HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

Carl B. Boyer

TRADUÇÃO: ELZA F. GOMIDE

HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

FICHA CATALOGRÁFICA

(Preparada pelo Centro de Catalogação-na-fonte,
Câmara Brasileira do Livro, SP)

Boyer, Carl Benjamin, 1906-
B785h História da matemática; tradução: Elza F. Gomide. São Paulo, Edgard Blücher, Ed. da Universidade de São Paulo, 1974.

Bibliografia.

1. Matemática – História I. Título.

	17. CDD-510.09
74-0677	18. -510.9

Índice para catálogo sistemático:

1. Matemática : História 510.09 (17.) 510.9 (18.)

Obra publicada
com a colaboração da

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

CARL B. BOYER

Professor de Matemática do Brooklyn College, EUA

HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

Tradução

ELZA F. GOMIDE

Professora Assistente-Doutor do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo

EDITORA EDGARD BLUCHER LTDA.

EDITORA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

título original
A HISTORY OF MATHEMATICS

a edição em língua inglesa foi publicada por
JOHN WILEY & SONS, INC.

EDITORA EDGARD BLÜCHER LTDA.
01000 Caixa Postal 5450 — Rua Peixoto Gomide, 1400
End. Telegráfico: Blucherlivro — Fones (011)287-2043 e 288-5285
São Paulo — SP — Brasil

Impresso no Brasil *Printed in Brazil*

Conteúdo

Prefácio

Numerosas histórias da Matemática apareceram durante este século, muitas delas em inglês. Algumas são muito recentes como *A History of Mathematics*, de J. F. Scott[1]; uma nova produção neste campo deveria, portanto, ter características não existentes nos livros disponíveis. Na verdade, poucas das histórias publicadas são livros de texto, ao menos não no sentido que tem essa expressão nos Estados Unidos, e a *History* de Scott não é um desses. Pareceu-me, pois, que havia lugar para um livro novo — um que satisfizesse melhor às minhas preferências e talvez às de outros.

A History of Mathematics, em dois volumes, de David Eugene Smith[2], foi de fato escrita "a fim de fornecer um texto de História da Matemática elementar que pudesse ser usado por professores e estudantes", mas cobre uma área ampla demais num nível matemático demasiado elementar para a maior parte dos cursos superiores modernos, e faltam-lhe problemas de tipos variados. *A History of Mathematics*, de Florian Cajori[3], é até hoje um livro de referência muito útil, mas que não se adapta a uso em aulas, nem tão pouco o admirável *The Development of Mathematics* de E. T. Bell[4]. Atualmente o mais bem sucedido e apropriado parece ser *An Introduction to Mathematics* de Howard Eves[5], que utilizei, com grande satisfação, com pelo menos uma dúzia de classes desde que apareceu, em 1953. Ocasionalmente eu modifiquei a ordem dos tópicos no livro, procurando alcançar uma maior intensidade de sentimento histórico, e suplementei o material com mais referências às contribuições dos séculos dezoito e dezenove, usando para isso principalmente *A Concise History of Mathematics* de D. J. Struik[6].

O leitor deste livro, seja ele leigo, estudante, ou professor de um curso de História da Matemática, verificará que o nível de conhecimento matemático pressuposto é aproximadamente o de um estudante de curso superior de 2.º ou 3.º ano, mas o material pode também ser visto com proveito por leitores de preparo matemático superior ou inferior a esse. Cada capítulo termina com uma coleção de exercícios mais ou menos distribuidos em três categorias. Questões de tipo ensaio, destinadas a indicar a capacidade do leitor para organizar e exprimir com suas palavras o que foi discutido no capítulo. Seguem-se exercícios relativamente fáceis, que exigem provas de alguns teoremas mencionados no capítulo ou sua aplicação a várias situações. Finalmente, uns poucos exercícios marcados com asterisco, que ou são mais difíceis ou exigem métodos especiais que podem não ser familiares a todos os estudantes ou leitores. Os exercícios não fazem parte da exposição geral e podem ser dispensados pelo leitor, sem perda de continuidade.

Aqui e ali no texto há referências a notas de rodapé, em geral, de natureza bibliográfica, e no fim de cada capítulo há uma lista de leituras sugeridas. Há algumas referências à vasta literatura em periódicos do campo, pois não é cedo demais para que estudantes desse nível comecem a conhecer o rico material que se encontra em boas bibliotecas. Bibliotecas menores podem não dispor de todas essas fontes de referências mas convém que um estudante saiba da existência de domínios mais amplos de conhecimento fora de sua universidade. Há também referências a obras em outras linguas além do inglês: além de fornecer importantes fontes adicionais para os que conhecem tais línguas, tais referências podem ajudar a terminar o provincialismo lingüístico que, como

[1] Londres: Taylor and Francis, 1958
[2] Boston: Ginn and Company, 1923-1925
[3] New York: Macmillan, 1931, 2.ª edição
[4] New York: MacGraw-Hill, 1945, 2.ª edição
[5] New York: Holt, Rinehart and Winston, 1964, 3.ª edição
[6] New York: Dover Publications, 1967, 3.ª edição

um avestruz, se refugia na falsa impressão de que tudo que merece ser lido apareceu, ou foi traduzido em inglês.

Esta obra difere do texto mais bem sucedido disponível até agora por aderir mais estritamente a um arranjo cronológico e por dar mais ênfase a elementos históricos. Há sempre a tentação, numa aula de História da Matemática, de supor que a finalidade principal do curso é ensinar Matemática. Uma quebra dos padrões de rigor matemático é então um pecado mortal, enquanto que um erro histórico é venial. Tentei evitar essa atitude, e o objetivo do livro é apresentar a História da Matemática com fidelidade não só para com a estrutura e exatidão matemáticas, mas também para com a perspectiva e detalhe históricos. Seria absurdo, num livro deste conteúdo, esperar que todas as datas, como todas as casas decimais, estejam corretas. Espera-se, porém, que as inadvertências que possam ter restado depois do estágio de correção de provas não farão violência ao senso histórico, entendido de modo amplo, ou a uma visão correta dos conceitos matemáticos. É preciso dar forte ênfase ao fato de que esta obra, em um único volume, de modo algum pretende apresentar o assunto completamente. Uma tal empresa exigiria o esforço coordenado de uma equipe, como a que produziu, em 1908, o quarto volume da *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, de Cantor; e levou a história até 1799. Numa obra de proporções modestas o autor deve usar critério na seleção do material a ser incluído, controlando relutantemente a tentação de citar a obra de todo matemático produtivo; raros leitores deixarão de notar aqui algo que considerarão como injustificável omissão. Em particular, o último capítulo busca apenas indicar algumas poucas das características salientes do século vinte. Para a História da Matemática talvez o que mais se deva desejar é que apareça um novo Felix Klein para completar, para o nosso século, o tipo de projeto que Klein tentou para o século dezenove, mas não viveu o suficiente para concluir.

Uma obra publicada é até certo ponto como um *iceberg*, pois, o que se vê é apenas uma pequena fração do todo. Nenhum livro aparece sem que o autor nele esbanje tempo e sem que receba encorajamento e apoio de outros, demasiado numerosos para serem citados individualmente. No meu caso, o débito começa com os muitos estudantes interessados a quem ensinei a História da Matemática, principalmente no Brooklin College, mas também na Yeshiva University, University of Michigan, University of California (Berkeley) e University of Kansas. Na University of Michigan, principalmente graças ao estímulo do Professor Phillips S. Jones, e no Brooklin College com o auxílio do Diretor Walter H. Mais e dos Professores Samuel Borofsky e James Singer, eu às vezes tive minha carga didática reduzida para poder trabalhar no manuscrito deste livro. Amigos e colegas no campo da História da Matemática, tais como o Professor Dirk J. Struik do Massachusetts Institute of Technology, Professor Kenneth O. May na University of Toronto, Professor Howard Eves na University of Maine e Professor Morris Kline na New York University, fizeram muitas sugestões valiosas para a preparação do livro, e essas foram grandemente apreciadas. Material em livros e artigos de outros foi livremente usado, com pouco reconhecimento, além de uma fria referência bibliográfica, e aproveito esta oportunidade para exprimir a esses autores minha calorosa gratidão. Bibliotecas e editores ajudaram muito, fornecendo informações e ilustrações necessárias ao texto; em particular foi um prazer trabalhar com a John Wiley and Sons. Finalmente, devo exprimir profunda gratidão a uma esposa muito compreensiva, Dra. Marjorie N. Boyer, por sua paciência em tolerar os problemas ocasionados pelo desenvolvimento de mais um livro dentro da família.

Carl B. Boyer

Brooklin, New York
Janeiro 1968.

Capítulo **1**

Origens primitivas

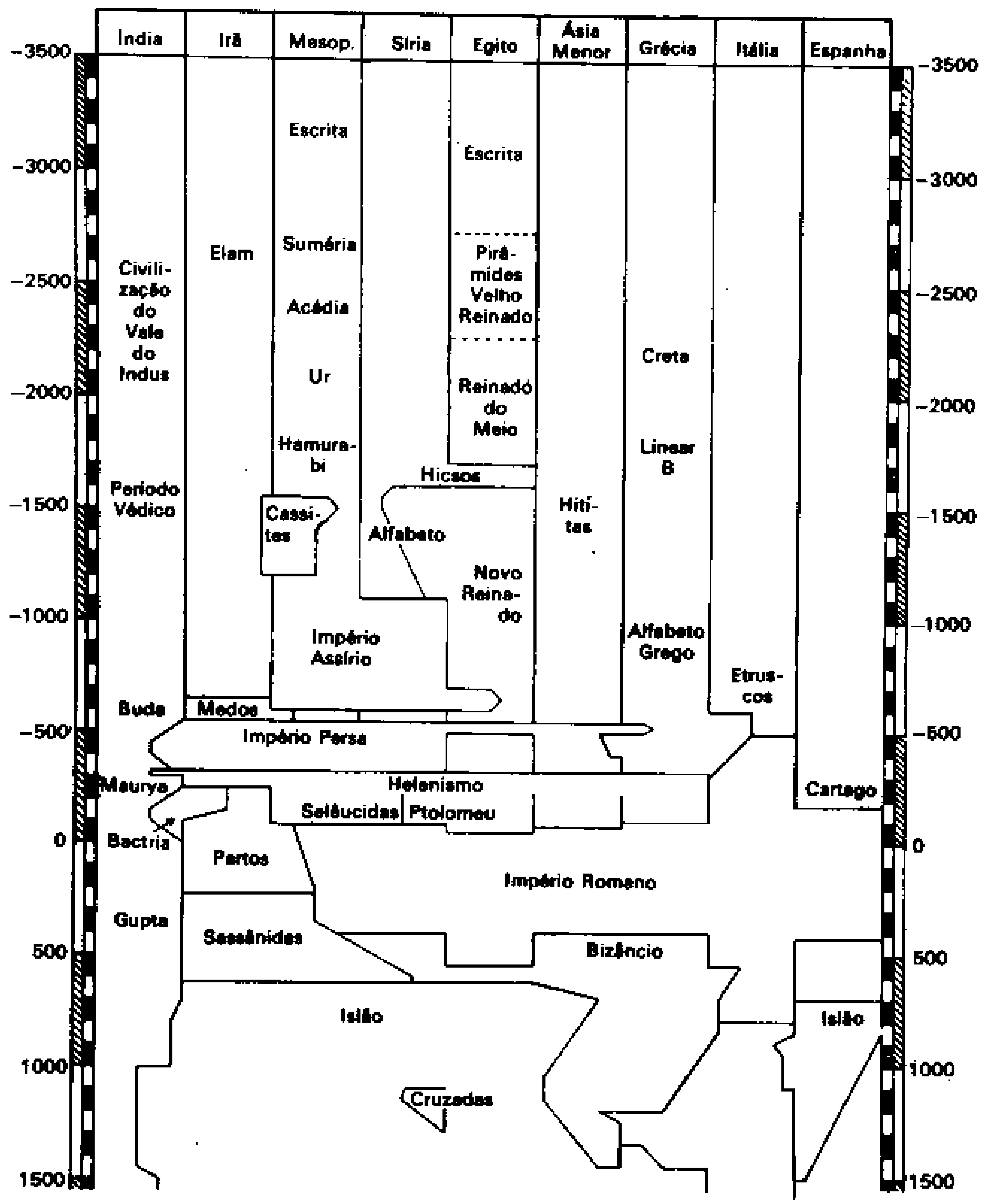
Trouxeste-me um homem que não sabe contar seus dedos?

Do *Livro dos mortos*

1 Os matemáticos do século vinte desempenham uma atividade intelectual altamente sofisticada, que não é fácil de definir, mas boa parte do que hoje se chama matemática deriva de idéias que originalmente estavam centradas nos conceitos de número, grandeza e forma. Definições antiquadas da matemática como uma "ciência do número e grandeza" já não são válidas, mas sugerem as origens dos diversos ramos da matemática. Noções primitivas relacionadas com os conceitos de número, grandeza e forma podem ser encontradas nos primeiros tempos da raça humana, e vislumbres de noções matemáticas se encontram em formas de vida que podem datar de milhões de anos antes da humanidade. Darwin no *Descent of Man* (1871) observou que alguns animais superiores possuem capacidades como memória e imaginação, e hoje é ainda mais claro que as capacidades de distinguir número, tamanho, ordem e forma — rudimentos de um sentido matemático — não são propriedades exclusivas da humanidade. Experiências com corvos, por exemplo, mostraram que pelo menos alguns pássaros podem distinguir conjuntos contendo até quatro elementos[1]. Uma percepção de diferenças de padrões em seus ambientes claramente existe em muitas formas inferiores de vida, e isso tem parentesco com a preocupação de um matemático com forma e relação.

2 Em certa época pensou-se que a matemática se ocupava do mundo que nossos sentidos percebem, e foi somente no século dezenove que a matemática pura se libertou das limitações sugeridas por observações da natureza. É claro que a matemática originalmente surgiu como parte da vida diária do homem, e se há validade no princípio biológico da "sobrevivência do mais apto" a persistência da raça humana provavelmente tem relação com o desenvolvimento no homem de conceitos matemáticos. A princípio as noções primitivas de número, grandeza e forma podiam estar relacionadas com contrastes mais do que com semelhanças — a diferença entre um lobo e muitos, a desigualdade de tamanho entre uma sardinha e uma baleia, a dissemelhança entre a forma redonda da lua e a retilínea de um pinheiro. Gradualmente deve ter surgido, da massa de experiências caóticas, a realização de que há analogias: e dessa percepção de semelhanças em número e forma nasceram a ciência e a matemática. As próprias diferenças parecem indicar semelhanças, pois o contraste entre um lobo e muitos, entre um carneiro e um rebanho, entre uma árvore e uma floresta, sugerem que um lobo, um carneiro e uma árvore têm algo em comum — sua unicidade. Do mesmo modo se observaria que certos grupos, como os pares, podem ser postos em correspondência um a um. As mãos podem ser relacionadas com os pés, os olhos, as orelhas ou as narinas. Essa percepção de uma propriedade abstrata que certos grupos têm em comum e que nós chamamos número, representa um grande passo no caminho para a matemática moderna. É improvável que isso tenha sido a descoberta de um indivíduo ou de uma dada tribo; é mais provável que a percepção tenha sido gradual, e pode ter-se desenvolvido tão cedo no desenvolvimento cultural do homem quanto o uso do fogo, talvez há 300 000 anos. Que o desenvolvimento do conceito de número foi um processo longo e gradual é sugerido pelo fato de que certas línguas, o grego inclusive, conservaram na sua gramática uma distinção tripartite entre um e dois e mais de dois, ao passo que a maior parte das línguas atuais só fazem a dis-

[1] Veja Levi Conant, *The Number Concept, Its Origin and Development* (1923). cf. H. Kalmus, "Animals as Mathematicians", *Nature* **202** (1964), 1156-1160



Esquema cronológico representando a extensão de algumas civilizações antigas e medievais. (Reproduzido, com permissão, de O. Neugebauer, *The Exact Sciences in Antiquity*)

tinção em "número" entre singular e plural. Evidentemente nossos mais antigos antepassados a princípio contavam só até dois, qualquer conjunto, além desse nível era dado como "muitos". Mesmo hoje muitos povos primitivos ainda contam objetos dispondo-os em grupos de dois.

2 A idéia de número finalmente tornou-se suficientemente ampla e vívida para que se sentisse a necessidade de exprimir a propriedade de algum modo, presumivelmente a princípio somente na linguagem de sinais. Os dedos de uma mão podem facilmente ser usados para indicar um conjunto de dois, três, quatro ou cinco objetos, não sendo o número um geralmente reconhecido inicialmente como um verdadeiro número. Usando os dedos das duas mãos podem ser representadas coleções contendo até dez elementos; combinando dedos das mãos e dos pés pode-se ir até vinte. Quando os dedos humanos eram inadequados, podiam ser usados montes de pedras para representar uma correspondência com os elementos de um outro conjunto. Quando o homem primitivo usava tal método de representação, ele freqüentemente amontoava as pedras em grupos de cinco, pois os quíntuplos lhe eram familiares por observação da mão e pé humanos. Como Aristóteles observou há muito tempo, o uso hoje difundido do sistema decimal é apenas o resultado do acidente anatômico de que quase todos nós nascemos com dez dedos nas mãos e dez nos pés. Do ponto de vista matemático é um tanto inconveniente que o homem de Cro-Magnon e seus descendentes não tivessem quatro ou seis dedos em uma mão.

Embora historicamente contar pelos dedos, ou o uso de contar por cinco e dez, pareça ter surgido mais tarde que a contagem por dois e três, os sistemas quinário e decimal quase invariavelmente ganharam do binário e do ternário. Um estudo de várias centenas de tribos entre os índios americanos, por exemplo, mostrou que quase um terço usava a base decimal e aproximadamente um outro terço usava um sistema quinário ou quinário-decimal; menos de um terço tinha um esquema binário e os que usavam um sistema ternário formavam menos de um por cento do grupo. O sistema vigesimal, com base vinte, ocorria em cerca de 10 por cento das tribos[2].

Grupos de pedras são demasiado efêmeros para conservar informação: por isso o homem pré-histórico às vezes registrava um número fazendo marcas num bastão ou pedaço de osso. Poucos desses registros existem hoje, mas na Tchecoslováquia foi achado um osso de lobo com profundas incisões, em número de cinqüenta e cinco; estavam dispostos em duas séries, com vinte e cinco numa e trinta na outra, com os riscos em cada série, dispostos em grupos de cinco. Tais descobertas arqueológicas fornecem provas de que a idéia de número é muito mais antiga do que progressos tecnológicos como o uso de metais ou de veículos com rodas. Precede a civilização e a escrita, no sentido usual da palavra, pois artefatos com significado numérico, tais como o osso acima descrito, vêm de um período cerca de trinta mil anos atrás. Outras evidências referentes às primitivas idéias do homem sobre números podem ser encontradas na linguagem atual. Ao que parece as palavras *eleven* (onze) e *twelve* (doze) significavam originalmente "um a mais" e "dois a mais", indicando a predominância antiga do sistema decimal. No entanto, sugeriu-se que talvez a palavra indo-germânica para oito derivaria de uma forma dual para quatro, e que o *novem* latino para nove pode se relacionar com *novus* (novo) no sentido de ser o começo de uma nova seqüência. Talvez tais palavras possam ser interpretadas como sugeridoras da persistência, por algum tempo, de uma escala quaternária ou octonária, como o *quatre-vingts* francês de hoje parece ser um remanescente de um sistema vigesimal.

3 O homem difere de outros animais de modo mais acentuado pela sua linguagem, cujo desenvolvimento foi essencial para que surgisse o pensamento matemático abstrato; no entanto palavras que exprimem idéias numéricas apareceram lentamente. *Sinais* para números provavelmente precederam as *palavras* para números, pois é mais fácil fazer incisões num bastão do que estabelecer uma frase bem modulada para identificar um número. Se o problema da linguagem não fosse tão difícil talvez sistemas rivais do decimal tivessem feito maiores progressos. A base cinco, por exemplo, foi uma das que deixaram a mais antiga evidência escrita palpável; mas quando a linguagem se tornou formalizada, o dez já predominava. As línguas modernas são construídas quase sem exceção em torno da base dez, de modo que o número treze, por exemplo, não é descrito como três e cinco/e cinco, mas como três e dez. A demora no desenvolvimento da linguagem para exprimir abstrações como o número também pode ser percebida no fato que as expressões verbais numéricas primitivas invariavelmente se referem a coleções concretas específicas — como "dois peixes" ou "dois bastões" — e mais tarde uma tal frase seria adotada convencionalmente para indicar todos os conjuntos de dois objetos. A tendência da linguagem de se desenvolver do concreto para o abstrato pode ser percebida em muitas das medidas de comprimento em uso atualmente. A altura de um cavalo é medida em "palmos" e as palavras "pé" e "ell" (ou elbow, cotovelo) também derivaram de partes do corpo.

[2] W. C. Eels, "Number Systems of North American Indians", *American Mathematical Monthly*, **20** (1913), 293. Cf. também D. J. Struik, "Stone Age Mathematics", *Scientific American*, **179** (dezembro, 1948), 44-49

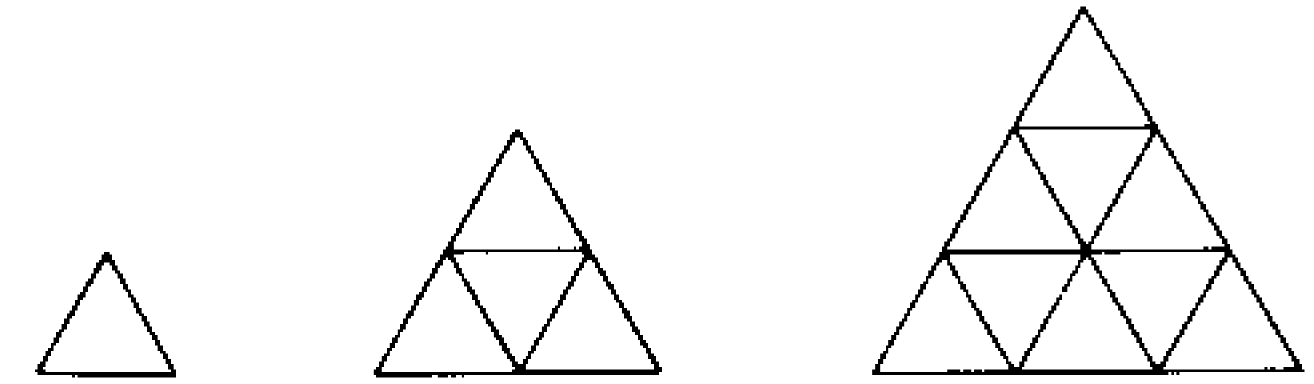
Os milhares de anos que foram necessários para que o homem fizesse a distinção entre os conceitos abstratos e repetidas situações concretas mostram as dificuldades que devem ter sido experimentadas para se estabelecer uma base ainda que muito primitiva para a matemática. Além disso, há um grande número de perguntas não respondidas com relação à origem da matemática. Supõe-se usualmente que surgiu em resposta a necessidades práticas, mas estudos antropológicos sugerem a possibilidade de uma outra origem. Foi sugerido[3] que a arte de contar surgiu em conexão com rituais religiosos primitivos e que o aspecto ordinal precedeu o conceito quantitativo. Em ritos cerimoniais representando mitos da criação era necessário chamar os participantes à cena segundo uma ordem específica, e talvez a contagem tenha sido inventada para resolver esse problema. Se são corretas as teorias que dão origem ritual à contagem, o conceito de número ordinal pode ter precedido o de número cardinal. Além disso, uma tal origem indicaria a possibilidade de que o contar tenha uma origem única, espalhando-se subseqüentemente a outras partes da terra. Esse ponto de vista, embora esteja longe de ser provado, estaria em harmonia com a divisão ritual dos inteiros em ímpares e pares, os primeiros considerados como masculinos e os últimos, como femininos. Tais distinções eram conhecidas em civilizações em todos os cantos da terra, e mitos relativos a números masculinos e femininos se mostraram notavelmente persistentes.

