedathi – SF* que possibilita a criação de um clima experimental que retrata o os momentos e as dificuldades enfrentadas por um matemático profissional em busca da constituição de um saber. A referida sequência de ensino prevê os seguintes níveis:

- **Nível 1** Tomada de posição – apresentação do problema ou de um teorema.

Neste nível, o pesquisador-professor apresenta uma situação-problema (possivelmente no âmbito da História da Matemática) para o grupo de alunos, que devem possuir meios de atacar mediante a aplicação do conhecimento a ser ensinado.

- **Nível 2** Maturação – compreensão e identificação das variáveis envolvidas no problema relacionado à História da Matemática (destinado a discussão e debate envolvendo os elementos: professor-alunos-saber).

- **Nível 3** Solução – apresentação e organização de esquemas/modelos que visem à solução do problema. Aqui, os alunos organizados em grupos, devem apresentar soluções e estratégias, que possam conduzir aos objetivos solicitados e convencer com suas argumentações outros grupos.

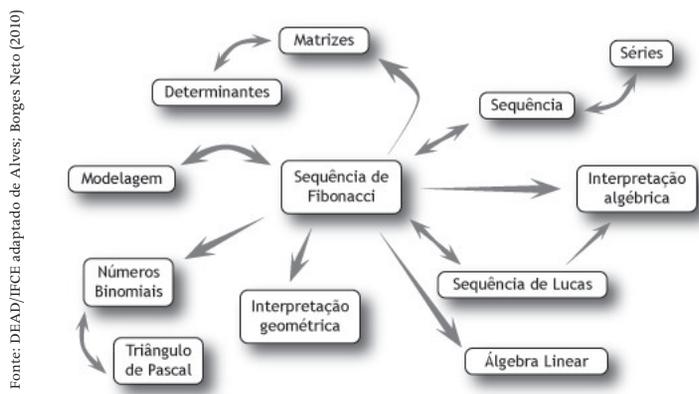
- **Nível 4** Prova – apresentação e formalização do modelo matemático a ser ensinado. Aqui, a didática do professor determinará em que condições ocorrerá a aquisição de um novo *saber* que deve ser confrontado com os saberes matemáticos atuais, inclusive as modificações condicionadas pela evolução e modernização do mesmo.

A adoção de uma proposta metodológica para o ensino das *seqüências de Fibonacci* e de *Lucas* é justificada a partir da evidencia de que, na literatura da área de História da Matemática, obtida por meio de um *levantamento bibliográfico e análise de livros*, ocorre escassez de uma discussão mais aprofundada e das implicações possíveis extraídas a partir das relações conceituais entre as seqüências supracitadas, além do quadro acadêmico preocupante descrito por Bianchi (2006) e Stamato (2003).

Encontramos também nas afirmações de Lima (2001(a)) preocupantes conclusões a respeito da qualidade do livro didático de Matemática, de modo particular, na abordagem de *seqüências numéricas*. Deste modo, de acordo com a sugestão de Lima, desenvolveremos algumas considerações que podem evitar determinadas concepções e hábitos indesejados na aprendizagem dos estudantes.

Uma concepção facilmente identificada diz respeito a um ensino de Matemática que não evidencia as relações conceituais. Deste modo, como descrevemos na Figura 1, discutimos um assunto que possibilita uma ampla ligação conceitual interna à própria Matemática. “Tal ligação precisa ser compreendida de modo local e global por parte do professor interessado em seu ensino” (ALVES; BORGES NETO, 2010, p.3). Além disso, ao observarmos as conexões e implicações possíveis e conhecendo a natureza da complexidade dos conceitos envolvidos, podemos prever os momentos didáticos em que cada noção pode ser explorada e antever os possíveis obstáculos ao aprendizado.

Passamos assim a descrever uma proposta de aplicação teórica dos conteúdos de *sequência de Fibonacci* e de *Lucas*, segundo o modelo que nominamos de “estendido”.



Fonte: DEAD/IFCE adaptado de ALVES; BORGES NETO (2010)

Figura 4: Relações conceituais exploradas (ALVES; BORGES NETO, 2010, p. 5).

Honsberger (1985, p. 104) menciona, sem fornecer muitos detalhes, que, “não existe dificuldade em estender a sequência de Fibonacci no sentido indefinidamente oposto”. De fato, notamos que: $f_1 = f_0 + f_{-1} \therefore f_{-1} = 1$; $f_0 = f_{-1} + f_{-2} \therefore f_{-2} = -1, \dots$, etc. Sucessivamente temos:

$$\{f_{-n}\}_{n \in \mathbb{N}} : \{\dots; f_{-n}; \dots; f_{-8}; f_{-7}; f_{-6}; f_{-5}; f_{-4}; f_{-3}; f_{-2}; f_{-1}; f_0\} \quad (1)$$

$$\{ \dots; \dots; -21; 13; -8; 5; -3; 2; -1; 1; 0\}$$

Destacamos que, em nenhuma das obras consultadas, encontramos a descrição da *sequência de Fibonacci* para o conjunto dos inteiros negativos. Entretanto, usando o mesmo princípio para a forma geral $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, estabelecemos $f_{-n} = f_{-n-1} + f_{-n-2}$, $n \in \mathbb{N}$. Acrescentamos ainda que o modelo matemático descrito por $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, pode ser considerado, numa linguagem atual, como uma singela modelagem da geração de coelhos; todavia, o mesmo não podemos dizer em relação à sequência $\{f_{-n}\}_{n \in \mathbb{N}}$.

De modo análogo, lembrando que $L_1 = L_0 + L_{-1} \therefore L_{-1} = L_1 - L_0 = -1$, temos a seguinte regra $L_{-n} = L_{-n-1} + L_{-n-2}$, para $n \in \mathbb{N}$. Exibimos a sequência:

$$\{L_{-n}\}_{n \in \mathbb{N}} : \{\dots; L_{-n}; \dots; L_{-8}; L_{-7}; L_{-6}; L_{-5}; L_{-4}; L_{-3}; L_{-2}; L_{-1}; L_0\} \quad (2)$$

$$\{ \dots; \dots; \dots; 18; -11; 7; -4; 3; -1; 2\}$$

A vantagem desta formulação pode ser compreendida, por exemplo, a partir da fórmula $f_{n+1} \cdot f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^n$ demonstrada pela primeira vez por *Giovanni Domenico Cassini* (1625-1712), em 1680, como explica Koshy (2007, apud ALVES; BORGES NETO, p. 134). Vamos agora realizar o mesmo raciocínio para a sequência descrita por $f_{-n} = f_{-n-1} + f_{-n-2}$.

SAIBA MAIS!

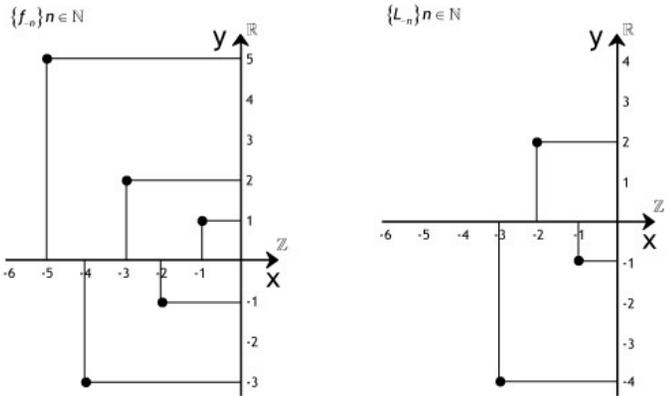
Conheça mais sobre a história do matemático **Giovanni Domenico Cassini** acessando o site <http://www.apprendre-math.info/portugal/historyDetail.htm?id=Cassini>

A matriz adequada será dada por $Q^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 & f_{-1} \\ f_{-1} & f_{-2} \end{pmatrix}$. De modo análogo e com algum esforço, concluímos $Q^n = \begin{pmatrix} f_{-n+1} & f_{-n} \\ f_{-n} & f_{-n-1} \end{pmatrix}$. Aplicando um argumento semelhante ao de Honsberger, obtemos a seguinte identidade $f_{-n+1} \cdot f_{-n-1} = (-1)^n + f_{-n}^2$, para $n \in \mathbb{N}$. Assim, tomando-se os modelos $\{f_{-n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{L_{-n}\}_{n \in \mathbb{N}}$, que chamaremos de “sequências estendidas”, podemos inferir propriedades surpreendentes. Vamos exemplificar nossa afirmação sugerindo o seguinte problema: Qual o comportamento geométrico de $\{f_{-n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{L_{-n}\}_{n \in \mathbb{N}}$?

FAREMOS AGORA O PASSO A PASSO DO PROCESSO METODOLÓGICO DA AULA SOBRE SEQUÊNCIA.

Nível 1 Tomada de posição – apresentação do problema ou de um *teorema*.