O conceito de número inteiro é o mais antigo na matemática e sua origem se perde nas névoas da antiguidade pré-histórica. A noção de fração racional, porém, surgiu relativamente tarde e em geral não estava relacionada de perto com os sistemas para os inteiros. Entre as tribos primitivas parece não ter havido praticamente nenhuma necessidade de usar frações. Para necessidades quantitativas o homem prático pode escolher unidades suficientemente pequenas para eliminar a necessidade de usar frações. Portanto não houve um progresso ordenado de frações binárias para quinárias para decimais, e as frações decimais foram essencialmente um produto da idade moderna da matemática, não do período primitivo.

4 Afirmações sobre as origens da matemática, seja da aritmética seja da geometria, são necessariamente arriscadas, pois os primórdios do assunto são mais antigos que a arte de escrever. Foi somente nos últimos seis milênios, numa carreira que pode ter coberto milhares de milênios, que o homem se mostrou capaz de por seus registros e pensamentos em forma escrita. Para informações sobre a pré-história dependemos de interpretações baseadas nos poucos artefatos que restaram, de evidência fornecida pela moderna antropologia, e de extrapolação retroativa, conjetural, a partir dos documentos que sobreviveram. Heródoto e Aristóteles não quiseram se arriscar a propor origens mais antigas que a civilização egípcia, mas é claro que a geometria que tinham em mente tinha raízes mais antigas. Heródoto mantinha que a geometria se originava no Egito, pois acreditava que tinha surgido da necessidade prática de fazer novas medidas de terras após cada inundação anual no vale do rio. Aristóteles achava que a existência no Egito de uma classe sacerdotal com lazeres é que tinha conduzido ao estudo da geometria. Podemos considerar as idéias de Heródoto e Aristóteles como representando duas teorias opostas quanto às origens da matemática, um acreditando que a origem fosse a necessidade prática, outro que a origem estivesse no lazer sacerdotal e ritual. O fato dos geômetras egípcios serem às vezes chamados "estiradores de corda" (ou agrimensores) pode ser tomado como apoio de qualquer das duas teorias, pois cordas eram indubitavelmente usadas tanto para traçar as bases de templos como para realinhar demarcações apagadas de terras. Não podemos contradizer com segurança nem Heródoto nem Aristóteles quanto à motivação que produziu a matemática, mas é claro que ambos subestimaram a idade do assunto. O homem neolítico pode ter tido pouco lazer e pouca necessidade de medir terras, porém seus desenhos e figuras sugerem uma preocupação com relações espaciais que abriu caminho para a geometria. Seus potes, tecidos e cestas mostram exemplos de

[3]Veja A. Seidenberg "The Ritual Origin of Counting", *Archive for History of Exact Sciences*, **2** (1962), 1-40

Figura 1.1



congruência e simetria, que em essência são partes da geometria elementar. Além disso seqüências simples em desenhos como os da Fig. 1.1 sugerem uma espécie de teoria dos grupos aplicada bem como proposições geométricas e aritméticas. O esquema torna evidente que as áreas dos triângulos estão entre si como os quadrados sobre um lado, ou, por contagem, que as somas de números ímpares consecutivos, começando com a unidade, são quadrados perfeitos. Para o período pré-histórico não há documentos, portanto é impossível acompanhar a evolução da matemática desde um desenho específico até um teorema familiar. Mas idéias são como sementes resistentes, e às vezes a origem presumida de um conceito pode ser apenas a reaparição de uma idéia muito mais antiga que ficara esquecida.

A preocupação do homem pré-histórico com configurações e relações pode ter origem em seu sentimento estético e no prazer que lhe dava a beleza das formas, motivos que muitas vezes propelem a matemática de hoje. Gostaríamos de pensar que ao menos alguns dos antigos geômetras trabalharam pela pura satisfação de fazer matemática, não como auxílio prático à mensuração; mas há outras alternativas. Uma é que a geometria, como a contagem, tivesse origem em rituais primitivos. Os mais antigos resultados geométricos encontrados na Índia formam o que se chamou os *Sulvasutras*, ou "regras da corda". Tratava-se de relações simples que aparentemente se aplicavam à construção de templos e altares. Pensa-se usualmente que a motivação geométrica dos "estiradores de corda" no Egito era mais prática do que a dos seus colegas na Índia; mas sugeriu-se[4] que tanto a geometria da Índia como a egípcia podem provir de uma fonte comum — uma protogeometria relacionada com ritos primitivos mais ou menos do modo como a ciência se desenvolveu a partir da mitologia e a filosofia da teologia. Devemos ter em mente que a teoria da origem da geometria numa secularização de práticas rituais não está de modo nenhum provada. O desenvolvimento da geometria pode também ter sido estimulado por necessidades práticas de construção e demarcação de terras, ou por sentimentos estéticos em relação a configurações e ordem. Podemos fazer conjeturas sobre o que levou os homens da Idade da Pedra a contar, medir, e desenhar. Que os começos da matemática são mais antigos que as mais antigas civilizações é claro. Ir além e identificar categoricamente uma origem determinada no espaço e no tempo, no entanto, é confundir conjetura com história. É melhor suspender o julgamento nessa questão e ir adiante, ao terreno mais firme da história da matemática encontrada em documentos escritos que chegaram até nós.

BIBLIOGRAFIA

Conant, Levi, *The Number Concept. Its Origin and Development* (New York: Macmillan, 1923)

Eels, W. C., "Number Systems of North American Indians," *American Mathematical Monthly*, 20 (1913), 293

Kalmus, H., "Animals as Mathematicians," *Nature*, 202 (1964), 1156-1160

Menninger, Karl, *Zahlwort und Ziffer: Eine Kulturgeschichte der Zahlen*, 2.ª edição (Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht, 1957-1958, 2 volumes)

Seidenberg, A., "The Ritual Origin of Geometry," *Archive for History of Exact Sciences*, **1** (1962), 488-527

Seidenberg, A., "The Ritual Origin of Counting," *Archive for History of Exact Sciences*, **2** (1962), 1-40

Smeltzer, Donald, *Man and Number* (New York: Emerson Books, 1958)

[4]A. Seidenberg, "The Ritual Origin of Geometry", *Archive for History of Exact Sciences*, **1**(1962), 488-527

Smith, D. E., *History of Mathematics* (Boston: Ginn, 1923-1925, 2 volumes; edição em brochura, New York: Dover, 1958)

Smith, D. E., e Jekuthiel Ginsburg, *Numbers and Numerals* (Washington, D. C.: National Council of Teachers of Mathematics, 1958).

Struik, D. J., "Stone Age Mathematics," *Scientific American*, 179 (Dezembro, 1948), 44-49

EXERCÍCIOS

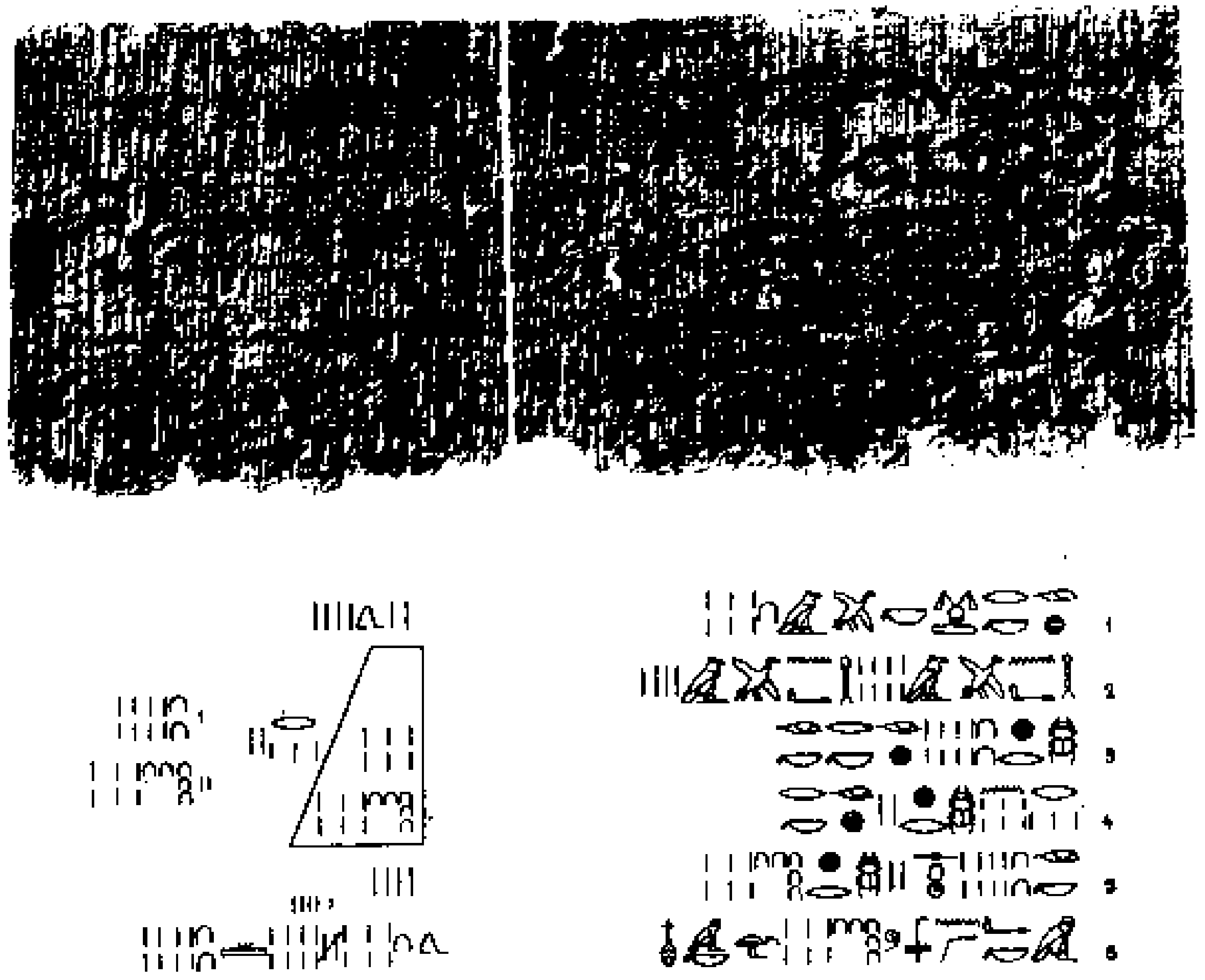
1. Descreva o tipo de evidência em que um relato da matemática pré-histórica pode se basear, citando exemplos específicos.
2. Que provas existem, se é que existem, de que a matemática começou com o advento do homem? Você acha que a matemática é anterior ao homem?
3. Faça uma lista de evidências na linguagem do uso, em certo período, de bases diferentes de dez.
4. Quais as vantagens e desvantagens das bases dois, três, quatro, cinco, dez, vinte e sessenta? Você acha que isso influenciou o homem primitivo em sua escolha de uma base?
5. Se você tivesse que escolher uma base de numeração, qual seria? Por quê?
6. O que acha que surgiu primeiro, nomes para números ou símbolos para números? Por quê?
7. Por que há poucos vestígios de escalas de seis a nove?
8. Quais você julga terem sido as primeiras figuras geométricas planas e sólidas estudadas conscientemente e sistematicamente? Por quê?
9. O que você julga ter influído mais no aparecimento da geometria primitiva, interesse pela astronomia ou necessidade de demarcar terras? Explique.
10. Qual das seguintes divisões do tempo o homem pré-histórico provavelmente mais observou: o ano, o mês, a semana, o dia, a hora? Explique.

Capítulo **2**

Egito

> Sesóstris . . . repartiu o solo do Egito entre seus habitantes . . . Se o rio levava qualquer parte do lote de um homem . . . o rei mandava pessoas para examinar, e determinar por medida a extensão exata da perda . . . Por esse costume, eu creio, que a geometria veio a ser conhecida no Egito, de onde passou para a Grécia.
>
> *Heródoto*

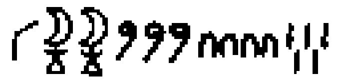
1 É costume dividir o passado da humanidade em eras e períodos, com particular referência a níveis e características culturais. Tais divisões são úteis, embora devamos ter sempre em mente que são apenas uma estrutura superposta arbitrariamente para nossa conveniência e que as divisões no tempo que sugerem não são fossos intransponíveis. **A Idade da Pedra**, um longo período que precede o uso de metais, não teve um fim abrupto. **Na verdade**, o tipo de cultura que representou terminou muito mais tarde na Europa do que em certas partes da Ásia e da África. O surgimento de civilizações caracterizadas pelo uso de metais teve lugar primeiro em vales de rios, como os do Egito, Mesopotâmia, Índia e China; por isto nós designaremos a parte mais antiga do período histórico pelo nome de "estágio potâmico". Os registros cronológicos das civilizações nos vales dos rios Indo e Yang-tse não merecem confiança, mas dispomos de informação razoavelmente segura sobre os povos que viveram ao longo do Nilo e no crescente fértil dos rios Tigre e Eufrates. Antes do quarto milênio A. C. uma forma primitiva de escrita estava em uso tanto no vale mesopotâmio como no Nilo. Lá os primitivos registros pictográficos, por um processo de gradual convencionalização, evoluíram para uma ordem linear de símbolos mais simples. Na Mesopotâmia, onde o barro era abundante, marcas em forma de cunha eram feitas com um estilete sobre tabletas moles que depois eram cozidas em fornos ou



Reprodução (*alto*) de uma parte do Papiro de Moscou mostrando o problema do volume de um tronco de pirâmide quadrada, juntamente com a transcrição hieroglífica (*abaixo*) ao calor do sol. Esse tipo de escrita chama-se cuneiforme (da palavra latina *cuneus*, cunha) por causa da forma dos sinais. O significado a ser transmitido em cuneiforme era determinado pelos arranjos das marcas em cunha. Documentos cuneiformes tinham grande durabilidade; por isso muitos milhares de tais tabletas sobreviveram até nossos dias, muitos datando de cerca de 4 000 anos.

Naturalmente, só uma fração dessas se referem a temas relacionados com matemática. Além disso, até há cerca de um século a mensagem nas tabletas permaneceu muda, pois a escrita não fora decifrada. Na década de 1870 foi feito um progresso significativo na leitura quando se descobriu que a Rocha Behistun trazia uma narração trilingue da vitória de Dario sobre Cambises, a inscrição sendo em persa, elamítico e babilônico. O conhecimento do persa conseqüentemente forneceu a chave para a leitura do assírio, língua proximamente aparentada com o babilônico, mais antigo. Mesmo depois desta importante descoberta, a decifração e análise das tabletas com conteúdo matemático avançou devagar, e foi só no segundo quarto do século vinte que a percepção das contribuições matemáticas da Mesopotâmia se tornou apreciável, devido em grande parte à obra pioneira de Fr. Thureau-Dangin na França e Otto Neugebauer na Alemanha e América[1].

2 Os escritos egípcios enquanto isso tinham tido melhor sorte do que os babilônios num particular. A Pedra de Rosetta, trilingue, desempenhando papel análogo ao da Rocha Behistun, tinha sido descoberta em 1799 pela expedição de Napoleão. Essa grande peça, achada em Rosetta, antigo porto de Alexandria, continha uma mensagem em três escritas: grega, demótica e hieroglífica. Sabendo o grego, Champollion na França e Thomas Young na Inglaterra fizeram rápido progresso na decifração dos hieroglifos (isto é "inscrições sagradas") egípcios. Agora as inscrições nas tumbas e monumentos no Egito podiam ser lidas, embora tais documentos cerimoniais não sejam a melhor fonte de informação quanto a idéias matemáticas. A numeração hieroglífica egípcia foi facilmente decifrada. O sistema, pelo menos tão antigo quanto as pirâmides, datando de cerca de 5 000 anos atrás baseava-se, como seria de esperar, na escala de dez. Usando um esquema iterativo simples e símbolos diferentes para a primeira meia dúzia de potências de dez, números maiores que um milhão foram incisos em pedra, madeira e outros materiais. Um traço vertical representava uma unidade, um osso de calcanhar invertido indicava 10, um laço como uma letra C maiúscula valia 100, uma flor de lotus 1 000, um dedo dobrado 10 000, um peixe era usado para indicar 100 000 e uma figura ajoelhada (talvez Deus do Sem-fim) 1 000 000. Por repetição desses símbolos o número 12 345, por exemplo, se escrevia como



Às vezes os dígitos menores eram colocados à esquerda, e às vezes os dígitos eram dispostos verticalmente. Os próprios símbolos ocasionalmente eram colocados com orientação invertida, de modo que o laço tanto podia ser convexo para a direita como para a esquerda.

As inscrições egípcias revelam familiaridade com grandes números desde tempos remotos. Um museu em Oxford possui um cetro real de mais de 5 000 anos sobre o qual aparece um registro de 120 000 prisioneiros e 1 422 000 cabras capturadas[2]. Esses números podem ser exagerados, mas de outras considerações fica claro, no entanto, que os egípcios eram louvavelmente precisos no contar e medir. As pirâmides exibem tão alto grau de precisão na construção e orientação que lendas mal-fundamentadas surgiram em torno delas. A sugestão, por exemplo, de que a razão do perímetro da base da "Grande Pirâmide" (de Khufu ou Quéops) para a altura foi conscientemente posta no valor 2π está claramente em desacordo com o que sabemos da geometria dos egípcios[3]. No entanto, as pirâmides e os corredores dentro delas eram orientados tão precisamente que

[1]Veja, por exemplo, O. Neugebauer, *Vorgriechische Mathematik*, (Berlin: Springer, 1934). Para um relato mais geral veja seu *The Exact Sciences in Antiquity* (1957)

[2]J. E. Quibell, *Hierakonpolis* (Londres: B. Quaritch, 1900). Ver especialmente Fig. 26B

[3]Noel F. Wheeler, "Pyramids and Their Purpose", *Antiquity*, 9 (1935), 5-21, 161-189, 292-304

foram feitas tentativas para descobrir sua idade pelo índice de variação da posição da estrela polar.

Os Egípcios começaram cedo a se interessar pela astronomia e observaram que a inundação anual do Nilo tinha lugar pouco depois que Sirius, a estrela do cão, se levantava a leste logo antes do sol. Observando que esses surgimentos heliacais de Sirius, o anunciador da inundação, eram separados por 365 dias, os egípcios estabeleceram um bom calendário solar feito de doze meses de trinta dias cada um e mais cinco dias de festa. Mas este ano oficial era curto demais, por um quarto de dia, por isso as estações avançavam de cerca de um dia cada quatro anos até que, após um ciclo de cerca de 1 460 anos, as estações novamente estavam afinadas com o calendário. Como se sabe, pelo sábio romano Censorinus, autor do *De die natale* (238 D. C.) que o calendário estava de acordo com as estações em 139 D. C., sugeriu-se, por extrapolação para trás, que o calendário foi instituído no ano 4241, três ciclos antes. Cálculos mais precisos (baseados no fato que o ano não tem exatamente 365 1/4 dias) modificaram a data para 4 228, mas outros estudiosos acham que a extrapolação para além de dois ciclos é injustificada e sugerem uma origem em cerca de 2 773 A. C.

3 Há um limite para a quantidade de informação matemática que se pode retirar de calendários e pedras tumulares, e nossas idéias sobre a contribuição egípcia seriam muito imprecisas se dependêssemos somente de material de origem cerimonial e astronômica. A matemática é muito mais do que contar e medir, os aspectos que são tratados em inscrições hieroglíficas. Felizmente temos outras fontes de informação. Um certo número de papiros egípcios de algum modo resistiu ao desgaste do tempo por mais de três e meio milênios. O mais extenso dos de natureza matemática é um rolo de papiro com cerca de 0,30 m de altura e 5 m de comprimento, que está agora no British Museum, (exceto uns poucos fragmentos, que estão no Brooklin Museum). Foi comprado em 1858 numa cidade à beira do Nilo, por um antiquário escocês, Henry Rhind; por isso é conhecido como Papiro Rhind, ou, menos freqüentemente, chamado Papiro Ahmes em honra do escriba que o copiou por volta de 1650 A. C.[4] O escriba conta que o material provém de um protótipo do Reino do Meio de cerca de 2000 a 1800 A. C., e é possível que parte desse conhecimento tenha provindo de Imhotep, o quase lendário arquiteto e médico do Faraó Zoser, que superintendeu a construção de sua pirâmide há cerca de 5 000 anos. De qualquer modo a matemática egípcia parece ter ficado estagnada por cerca de 2 000 anos, após um início bastante auspicioso.

Os numerais e outros assuntos no Papiro de Rhind não são escritos na forma hieroglífica descrita acima, mas numa escrita mais cursiva, melhor adatada ao uso de pena e tinta sobre folhas de papiro preparadas e conhecidas como hierática ("sagrada", para distingui-la da demótica ou popular, ainda posterior). A numeração continua decimal, mas o tedioso princípio repetitivo da numeração hieroglífica foi substituído pela introdução de sinais especiais para representar dígitos e múltiplos de potências de dez. Quatro, por exemplo, não é mais usualmente representado por quatro riscos verticais, mas por uma barra horizontal; sete não é escrito como sete riscos, mas um único símbolo ⁊ , semelhante a uma foice. Em hieroglifos o número vinte e oito aparecia como ∩∩|||| , mas em hierático é simplesmente =⊼ . Observe-se que o símbolo = para o dígito menor oito (ou dois quatros) aparece à esquerda em vez de à direita. O princípio de ciferização, introduzido pelos egípcios há cerca de 4 000 anos e usado no Papiro de Rhind, representou uma importante contribuição à numeração, e é um dos fatores que faz do sistema em uso hoje o instrumento eficaz que é.

4 Os homens da Idade da Pedra não usavam frações mas com o advento de culturas mais avançadas durante a Idade do Bronze parece ter surgido a necessidade do conceito de fração e de notação para frações. As inscrições hieroglíficas egípcias têm uma notação

[4]Há duas boas edições em inglês, uma de T. E. Peet, publicada em Londres em 1923, outra de A. B. Chace e outros, publicada em dois volumes em Oberlin, Ohio, em 1927-1929. O volume I desta última contém uma exposição geral extensa da matemática egípcia por R. C. Archibald, uma tradução com comentário do Papiro Ahmes e uma muito extensa bibliografia de artigos sobre a matemática egípcia

especial para frações unitárias — isto é, com numerador um. O recíproco de qualquer inteiro era indicado simplesmente colocando sobre a notação para o inteiro um sinal oval alongado. A fração 1/8 aparecia então como $\overset{\circ}{\text{||||}}$, e 1/20 como $\overset{\circ}{\cap\cap}$. Na notação hierática, dos papiros, o oval alongado é substituído por um ponto, colocado sobre a cifra para o inteiro correspondente (ou sobre a cifra da direita no caso do recíproco de um número multidígito). No Papiro Ahmes, por exemplo, a fração 1/8 aparece como $\dot{=}$ e 1/20 como $\dot{\lambda}$. Tais frações eram manipuladas livremente no tempo de Ahmes, mas a fração geral parece ter sido um enigma para os egípcios. Eles se sentiam à vontade com a fração 2/3, para a qual tinham um sinal hierático 𝔷..; ocasionalmente usavam sinais especiais para frações da forma $n/(n+1)$, os complementos das frações unitárias. Atribuíam à fração 2/3 um papel especial nos processos aritméticos de modo que para achar o terço de um número primeiro achavam os dois terços e tomavam depois a metade disso. Conheciam e usavam o fato de dois terços da fração unitária $1/p$ ser a soma de duas frações unitárias $1/2p$ e $1/6p$; também tinham percebido que o dobro da fração $1/2p$ é a fração $1/p$. No entanto, parece que tirando a fração 2/3, os egípcios consideravam a fração racional própria geral da forma m/n não como uma "coisa" elementar, mas como parte de um processo incompleto. A fração 3/5, para nós uma única fração irredutível, era pensada pelos escribas egípcios como soma de três frações unitárias 1/3 e 1/5 e 1/15. Para facilitar a redução de frações próprias "mistas" à soma de frações unitárias, o Papiro de Rhind começa com uma tabela fornecendo $2/n$ como soma de frações unitárias, para todos os valores ímpares de n de 5 a 101. O equivalente de 2/5 é dado como 1/3 mais 1/15; 2/11 é escrito como 1/6 mais 1/66; e 2/15 é expresso como 1/10 mais 1/30. O último item da tabela decompõe[5] 2/101 em 1/101 mais 1/202 mais 1/303 mais 1/606. Não se percebe por que uma forma de decomposição era preferida a outra, dentre a infinidade possível. Sugeriu-se que alguns dos itens na tabela para $2/n$ eram obtidos usando o equivalente da fórmula

$$\frac{2}{n} = \frac{1}{\frac{n+1}{2}} + \frac{2}{\frac{n(n+1)}{2}}$$

ou de

$$\frac{2}{p \cdot q} = \frac{1}{p \cdot \frac{p+q}{2}} + \frac{1}{q \cdot \frac{p+q}{2}}$$

Porém, nenhum desses processos fornece a combinação para 2/15 que aparece na tabela. Recentemente foi sugerido [6] que a escolha na maior parte dos casos era ditada pela preferência dos egípcios pelas frações derivadas das frações "naturais" 1/2 e 1/3 e 2/3 por sucessivas divisões ao meio. Assim quando eles querem exprimir 2/15 como soma de frações unitárias, podem bem começar por tomar a metade de 1/15 e depois ver se ao resultado 1/30 eles podem somar uma fração unitária para formar 2/15; ou poderiam usar a relação conhecida

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{p} = \frac{1}{2p} + \frac{1}{6p}.$$

para chegar ao mesmo resultado 2/15 = 1/10 + 1/30. Um problema no Papiro de Rhind menciona especificamente o segundo método para achar dois terços de 1/5 e afirma que se procede de modo semelhante com outras frações. Passagens como essa indicam que os egípcios tinham alguma percepção de regras gerais e métodos de alcance mais amplo

[5]Uma lista de decomposições de $2/n$ desde $n = 5$ até $n = 101$ é dada em B. L. van der Waerden, *Science Awakening* (1961) e em Kurt Vogel, *Vorgriechische Mathematik*, Vol. I, *Vorgeschichte und Ägypten* (por volta de 1958). Uma clara explicação das frações egípcias aparece também em O. Neugebauer, *The Exact Sciences in Antiquity*. As três obras contêm excelentes exposições sobre a matemática egípcia

[6]Veja Neugebauer, *Exact Sciences in Antiquity*, pp. 74 e seguintes

que o caso específico tratado, e isso representa um passo importante no desenvolvimento da matemática. Para a decomposição de 2/5 o processo de dividir ao meio é inadequado; mas começando com um terço de 1/5 encontra-se a decomposição dada por Ahmes, 2/5 = 1/3 + 1/15. No caso de 2/7 aplica-se duas vezes a divisão por dois a 1/7 para obter o resultado 2/7 = 1/4 + 1/28; sucessivas divisões por dois fornecem também a decomposição de Ahmes 2/13 = 1/8 + 1/52 + 1/104. A obcessão egípcia com dividir por dois e tomar a terça parte se percebe no último caso da tabela $2/n$ para $n = 101$, pois não é nada claro porque a decomposição $2/n = 1/n + 1/2n + 1/3n + 1/2 \cdot 3 \cdot n$ é melhor que $1/n + 1/n$. Talvez um dos objetivos da decomposição de $1/2n$ fosse chegar a frações unitárias menores que $1/n$.

5 A tabela para $2/n$ no Papiro Ahmes é seguida de uma curta tabela para $n/10$ para n entre 1 e 9, as frações sendo novamente expressas em termos das favoritas — frações unitárias e a fração 2/3. A fração 9/10, por exemplo, é decomposta como 1/30 mais 1/5 mais 2/3. Ahmes tinha começado sua obra garantindo que ela forneceria um "estudo completo e minucioso de todas as coisas . . . e o conhecimento de todos os segredos", e por isso a parte principal do material que se segue às tabelas para $2/n$ e $n/10$ consiste de oitenta e quatro problemas sobre questões variadas. Os seis primeiros requerem a divisão de um ou dois ou seis ou sete ou oito ou nove pães entre dez homens, e o escriba usa a tabela para $n/10$ que acabou de dar. No primeiro problema o escriba tem um trabalho considerável para mostrar que está correto dar a cada homem um décimo de um pão. Se um homem recebe 1/10 de um pão, dois homens receberão 2/10 ou 1/5 e quatro receberão 2/5, ou seja, 1/3 + 1/15 de um pão. Portanto oito homens receberão 2/3 + 2/15, ou 2/3 + 1/10 + 1/30 de um pão, e oito homens mais dois homens terão 2/3 + 1/5 + + 1/10 + 1/30, ou um pão inteiro. Ahmes parece ter tido alguma espécie de equivalente de nosso mínimo múltiplo comum, que lhe permitiu terminar a demonstração. Na divisão de sete pães por dez homens, o escriba poderia ter escolhido 1/2 + 1/5 de pão para cada um, mas a predileção por 2/3 levou-o a 2/3 mais 1/30 de pão para cada um[7].

A operação aritmética fundamental no Egito era a adição, e nossas operações de multiplicação e divisão eram efetuadas no tempo de Ahmes por sucessivas "duplações". Nossa palavra "multiplicação", na verdade, sugere o processo egípcio. Uma multiplicação de, digamos, 69 por 19 seria efetuada somando 69 com ele mesmo para obter 138, depois adicionando a si próprio para alcançar 276, novamente duplicando para obter 552 e mais uma vez, dando 1 104, que é, naturalmente, dezesseis vezes 69. Como 19 = 16 + 2 + 1, o resultado da multiplicação de 69 por 19 é 1 104 + 138 + 69 — isto é, 1 311. Ocasionalmente usava-se também uma multiplicação por dez, pois isto é natural na notação hieroglífica decimal. Multiplicação de combinações de frações unitárias também era parte da aritmética egípcia. O Prob. 13 no Papiro Ahmes, por exemplo, pede o produto de 1/16 + 1/112 por 1 + 1/2 + 1/4; o resultado 1/8 é achado corretamente. Para a divisão, inverte-se o processo de duplicação, e o *divisor* é dobrado sucessivamente, em vez do *multiplicando*. Que os egípcios tinham alcançado grande virtuosidade na aplicação do processo de duplicação e do conceito de fração unitária é evidente pelos cálculos nos problemas do Papiro Ahmes. O Prob. 70 requer o quociente da divisão de 100 por 7 + 1/2 + 1/4 + 1/8; o resultado, 12 + 2/3 + 1/42 + 1/126 é obtido assim: dobrando o divisor sucessivamente, primeiro obtemos 15 + 1/2 + 1/4, depois 31 + 1/2, e finalmente 63, que é oito vezes o divisor. Além disso, dois terços do divisor sabe-se dar 5 + 1/4. Portanto o divisor, quando multiplicado por 8 + 4 + 2/3 dará 99 3/4, faltando 1/4 para o produto 100 que se quer. Aqui um ajuste inteligente é feito. Como oito vezes o divisor dá 63, resulta que o divisor quando multiplicado por 2/63 produzirá 1/4. Da tabela para $2/n$ sabe-se que 2/63 é 1/42 + 1/126, portanto o quociente procurado é 12 + 2/3 + + 1/42 + 1/126. Incidentalmente, esse processo usa a comutatividade da multiplicação, princípio evidentemente familiar aos egípcios.

[7]Para mais detalhes, veja R. J. Gillings, "Problems 1 to 6 of the Rhind Mathematical Papyrus", *The Mathematics Teacher*, **55** (1962), 61-69

Muitos dos problemas de Ahmes mostram conhecimento de manipulações equivalentes à regra de três. O problema 72 pergunta qual o número de pães de força 45 que são equivalentes a 100 de força 10, e a solução é apresentada como $100/10 \times 45$ ou 450 pães. Nos problemas sobre pães ou cerveja a força ou *pesu* é o inverso da densidade de grão, sendo o quociente do número de pães ou de unidades de volume dividido pela quantidade de grão. São numerosos os problemas sobre pães e cerveja no Papiro Ahmes. O Prob. 63, por exemplo, pede que sejam repartidos 700 pães entre quatro pessoas, sendo que as quantidades que devem receber estão na proporção prolongada $2/3:1/2:1/3:1/4$. A solução é encontrada fazendo o quociente de 700 pela soma das frações na proporção. Nesse caso o quociente de 700 por 1 3/4 é encontrado multiplicando 700 pelo recíproco do divisor, que é $1/2 + 1/14$. O resultado é 400; calculando 2/3 e 1/2 e 1/3 e 1/4 disto são obtidas as parcelas de pão requeridas.

Os problemas egípcios descritos até agora são de tipo digamos, aritmético, mas há outros que merecem a designação de algébricos. Não se referem a objetos concretos, específicos, como pães e cerveja, nem exigem operações entre números conhecidos. Em vez disso, pedem o que equivale a soluções de equações lineares, da forma $x + ax = b$ ou $x + ax + bx = c$, onde a, b e c são conhecidos e x é desconhecido. A incógnita é chamada de "aha". O Prob. 24, por exemplo, pede o valor de aha sabendo que aha mais um sétimo de aha dá 19. A solução de Ahmes não é a dos livros modernos, mas é característica de um processo conhecido como "método de falsa posição", ou "regra de falso". Um valor específico, provavelmente falso, é assumido para aha, e as operações indicadas à esquerda do sinal de igualdade são efetuadas sobre esse número suposto. O resultado é então comparado com o resultado que se pretende, e usando proporções chega-se à resposta correta. No problema 24 o valor tentado para a incógnita é 7, de modo que $x + 1/7\,x$ é 8, em vez de 19 como se queria. Como $8(2 + 1/4 + 1/8) = 19$, deve-se multiplicar 7 por $2 + 1/4 + 1/8$ para obter a resposta: Ahmes achou $16 + 1/2 + 1/8$. Então conferiu sua resposta mostrando que se a $16 + 1/2 + 1/8$ somarmos um sétimo disto (que é $2 + 1/4 + 1/8$) de fato obteremos 19. Aqui notamos outro passo significativo no desenvolvimento da matemática, pois a verificação é um exemplo simples de prova. Embora o método de falsa posição fosse o geralmente usado por Ahmes, há um problema (Prob. 30) em que a equação $x + 2/3\,x + 1/2\,x + 1/7\,x = 37$ é resolvida fatorando o primeiro membro e dividindo 37 por $1 + 2/3 + 1/2 + 1/7$, o resultado sendo $16 + 1/56 + 1/679 + 1/776$.

Muitos dos cálculos com "aha" no Papiro de Rhind são evidentemente exercícios para jovens estudantes. Embora uma grande parte deles seja de natureza prática, em algumas ocasiões o escriba parece ter tido em mente enigmas ou recreações matemáticas. Assim o Prob. 79 cita apenas "sete casas, 49 gatos, 343 ratos, 2 401 espigas de trigo, 16 807 hecates". É presumível que o escriba estava tratando de um problema, talvez bem conhecido, em que em cada uma das sete casas havia sete gatos, cada um deles come sete ratos, cada um dos quais havia comido sete espigas, cada uma delas teria produzido sete medidas de grão. O problema evidentemente não pedia uma resposta prática, que seria o número de medidas de grão poupadas, mas a não-prática soma dos números de casas, gatos, ratos, espigas e medidas de grão. Este divertimento no Papiro de Ahmes parece um antepassado do versinho infantil:

> Quando ia a Sto. Ives,
> encontrei um homem com sete mulheres;
> cada mulher tinha sete sacos,
> cada saco tinha sete gatos,
> cada gato tinha sete gatinhos.
> Gatinhos, gatos, sacos e mulheres,
> quantos iam a Sto. Ives?[*]

[*] As I was going to St. Ives,/I met a man with seven wives;/Every wife had seven sacks,/Every sack had seven cats,/Every cat had seven kits./Kits, cats, sacks, and wives,/How many were going to St. Ives?

7 O historiador grego Heródoto nos diz que o apagamento das demarcações pelas inundações do Nilo tornou necessários os mensuradores. Os conhecimentos dos "estiradores de corda" egípcios eram evidentemente admirados por Demócrito, um matemático de competência e um dos fundadores de uma teoria atômica, e hoje suas realizações parecem ser demasiado valorizadas, em parte em conseqüência da precisão admirável da construção das pirâmides. Diz-se freqüentemente que os egípcios antigos conheciam o teorema de Pitágoras, mas não há traço disto nos papiros que chegaram até nós. Há no entanto alguns problemas geométricos no Papiro Ahmes. O Prob. 51 mostra que a área de um triângulo isósceles era achada tomando a metade do que chamaríamos base e multiplicando isso pela altura. Ahmes justifica seu método para achar a área sugerindo que o triângulo isósceles pode ser pensado como dois triângulos retângulos, um dos quais pode ser deslocado de modo que os dois juntos formam um retângulo. O trapézio isósceles é tratado de modo semelhante no Prob. 52, em que a base maior é 6, a menor é 4, e a distância entre elas é 20. Tomando a metade da soma das bases, "de modo a fazer um retângulo", Ahmes multiplica isso por 20 para achar a área. Em transformações como essa, em que triângulos e trapézios isósceles são transformados em retângulos, vemos o início de uma teoria de congruências e da idéia de prova em geometria, mas os egípcios não foram além. Uma deficiência séria em sua geometria era a falta de uma distinção claramente estabelecida entre relações que são exatas e as que são apenas aproximações. Um documento de Edfu que se preservou, datando de cerca de 1 500 anos depois de Ahmes, dá exemplos de triângulos, trapézios, retângulos, e quadriláteros mais gerais; a regra para achar a área do quadrilátero geral é fazer o produto das medidas aritméticas de lados opostos. Imprecisa como é a regra, o autor do documento deduziu dela um corolário — que a área do triângulo é a metade da soma de dois lados multiplicada pela metade do terceiro lado. Este é um notável exemplo de busca de relações entre figuras geométricas, bem como de uso do conceito de zero como substituto de uma grandeza na geometria.

A regra egípcia para achar a área do círculo tem sido considerada um dos maiores sucessos da época. No Prob. 50 o escriba Ahmes assume que a área de um campo circular com diâmetro de nove unidades é a mesma de um quadrado com lado de oito unidades. Comparando com a fórmula moderna $A = \pi r^2$ vemos que a regra egípcia equivale aproximadamente a atribuir a π o valor 3 1/6 uma aproximação bastante elogiável; mas novamente não há sinal de que Ahmes soubesse que as áreas de seu círculo e seu quadrado não eram *exatamente* iguais. É possível que o Prob. 48 dê alguma sugestão sobre como os egípcios chegaram à sua área do círculo. Nesse problema o escriba formou um octógono a partir de um quadrado de lado nove unidades dividindo os lados em três e cortando os quatro triângulos isósceles dos cantos, cada um tendo área 4 1/2 unidades. A área do octógono, que não difere muito da de um círculo inscrito no quadrado, é sessenta e três unidades, o que não está longe da área do quadrado com lado de oito unidades. Que o número $4(8/9)^2$ desempenhava papel comparável ao de nossa constante π parece ser confirmado pela regra egípcia para calcular a circunferência do círculo, segundo a qual a razão da área de um círculo para a circunferência é igual à da área do quadrado circunscrito para seu perímetro. Essa observação representa uma relação geométrica muito mais precisa e matematicamente significativa do que a aproximação relativamente boa para π. O grau de precisão na aproximação não é afinal, uma boa medida das realizações matemáticas ou arquitetônicas, e não devemos dar ênfase demais a esse aspecto da obra dos egípcios. A percepção de inter-relações entre figuras geométricas, revelada pelos egípcios, foi, de outro lado, muito freqüentemente esquecida. No entanto, é aqui que eles mais se aproximaram da atitude de seus sucessores, os gregos. Não se conhece teorema ou demonstração formal na matemática egípcia, mas algumas comparações geométricas feitas no vale do Nilo, como essas sobre perímetros e áreas de círculos e quadrados, estão entre as primeiras afirmações precisas da história, referentes a figuras curvilíneas.

8 O Prob. 56 do Papiro de Rhind tem especial interesse por conter rudimentos de trigonometria e uma teoria de triângulos semelhantes. Na construção de pirâmides era essencial manter uma inclinação constante das faces e pode ter sido essa preocupação

a levar os egípcios a introduzir um conceito equivalente ao de co-tangente de um ângulo. Na tecnologia moderna é usual medir o grau de inclinação de uma reta por uma razão entre segmentos verticais e horizontais que é recíproca da usada no Egito. A palavra egípcia *seqt* significava o afastamento horizontal de uma reta oblíqua em relação ao eixo vertical para cada variação de unidade na altura. O seqt correspondia assim, exceto quanto a unidades de medida, ao termo usado hoje pelos arquitetos para indicar a inclinação de uma parede. A unidade de comprimento vertical era o cúbito; mas para medir a distância horizontal a unidade usada era a "mão" medindo um sétimo do cúbito. Portanto, o seqt da face de uma pirâmide era o quociente do afastamento horizontal pelo vertical, o primeiro medido em mãos, o segundo em cúbitos. No Prob. 56 pede-se o seqt de uma pirâmide que tem 250 cúbitos de altura e uma base quadrada com lado de 360 cúbitos. O escriba começa dividindo 360 por 2 depois divide o resultado por 250, obtendo $1/2 + 1/5 + 1/50$. Multiplicando o resultado por 7,, deu o resultado de $5\ 1/25$ em mãos por cúbitos. Em outros problemas sobre pirâmides no Papiro Ahmes o seqt dá $5\ 1/4$, o que está mais de acordo com o da grande Pirâmide de Quéops, com lado de base 440 cúbitos e altura 280, o seqt sendo $5\ 1/2$ mãos por cúbito.

Há muitas estórias sobre relações geométricas presumidas entre dimensões na Grande Pirâmide, algumas obviamente falsas. Por exemplo, a que diz que havia a intenção de o perímetro da base ser precisamente igual à circunferência de um círculo cujo raio é a altura da pirâmide não está de acordo com a obra de Ahmes. A razão entre perímetro e altura é de fato bem próxima de 44/7 que é o dobro do valor 22/7 freqüentemente usado hoje para π; mas devemos lembrar que o valor para π dado por Ahmes é $3\ 1/6$ não $3\ 1/7$. Que o valor de Ahmes foi usado também por outros egípcios se verifica num rolo de papiro da décima-segunda dinastia (o Papiro Kahun, agora em Londres) em que o volume de um cilindro é calculado multiplicando a altura pela área da base, a área da base sendo determinada pela regra de Ahmes.