Destacamos que tal questionamento é pouco usual. De fato, notamos que a noção de sequência é explorada, eminentemente, “num quadro aritmético e algébrico” (LIMA, 2001(b), p. 123). Assim, a partir da listagem (1) e (2), podemos estimular os estudantes na construção dos seguintes gráficos.



Fonte: DEAD/FECE adaptado de Alves; Borges Neto (2010)

Figura 3: Apresentação geométrica das sequências (ALVES; BORGES NETO, 2010, p. 8).

Certamente que sem o auxílio computacional, não conseguimos descrever o gráfico acima para valores muito grandes. Assim, no nível 2 empregamos o aparato tecnológico.

Nível 2 Maturação – compreensão e identificação das variáveis envolvidas no problema. (Destinado à discussão e debate envolvendo os elementos: *professor-alunos-saber*).

A partir da observação da figura 4, o professor deve salientar aos seus estudantes o caráter limitado e insuficiente, no sentido de prever o comportamento das sequências. Inclusive, usando o *software Maple 10*, notamos que, de modo semelhante ao modelo tradicional, o mesmo fornece apenas os valores positivos da sequência, definida para inteiros positivos. Reparamos as aproximações por casas decimais descritas pelo programa na figura 3. Tal listagem pode gerar alguma estranheza nos estudantes, uma vez que, segundo o modelo de *Fibonacci*, não poderiam existir 4,9999999956 casais de coelhos.

Neste nível, o professor poderá estimular atividades numéricas. Por exemplo, a partir da figura 6, $f_{-2n} = -f_{2n}$ e $f_{-(2n+1)} = f_{2n+1}$ para o caso do gráfico de $\{f_{-n}\}_{n \in \mathbb{N}}$. E de modo equivalente, os alunos podem debater o comportamento do gráfico da *sequência de Lucas*, entretanto, respeitando o poder de síntese desta aula, nos restringiremos daqui em diante ao caso da *sequência de Fibonacci estendida* $\{f_{-n}\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Nível 3 Solução – apresentação e organização de esquemas/modelos que visem à solução do problema relacionado a História da Matemática.

A partir das propriedades conjecturadas no nível 3, a saber $f_{-2n} = -f_{2n}$ e $f_{-(2n+1)} = f_{2n+1}$, o professor necessita instigar a turma na compreensão de que tais propriedades são insuficientes para responder o problema inicial. Aqui, evidenciamos uma importante característica da SF, que busca evitar uma aparência superficial do conhecimento matemático.

Tal aparência superficial leva os estudantes a pensarem que para todo problema encontramos uma resposta definitiva e conclusiva. Neste caso, o mestre sabe que a resposta para o problema exige bem mais do que algumas linhas de argumentação e, além disso, deve conhecer *a priori* as possíveis propriedades necessárias e antever as dificuldades reais à evolução do conhecimento em discussão pela turma. No próximo nível, o professor convencerá seus alunos a respeito das argumentações que apresentam maiores chances de êxito, mesmo que parcial, para o problema.

Nível 4 Prova – apresentação e formalização do modelo matemático a ser ensinado.

Admitindo que seja verdade que $f_{-2n} = -f_{2n}$ e $f_{-(2n+1)} = f_{2n+1}$, poderíamos afirmar que o comportamento geométrico da *sequência de Fibonacci* de termos pares *estendida* será o mesmo comportamento da *sequência tradicional*, a menos de um sinal, o que provocará a simetria no gráfico. E no segundo caso, poderíamos concluir que os termos ímpares, tanto da *sequência tradicional* como a *sequência de Fibonacci estendida*, devem ser idênticos, entretanto ambas produzem respostas parciais para nosso problema

inicial. Para verificar tais igualdades, seguimos a sugestão de Benjamin; Quinn (2005, p. 143), que propõem a verificação da seguinte igualdade $f_{-n} = (-1)^{n+1} \cdot f_n$ para $n \in \mathbb{N}$.