Muito de nossa informação sobre a matemática egípcia vem do Papiro Rhind ou de Ahmes, o mais extenso documento matemático do antigo Egito; mas há também outras fontes[8]. Além do Papiro Kahun já mencionado, há um Papiro de Berlim do mesmo período, duas pranchas de madeira de Akhmin (Cairo) de cerca de 2 000 A. C., um rolo de couro contendo listas de frações unitárias e datando do fim do período dos hicsos, e um importante papiro chamado Golonishev ou de Moscou, comprado no Egito em 1893. O Papiro de Moscou tem quase o comprimento do Rhind mas só um quarto da largura. Foi escrito, menos cuidadosamente que a obra de Ahmes, por um escriba desconhecido da décima segunda dinastia (1890 A. C. aproximadamente). Contém vinte e cinco exemplos, quase todos da vida prática e não diferindo muito dos de Ahmes, exceto dois que têm significado especial. Associada ao Prob. 14 do Papiro de Moscou há uma figura que parece um trapézio (ver Fig. 2.1) mas os cálculos associados a ela mostram que o que se quer representar é o tronco de uma pirâmide. Acima e abaixo da figura estão sinais para dois e quatro respectivamente e no interior estão os símbolos hieráticos para seis e cinqüenta e seis. As instruções ao lado tornam claro que o problema pergunta qual o volume de um tronco de pirâmide quadrada com altura de seis unidades se as arestas das bases superior e inferior medem duas e quatro unidades respectivamente. O escriba indica que se deve tomar os quadrados dos números dois e quatro e adicionar à soma desses quadrados o produto de dois por quatro, o resultado sendo vinte e oito. Esse é então multiplicado por um terço de seis; e o escriba conclui com as palavras, "Veja, é 56; você achou-a corretamente". Isto é, o volume do tronco foi calculado de acordo com a fórmula moderna $V = h(a^2 + ab + b^2)/3$, onde h é a altura e a e b são os lados das bases quadradas. Essa fórmula não aparece escrita em nenhum lugar, mas em substância era evidentemente conhecida pelos egípcios. Se, como se faz no documento de Edfer, toma-se $b = 0$, a fórmula se reduz à fórmula familiar, um terço da base vezes a altura, para o volume da pirâmide. Como os egípcios chegaram a esses resultados não se sabe. Uma origem

[8]Um bom registro dessas aparece na obra de Archibald citada na nota de rodapé 4

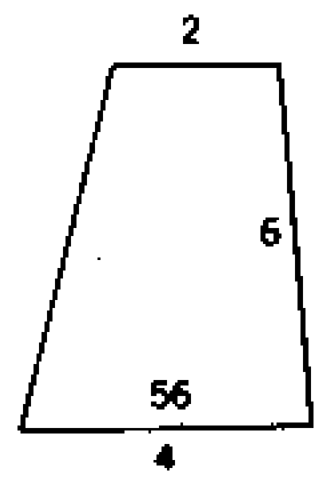


Figura 2.1

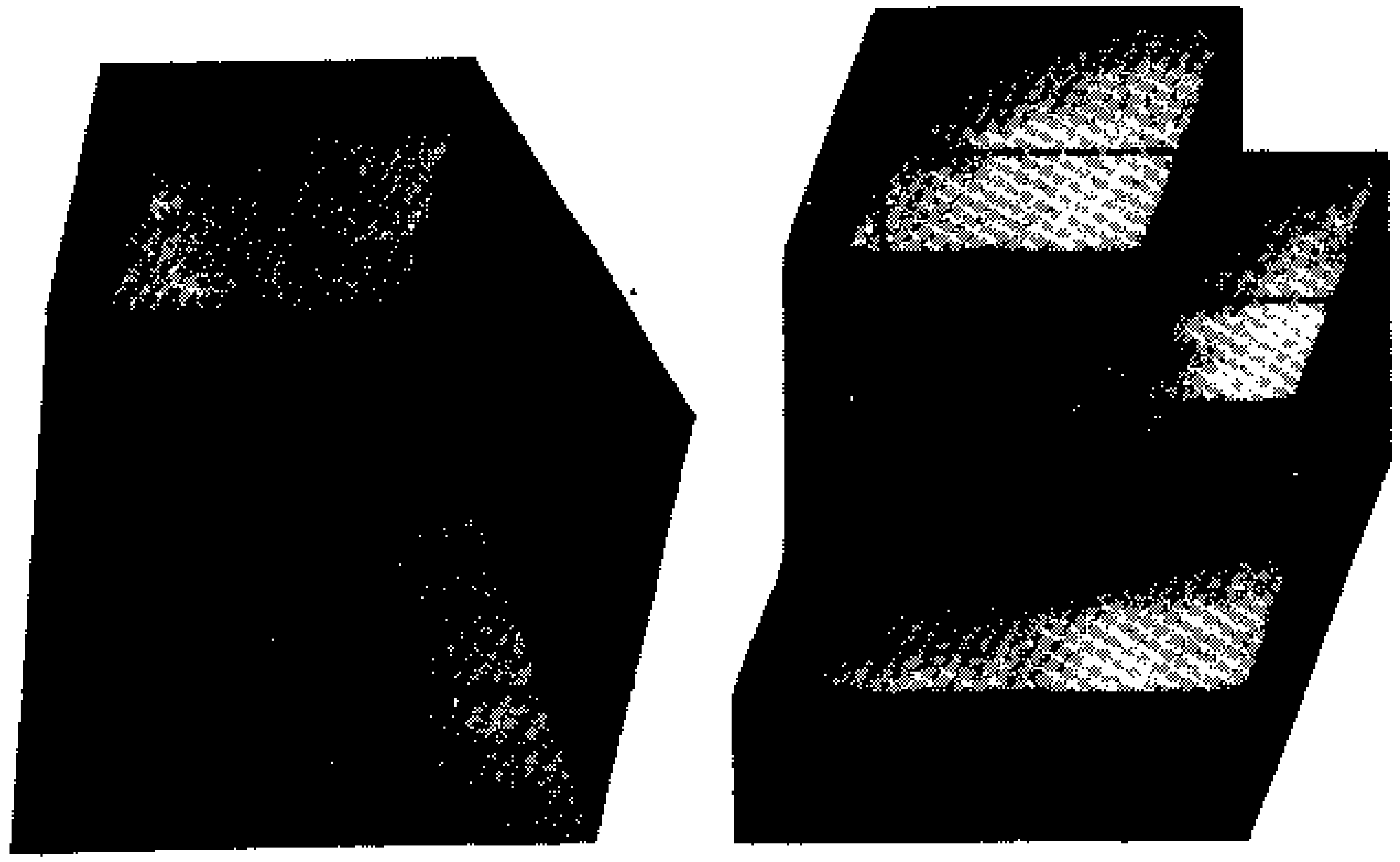


Figura 2.2

empírica para a regra sobre o volume da pirâmide parece possível, mas não para o do tronco. Para esse uma base teórica é mais provável; sugeriu-se que os egípcios tenham procedido nesse caso como nos do triângulo isósceles e do trapézio — podem, mentalmente, ter decomposto o tronco em paralelepípedos, prismas e pirâmides[9]. Substituindo as pirâmides e prismas por blocos retangulares iguais, um agrupamento plausível dos blocos leva à fórmula egípcia. Por exemplo, poder-se-ia começar com uma pirâmide de base quadrada e com o vértice diretamente sobre um dos vértices da base. Uma decomposição evidente do tronco seria a em quatro partes mostrada na Fig. 2.2 — um paralelepípedo retângulo tendo volume b^2h, dois prismas triangulares, cada um com volume $b(a-b)h/2$ e uma pirâmide de volume $(a-b)^2h/3$. Os prismas podem ser juntados num paralelepípedo retângulo de dimensões b, $a-b$ e h, e a pirâmide pode ser pensada como um paralelepípedo retangular de dimensões $a-b$ e $a-b$ e $h/3$. Dividindo os paralelepípedos mais altos de modo que todas as alturas sejam $h/3$, pode-se facilmente dispor os blocos de modo a formar camadas, cada uma de altura $h/3$ e tendo secções com áreas a^2 e ab e b^2 respectivamente.

O Prob. 10 no Papiro de Moscou apresenta uma questão mais difícil de interpretar que a do Prob. 14. Aqui o escriba pede a área da superfície do que parece ser um cesto com um diâmetro $4\ 1/2$. Procede como se usasse o equivalente da fórmula $S = (1 - 1/9)^2(2x)x$ onde x é $4\ 1/2$, obtendo como resposta 32 unidades. Como $(1 - 1/9)^2$ é a aproximação egípcia para $\pi/4$, a resposta 32 corresponderia à superfície de um hemisfério de diâmetro $4\ 1/2$; e essa foi a interpretação dada ao problema em 1930[10]. Um tal resultado, precedendo de cerca de 1 500 anos o mais antigo cálculo conhecido de uma superfície hemisférica, seria assombroso, e de fato, parece que seria bom demais para ser verdadeiro. Análise posterior [11] indica que a "cesta" pode ter sido um teto — algo como o de um hangar em forma de meio cilindro de diâmetro $4\ 1/2$ e comprimento $4\ 1/2$. O cálculo nesse caso não exige mais que o conhecimento do comprimento de um

[9]Van der Waerden, *Science Awakening*, p. 35. cf. R. J. Gillings, "The Volume of a Truncated Pyramid in Ancient Egypt", *Mathematics Teacher*, 57 (1964), 552-555

[10]Veja W. W. Struve, "Mathematischer Papyrus des Staatlichen Museums der Schönen Künste in Moskau", *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik*, Parte A, *Quellen*, I (1930)

[11]Veja van der Waerden, *Science Awakening*, p. 34. cf. no entanto, R. J. Gillings, "The Area of the Curved Surface of a Hemisphere in Ancient Egypt", *The Australian Journal of Science*, 30 (1967), 113-116, em que o autor conclui que o escriba do Papiro de Moscou estava, de fato, calculando corretamente com a superfície curva do hemisfério, no Prob. 10

semicírculo, e a obscuridade do texto permite oferecer interpretações ainda mais primitivas, inclusive a possibilidade de ser o cálculo apenas uma avaliação grosseira da área de um teto de celeiro em forma de cúpula. De qualquer forma, parece que temos aqui uma estimativa primitiva da área de uma superfície curva.

Durante muito tempo se supôs que os gregos aprenderam os rudimentos de geometria com os egípcios, e Aristóteles argüiu que a geometria teria surgido no vale do Nilo porque lá os sacerdotes tinham o lazer necessário para desenvolver o conhecimento teórico. Que os gregos de fato emprestaram do Egito alguma matemática elementar é provável, pois o uso de frações unitárias persistiu na Grécia e em Roma até boa parte do período medieval, mas evidentemente a extensão desse empréstimo foi exagerada. O conhecimento revelado nos papiros é quase todo prático e o elemento principal nas questões eram cálculos. Quando parecem entrar elementos teóricos, o objetivo pode ter sido o de facilitar a técnica e não a compreensão. Mesmo a geometria egípcia, outrora louvada aparece na verdade mais como um ramo da aritmética aplicada. Onde entram relações de congruência elementares, o motivo aparentemente é o de fornecer artifícios de mensuração e não o de conseguir melhor compreensão. As regras de cálculo raramente são motivadas e dizem respeito apenas a casos concretos específicos. Os papiros de Ahmes e Moscou, nossas principais fontes de informação, podem ter sido apenas manuais destinados a estudantes, mas indicam a direção e as tendências do ensino de matemática no Egito; outras evidências fornecidas por inscrições sobre monumentos, fragmentos de outros papiros matemáticos, e documentos de ramos aparentados da ciência servem para confirmar a impressão geral. É verdade que nossos dois principais papiros matemáticos são de época bastante antiga, mil anos antes do surgimento da matemática grega, mas a egípcia parece ter permanecido notavelmente uniforme durante sua longa história. Em todos os seus estágios, era construída em torno da operação de adição, uma desvantagem que conferia aos cálculos dos egípcios um peculiar primitivismo, combinado com uma ocasional e assombrosa complexidade. O fértil vale do Nilo tem sido descrito como o maior oásis do mundo no maior deserto do mundo. Regado por um dos rios mais "bem-educados" do mundo e geograficamente protegido em larga extensão da invasão estrangeira, era um abrigo para um povo pacífico que levava uma vida calma e sem desafios. O amor aos deuses benevolentes, o respeito à tradição, a preocupação com a morte e as necessidades dos mortos, tudo isso encorajou um alto grau de estagnação. A geometria pode ter sido uma dádiva do Nilo, como Heródoto acreditava, mas os egípcios pouco a aproveitaram. A matemática de Ahmes era a de seus antepassados e descendentes. Para realizações matemáticas mais progressistas devemos examinar o vale fluvial mais turbulento conhecido como Mesopotâmia.

BIBLIOGRAFIA

Chace, A. B., L. S. Bull, H. P. Manning e R. C. Archibald, eds. *The Rhind Mathematical Papyrus* (Oberlin, Ohio, 1927-1929, 2 vols.). Contém uma completa bibliografia de obras sobre a matemática egípcia publicadas no período de 1706 até 1927, bem como uma extensa exposição da matemática egípcia

Gillings, R. J., "Problems 1 to 6 of the Rhind Mathematical Papyrus", *The Mathematics Teacher*, **55** (1962), 61-69. Continuações se encontram em volumes posteriores do periódico

Guggenbuhl, Laura, "Mathematics in Ancient Egypt: A Checklist", *The Mathematics Teacher*, **58** (1965), 630-634

Neugebauer, O., *Die Grundlagen der ägyptischen Bruchrechnung* (Berlin: Springer, 1926)

Neugebauer, O., *The Exact Sciences in Antiquity*, 2.ª edição (Providence, R. I.: Brown University Press, 1957; edição em brochura New York; Harper Torchbook)

Parker, R. A., *The Calendars of Ancient Egypt* (Chicago: University of Chicago Press, 1950)

Struve, W. W., "Mathematischer Papyrus des Staatlichen Museums der Schönen Künste in Moskau", *Quellen and Studien zur Geschichte der Mathematik*, Parte A, *Quellen*, **I** (1930)

Van der Waerden, B. L., "Die Entstehungsgeschichte der ägyptischen Bruchrechnung", *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik*, Parte B, *Studien*, **IV** (1937-1938), 359-382

Van der Waerden, B. L., *Science Awakening*, traduzido para o inglês por Arnold Dresden (New York: Oxford University Press, 1961; edição em brochura New York: Wiley, 1963)

Vogel, Kurt, *Vorgriechische Mathematik*, Vol. I, *Vorgeschichte und Ägypten* (edição em brochura, Hannover: Hermann Schroedel, por volta de 1958)

Wheeler, Noel F., "Pyramids and Their Purpose," *Antiquity*, **9** (1935), 5-21, 161-189, 292-304

EXERCÍCIOS

1. Descreva a evidência em que se baseia nossa avaliação da matemática egípcia. Você acha provável que isso seja modificado pela descoberta de novos documentos? Explique.
2. Você acha que a astronomia foi um fator mais importante que a demarcação de terra no surgimento da matemática egípcia? Explique.
3. Que significa etmologicamente a palavra "geometria"? O uso dessa palavra é justificável à luz da origem histórica do assunto? Explique.
4. Quais são, na sua opinião, as três mais importantes deficiências da matemática egípcia? Explique por que as considera as mais significativas.
5. Quais são, na sua opinião, as três mais importantes contribuições do Egito ao desenvolvimento da matemática? Explique por que as considera importantes.
6. Escreva o número 7 654 em forma hieroglífica egípcia. Em que difere isso do modo pelo qual Ahmes escrevia esse número?
7. Exprima 2/103 como soma de duas frações unitárias diferentes, e escreva-as em notação hieroglífica egípcia. Em que a forma hierática difere dessa?
8. Resolva pelo método da falsa posição a equação $x + 1/2\,x = 16$. (Esse é o Prob. 25 no Papiro Ahmes.)
9. Resolva o seguinte problema do Papiro Ahmes (Prob. 40): Divida cem pães entre cinco homens de modo que as partes estejam em progressão aritmética e que a sétima parte da soma das três partes maiores seja igual à soma das duas menores.
10. Resolva à maneira egípcia as equações simultâneas $x^2 + y^2 = 100$, $y = 3x/4$, tiradas de um papiro de Berlim do antigo Egito. (Use o método de "dupla falsa", começando com um valor suposto para x, calculando o y correspondente pela segunda equação, e ajustando os valores de modo a satisfazer a primeira.)
11. Por duplicação e mediação (sucessivas multiplicações e divisões por dois) ache $101 \div 16$, exprimindo o resultado em hieroglifos egípcios.
12. Ache algebricamente a fórmula egípcia para o volume do tronco de pirâmide quadrada, a partir da fórmula para volume da pirâmide, usando proporções conhecidas da geometria elementar. Você acha que os egípcios poderiam ter encontrado sua fórmula desse modo? Explique.
13. Até que ponto é correto dizer que os egípcios conheciam a área do círculo? Explique claramente.
14. Por que você acha que os egípcios preferiam a decomposição $2/15 = 1/10 + 1/30$ à alternativa $2/15 = 1/12 + 1/20$?
15. Mostre que se n é um múltiplo de três, $2/n$ pode ser decomposto na soma de duas frações unitárias, uma sendo a metade de $1/n$.
16. Mostre que se n é múltiplo de cinco, $2/n$ pode ser decomposto na soma de duas frações unitárias, uma sendo um terço de $1/n$.
17. Justifique o método de resolução usado por Ahmes no Prob. 63. (Ver texto.)
18. Justifique o fato de Ahmes assumir que a razão da área do círculo para sua circunferência é igual à razão da área do quadrado circunscrito para o perímetro desse quadrado.
19. Se o seqt de uma pirâmide é 5 palmos (ou mãos) e 1 dedo por cúbito, e se o lado da base é 140 cúbitos, qual é a altura? (Prob. 57 no Papiro Ahmes.) Há cinco dedos num palmo.
20. Use o método egípcio de divisão para resolver o seguinte problema do Papiro Ahmes (Prob. 31): Uma quantidade e seus dois terços, sua metade e seu um sétimo juntos fazem 33. Ache essa quantidade. [A resposta dada é $14 + 1/4 + 1/56 + 1/97 + 1/194 + 1/388 + 1/679 + 1/776$.]

Capítulo **3**

Mesopotâmia

Quanto um deus está além de outro deus?

De um texto astronômico babilônico antigo.

O quarto milênio antes de nossa era foi um período de notável progresso cultural trazendo o uso da escrita, da roda, e dos metais. Como no Egito durante a primeira dinastia, que começou pelo fim desse maravilhoso milênio, também no vale mesopotâmio havia por essa época uma civilização de alto nível. Ali os sumérios tinham construído casas e templos decorados com cerâmica e mosaicos artísticos em desenhos geométricos. Governantes poderosos uniram os principados locais num império que realizou vastas obras públicas, como um sistema de canais para irrigar a terra e controlar as inundações. O relato bíblico da inundação no tempo de Noé tem uma contrapartida mais antiga na lenda relativa ao herói sumeriano Utnapischtun e a inundação da região entre os rios Tigre e Eufrates, onde o fluxo dos rios era imprevisível, ao contrário do que ocorria no Nilo. A Bíblia nos diz que Abraão vinha da cidade de Ur, um aldeamento sumério onde o Eufrates desaguava no Golfo Pérsico, pois nessa época os rios não se reuniam como agora, antes de chegar ao Golfo. O tipo de escrita cuneiforme desenvolvido pelos sumérios durante o quarto milênio, muito antes dos dias de Abraão, pode ser a mais antiga forma de comunicação escrita, pois provavelmente é anterior à hieroglífica egípcia, que pode derivar dela. Embora nada tenham em comum, é uma coincidência interessante que as origens da escrita e dos veículos com rodas sejam aproximadamente contemporâneas.

As civilizações antigas da Mesopotâmia são freqüentemente chamadas babilônias, embora tal designação não seja inteiramente correta. A cidade de Babilônia não foi a princípio, nem foi sempre em períodos posteriores, o centro da cultura associada com os dois rios, mas a convenção sancionou o uso informal do nome "babilônica" para a região durante o período de cerca de 2000 até aproximadamente 600 A. C. Quando em 538 A. C. a Babilônia foi dominada por Ciro da Pérsia, a cidade foi poupada mas o império babilônio terminou. A matemática "babilônia", no entanto, continuou através do período seleúcida na Síria, quase até o surgimento do cristianismo. Ocasionalmente a área entre os rios é também designada como Caldéia, porque os caldeus, provenientes do sul da Mesopotâmia, foram dominantes durante certo tempo, principalmente durante o fim do sétimo século A. C., em toda a região entre os rios. Então, como hoje, a Terra dos Dois Rios estava aberta a invasões de várias direções o que fazia do Crescente Fértil um campo de batalha, com a hegemonia mudando freqüentemente. Uma das invasões mais significativas foi a dos acadianos semíticos sob Sargão I (2276-2221 A. C. aproximadamente) ou Sargão, o Grande. Ele estabeleceu um império que se estendeu do Golfo Pérsico ao sul, até o Mar Negro ao norte e das estepes da Pérsia a leste, até o Mediterrâneo a oeste. Sob Sargão começou uma gradual absorção pelos invasores da cultura suméria indígena, inclusive da escrita cuneiforme. Invasões e revoltas posteriores trouxeram estirpes de várias raças — amoritas, cassitas, elamitas, hititas, assírios, medos, persas, e outros — ao poder político em épocas diversas, mas permaneceu um grau suficientemente alto de unidade cultural na área para que se possa chamar simplesmente de mesopotâmica essa civilização. Em particular, o uso da escrita cuneiforme formou um forte laço. Leis, registros de impostos, estórias, lições de escola, cartas pessoais — tais coisas e muitas outras eram incisas em tabletas de barro mole com um estilete, e as tabletas eram então cozidas ao sol ou em fornos. Tais documentos, felizmente, eram muito menos vulneráveis aos estragos do tempo que os papiros egípcios; por isso se dispõe hoje de muito mais documentação

sobre a matemática da Mesopotâmia que sobre a do Egito. Só de um local, a área da antiga Nipur, temos umas 50 000 tabletas. As bibliotecas universitárias em Columbia, Pennsylvania e Yale, entre outras, têm grandes coleções de tabletas antigas da Mesopotâmia, algumas delas matemáticas. Apesar da quantidade de documentos disponíveis, no entanto, a escrita hieroglífica egípcia foi decifrada antes da cuneiforme, nos tempos modernos. Algum progresso na leitura da escrita babilônia tinha sido feito no começo do século dezenove por Grotefend, mas somente no segundo quarto do século vinte começaram a aparecer, nas histórias da antiguidade, exposições substanciais da matemática mesopotâmica[1].

O uso antigo da escrita na Mesopotâmia é atestado por centenas de tabletas de barro encontradas em Uruk e datando de cerca de 5 000 anos atrás. Por essa época a escrita tinha atingido o ponto em que formas estilizadas convencionais eram usadas para muitas coisas: ≈ para água, para olho, e combinações dessas para indicar choro. Gradualmente o número de símbolos tornou-se menor, de modo que de uns 2 000 símbolos inicialmente usados só um terço restou ao tempo da conquista acadiana. Desenhos primitivos deram lugar a combinações de cunhas: água ficou e olho . A princípio o escriba escrevia do alto para baixo em colunas da direita para a esquerda; mais tarde, por conveniência, a tableta era girada de 90° em sentido anti-horário, e o escriba escrevia da esquerda para a direita em linhas horizontais de cima para baixo. O estilete, que anteriormente fora um prisma triangular, foi substituído por um cilindro circular reto — ou antes, por dois de raios diferentes. Nos primeiros tempos, a ponta do estilete era apoiada verticalmente sobre o barro para representar dez unidades e obliquamente para uma, usando o estilete menor; de modo análogo, uma impressão oblíqua com o maior indicava sessenta unidades e uma vertical indicava 3 600. Combinações dessas eram usadas para os números intermediários.

Quando os acadianos adotaram a escrita suméria, léxicos foram compilados dando equivalentes nas duas línguas, e as formas das palavras e numerais se tornaram menos variadas. Milhares de tabletas do tempo da dinastia Hamurabi (1800-1600 A. C. aproximadamente) ilustram um sistema numérico que estava bem estabelecido. O sistema decimal, comum à maioria das civilizações tanto antigas quanto modernas, tinha sido submerso da Mesopotâmia sob uma notação que dava a base sessenta como fundamental. Muito se escreveu sobre os motivos para essa mudança; sugeriu-se que considerações astronômicas podem ter sido determinantes ou que o sistema sexagesimal pode ter sido a combinação natural de dois mais antigos, um decimal outro em base seis. Parece mais provável, porém, que a base sessenta fosse adotada conscientemente e legalizada no interesse da metrologia, pois uma grandeza de sessenta unidades pode ser facilmente subdividida em metades, terços, quartos, quintos, sextos, décimos, dozeavos, quinzeavos, vigésimos e trigésimos, fornecendo assim dez possíveis subdivisões. Qualquer que tenha sido a origem o sistema sexagesimal de numeração teve vida notavelmente longa, pois até hoje restos permanecem, infelizmente para a consistência, nas unidades de tempo e medida dos ângulos, apesar da forma fundamentalmente decimal de nossa sociedade.

2 A numeração cuneiforme babilônia, para os inteiros menores, seguia as mesmas linhas que a hieroglífica egípcia, com repetições dos símbolos para unidades e dezenas. Se o arquiteto egípcio, esculpindo na pedra escrevia cinqüenta e nove como $\cap\cap\cap\cap\cap|||||||||$, o escriba mesopotâmio podia analogamente representar o mesmo número numa tableta de barro por quatorze marcas em cunha — cinco cunhas largas colocadas de lado ou "parênteses em ângulo", cada um representando dez unidades, e nove cunhas verticais finas, cada uma valendo uma unidade, todas justapostas num grupo bem arrumado como . Para além do número cinqüenta e nove porém, os sistemas egípcio e babilônio divergiam

[1]Veja especialmente O. Neugebauer, *The Exact Sciences in Antiquity* (1957) e B. L. van der Waerden, *Science Awakening* (1961). Ver também O. Neugebauer e A. Sachs, *Mathematical Cuneiform Texts* (American Oriental Series, Vol. 29, 1945). Uma boa exposição auxiliar e mais referências se encontram em R. C. Archibald, "Outline of the History of Mathematics", (American Mathematical Monthly, 56, 1949, n.º 1, suplemento)

marcadamente. Talvez fosse a inflexibilidade do material de escrita mesopotâmio, talvez fosse uma centelha de inspiração o que fez com que os babilônios percebessem que seus dois símbolos para unidades e dezenas bastavam para representar qualquer inteiro, por maior que fosse, sem excessiva repetição. Isso se tornou possível pela invenção que fizeram, há cerca de 4 000 anos, da notação posicional — o mesmo princípio que assegura a eficácia de nossa forma numeral. Isto é, os antigos babilônios viram que seus símbolos podiam ter função dupla, tripla, quádrupla ou em qualquer grau, simplesmente recebendo valores que dependessem de suas posições relativas na representação de um número. As cunhas no símbolo cuneiforme para cinqüenta e nove são agrupadas bem juntas de modo a formar quase o equivalente de uma única cifra. Um espaçamento adequado entre grupos de cunhas pode estabelecer posições, lidas da direita para a esquerda, que correspondem a potências crescentes da base; cada grupo tem então um "valor local" que depende de sua posição. Nosso número 222 usa o mesmo algarismo três vezes, com significado diferente de cada vez. Uma vez vale duas unidades, depois duas dezenas, e finalmente duas centenas (isto é, duas vezes o quadrado da base dez). De modo exatamente análogo os babilônios fizeram uso múltiplo de um símbolo como 𒐖. Quando escreviam 𒐖 𒐖 𒐖, separando claramente os três grupos de duas cunhas cada, entendiam que o grupo da direita representava duas unidades, o segundo o dobro de sua base, sessenta, e o da esquerda o dobro do quadrado da base. O numeral, portanto, indicava $2(60)^2 + 2(60) + 2$ (ou 7322 em nossa notação).

Há uma abundância de material relativo à matemática na Mesopotâmia, mas estranhamente provém de dois períodos muito separados no tempo. Há uma quantidade de tabletas dos primeiros séculos do segundo milênio A. C. (a idade da Babilônia antiga), e muitas também dos últimos séculos do primeiro milênio A. C. (período selêucida). A maior parte das contribuições importantes para a matemática remontam ao período mais antigo, mas há uma contribuição de que não há evidência anterior a quase 300 A. C. Os babilônios parecem a princípio não ter tido um modo claro de indicar uma posição "vazia" — isto é, não tinham o símbolo *zero*, embora às vezes deixassem um espaço vazio para indicar o zero. Isto significava que as formas escritas dos números 122 e 7202 eram muito parecidas, pois 𒐖 𒐖 podia significar ou $2(60) + 2$ ou $2(60)^2 + 2$. Muitas vezes o contexto eliminava a ambigüidade; mas a falta de um símbolo zero, como o que nos permite distinguir imediatamente entre 22 e 202 deve ter sido muito inconveniente. Ao tempo da conquista por Alexandre, o Grande, no entanto, um símbolo especial, consistindo de duas pequenas cunhas colocadas obliquamente, foi inventado para servir para marcar o lugar onde um numeral faltasse. Dessa época em diante, enquanto a cuneiforme foi usada, o número 𒐖 𒑱 𒐖, ou $2(60)^2 + 0(60) + 2$, era imediatamente distinguível de 𒐖 𒐖, ou $2(60) + 2$.

O símbolo babilônio para o zero aparentemente não terminou de todo com a ambigüidade, pois parece ter sido usado só para posições intermediárias. Não há tabletas em existência, onde apareça em posição terminal. Isto significa que jamais conseguiram um sistema posicional absoluto. A posição era só relativa; portanto, o símbolo 𒐖 𒐖 podia representar $2(60) + 2$ ou $2(60)^2 + 2(60)$ ou $2(60)^3 + 2(60)^2$ ou qualquer um de infinitos outros números em que apareçam só duas posições sucessivas com dois.

3 Se a matemática mesopotâmia, como a do vale do Nilo, se baseasse na adição de inteiros e frações unitárias, a invenção da notação posicional não teria grande significado na época. Não é muito mais difícil escrever 98 765 em notação hieroglífica que em cuneiforme, e esse é muito mais difícil de escrever que a escrita hierática. O segredo da clara superioridade da matemática babilônia sobre a dos egípcios indubitavelmente está em que os que viviam "entre os dois rios" deram o passo muito feliz de estender o princípio da posição às frações. Isto é, a notação 𒐖 𒐖 era usada não só para $2(60) + 2$, mas também para $2 + 2(60)^{-1}$ ou para $2(60)^{-1} + 2(60)^{-2}$ e outras tais frações. Isso significava que os babilônios dominavam o poder de computação que a moderna notação decimal para frações nos confere. Para o estudioso babilônio, como para o engenheiro moderno, a adição ou a multiplicação de 23,45 e 9,876 não eram essencialmente mais difíceis que as mesmas

operações entre os inteiros 2 345 e 9 876; e os mesopotâmios rapidamente exploraram essa importante descoberta. Uma tableta da Babilônia antiga, da coleção de Yale (N.° 7289) contém o cálculo da raiz quadrada de dois até três casas sexagesimais, a resposta sendo escrita como 𒐕 𒎙𒐘 𒐐𒐕 𒌋. Em caracteres modernos esse número pode ser adequadamente escrito como 1;24,51,10 onde se usa ponto e vírgula para separar a parte inteira da fracionária, e uma vírgula para separar posições sexagesimais. Essa forma será usada neste capítulo para denotar números em notação sexagesimal. Esse valor babilônio para $\sqrt{2}$ é aproximadamente 1,414222, diferindo por cerca de 0,000008 do valor verdadeiro. A precisão nas aproximações era relativamente fácil de conseguir para os babilônios com sua notação para frações, a melhor que qualquer civilização tenha possuído até a Renascença.

4 A eficácia da computação babilônia não resultou somente de seu sistema de numeração. Os matemáticos mesopotâmios foram hábeis no desenvolver processos algorítmicos, entre os quais um para extrair a raiz quadrada freqüentemente atribuído a homens que viveram bem mais tarde. Às vezes é atribuído ao sábio grego Arquitas (428-365 A. C.) ou a Heron de Alexandria (100 D. C. aproximadamente); ocasionalmente é chamado algoritmo de Newton. Esse processo babilônio é tão simples quanto eficiente. Seja $x = \sqrt{a}$ a raiz desejada e seja a_1, uma primeira aproximação dessa raiz; seja b_1 uma segunda aproximação dada pela equação $b_1 = a/a_1$. Se a_1 é pequeno demais, b_1 é grande demais e vice-versa. Logo a média aritmética $a_2 = (1/2)(a_1 + b_1)$ é uma nova aproximação plausível. Como a_2 é sempre grande demais, a seguinte, $b_2 = a/a_2$ será pequena demais e toma-se a média aritmética $a_3 = (1/2)(a_2 + b_2)$ para obter um resultado ainda melhor; o processo pode ser continuado indefinidamente. O valor de $\sqrt{2}$ na tableta 7289 de Yale é o de a_3, onde $a_1 = 1;30$. No algoritmo babilônio para raiz quadrada acha-se um processo iterativo que poderia ter levado os matemáticos do tempo a descobrir processos infinitos, mas eles não levaram adiante a pesquisa das implicações de tais problemas.

O algoritmo acima descrito é equivalente à aproximação por dois termos da série binomial, familiar aos babilônios. Se se procura $\sqrt{a^2 + b}$, a aproximação $a_1 = a$ leva a $b_1 = (a^2 + b)/a$ e $a_2 = (a_1 + b_1)/2 = a + b/(2a)$, o que concorda com os dois primeiros termos na expansão de $(a^2 + b)^{1/2}$ e fornece uma aproximação encontrada em textos da Babilônia antiga. Apesar da eficiência de sua regra para raizes quadradas, os escribas mesopotâmios parecem ter imitado matemáticos aplicados modernos, recorrendo freqüentemente às tabelas disponíveis em toda parte. Na verdade, uma boa parte das tabletas cuneiformes encontradas são "textos tabelas", inclusive de multiplicação, de recíprocos, de quadrados e cubos e raízes quadradas e cúbicas, escribas, é claro, em sexagesimais cuneiformes. Uma dessas, por exemplo, contém o equivalente do que aparece na tabela abaixo.

2	30
3	20
4	15
5	12
6	10
8	7,30
9	6,40
10	6
12	5

O produto de elementos de uma mesma linha é sempre 60, a base da numeração babilônia, e a tabela aparentemente era considerada uma tabela de recíprocos. A sexta linha, por exemplo, diz que o recíproco de 8 é $7/60 + 30/(60)^2$. Deve-se notar que faltam os recíprocos de 7 e 11 na tabela, porque os recíprocos desses números "irregulares" são sexagesimais infinitos, como em nosso sistema decimal os de 3, 6, 7, e 9. Novamente os babilônios se defrontavam com o problema da infinidade, mas não o tratavam sistematicamente. Num dado momento, no entanto, um escriba mesopotâmio parece dar um majorante e um minorante para o recíproco do número irregular 7, colocando-o entre 0;8,34,16,59 e 0;8,34,18. Pensando no gosto deles por cálculos multiposicionais, é tantalizante não encontrar uma percepção da simples periodicidade de três posições na representação sexagesimal de 1/7, uma descoberta que poderia ter levado à consideração de séries infinitas.

É claro que as operações aritméticas fundamentais eram tratadas pelos babilônios de modo não muito diferente do usado hoje, e com facilidade comparável. A divisão não era efetuada pelo incômodo processo de duplicação dos egípcios, mas por uma fácil multiplicação do dividendo pelo inverso do divisor, usando os itens apropriados nas tabelas. Assim como hoje o quociente de 34 por 5 é achado facilmente multiplicando 34 por 2 e colocando vírgula, na antiguidade o mesmo processo era realizado achando o produto de 34 por 12 e colocando uma casa sexagesimal, dando 6 48/60. Tabelas de recíprocos, em geral, forneciam os de números "regulares" apenas, isto é, os que são produtos de fatores dois, três e cinco, embora haja algumas exceções. Uma tabela contém as aproximações $1/59 = 0;1,1,1$ e $1/61 = 0;0,59,0,59$. Aqui temos os análogos sexagesimais das expressões decimais $1/9 = 0,11\overline{1}$ e $1/11 = 0,09\overline{09}$, frações unitárias em que o denominador é a base mais ou menos um; mas parece novamente que os babilônios não observaram ou pelo menos não consideraram significativas, as expansões infinitas periódicas nessa situação[2].

Entre as tabletas babilônias encontram-se tabelas contendo potências sucessivas de um dado número, semelhantes às nossas tabelas de logaritmos, ou mais propriamente, de antilogaritmos. Tabelas exponenciais (ou logarítmicas) foram encontradas em que são dadas as dez primeiras potências para as bases 9, 16, 1,40 e 3,45 (todos quadrados perfeitos). A questão posta num problema, a que potência deve ser elevado um certo número para fornecer um número dado, equivale à nossa, qual o logaritmo de um número dado num sistema com um certo número como base. As diferenças principais entre as tabelas antigas e as nossas, além de linguagem e notação, são que não é usado um número único, sistematicamente, como base em variadas situações e que as lacunas entre os números que constam das tabelas antigas são muito maiores que nas nossas. Também, suas "tabelas de logaritmos" não eram usadas para fins gerais de cálculo, mas para resolver certas questões bem específicas.

Apesar das grandes lacunas em suas tabelas exponenciais, os matemáticos babilônios não hesitavam em interpolar por partes proporcionais para obter valores intermediários aproximados. A interpolação linear parece ter sido comumente usada na Mesopotâmia antiga, e a notação posicional é conveniente para a regra de três. Vê-se um exemplo claro do uso prático da interpolação em tabelas exponenciais num problema que pergunta quanto tempo levaria uma quantia em dinheiro para dobrar, a 20 por cento ao ano; a resposta dada é 3;47,13,20. Parece inteiramente claro que o escriba usou interpolação linear entre os valores para $(1;12)^3$ e $(1;12)^4$, usando a fórmula para juros compostos $a = P(1 + r)^n$, onde r é 20 por cento ou 12/60, e tirando valores de uma tabela exponencial com potências de 1;12.

Uma tabela que os babilônios achavam muito útil não é geralmente incluída nos manuais de hoje. É uma tabulação dos valores de $n^3 + n^2$ para valores inteiros de n, tabela essencial na álgebra babilônia; esse assunto atingiu nível consideravelmente mais alto na Mesopotâmia que no Egito. Muitos textos de problemas do período Babilônio antigo mostram que a solução da equação quadrática completa não constituía dificuldade séria para os babilônios, pois tinham desenvolvido operações algébricas flexíveis. Podiam transportar termos em uma equação somando iguais a iguais, e multiplicar ambos os membros por quantidades iguais para remover frações ou eliminar fatores. Somando $4ab$ a $(a-b)^2$ podiam obter $(a+b)^2$, pois muitas fórmulas simples de fatoração lhes eram familiares. Não usavam letras para quantidades desconhecidas, pois o alfabeto não fora inventado, mas palavras como "comprimento", "largura", "área" e "volume" serviam bem

[2]Além das referências mencionadas na nota de rodapé 1 deste capítulo, veja também Kurt Vogel, *Vorgriechische Mathematik*, Vol. II, *Die Mathematik der Babylonier* (1959)

nesse papel. Que tais palavras possam ter sido usadas num sentido abstrato é sugerido pelo fato de os babilônios não hesitarem em somar um "comprimento" com uma "área", ou uma "área" com um "volume". Tais problemas tomados literalmente, não podiam ter base em mensuração.

A álgebra egípcia tratara muito de equações lineares mas os babilônios evidentemente as acharam demasiado elementares para merecer muita atenção. Um problema pede o peso x de uma pedra se $(x + x/7) + (1/11)(x + x/7)$ é um mina; a resposta é dada simplesmente como 48;7,30 gin, onde 60 gin formam um mina. Em outro problema num texto da Babilônia antiga, achamos duas equações lineares simultâneas em duas incógnitas, chamadas respectivamente "primeiro anel de prata" e "segundo anel de prata". Se as denotarmos por x e y, em nossa notação as equações são $x/7 + y/11 = 1$ e $6x/7 = 10y/11$. A resposta é dada laconicamente em termos da regra

$$\frac{x}{7} = \frac{11}{7+11} + \frac{1}{72} \quad \text{e} \quad \frac{y}{11} = \frac{7}{7+11} - \frac{1}{72}.$$

Em outro par de equações o método de resolução está incluido no texto. Aqui 1/4 da largura + comprimento = 7 mãos e comprimento + largura = 10 mãos. A solução é achada primeiro substituindo cada "mão" por 5 "dedos" e então observando que uma largura de 20 dedos e um comprimento de 30 dedos satisfazem a ambas as equações. Em seguida, porém, a solução é achada por um outro método equivalente a uma eliminação por combinação. Exprimindo todas as dimensões em termos de mãos, e fazendo comprimento e largura iguais a x e y respectivamente, as equações ficam $y + 4x = 28$ e $x + y = 10$. Subtraindo a segunda da primeira tem-se o resultado $3x = 18$; daí $x = 6$ mãos ou 30 dedos e $y = 20$ dedos.

6 A solução de uma equação quadrática com três termos parece ter sido demasiado difícil para os egípcios, mas Neugebauer em 1930 revelou que tais equações tinham sido tratadas eficientemente pelos babilônios em alguns dos mais antigos textos de problemas. Por exemplo, um problema pede o lado de um quadrado se a área menos o lado dá 14,30. A solução desse problema, equivalente a resolver $x^2 - x = 870$ é expressa assim:

> Tome a metade de 1, que é 0;30, e multiplique 0,30 por 0;30, o que dá 0;15; some isto a 14,30, o que dá 14,30;15. Isto é o quadrado de 29;30. Agora some 0;30 a 29;30 e o resultado é 30, o lado do quadrado.

A solução, é claro, equivale exatamente à fórmula $x = \sqrt{(p/2)^2 + q} + p/2$ para uma raiz da equação $x^2 - px = q$—a fórmula quadrática que qualquer aluno de ginásio conhece. Em outro texto a equação $11x^2 + 7x = 6;15$ foi reduzida ao tipo padrão $x^2 + px = q$ multiplicando primeiro tudo por 11, para obter $(11x)^2 + 7(11)x = 1,8;45$. Essa é uma quadrática em forma normal para a incógnita $y = 11x$, e a solução para y é achada facilmente pela regra familiar $y = \sqrt{(p/2)^2 + q} - p/2$ e dela se calcula o valor de x. Essa solução é um notável exemplo de uso de transformações algébricas.

Até os tempos modernos não havia idéia de resolver uma equação quadrática da forma $x^2 + px + q = 0$, onde p e q são positivos, pois a equação não tem raiz positiva. Por isso as equações quadráticas na antiguidade e na Idade Média, e mesmo no começo do período moderno, foram classificadas em três tipos

1) $x^2 + px = q$,
2) $x^2 = px + q$,
3) $x^2 + q = px$.

Todos esses tipos são encontrados em textos do período Babilônio antigo, de uns 4 000 anos atrás. Os dois primeiros estão exemplificados nos problemas dados acima; o terceiro aparece freqüentemente em textos de problemas, onde é tratado como equivalente ao sistema simultâneo $x + y = p$, $xy = q$. Tão numerosos são os problemas em que se pede achar dois números dados seu produto e ou sua soma ou sua diferença, que eles parecem ter sido para os antigos, tanto babilônios quanto gregos, uma espécie de forma "normal" à qual as quadráticas se reduzem. Então, transformando as equações simultâneas $xy = a$ e $x \pm y = b$ no par de equações lineares $x \pm y = b$ e $x \pm y = b^2 \pm 4a$, os valores de x e y são achados por uma adição e uma subtração. Uma tableta cuneiforme de Yale, por exemplo, pede a solução do sistema $x + y = 6;30$ e $xy = 7;30$. As instruções do escriba são essencialmente as seguintes. Primeiro ache

$$\frac{x+y}{2} = 3;15,$$

depois

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = 10;33,45.$$

Então

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - xy = 3;3,45$$

e

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - xy = 1;45.$$

Daí

$$\left(\frac{x+y}{2}\right) + \left(\frac{x-y}{2}\right) = 3;15 + 1;45$$

e

$$\left(\frac{x+y}{2}\right) - \left(\frac{x-y}{2}\right) = 3;15 - 1;45.$$

Das duas últimas equações é evidente que $x = 5$ e $y = 1\ 1/2$. Como as quantidades x e y entram simetricamente nas equações dadas, pode-se interpretar os valores de x e y como as duas raízes da equação quadrática $x^2 + 7;30 = 6;30x$. Outro texto pergunta qual o número que somado com seu recíproco dá 2;0,0,33,20. Isso leva a uma equação quadrática do tipo 3 e novamente temos duas soluções, 1;0,45 e 0;59,15,33,20.

A redução babilônia de uma equação quadrática da forma $ax^2 + bx = c$ à forma normal $y^2 + by = ac$ pela substituição $y = ax$ mostra o grau extraordinário de flexibilidade da álgebra mesopotâmia. Essa facilidade, junto com a idéia de valor posicional, explica em grande parte a superioridade dos babilônios em matemática. Não há registro no Egito de resolução de uma equação cúbica, mas entre os babilônios há muitos exemplos. Cúbicas puras, como $x^3 = 0;7,30$ eram resolvidas por referência direta às tabelas de cubos e raízes cúbicas, onde a solução $x = 0;30$ era encontrada. A interpolação linear dentro das tabelas era usada para achar aproximações para valores não constantes na tabela. As cúbicas mistas na forma padrão $x^3 + x^2 = a$ eram resolvidas de modo semelhante, por referência às tabelas disponíveis, que davam valores para a combinação $n^3 + n^2$ para valores inteiros de n entre 1 e 30. Com a ajuda dessas tabelas viam facilmente que a solução, por exemplo, de $x^3 + x^2 = 4{,}12$ é igual a 6. Para casos ainda mais gerais de equações de terceiro grau, como $144x^3 + 12x^2 = 21$, os babilônios usavam seu método de substituição. Multiplicando ambos os membros por 12 e usando $y = 12x$, a equação fica $y^3 + y^2 = 4{,}12$, da qual se acha $y = 6$, donde x é 1/2 ou 0;30. Cúbicas da forma $ax^3 + bx^2 = c$ são redutíveis à forma babilônia normal multiplicando tudo por a^2/b^2 para obter $(ax/b)^3 + (ax/b)^2 = ca^2/b^3$, cúbica do tipo padrão na incógnita ax/b. Lendo na tabela o valor dessa incógnita, determina-se o valor de x. Se os babilônios eram ou não capazes de reduzir a cúbica geral de quatro termos $ax^3 + bx^2 + cx = d$ à sua forma normal, não se sabe. Que não é demasiado improvável que pudessem reduzi-la é indicado pelo fato de que basta a resolução de uma quadrática para levar a equação em quatro termos à forma em três termos $px^3 + qx^2 = r$, da qual, como vimos, se obtém facilmente a forma normal. Não há porém evidência que sugira que os matemáticos mesopotâmios de fato realizaram tal redução da equação cúbica geral.