Mas assumindo por indução a igualdade $f_{-n} = (-1)^{n+1} \cdot f_n$, necessitamos provar que $f_{-(n+1)} = f_{-n-1} = (-1)^{(n+1)+1} \cdot f_{n+1} = (-1)^{n+2} \cdot f_{n+1}$. Usamos $f_{-(n-1)} = (-1)^{n-1+1} \cdot f_{n-1} = (-1)^n \cdot f_{n-1}$, assim:

$$\begin{aligned} f_{-n+1} &= f_{-n} + f_{-n-1} \stackrel{\text{Hipótese}}{\therefore} f_{-n-1} = f_{-n+1} - f_{-n} = \\ &= (-1)^n \cdot f_{n-1} - (-1)^{n+1} \cdot f_n = (-1)^n \cdot f_{n-1} + (-1)^n \cdot f_n = \\ &= (-1)^n \cdot (f_{n-1} + f_n) = (-1)^{n+2} \cdot f_{n+1} \end{aligned}$$

“O pensamento matemático pode apoiar os estudantes em diversos modos quando estudam história” (GRUGNETTI; ROGERS, 2000, p. 53). A investigação de evidências primárias e o processo de decisão de quais são os resultados e fatores chave em cada evento proporciona uma visão global e interconectada aos jovens, entretanto o professor necessita se apoiar em concepções e teorias que possam viabilizar um ensino/aprendizagem produtivo, com o suporte da História da Matemática.

A proposta metodológica denominada *Sequência Fedathi* visa um ensino desta ciência que preserva alguns traços característicos do momento de criação e descoberta de um matemático. Deste modo, uma das variáveis na pesquisa é a formulação de situações-problema intrigantes que exigem bem mais do que o exercício do *pensamento algorítmico* (OTTE, 1991, p. 285).

Em nosso caso, evidenciamos em várias obras a ausência da exploração de propriedades intrigantes entre as *sequências de Fibonacci* e de *Lucas*. Apenas em Honsberger (1985), encontramos a breve sugestão de desenvolver propriedades com o que nomeamos de sequência estendida de Fibonacci. A partir dela, desenvolvemos também algumas propriedades para a *sequência estendida de Lucas*. Seguindo o raciocínio encontrado nos livros consultados, adaptamos os resultados obtidos para a primeira sequência na segunda.

Na figura 3 exibimos nossa última relação descrita de modo significativo por meio de uma interpretação geométrica. Respeitando os limites de síntese deste artigo, salientamos, de modo resumido, o caso das relações com a *noção de convergência de sequências*. Descobrimos que o quociente $\frac{f_{n+1}}{f_n}$ converge (BENJAMIN; QUINN, 2005, p. 157). O mesmo resultado pode ser compreendido de modo intuitivo e informal num curso de História da Matemática, quando recorremos à tecnologia. De modo surpreendente, não identificamos, na literatura pesquisada, o comportamento de $\frac{L_{n+1}}{L_n}$ descrita do lado direito da Figura 4.

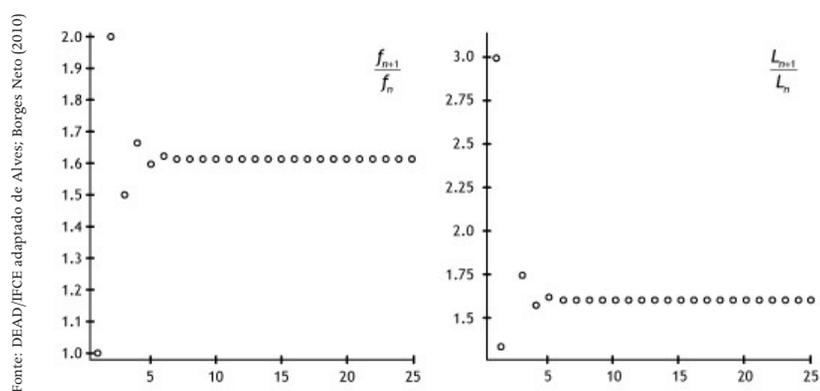


Figura 4: Comportamento geométrico do quociente (ALVES; BORGES NETO, 2010, p. 8).

Finalizamos este tópico salientando a dificuldade enfrentada pelos professores com vistas a uma efetiva exploração em sala de aula. Com mencionamos anteriormente, muitos dos conhecimentos apresentados ao professor em formação envolvem um saber de “**caráter informacional**”, e não um as obras consultadas “**caráter operacional**”. Alertamos que, na maioria dos casos, o professor, por si só, não consegue realizar as necessárias ligações entre teoria e prática, principalmente o incipiente na carreira.

Desse modo, buscamos discutir e explorar nestes tópicos um *caráter operacional* do saber matemático com um viés eminentemente histórico. Sua importância é destacada por Dambros (2006, p. 5) ao relatar que:

Dentre as justificativas apresentadas pelos defensores do estudo da história da matemática pelo professor, há uma insistentemente citada: o professor que conhece a história da matemática compreende a matemática como uma ciência em progresso e construção, como uma criação conjunta da humanidade e não como uma ciência pré-existente, um presente acabado de Deus, descoberta por gênios e por isso incontestável.