A solução de equações quadráticas e cúbica na Mesopotâmia é um feito notável, admirável não tanto pelo alto nível de habilidade técnica quanto pela maturidade e flexibilidade dos conceitos algébricos envolvidos. Com o simbolismo moderno é fácil ver que $(ax)^3 + (ax)^2 = b$ é essencialmente o mesmo tipo de equação que $y^3 + y^2 = b$; mas reconhecer isso sem nossa notação é uma realização de significado muito maior para o desenvolvimento da matemática que até o louvado princípio posicional na aritmética, que devemos à mesma civilização. A álgebra babilônia tinha atingido um tal nível de abstração que as equações $ax^4 + bx^2 = c$ e $ax^8 + bx^4 = c$ eram reconhecidas como sendo apenas equações quadráticas disfarçadas — isto é, quadráticas em x^2 e x^4.

8 As realizações dos babilônios no domínio da álgebra são admiráveis, mas os motivos que impulsionaram essa obra não são fáceis de entender. Era suposição comum que virtualmente toda a ciência e a matemática pré-helênicas eram puramente utilitárias; mas que espécie de situação da vida real na Babilônia antiga podia levar a problemas envolvendo a soma de um número e seu recíproco, ou a diferença entre uma área e um comprimento? Se o motivo era utilitário, então o culto do imediatismo era menos forte que hoje, pois conexões diretas entre o objetivo e a prática na matemática babilônia não são nada aparentes. Que pode ter havido tolerância para com a matemática por si mesma, se não encorajamento, é sugerido por uma tableta (N.º 322) na Plimpton Collection na Columbia University[3]. A tableta data do período babilônio antigo (1900 a 1600 A. C. aproximadamente) e as tabelas que contém podiam facilmente ser tomadas por um registro de negócios. No entanto, a análise mostra que há profundo significado matemático na teoria dos números, e que talvez se relacionasse com uma espécie de prototrigonometria. Plimpton 322 era parte de uma tableta maior, como se vê pela quebra ao longo da margem esquerda, e a parte que resta contém quatro colunas de números dispostos em quinze filas horizontais. A coluna da direita contém os números de um a quinze, e sua finalidade é evidentemente a de identificar a ordem dos itens nas outras três colunas dispostas como segue.

1,59,0,15	1,59	2,49	1
1,56,56,58,14,50,6,15	56,7	1,20,25	2
1,55,7,41,15,33,45	1,16,41	1,50,49	3
1,53,10,29,32,52,16	3,31,49	5,9,1	4
1,48,54,1,40	1,5	1,37	5
1,47,6,41,40	5,19	8,1	6
1,43,11,56,28,26,40	38,11	59,1	7
1,41,33,59,3,45	13,19	20,49	8
1,38,33,36,36	8,1	12,49	9
1,35,10,2,28,27,24,26,40	1,22,41	2,16,1	10
1,33,45	45,0	1,15,0	11
1,29,21,54,2,15	27,59	48,49	12
1,27,0,3,45	2,41	4,49	13
1,25,48,51,35,6,40	29,31	53,49	14
1,23,13,46,40	56	1,46	15

A tableta não está em condições tão perfeitas que todos os números possam ainda ser lidos, mas o esquema de construção da tabela é claramente discernível, o que tornou possível determinar os itens que faltam por causa de pequenas fraturas. Para entender o que a tabela provavelmente significava para os babilônios consideremos o triângulo retângulo ABC (Fig. 3.1). Se os números na segunda e terceira colunas (da esquerda para a direita) forem considerados como os lados a e c respectivamente, a primeira coluna a esquerda contem em cada caso o quadrado da razão de c para b. Assim, a coluna da esquerda

[3]Maior descrição dessa tableta se encontra em Neugebauer, *Exact Sciences in Antiquity*, pp. 36-40. Uma boa exposição também se acha em Howard Eves, *An Introduction to the History of Mathematics* (1964), pp. 35-37. Uma interpretação da possível motivação para o texto de tabela é dada por D. J. de Solla Price, "The Babylonian 'Pythagorean Triangle' Tablet", *Centaurus*, **10** (1964), 219-231

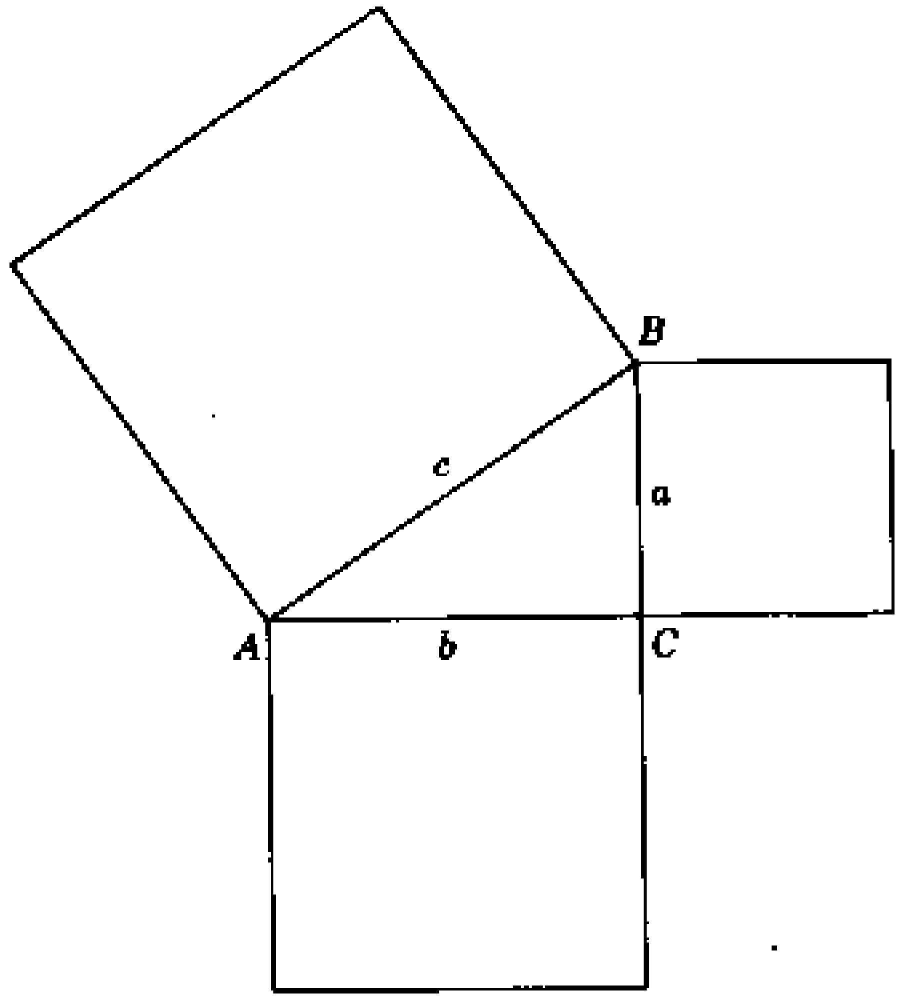
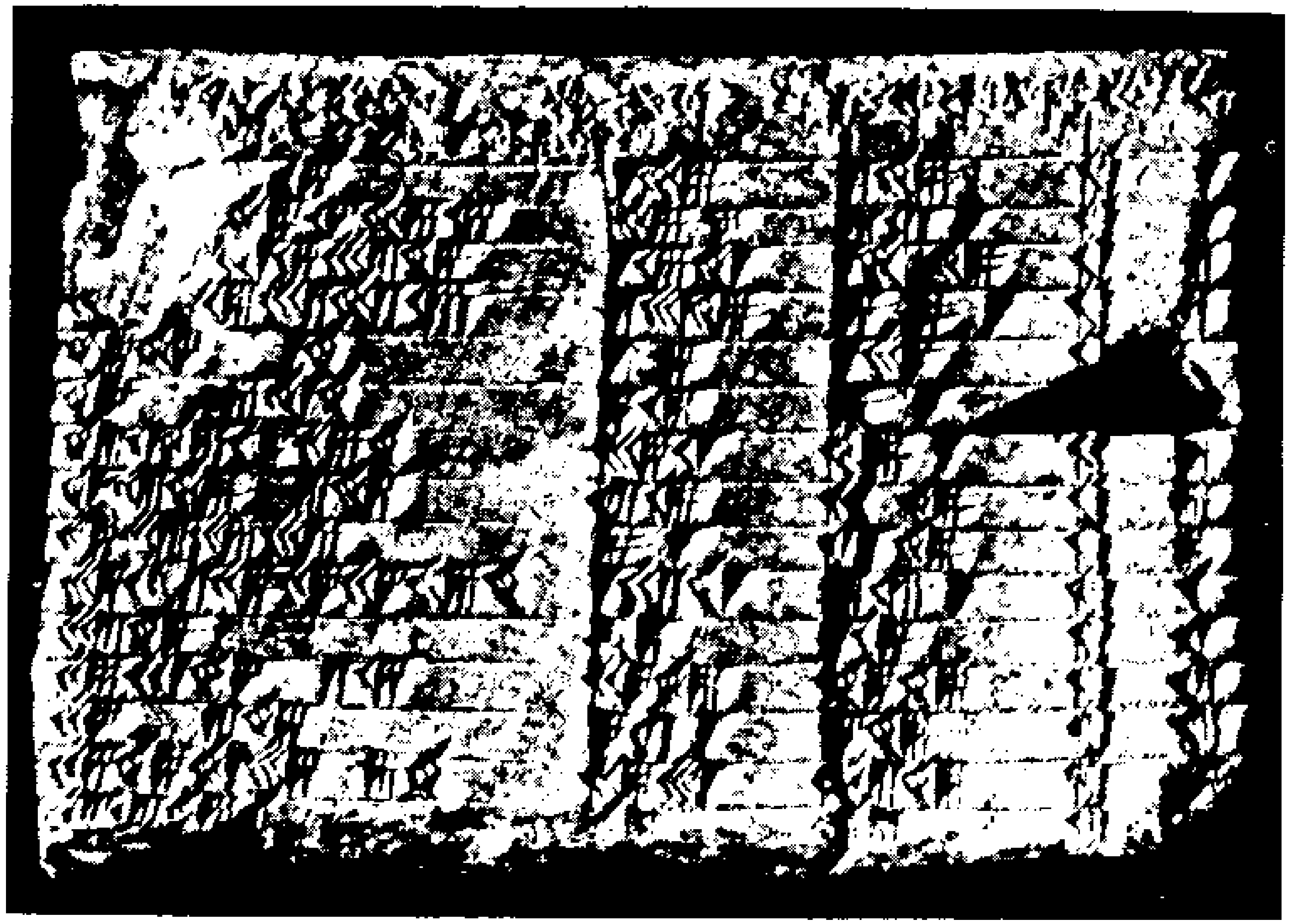


Figura 3.1

é uma curta tabela de valores de $\sec^2 A$, mas não devemos assumir que os babilônios conheciam nosso conceito de secante. Nem egípcios, nem babilônios introduziram uma medida de ângulos no sentido moderno. No entanto, as linhas de números em Plimpton 322 não estão dispostas ao acaso, como um olhar superficial poderia fazer pensar. Se a primeira vírgula na coluna um for substituída por ponto e vírgula, ficará evidente que os números dessa coluna decrescem do alto para baixo. Além disso, o primeiro número é muito próximo de $\sec^2 45°$, e o último número na coluna é aproximadamente $\sec^2 31°$, os números intermediários sendo próximos dos valores de $\sec^2 A$ quando A decresce por graus de 45° a 31°. Isso evidentemente não pode ser fruto do acaso. Não só o arranjo foi cuidadosamente planejado, mas as dimensões do triângulo também seguem uma regra. Os que construíram a tabela evidentemente começaram com dois inteiros sexagesimais regulares, que chamaremos p e q, com $p > q$, então formaram a tripla de números $p^2 - q^2$ e $2pq$ e $p^2 + q^2$. Os três inteiros assim obtidos formam um triângulo pitagórico, em que o quadrado do maior é igual à soma dos quadrados dos outros dois. Portanto esses números podem ser usados como dimensões do triângulo retângulo ABC, com $a = p^2 - q^2$ e $b = 2pq$ e $c = p^2 + q^2$. Restringindo-se a valores de p menores que 60 e a valores correspondentes de q tais que $1 < p/q < 1 + \sqrt{2}$ — isto é, a triângulos retângulos para os quais $a < b$ — os babilônios presumivelmente verificaram que havia exatamente 38 pares possíveis de valores de p e q satisfazendo às condições, e para esses aparentemente formaram as 38 correspondentes triplas pitagóricas. Só as 15 primeiras, dispostas em ordem decrescente para o quociente $(p^2 + q^2)/2pq$, estão incluídas na tabela da tableta, mas é provável que o escriba pretendesse continuar a tabela no outro lado da tableta. Sugeriu-se também[4] que a parte da Plimpton 322 quebrada do lado esquerdo continha quatro colunas adicionais em que estavam tabulados os valores de p e q e $2pq$ e o que chamaríamos hoje $\tan^2 A$.

A tableta Plimpton 322 poderia dar a impressão de um exercício em teoria dos números, mas é provável que esse aspecto do assunto fosse apenas auxiliar para o problema de medir áreas de quadrados sobre os lados de um triângulo retângulo. Os babilônios não gostavam de trabalhar com recíprocos de números irregulares, pois esses não podiam ser expressos exatamente em frações sexagesimais finitas. Portanto, estão interessados em valores de p e q que lhes forneçam inteiros regulares para os lados dos triângulos retângulos de formas variadas, desde o isósceles até um com valor pequeno para a razão a/b. Por exemplo, os números na primeira linha são obtidos partindo de $p = 12$ e $q = 5$, com valores correspondentes $a = 119$ e $b = 120$ e $c = 169$. Os valores de a e c são exatamente

[4]Veja a explicação dada por Price (cuja sugestão estamos seguindo aqui) no artigo citado na nota de rodapé 3 deste capítulo



Plimpton 322

os que se encontram na segunda e na terceira posição a partir da esquerda na primeira linha da tabela; a razão $c^2/b^2 = 28\,561/14\,400$ é o número 1; 59,0,15 que aparece na primeira posição dessa linha[5]. A mesma relação é encontrada nas outras quatorze linhas; os babilônios fizeram os cálculos tão precisamente que a razão c^2/b^2 na décima linha é expressa como uma fração com oito casas sexagesimais, equivalentes a cerca de quatorze casas em nossa notação.

Tão grande parte da matemática babilônia depende de tabelas de recíprocos que não é de admirar que os itens em Plimpton 322 se aparentem com relações recíprocas. Se $a = 1$, então $1 = (c + b)(c - b)$, de modo que $c + b$ e $c - b$ são recíprocos. Se começarmos com $c + b = n$ onde n é qualquer sexagesimal regular, então $c - b = 1/n$; donde $a = 1$ e $b = 1/2(n - 1/n)$ e $c = 1/2(n + 1/n)$ são uma tripla fracionária pitagórica que pode ser facilmente convertida numa tripla pitagórica de inteiros multiplicando cada um dos três por $2n$. Todas as triplas na tableta Plimpton podem ser calculadas facilmente com esse artifício.

A exposição da álgebra babilônia que acabamos de dar é bem representativa, mas não pretende ser exaustiva. Há nas tabletas babilônias muitas outras coisas, embora não tão extraordinárias quanto as da tableta Plimpton 322. Por exemplo, numa tableta a progressão geométrica $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^9$ é somada e em outra a soma da série de quadrados $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 10^2$ é achada. Perguntamo-nos se os babilônios conheciam as fórmulas gerais para a soma de uma progressão geométrica e a soma dos n primeiros quadrados perfeitos. É possível que sim, e conjeturou-se que teriam percebido que a soma dos n primeiros cubos perfeitos é igual ao quadrado da soma dos n primeiros inteiros[6]. No entanto, deve-se ter em mente que as tabletas mesopotâmicas se assemelham

[5]Vogel, na *Vorgriechische Mathematik*, II, 37-41, interpreta esse número, e também os outros nessa coluna, como a^2/b^2 em vez de c^2/b^2 — isto é, como $\tan^2 A$ em vez de $\sec^2 A$. A diferença entre essas funções é sempre 1, e as cunhas de unidade na coluna à esquerda estão quase todas quebradas: mas uma inspeção cuidadosa da margem parece confirmar a interpretação desta coluna como quadrados de secantes

[6]Veja Archibald, *Outline of the History of Mathematics*, p. 11

aos próprios papiros egípcios em que só são dados casos específicos, sem formulações gerais.

Até há alguns anos atrás costumava-se dizer que os babilônios eram melhores que os egípcios na álgebra mas que tinham contribuído menos na geometria. A primeira metade da afirmação é claramente confirmada pelo que vimos acima; tentativas de justificar a segunda metade da comparação se limitam em geral à medida do círculo ou ao volume do tronco de pirâmide[7]. No vale mesopotâmio a área do círculo era achada em geral tomando três vezes o quadrado do raio, e em precisão isso é bem inferior à medida egípcia. No entanto, a contagem de casas decimais nas aproximações para π não é uma medida adequada da estatura geométrica de uma civilização, e uma descoberta recente anulou até esse fraco argumento. Em 1936 um grupo de tabletas matemáticas foi desenterrado em Susa, a uns trezentos quilômetros de Babilônia, e essas incluem resultados geométricos significativos. Seguindo o gosto mesopotâmio de fazer tabelas e listas, uma tableta do grupo de Susa compara as áreas e os quadrados dos lados de polígonos regulares de três, quatro, cinco, seis e sete lados. A razão da área do pentágono, por exemplo, para o quadrado do lado é dada como 1;40, um valor que está correto a dois algarismos significativos. Para o hexágono e heptágono as razões são expressas como 2;37,30 e 3;41 respectivamente. Na mesma tableta o escriba dá 0;57,36 como razão entre o perímetro do hexágono regular e a circunferência do círculo circunscrito; e disso podemos concluir imediatamente[8] que o escriba babilônio tinha tomado 3;7,30 ou 3 1/8 como aproximação para π. Isso é pelo menos tão bom quanto o valor adotado no Egito. Além disso, nós o encontramos num contexto mais elaborado do que no Egito, pois a tableta de Susa é um bom exemplo de comparação sistemática de figuras geométricas. Fica-se quase tentado a ver nela a genuína origem da geometria, mas é importante notar que não era tanto o contexto geométrico que interessava aos babilônios quanto as aproximações numéricas que usavam na mensuração. A geometria para eles não era uma disciplina matemática no nosso sentido, mas uma espécie de álgebra ou aritmética aplicada em que números são ligados a figuras.

Há algum desacordo quanto a se os babilônios tinham ou não o conceito de figuras semelhantes, embora pareça provável. A semelhança de todos os círculos parece tomada como evidente na Mesopotâmia, como no Egito, e os muitos problemas sobre medidas de triângulos em tabletas cuneiformes parecem implicar uma noção de semelhança. Uma tableta no museu de Bagdá tem um triângulo ABC (Fig. 3.2) com lados $a = 60$ e $b = 45$ e $c = 75$ e está subdividido em quatro triângulos menores ACD, CDE, DEF, e EFB. As áreas desses são dadas como 8,6 e 5,11;2,24 e 3,19;3,56,9,36 e 5,53;53,39,50,24 respectivamente. Desses valores o escriba obteve o comprimento de AD como 27, aparentemente usando uma espécie de "fórmula de semelhança" equivalente a nosso teorema de que áreas de figuras semelhantes estão entre si como os quadrados de lados correspondentes. Os comprimentos de CD e BD são dados como 36 e 48 respectivamente, e por aplicação da "fórmula de semelhança" aos triângulos BCD e DCE o comprimento de CE é calculado[9] dando 21;36. O texto se quebra no meio do cálculo de DE.

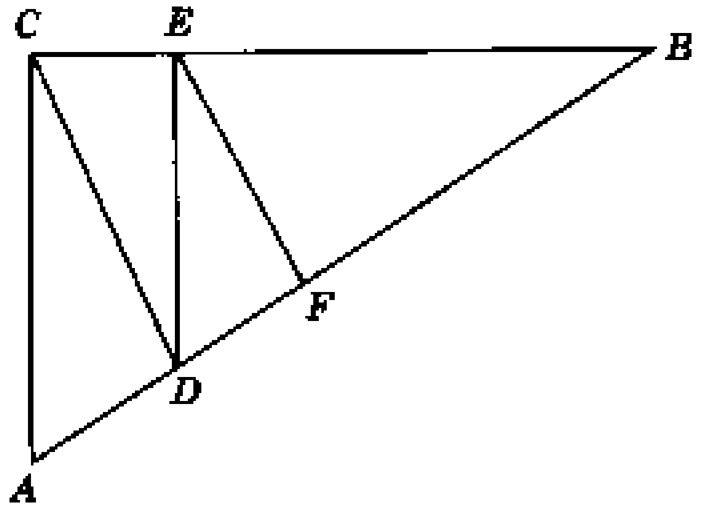


Figura 3.2

[7]Veja, por exemplo, George Sarton, *A History of Science*, vol. I (Cambridge, Mass,: Harward University Press, 1952), pp. 73-74

[8]Veja Neugebauer, *Exact Sciences in Antiquity* (2), p. 47

[9]Veja Vogel, *Vorgriechische Mathematik*, II, 78-79

10 Medidas eram o ponto central na geometria algebrizada do vale mesopotâmio, mas um defeito grave, como na geometria egípcia, era que a distinção entre medidas exatas e aproximadas não era tornada clara. A área de um quadrilátero era achada tomando o produto das médias aritméticas dos pares de lados opostos, sem nenhum aviso de que isso na maior parte dos casos era apenas uma aproximação grosseira. Também, o volume de um tronco de cone ou pirâmide era achado às vezes tomando a média aritmética das bases e multiplicando pela altura; às vezes, para um tronco de pirâmide quadrada com áreas a^2 e b^2 para as bases aplicava-se a fórmula

$$V = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 h.$$

No entanto, para esse tronco os babilônios usavam também uma regra equivalente a

$$V = h\left[\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{a-b}{2}\right)^2\right]$$

fórmula correta e que se reduz à conhecida pelos egípcios.

Não se sabe se os resultados egípcios e assírios eram sempre obtidos independentemente, mas de qualquer forma esses últimos foram decididamente maiores que os primeiros, tanto na geometria quanto na álgebra. O teorema de Pitágoras, por exemplo, não aparece em forma nenhuma nos documentos egípcios encontrados, mas tabletas até do período babilônio antigo mostram que na Mesopotâmia o teorema era largamente usado. Um texto cuneiforme da coleção de Yale, por exemplo, contém um diagrama de um quadrado e suas diagonais em que o número 30 está escrito ao longo de um lado e os números 42;25,35 e 1;24,51,10 ao longo da diagonal. O último número é evidentemente a razão entre os comprimentos da diagonal e do lado, e está expressa tão precisamente que concorda com $\sqrt{2}$ a cerca de 1 milionésimo. A precisão do resultado foi possível graças ao conhecimento do teorema de Pitágoras. Às vezes, em cálculos menos precisos, os babilônios usavam 1;25 como aproximação grosseira dessa razão. Mais significativa que a precisão dos valores, no entanto, é a implicação de que a diagonal de *qualquer* quadrado podia ser achada multiplicando o lado por $\sqrt{2}$. Assim, parece haver alguma idéia de princípios gerais, apesar de que esses são expressos exclusivamente em casos especiais.

O conhecimento babilônio do teorema de Pitágoras não se limitava ao caso do triângulo retângulo isósceles. Num texto babilônio antigo aparece um problema em que uma escada ou prancha de comprimento 0;30 está apoiada a uma parede; a questão é, de quanto a extremidade inferior se afastará da parede se a superior escorregar para baixo de uma distância de 0;6 unidades? A resposta é encontrada corretamente usando o teorema de Pitágoras. Mil e quinhentos anos depois problemas semelhantes, alguns com novos requintes, ainda estavam sendo resolvidos no vale mesopotâmio. Uma tableta selêucida, por exemplo, propõe o seguinte problema. Uma vara está apoiada a uma parede. Se o topo escorrega de três unidades quando a extremidade inferior se afasta da parede de nove unidades, qual o comprimento da vara? A resposta é dada corretamente como sendo quinze unidades.

Textos de problemas antigos em cuneiforme fornecem grande número de problemas do que poderíamos chamar geometria, mas que os babilônios provavelmente consideravam como aritmética aplicada. Um problema de herança típico pede a divisão de uma propriedade em forma de triângulo reto entre seis irmãos. A área é dada como 11,22,30 e um dos lados é 6,30; as retas divisórias devem ser equidistantes e paralelas ao outro lado do triângulo. Pede-se para achar as diferenças entre as porções. Outro texto dá as bases de um trapézio isósceles como sendo 50 e 40 unidades, e o comprimento dos lados como sendo 30; pede-se a altura e a área[10].

[10]Esses problemas e outros se encontram em Van der Waerden, *Science Awakening*, pp. 76-77

Os babilônios antigos conheciam outras importantes relações geométricas. Como os egípcios, sabiam que a altura de um triângulo isósceles bissecta a base. Daí, dado o comprimento de uma corda num círculo de raio conhecido, sabiam achar o apótema. Diferentemente dos egípcios, conheciam o fato que o ângulo inscrito num semicírculo é reto, proposição geralmente conhecida como teorema de Tales, apesar de Tales ter vivido bem mais de um milênio depois dos babilônios terem começado a usá-la. Esta denominação errônea de um teorema bem conhecido da geometria é sintomático da dificuldade em avaliar a influência da matemática pré-helênica sobre culturas posteriores. As tabletas cuneiformes tinham uma permanência que não podia ser igualada por documentos de outras civilizações, pois papiro e pergaminho não resistem bem aos estragos do tempo. Além disso, textos cuneiformes continuaram a ser incisos até o surgimento da era cristã; mas seriam eles lidos pelas civilizações vizinhas, especialmente os gregos? O centro do desenvolvimento matemático estava se deslocando da Mesopotâmia para o mundo grego meia dúzia de séculos antes de nossa era, mas reconstruções da matemática grega primitiva são arriscadas devido ao fato de praticamente não restarem documentos matemáticos do período pré-helenístico. É importante por isso, ter-se em mente as características gerais da matemática egípcia e babilônia de modo a poder fazer-se ao menos conjeturas plausíveis quanto às analogias que possam tornar-se aparentes entre contribuições pré-helênicas e as atividades e atitudes de povos de período posterior.

1 São evidentes muitas deficiências da matemática pré-helênica. Os papiros e tabletas encontrados contêm casos específicos e problemas apenas, sem formulações gerais, e pode-se perguntar se essas civilizações antigas realmente percebiam os princípios unificadores que estão no centro da matemática. Um estudo posterior é um pouco confortante, pois as centenas de problemas de tipos semelhantes em tabletas cuneiformes parecem ser exercícios que os escolares deviam resolver de acordo com certos métodos ou regras aceitos. Que não tenham sobrevivido enunciados dessas regras não significa necessariamente que a generalidade das regras ou princípios escapasse ao pensamento antigo. Se não estivesse presente ali uma regra, a similaridade entre os problemas seria difícil de explicar. Tão grandes coleções de problemas parecidos não podiam resultar do acaso.

Mais grave, talvez, do que a falta de enunciados explícitos de regras é a ausência de distinções claramente marcadas entre resultados exatos e aproximados. A omissão nas tabelas de casos envolvendo sexagesimais irregulares parece implicar certa percepção de tais distinções, mas nem egípcios nem babilônios parecem ter levantado a questão de quando a área de um quadrilátero (ou de um círculo) está calculada exatamente ou só aproximadamente. Questões sobre resolubilidade ou não de um problema não parecem ter sido levantadas; nem se investigou a natureza da prova. A palavra "prova" significa várias coisas em diferentes níveis e épocas; por isso é arriscado afirmar categoricamente que os povos pré-helênicos não tivessem noção de prova, nem sentissem a necessidade de prova. Há indícios de que esses povos ocasionalmente percebiam que certos métodos de calcular áreas e volumes podiam ser justificados por redução a problemas mais simples de área e volume. Além disso, os escribas pré-helênicos não raro verificavam ou "provavam" suas divisões por multiplicação; ocasionalmente verificavam o método usado num problema por meio de uma substituição que confirmava a correção da resposta. No entanto, não há frases explícitas do período pré-helênico que indiquem que é percebida a necessidade de provas ou que há preocupação com questões de princípios lógicos. A falta de tais expressões freqüentemente levou a um juízo de que as civilizações pré-helênicas não tinham verdadeira matemática, apesar do alto nível evidente de habilidade técnica.

Os críticos assinalam o que consideram uma ausência de abstração na matemática egípcia e babilônia. A linguagem dos documentos parece de fato ficar sempre próxima de casos concretos, como vimos; mas isto, também pode ser enganador. Na Mesopotâmia as palavras "comprimento" e "largura" deveriam talvez ser interpretadas como interpretamos as letras x e y, pois os escribas em cuneiforme podem bem ter passado de exemplos específicos a abstrações gerais. Como senão assim explicar a adição de um comprimento

a uma área? Também no Egito o uso da palavra para quantidade não é incompatível com a interpretação abstrata que lhe atribuímos hoje.

Avaliações das civilizações pré-helênicas freqüentemente assinalam o fato de que não havia atividade intelectual claramente discernível de espécie caracteristicamente unificada comparável ao que mais tarde recebeu o nome de "matemática"; mas aqui também é fácil ser excessivamente dogmático. Pode ser verdade que a geometria ainda não se havia cristalizado a partir de uma matriz tosca de experiência espacial que incluía toda espécie de coisas que podiam ser medidas; mas é difícil não perceber na preocupação babilônia e egípcia com os números e suas aplicações algo muito próximo do que usualmente, em épocas posteriores, chamou-se álgebra.

As culturas pré-helênicas também têm sido estigmatizadas como puramente utilitárias, com pouco ou nenhum interesse pela matemática por ela mesmo. Aqui, também, está envolvido um julgamento, mais do que prova indiscutível. Então, como agora, a vasta maioria da humanidade se preocupava com problemas imediatos de sobrevivência. O lazer era muito mais raro do que hoje, mas mesmo assim havia no Egito e na Babilônia problemas que têm as características de matemática de recreação. Se um problema pede a soma de gatos e medidas de trigo, ou de um comprimento e uma área, não se pode negar a quem o perpetrou ou um certo humor ou uma procura de abstração. Naturalmente muito da matemática pré-helênica era prática, mas certamente não toda. A verdade provavelmente jaz entre os extremos recentemente publicados por dois historiadores da matemática. Um deles[11] afirma que a matemática babilônia se orientava unicamente a fins práticos; o outro defende ponto de vista diametralmente oposto, que a matemática suméria não era usada para a resolução de problemas da vida prática, mas somente para o prazer ou exultação do espírito[12].

Um leitor prudente pode assumir com segurança que nenhuma dessas posições extremas pode ser sustentada impunentemente. Na prática de cálculos, que se estendeu por um par de milênios, as escolas de escribas usaram muito material de exercícios, freqüentemente, talvez, como puro divertimento.

BIBLIOGRAFIA

Archibald, R. C., *Outline of the History of Mathematics*, 6.ª edição (Herbert Ellsworth Slaught Memorial Papers, N.º 2, Buffalo, N.Y.: The Mathematical Association of America, 1949)

Bruins, E. M., e M. Rutten, *Textes mathématiques de Suse* (Paris, 1961)

Eves, Howard, *An Introduction to the History of Mathematics*, 2.ª edição (New York: Holt, 1964)

Kugler, F. X., *Sternkunst und Sterndienst in Babel* (Münster in Westphalia: Aschendoeff, 1907-1935, 2 volumes e 3 suplementos)

Neugebauer, O., *The Exact Sciences in Antiquity*, 2.ª edição (Providence R. I.: Brown University Press, 1957; edição em brochura, New York: Harper)

Neugebauer, O., *Mathematische Keilschift-Texte* (Berlin: Springer, 1935-1937, 3 volumes). Este é o Vol. II of *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik*, Parte A, *Quellen*. Ver também numerosos artigos por Neugebauer e outros em *Quellen und Studien*, Parte B, *Studien*, I-IV (1928-1938)

Neugebauer, O., *Vorgriechische Mathematik* (Berlin- Springer, 1934)

Neugebauer, O., e A. Sachs, *Mathematical Cuneiform Texts* (New Haven, Conn.: Yale University Press, 1945)

Thureau-Dangin, F., *Textes mathématiques Babyloniens* (Leiden: Brill, 1938)

Van der Waerden, B. L., *Science Awakening*, traduzido por Arnold Dresden (New York: Oxford University Press, 1961; edição em brochura, New York: Wiley, 1963)

Vogel, Kurt, *Vorgriechische Mathematik*, Vol. II, *Die Mathematik der Babylonier* (edição em brochura, Hannover: Hermann Schroedel, cerca de 1959)

[11]M. Cipolla, *Storia della matematica dai primordia a Leibniz* (Mozara: Società editrice siciliana, 1949), p. 23

[12]Citado de Ettore Bortolotti por Ettore Carruccio em sua *Mathematics and Logic in History and in Contemporary Thought* (Chicago; Aldine, 1964), p. 15

EXERCÍCIOS

1. O que você considera como as quatro contribuições mais significativas dos mesopotâmios à matemática? Justifique a resposta.

2. O que você considera como as quatro principais fraquezas da matemática mesopotâmia? Justifique a resposta.

3. Compare, quanto ao significado e possível influência em civilizações posteriores, a geometria e trigonometria dos babilônios com a dos egípcios.

4. Descreva as vantagens e desvantagens relativas das notações para números dos babilônios e egípcios.

5. Escreva o número 10 000 em notação babilônia.

6. Escreva o número 0,0862 em notação babilônia.

7. Use o algoritmo babilônio para raiz quadrada para achar a raiz quadrada de dois, com seis casas decimais, e compare com o valor babilônio 1;24,51,10.

8. Verifique que se $(c/a)^2$ é 1;33,45 e $b = 45$ e $c = 1{,}15$ então a, b, c formam uma tríada pitagórica.

9. Verifique que os parâmetros $p = 9$ e $q = 4$ levam aos valores na linha 5 da tableta Plimpton 322.

10. Mostre que se p e q são números positivos tais que $p^2 - q^2 < 2pq$, então $1 < p/q < 1 + \sqrt{2}$.

11. De quanto a aproximação babilônia 3;41 difere do valor exato para a razão da área do heptágono regular para o quadrado do lado?

12. Os babilônios avaliaram a razão da área do hexágono regular para o quadrado do lado como sendo 2;37,30. Qual a diferença com a razão correta?

13. Resolva o seguinte problema babilônio antigo: as áreas somadas de dois quadrados dão 1 000, e o lado de um quadrado é 10 menos que dois terços do lado do outro. Ache os lados.

14. Ache como uma fração sexagesimal até a primeira casa a razão da área de um pentágono regular para o quadrado do lado e compare sua resposta com o valor 1;40 dado pelos babilônios.

15. Resolva o seguinte problema babilônio antigo: um lado de uma propriedade em forma de triângulo reto mede 50 unidades. Paralelamente ao outro lado e a 20 unidades do outro lado traça-se uma reta que corta uma área trapezoidal retangular de 5,20 unidades. Ache os comprimentos dos lados paralelos desse trapezóide.

16. Verifique o resultado de um cálculo babilônio antigo em que a área de um trapézio isósceles cujos lados são 30 unidades e cujas bases são 14 e 50 é dada como 12,48.

17. Resolva o seguinte problema babilônio antigo: dez irmãos recebem 1;40 minas de prata e irmão recebeu sobre irmão uma diferença constante. Se o oitavo irmão recebeu 6 shekels, ache quanto recebeu cada um. (Há 60 shekels em um mina.)

18. Ache o comprimento da escada no problema descrito no texto.

19. Resolva o problema dos seis irmãos descrito no texto.

20. Uma tableta da Babilônia antiga desenterrada em Susa pede o raio do círculo circunscrito a um triângulo cujos lados são 50, 50 e 60. Resolva o problema.

21. Mostre que a representação sexagesimal de 1/7 tem periodicidade de três casas. Quantas casas há na periodicidade em representação decimal?

*22. Outra tableta de Susa pede os lados x e y de um retângulo se $xy = 20{,}0$ e $x^3d = 14{,}48{,}53{,}20$, onde d é o comprimento da diagonal. Resolva o problema.

Capítulo **4**

A Jônia e os pitagóricos

Para Tales . . . a questão primordial não era *o que sabemos*, mas *como o sabemos*.

Aristóteles

1 A atividade intelectual das civilizações potâmicas no Egito e Mesopotâmia tinha perdido sua verve bem antes da era cristã; mas quando a cultura nos vales dos rios estava declinando, e o bronze cedendo lugar ao ferro na fabricação de armas, vigorosas culturas novas estavam surgindo ao longo de todo o litoral do Mediterrâneo. Para indicar essa mudança nos centros de civilização, o intervalo entre aproximadamente 800 A. C. e 800 D. C. é às vezes chamado Idade Talássica (isto é, a "idade do mar"). Não houve, é claro, uma quebra brusca marcando a transição da liderança intelectual dos vales dos rios Nilo, Tigre e Eufrates para a beira do Mediterrâneo, pois o tempo e a história fluem continuamente, e as condições em variação são associadas a causas antecedentes. Os estudiosos egípcios e babilônios continuaram a produzir textos em papiro e cuneiforme durante muitos séculos após 800 A. C.; mas enquanto isso uma nova civilização se preparava rapidamente para assumir a hegemonia cultural, não só na região mediterrânea mas, finalmente, também nos principais vales fluviais. Para indicar a fonte da nova inspiração, a primeira parte da Idade Talássica é chamada era Helênica e conseqüentemente as culturas mais antigas são ditas pré-helênicas.

Os gregos de hoje ainda se chamam helenos, o nome usado por seus antigos antepassados, que se estabeleceram ao longo das costas do Mediterrâneo. A história grega pode ser recuada até o segundo milênio A. C. quando, como invasores iletrados, vindos do norte, abriram caminho até o mar. Não trouxeram tradição matemática ou literária consigo; no entanto, tiveram desejo ansioso de aprender, e não demoraram a melhorar o que lhes ensinaram. Por exemplo, tomaram, talvez dos fenícios, um alfabeto existente, consistindo só de consoantes, e lhe acrescentaram vogais. O alfabeto parece ter-se originado entre os mundos babilônio e egípcio, talvez na região da Península do Sinai, por um processo de redução drástica do número de símbolos cuneiformes ou hieráticos. Esse alfabeto chegou às novas colônias — gregas, romanas e cartaginesas — graças à atividade dos mercadores. Supõe-se que alguns rudimentos de cálculo viajaram pelas mesmas rotas, mas as partes mais exóticas da matemática sacerdotal podem ter permanecido restritas a seus domínios de origem. Logo porém, mercadores, negociantes e estudiosos gregos se dirigiram aos centros de cultura no Egito e Babilônia. Alí entraram em contato com a matemática pré-helênica; mas não estavam dispostos a apenas receber antigas tradições, e se apropriaram tão completamente do assunto que logo ele tomou forma drasticamente diferente.

Os primeiros Jogos Olímpicos se realizaram em 776 A. C., e por esse tempo uma maravilhosa literatura grega já se tinha desenvolvido, evidenciada pelas obras de Homero e Hesíodo. Da matemática grega da época nada sabemos. Presumivelmente estava em atraso comparada com o desenvolvimento de formas literárias, pois essas se prestam melhor à continuidade da transmissão oral. Passaram-se ainda quase dois séculos até haver alguma citação, mesmo indireta, da matemática grega. Então, durante o sexto século A. C., apareceram dois homens, Tales e Pitágoras, que tiveram na matemática o papel de Homero e Hesíodo na literatura. Quase tudo o que se relata neste capítulo se centra em Tales e Pitágoras, mas uma palavra de advertência é necessária. Homero e Hesíodo são figuras um tanto nebulosas, mas pelo menos temos uma tradição consistente que lhes atribui certas obras primas literárias que, primeiro transmitidas oralmente de geração a geração, finalmente foram escritas e preservadas para a posteridade. Tales e Pitágoras também são figuras imprecisas historicamente, embora menos que Homero e Hesíodo; mas no que se refere as suas obras, o paralelo com Homero e Hesíodo cessa. Não sobreviveu nenhuma obra de qualquer deles, nem se sabe se Tales ou Pitágoras jamais compuseram tal obra. O que fizeram deve ser reconstruído com base numa tradição, não muito digna de confiança, que se formou em torno desses dois matemáticos antigos. Certas frases-chave lhes são atribuídas, tais como "Conhece a ti mesmo" no caso de Tales e "Tudo é número", de Pitágoras — mas nada mais específico. No entanto, as mais antigas referências gregas à história da matemática, que não sobreviveram, atribuem a Tales e Pitágoras um bom número de descobertas matemáticas definidas. Esboçamos essas contribuições neste capítulo, mas o leitor deve entender que é sobre tradições persistentes e não sobre documentos históricos que o relato se baseia.

O mundo grego por muitos séculos teve seu centro entre os mares Egeu e Jônio, mas a civilização helênica não estava só localizada ali. Em 600 A. C. colônias gregas podiam ser encontradas ao longo das margens do Mar Negro e Mediterrâneo e foi nessas regiões afastadas que um novo impulso se manifestou na matemática. Para isto os colonistas da beira-mar, especialmente na Jônia, tinham duas vantagens: tinham o espírito ousado e imaginativo típico de pioneiros e estavam mais próximos dos dois principais vales de rio de que se podia extrair conhecimentos. Tales de Mileto (624-548 A. C. aproximadamente) e Pitágoras de Samos (580-500 A. C. aproximadamente) tinham ainda mais uma vantagem: estavam em condição de viajar aos centros antigos de conhecimento e lá adquirir informação de primeira mão sobre astronomia e matemática. No Egito diz-se que aprenderam geometria; na Babilônia, sob o esclarecido governante caldeu Nabucodonosor, Tales provavelmente entrou em contato com tabelas e instrumentos astronômicos. Diz a tradição que em 585 A. C. Tales assombrou seus contemporâneos ao predizer o eclipse solar desse ano. A veracidade dessa tradição é muito discutível, especialmente porque um eclipse solar é visível só em pequena parte da Terra e não é provável que houvesse na Babilônia tabelas de eclipses solares que permitissem a Tales fazer tal predição. É bem provável, de outro lado, que o gnômon ou relógio de sol viesse à Grécia da Babilônia e talvez o relógio de água do Egito. Os gregos não hesitavam nada em absorver elementos de outras culturas, de outra forma não teriam aprendido tão depressa como passar à frente de seus predecessores; mas a tudo o que tocavam davam mais vida.

O que se sabe de fato sobre a vida e obra de Tales é realmente muito pouco. Seu nascimento e sua morte são datados com base no fato de que o eclipse de 585 A. C. provavelmente ocorreu quando estava em plena maturidade, digamos 40 anos, e diz-se que ele tinha 78 anos quando morreu. No entanto, as sérias dúvidas sobre a autenticidade da história do eclipse tornam tais extrapolações arriscadas, e abalam nossa confiança quanto às descobertas cuja paternidade é atribuída a Tales. A opinião antiga é unânime em considerar Tales como um homem de rara inteligência e como o primeiro filósofo — por acordo geral o primeiro dos Sete Sábios. Era considerado um "discípulo dos egípcios e caldeus", hipótese que parece plausível. A proposição agora conhecida como teorema de Tales — que um ângulo inscrito num semicírculo é um ângulo reto — pode ter sido aprendida por Tales durante suas viagens à Babilônia. No entanto, a tradição vai mais longe e lhe atribui uma espécie de demonstração do teorema. Por isso Tales foi freqüentemente saudado como o primeiro matemático verdadeiro — originador da organização dedutiva da geometria. Esse fato, ou lenda, foi ornamentado acrescentando-se a esse teorema quatro outros seguintes, que se dizia, provados por Tales.

1. Um círculo é bissectado por um diâmetro.
2. Os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais.
3. Os pares de ângulos opostos formados por duas retas que se cortam são iguais.
4. Se dois triângulos são tais que dois ângulos e um lado de um são iguais respectivamente a dois ângulos e um lado de outro, então os triângulos são congruentes.

Não há documento antigo que possa ser apontado como prova desse feito, no entanto a tradição é persistente. O mais perto que se pode chegar de evidência digna de confiança nesse ponto é por uma menção datando de 1 000 anos depois do tempo de Tales. Um discípulo de Aristóteles chamado Eudemo de Rodes (viveu por volta de 320 A. C.) escreveu uma história da matemática. Essa perdeu-se, mas antes de desaparecer, alguém resumiu ao menos parte dela. O original desse resumo também se perdeu, mas durante o quinto século de nossa era, informação extraída do sumário foi incorporada pelo filósofo neo-platônico Proclus (410-485) nas páginas iniciais de seu *Comentário sobre o primeiro livro de Os elementos de Euclides*. Após observações introdutórias sobre a origem da geometria no Egito, o *Comentário* de Proclus diz que Tales

> ... primeiro foi ao Egito e de lá introduziu esse estudo na Grécia. Descobriu muitas proposições ele próprio, e instruiu seus sucessores nos princípios que regem muitas outras, seu método de ataque sendo em certos casos mais geral, em outros mais empírico[1].