Este caráter de “saber universal”, manifestado de modo peculiar na Matemática, é histórico. Ele perpassa e influencia toda a formação dos formadores de professores e, por último, influenciará a formação do licenciado. Muitos destes condicionamentos podem ser entendidos, na medida em que nos atemos à própria constituição, evolução e determinação dos currículos de Matemática, desde o Brasil colônia até os dias atuais. Neste sentido, Miorim (1995, p.192) discute que:

Na 3ª série a articulação entre a aritmética e a álgebra continua através da ampliação do estudo de funções, de sua representação gráfica e das equações e desigualdades algébricas. Na geometria percebe-se claramente o rompimento

com o modelo euclidiano, quando é proposto o estudo de proposições fundamentais que servem de base à geometria dedutiva, das noções de deslocamentos elementares no plano; translação e rotação de figuras e, em seguida, uma série de estudos específicos sobre figuras relações métricas e homotetia. É a pulverização da geometria dedutiva eucliana.

Em suas considerações, notamos a denúncia a respeito das reformas históricas envolvendo o currículo de Matemática, que, em alguns casos, proporcionaram um efeito nocivo à Educação. Os elementos apontados pela pesquisadora Maria Ângela Miorim constituem elementos da História da Educação Matemática.

REFERÊNCIAS

- ABOE, Asher. **Episodes from the Early History of Mathematics**. New York: The Mathematics Association of America, 1964.
- ÁVILA, G. **Várias faces da Matemática**: tópicos para a Licenciatura e Leitura Geral, São Paulo: Blucher Editora, 2007.
- BASTIAN, I. **O teorema de Pitágoras** (dissertação) Faculdade de Educação, PUC/SP, 2000.
- BELL, E. T. **The development of Mathematics**. Second Edition, London: MacGrill Hill Company, 1945.
- BENOIT, P. CHEMLA, K. RITTER, J. **Histoire de Fractions, Fraction d'histoire**. Boston: Birkhauser, 1992.
- BOYER, C. **A History of Mathematics**. New York: John Wiley and Sons, 1991.
- BROLEZZI, A. C. **A tensão entre o discreto e o contínuo na historia da Matemática e no Ensino de Matemática** (tese). Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo USP, São Paulo, 1996.
- _____. **Arte de contar**: Uma introdução ao estudo do valor didático da historia da matemática (Dissertação). Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo USP, São Paulo, 1991.
- BROUSSEAU, G. Fondements et méthodes de la Didactiques de Mathematiques. In: BRUN, J. **Didactiques de Mathematiques, Paris**: Délachaux Niéstle, 1996, p. 44-111, 1991.
- BURIGO, E. Z. **Movimento da matemática moderna no Brasil – estudo da ação e do pensamento dos educadores matemáticos no anos 60** (dissertação). UFRGS, 1989.
- BURTON, Anthony. **The History of Mathematics**: an introduction. 6th edition. New York: MacGrill Hill, 1976.
- _____. **The History of Mathematics**: an introduction, 6 edition. New York: McGraww-Hill, 2006.
- CARAÇA. B. J. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. Lisboa: Impresso Portugal, 1970.
- CONWAY, J. & GUY, R. **The book of Number**. New York: Copernicus Publishers, 1996.
- DAMBROS. Adriana. A. **O conhecimento do desenvolvimento histórico dos conceitos matemáticos e o ensino da Matemática** (tese). Curitiba: Universidade Federal do Paraná, 2006.

DERBYSHIRE, J. **A real and imaginary History of Álgebra**. Washington: Joseph Henry Press, 2006.

DOMINGUES, H. H. **Fundamentos de Aritmética**. Rio de Janeiro: Atual, 1972.

DUARTE, A. **A relação entre o lógico e o histórico no ensino da Matemática Elementar** (dissertação), UFSCAR/SÃO CARLOS, 1987.

ESTRADA, M. F. et al. **História da Matemática**. Lisboa: Editora Universitária, 2000.

EVES, H. **Great Moments in Mathematics: before 1650**. New York: Dolciani Mathematical Exposition, 1983.

FRIBERG, J. **Amazing Traces of a babylonian origin in Greek Mathematics**. London: World Scientific Publishing, 2007.

GASPAR, M. T. J. **Aspectos do desenvolvimento do pensamento geométricos em algumas civilizações e a formação dos professores** (tese). Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Estadual Rio Claro (UNESP), São Paulo, 2003.

GOMES, M. L. **As práticas culturais de mobilização de histórias da matemática em livros didáticos destinados ao ensino médio** (dissertação). Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Educação UNICAMP/SP, 2008.

GUILLEN, M. **Bridges to Infinity: the human sides of mathematics**. Boston, Jeremy and Tacher, 1983.

HANNA, G. & SIDOLI, N. **Visualization: a brief survey of philosophical perspectives**. In: ZDM Mathematics Education, v. 39, 2007, p. 73-78.

HARUNA, N. C. **O teorema de Talles** (dissertação). PUC/SP, 2000.

HEATH, T. **Diophantus de Alexandria: a study in the History of Greek Algebra**. Cambridge: University Press, 1910.

HODGKIN, Luke. **A History of Mathematics from Mesopotamia to Modernity**. Oxford: Oxford University Press, 2005.

HUNTLEY, H. E. **The divine proportion: a study in mathematical beauty**. New York: Dover Publications, 1970.

KATZ, V. et al, **Learn from the Masters**. New York: The Mathematical Association of America, 1995.

_____. **A History of Mathematics**. New York: Addison Wesley, 1998.

KLINGBERG, M. **Mathematics for the nonmathematician**. New York: Dover Publications, 1967.

KOUKI, R. **Enseignement et apprentissage des équations, inéquations et fonctions au secondaire: entre syntaxe et sémantique** (these), Lyon I: Université Clode Bernard, 2008.

KRATZ, S. G. **An episodic History of Mathematics**. New York: Springer, 2006.

LIMA, R. N. **Resolução de equações do terceiro grau através de cônicas** (dissertação). PUC/SP, 1999.

MAOR, E. **The Pythagorean Theorem: a 4.000-year history**. Princenton: Princenton

University, 2007.

MARTINS, João. C. G. **Sobre revoluções científicas na Matemática** (tese). Instituto de Geociências e Ciências Exatas - Universidade Estadual Paulista, 2005.

MIGUEL, A. **Três estudos sobre a História e a Educação Matemática** (tese), Pós-Graduação em Educação, Universidade Estadual de Campinas (Unicamp), 1993.

MUIR, Jane. **Of men and Numbers**. New York: Dover Publications, 1996.

ORE, O. **Invitation To Number Theory**. London: Random House, Nº 20, 1967.

_____. **Number Theory and its History**. New York: McGrill-Hill, 1948.

PALARO, L. A. **A concepção de Educação Matemática de Henri Lebesgue** (tese). Faculdade de Educação na Pontifícia Universidade Católica (PUC) - São Paulo, 2006.

POPPER, K. **Conjecturas e Refutações**. Brasília: Editora Universitária, 1972.

SIMMONS, G. F. **Calculus Gems: Brief Lives and Memorable Mathematics**. New York: McGraww-Hill, 1992.

SMORYNSKI, C. **History of Mathematics: an supplement**. New York: Springer, 2008.

TABAK, J. **Algebra: Sets, Symbols and the Language of the Thought**. New York: Facts On File, 2004.

_____. **Geometry: The language of the space and form**. New York: Facts On File, 2004.

ZEUTHEN, H. G. **Histoire des Mathématiques de l'antiquité et le moyen age**. Paris: Gauthiers-Villars, 1902.

CURRÍCULO

Francisco Régis Vieira Alves

Possui graduação em Bacharelado em Matemática pela Universidade Federal do Ceará (1998), graduação em Licenciatura em Matemática pela Universidade Federal do Ceará (1997), mestrado em Matemática Pura pela Universidade Federal do Ceará (2001) e mestrado em Educação, com ênfase em Educação Matemática, pela Universidade Federal do Ceará (2002). Atualmente é professor do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará - 40h/a com dedicação exclusiva, do curso de Licenciatura em Matemática. Tem experiência na área de Matemática, com ênfase em Álgebra Comutativa, atuando principalmente nos seguintes temas: Didática da Matemática, História da Matemática, Análise Real, Filosofia da Matemática e Tecnologias aplicadas ao ensino de matemática para o nível superior. Com pesquisa voltada ao ensino de Cálculo I, II e III; e na Universidade Aberta do Brasil, com o ensino a distância de Matemática. Desenvolve pesquisa direcionada para o ensino do Cálculo a Várias Variáveis e sua transição interna. Atua também no Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática (ENCIMA) - UFC.