É principalmente dessa citação em terceira mão que vêm as designações de Tales como o primeiro matemático. Proclus mais adiante em seu *Comentário*, novamente baseando-se em Eudemus, atribui a Tales os quatro teoremas mencionados acima. Há outras referências a Tales em fontes antigas, mas quase todas descrevem suas atividades mais práticas. Diógenes Laertius, seguido por Plínio e Plutarco, relata que ele mediu a altura das pi[illegible] observando os comprimentos das sombras no momento em que a sombra [illegible] igual à sua altura[2]. Heródoto, o historiador, conta a estória da predição do eclipse solar; o filósofo Aristóteles relata que Tales fez uma fortuna mono-[illegible] num ano em que a colheita de azeitonas prometia ser abun[illegible]. Outras lendas ainda descrevem Tales como mercador de sal, defensor do celibato ou estadista de visão. Tais referências, no entanto, não trazem mais provas relativas à importante questão de saber se Tales arranjou de fato, ou não, um certo número de teoremas geométricos numa seqüência dedutiva. A estória de que calculou a distância de um navio no mar por proporcionalidade de lados de triângulos semelhantes é inconclusiva, pois os princípios que regem tal cálculo eram conhecidos há tempos no Egito e na Mesopotâmia. Tais estórias não provam a conjetura ousada de ter Tales criado a geometria demonstrativa; mas de qualquer forma Tales é o primeiro homem da história a quem foram atribuídas descobertas matemáticas específicas[3]. Sabemos agora que uma grande massa de material matemático era familiar aos babilônios um milênio antes do tempo de Tales, no entanto entre os gregos era aceito que Tales tinha feito progressos definidos. Parece razoável supor, à luz das afirmações de Proclus, que Tales deu uma contribuição à organização racional do assunto. Que foram os gregos que acrescentaram à geometria o elemento novo da estrutura lógica é quase universalmente admitido hoje, mas permaneceu a grande questão de saber se esse passo crucial foi dado por Tales ou por outros mais tarde — talvez dois séculos mais tarde até. Quanto a esse ponto não se pode fazer um juízo definitivo sem que apareça nova evidência sobre o desenvolvimento da matemática grega.

3 Pitágoras é uma figura pouco menos discutida que Tales, pois foi mais completamente envolto em lenda e apoteose. Tales era um homem de negócios, mas Pitágoras era um profeta e um místico, nascido em Samos, uma das ilhas do Dodecaneso, não longe de Mileto, o lugar do nascimento de Tales. Embora alguns relatos afirmem que Pitágoras foi discípulo de Tales, isto é improvável dada a diferença de meio século entre suas idades. Alguma semelhança nos seus interesses pode ser facilmente explicada pelo fato de Pitágoras ter também viajado pelo Egito e Babilônia — possivelmente indo até a Índia. Durante suas peregrinações ele evidentemente absorveu não só informação matemática

[1]Tirada da tradução de T. L. Heath, *History of Greek Mathematics* (1921), I, 128. Cf. Ivor Thomas, ed., *Selections illustrating the History of Greek Mathematics* (1939-1941), I, 147

[2]Para um relato completo veja Heath, obra citada, I, 128-140

[3]B. L. van der Waerden, em *Science Awakening*, p. 80, aceita a conjetura de que Tales usava deduções: O. Neugebauer, em *Exact Sciences in Antiquity*, pp. 142, 143, 148, rejeita-a

e astronômica como também muitas idéias religiosas. Pitágoras, incidentalmente, foi praticamente contemporâneo de Buda, Confúncio e Lao-Tse, de modo que esse século foi crítico no desenvolvimento da religião bem como da matemática. Quando voltou ao mundo grego, Pitágoras estabeleceu-se em Crotona na costa sudeste do que agora é a Itália, mas era então chamada Magna Grécia. Lá ele fundou uma sociedade secreta que se assemelhava um pouco a um culto órfico, exceto por suas bases matemáticas e filosóficas.

Se Pitágoras permanece uma figura muito obscura isto se deve em parte à perda de documentos daquela época. Várias biografias de Pitágoras foram escritas na antiguidade, inclusive uma de Aristóteles, mas se perderam. Uma outra dificuldade para caracterizar claramente a figura de Pitágoras provém do fato de que a ordem que ele fundou era comunitária além de secreta. Conhecimento e propriedade eram comuns, por isso a atribuição de descobertas não era feita a um membro específico da escola. É melhor, por isso, não falar na obra de Pitágoras mas antes das contribuições dos pitagóricos, embora na antiguidade fosse usual dar todo o crédito ao mestre.

A escola pitagórica era politicamente conservadora e tinha um código de conduta rígido. O vegetarianismo era imposto a seus membros, aparentemente porque o pitagorismo aceitava a doutrina da metempsicose, ou transmigração das almas, com a preocupação conseqüente de que se podia matar um animal que fosse a nova moradia da alma de um amigo morto. Entre outros tabus da escola havia o de comer feijões (ou melhor, lentilhas). Talvez a mais notável característica da ordem pitagórica fosse a confiança que mantinha no estudo da matemática e da filosofia como base moral para a conduta. As próprias palavras "filosofia" (ou "amor à sabedoria") e matemática (ou "o que é aprendido") supõe-se terem sido criadas pelo próprio Pitágoras para descrever suas atividades intelectuais. Diz-se que ele estabeleceu duas categorias de conferências, uma só para membros da escola ou ordem, outras para os da comunidade mais ampla. Presume-se que foi nas conferências da primeira categoria que Pitágoras apresentou as contribuições que fez à matemática, quaisquer que fossem essas. Tendo descrito, na citação acima, a obra geométrica de Tales, Proclus diz em seguida:

> Pitágoras, que veio depois dele, transformou essa ciência numa forma liberal de instrução, examinando seus princípios desde o início e investigando os teoremas de modo imaterial e intelectual. Descobriu a teoria das proporcionais e a construção de figuras cósmicas[4].

Mesmo que não aceitemos essa afirmação totalmente, é evidente que os pitagóricos desempenharam um papel importante, talvez o crucial, na história da matemática. No Egito e na Mesopotâmia os elementos de aritmética e geometria eram essencialmente exercícios de aplicação de processos numéricos a problemas específicos, fossem eles referentes a cerveja ou pirâmides ou heranças de terras. Havia pouco de estrutura intelectual, e talvez nada que se parecesse com uma discussão filosófica de princípios. Presume-se em geral que Tales deu algum passo nessa direção, embora a tradição apóie a opinião de Eudemo e Proclus de que a nova ênfase na matemática se deve principalmente aos pitagóricos. Para eles a matemática se relacionava mais com o amor à sabedoria do que com as exigências da vida prática; e essa foi sua tendência a partir daí. Até onde os pitagóricos foram nessa direção não é nada claro, e pelo menos um conhecedor eminente do assunto[5] considera todos os relatos de contribuições matemáticas importantes pelos pitagóricos como não-históricos. De fato é difícil separar história e lenda no que se refere ao homem, pois ele representava tantas coisas para o povo — filósofo, astrônomo, matemático, abominador de feijões, santo, profeta, milagreiro, mágico, charlatão. Que foi uma das figuras mais influentes da história é difícil negar, pois seus seguidores, seja iludidos, seja inspirados, espalharam suas crenças por quase todo o mundo grego. A purificação da alma dos pitagóricos era realizada em parte por um regime físico estrito e em parte

[4]Ver Ivor Thomas, obra citada, I, 149. Cf. também Heath, obra citada I, 141, e van der Waerden, obra citada, p. 90

[5]Veja Neugebauer, obra citada, p. 148

por ritos que lembram os dos adoradores de Orfeu e Dionísio; mas as harmonias e mistérios da filosofia e da matemática também eram partes essenciais desses rituais. Nunca antes ou depois a matemática teve um papel tão grande na vida e na religião como entre os pitagóricos. Se, pois, é impossível atribuir descobertas específicas ao próprio Pitágoras, ou mesmo coletivamente aos pitagóricos, é entretanto importante entender o tipo de atividade com que, segundo a tradição, a escola estava associada.

4 Dizia-se que o lema da escola pitagórica era "Tudo é número". Lembrando que os babilônios tinham associado várias medidas numéricas às coisas que os cercavam, desde os movimentos nos céus até o valor de seus escravos, podemos perceber nesse lema uma forte afinidade com a Mesopotâmia. Mesmo o teorema, a que o nome de Pitágoras ainda está ligado, muito provavelmente veio dos babilônios. Sugeriu-se, como justificativa para chamá-lo teorema de Pitágoras, que foram os pitagóricos os primeiros a dar uma demonstração dele; mas não há meios de se verificar essa conjetura. As lendas de que Pitágoras sacrificou um boi (cem bois segundo outras versões) ao descobrir o teorema são implausíveis, tendo em vista as regras vegetarianas da escola. Além disso, são repetidas, com idêntica incredibilidade, em conexão com vários outros teoremas. É razoável supor que os membros mais antigos da escola pitagórica tinham familiaridade com propriedades geométricas conhecidas pelos babilônios; mas quando o sumário de Eudemo-Proclus lhes atribui a construção das "figuras cósmicas" (isto é, sólidos regulares) há lugar para dúvidas. O cubo, o octaedro e o dodecaedro podiam ter sido observados em cristais, como o da pirita (dissulfito de ferro); mas em *Os elementos* XIII está dito que os pitagóricos só conheciam três dos poliedros regulares: o tetraedro, o cubo e o dodecaedro. Conhecimento dessa última figura é plausível, dada a descoberta perto de Pádua de um dodecaedro de pedra etrusco datando de antes de 500 A. C. Não é improvável portanto que, mesmo que os pitagóricos não conhecessem o octaedro e o icosaedro, conhecessem algumas propriedades do pentágono regular. A estrela de cinco pontas (formada traçando as cinco diagonais de uma face pentagonal de um dodecaedro regular) era, ao que se diz, o símbolo especial da escola pitagórica. O pentágono estrelado tinha aparecido antes na arte babilônia, e é possível que aqui também tenhamos um elo de ligação entre a matemática pré-helênica e a pitagórica.

Uma das questões tantalizantes quanto à geometria pitagórica diz respeito à construção do pentagrama ou pentágono estrelado. Se começamos com um polígono regular *ABCDE* (Fig. 4.1) e traçamos as cinco diagonais, essas diagonais se cortam em pontos $A'B'C'D'E'$, que formam outro pentágono regular. Observando que o triângulo BCD', por exemplo, é semelhante ao triângulo isósceles *BCE* e observando também os muitos pares de triângulos congruentes no diagrama, não é difícil ver que os pontos $A'B'C'D'E'$ dividem as diagonais de um modo notável. Cada um deles divide uma diagonal em dois segmentos desiguais, tais que a razão da diagonal toda para o maior é igual à deste para o menor. Essa subdivisão das diagonais é a bem conhecida "secção áurea" de um segmento, mas esse nome só foi usado uns dois mil anos depois — mais ou menos pela época em que Kepler escrevia liricamente:

> A geometria tem dois grandes tesouros: um é o teorema de Pitágoras; o outro, a divisão de um segmento em média e extrema razão. O primeiro pode ser comparado a uma medida de ouro; o segundo podemos chamar de jóia preciosa.

Para os gregos antigos esse tipo de subdivisão logo se tornou tão familiar que não se achava necessário ter um nome especial para ela; por isso a designação "divisão de um segmento em média e extrema razão" em geral é substituída simplesmente pela palavra "secção".

Uma das propriedades importantes da "secção" é que, por assim dizer, ela se autopropaga. Se um ponto P_1, divide um segmento *RS* (Fig. 4.2) em média e extrema razão, sendo RP_1 o segmento maior e se sobre esse segmento maior marcamos o ponto P_2 tal que $RP_2 = P_1S$, então o segmento RP_1 por sua vez ficará subdividido em média e extrema razão pelo ponto P_2. Novamente, se marcarmos em RP_2 o ponto P_3 tal que $RP_3 = P_2P_1$,

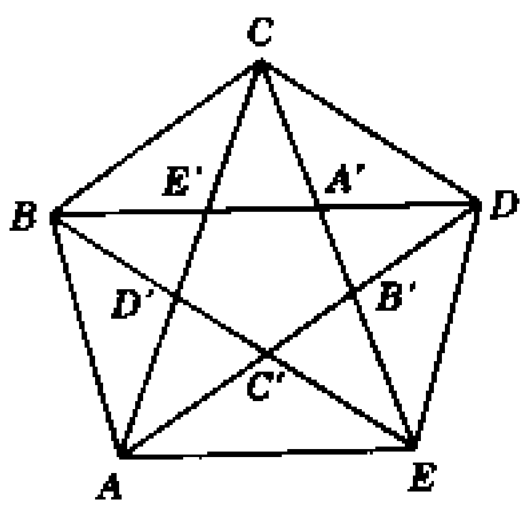


Figura 4.1

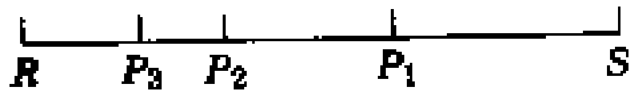


Figura 4.2

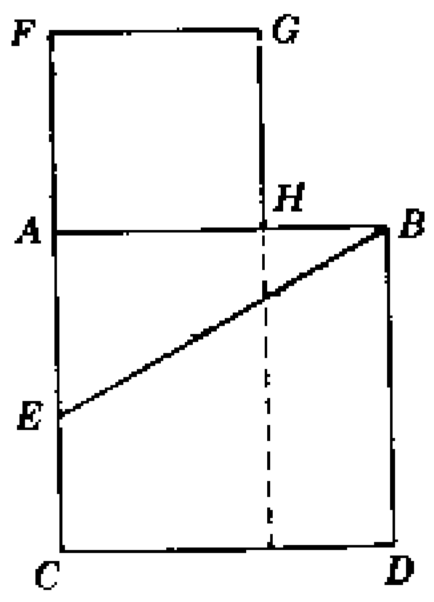


Figura 4.3

o segmento RP_2 ficará subdividido em média e extrema razão por P_3. Esse processo iterativo, é claro, pode ser repetido tantas vezes quanto se queira, obtendo-se segmentos RP_n cada vez menores divididos em média e extrema razão por P_{n+1}. Se os pitagóricos observaram ou não esse processo sem fim, ou dele tiraram conclusões significativas, não se sabe. Mesmo a questão mais fundamental de saber se os pitagóricos de cerca de 500 A. C. sabiam dividir um segmento em média e extrema razão não pode ser respondida com segurança, embora fosse muito provável que sim. A construção equivale à resolução de uma equação quadrática. Para mostrar isso, seja $RS = a$ e $RP_1 = x$ na Fig. 4.2. Então, pela propriedade da secção áurea $a:x = x:(a-x)$ e multiplicando médios e extremos temos a equação $x^2 = a^2 - ax$. Essa é uma equação quadrática do tipo 1 na classificação do Cap. 3, e Pitágoras podia ter aprendido dos babilônios como resolvê-la algebricamente. No entanto, se a é um número racional, não há um número x racional que satisfaça à equação. Teria Pitágoras percebido isso? Parece improvável. Talvez os pitagóricos tenham usado, em vez do método algébrico de resolução dos babilônios, um processo geométrico análogo ao que se encontra em *Os elementos* II, 11 e VI, 30 de Euclides. Para dividir um segmento de reta AB em média e extrema razão, Euclides construía primeiro sobre AB o quadrado $ABCD$ (Fig. 4.3). Então bissectava AC pelo ponto E, traçava EB e prolongava a reta CEA até F tal que $EF = EB$. Completado o quadrado $AFGH$ o ponto H será o ponto procurado, pois pode-se ver imediatamente que $AB:AH = AH:HB$. Se pudéssemos saber que tipo de solução, se é que tinham alguma, os pitagóricos adotavam para o problema da secção áurea, avançaríamos bastante no esclarecimento do nível e características da matemática pré-socrática. Se a matemática pitagórica começou sob a influência babilônia, com sua forte fé nos números, como (e quando) aconteceu que esta cedeu lugar à ênfase familiar sobre a geometria pura, que está tão firmemente instalada na posição central nos tratados clássicos?

5 Supõe-se usualmente que a maior parte do conteúdo dos dois primeiros livros de *Os elementos* é devida aos pitagóricos. Isso pressuporia um alto nível de realização, implicando em desenvolvimento bastante rápido do assunto depois dos dias de Tales e Pitágoras. Essa idéia exige fé no que se chamou "o milagre grego", pelo qual os relativamente iletrados recém-vindos à cena mediterrânea dominaram o material herdado de seus vizinhos e rapidamente subiram a novos cumes, estabelecendo de passagem o molde dedutivo essencial dos teoremas. Recentemente dúvidas sérias foram levantadas quanto a essa visão tradicional por aqueles que chamam a atenção para os conceitos aritméticos relativamente primitivos dos pitagóricos. Se, por exemplo, o mais importante matemático pitagórico do começo do quarto século A. C., Arquitas de Tarento (428-365 A. C.) podia afirmar que só a aritmética e não a geometria fornecia provas satisfatórias[6], não parece haver muita razão para atribuir o surgimento do método axiomático na geometria aos pitagóricos de um século ou dois antes. De outro lado, pode-se argüir que Arquitas representava somente um ponto de vista, insistindo na ortodoxa numerologia pitagórica que outros tinham abandonado ou modificado. Certamente tinha havido mudança de atitude na astronomia pitagórica, e podemos assumir que tivessem havido modificações comparáveis na matemática.

[6]Neugebauer, *Exact Sciences in Antiquity*, p. 148

Misticismo sobre números não é criação dos pitagóricos. O número sete, por exemplo, era objeto de especial respeito, presumivelmente por causa das sete estrelas errantes, ou planetas, das quais a semana derivou. Os pitagóricos não eram os únicos a imaginar que os números ímpares tinham atributos masculinos e femininos os pares — com a concomitante crença (não destituída de preconceito), encontrada ainda em Shakespeare, de que "há divindade nos números ímpares". Muitas civilizações primitivas partilharam vários aspectos da numerologia, mas os pitagóricos levaram a extremos a adoração dos números, baseando neles sua filosofia e modo de viver. O número um, diziam eles, é o gerador dos números e o número da razão; o dois é o primeiro número par, ou feminino, o número da opinião; três é o primeiro número masculino verdadeiro, o da harmonia, sendo composto de unidade e diversidade; quatro é o número da justiça ou retribuição indicando o ajuste de contas; cinco é o número do casamento, união dos primeiros números verdadeiros feminino e masculino; e seis é o número da criação. Cada número por sua vez tinha seus atributos peculiares. O mais sagrado era o dez ou o *tetractys*, pois representava o número do universo, inclusive a soma de todas as possíveis dimensões geométricas. Um ponto gera as dimensões, dois pontos determinam uma reta de dimensão um, três pontos não alinhados determinam um triângulo com área de dimensão dois, e quatro pontos não coplanares determinam um tetraedro com volume de dimensão três; a soma dos números que representam todas as dimensões é, portanto, o adorado número dez. É um tributo à abstração da matemática pitagórica que a veneração do número dez evidentemente não era ditada pela anatomia da mão ou pé humanos.

6 Na Mesopotâmia a geometria não tinha sido muito mais do que uma aplicação dos números à extensão espacial; ao que parece, a princípio era mais ou menos o mesmo para os pitagóricos, mas com uma modificação. Número no Egito significava o domínio dos números naturais e frações unitárias; entre os babilônios o corpo das frações racionais. Na Grécia a palavra número era usada só para os inteiros. Uma fração não era considerada como um ente único mas como uma razão ou relação entre inteiros. (A matemática grega nos seus estágios iniciais freqüentemente chegou mais perto da matemática "moderna" de hoje do que da aritmética usual das gerações que nos precederam.) Como Euclides mais tarde o disse (*Os elementos* V, 3), "Uma razão é uma relação de tamanho entre grandezas de mesma espécie". Um tal ponto de vista, que focaliza a atenção sobre a conexão entre pares de números, tende a por em relevo os aspectos teóricos do conceito de número e a reduzir a ênfase no papel do número como instrumento de cálculo ou aproximação de medidas. A aritmética agora podia ser considerada uma disciplina intelectual, além de uma técnica, e a transição para esse ponto de vista parece ter sido feita na escola pitagórica. Se a tradição merece confiança, os pitagóricos não só fizeram da aritmética um ramo da filosofia; parecem ter feito dela uma base para a unificação de todos os aspectos do mundo que os rodeava. Por meio de configurações de pontos, ou unidades sem extensão, associavam números com extensão geométrica; isso por sua vez levou-os à aritmética celeste. Filolaus (morreu em 390 A. C. aproximadamente), um pitagórico posterior que partilhava da veneração pelo *tetractys* ou década, escreveu que ele era "grande, todo-poderoso e gerador de tudo, o começo e o guia da vida divina e terrestre"[7]. Essa visão do número dez como o perfeito, o símbolo da saúde e da harmonia, parece ter inspirado o primeiro sistema astronômico não geocêntrico. Filolaus postulou que no centro do universo havia um fogo central em torno do qual a terra e os sete planetas (o Sol e a Lua inclusive) giravam uniformemente. Como isso fazia chegar somente a nove o número de corpos celestes (além da esfera de estrelas fixas), o sistema de Filolaus assumia a exis-

[7]Para uma exposição particularmente ampla do pitagoreanismo ver Eduard Zeller, *A History of Greek Philosophy from the Earliest Period to the Time of Socrates* (1881), I. 306-533. Sobre o tetractys ver especialmente pp. 428 e seguintes. Uma descrição mais longa do papel do *tetractys* é dada em pp. 180-188 de Thomas Taylor, *The Theoretic Arithmetic of the Pythagoreans* (Los Angeles, EUA, 1934) mas esse livro deve ser lido com cautela

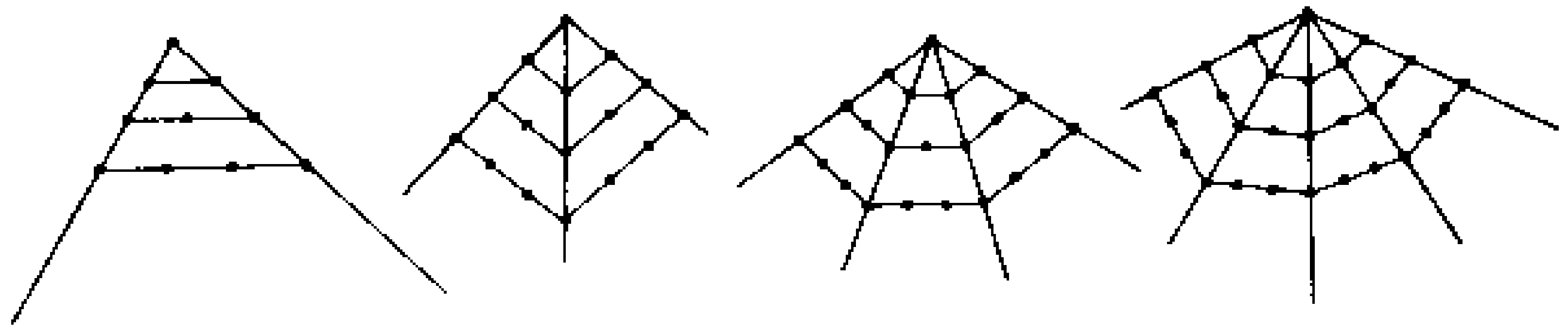


Figura 4.4

tência de um décimo corpo — uma "contraterra" colinear com a Terra em sua revolução diária em torno do fogo central. O Sol dava uma volta por ano em torno do fogo, e as estrelas fixas eram estacionárias. A Terra em seu movimento conservava sempre a mesma face não habitada voltada para o fogo central, por isso nem o fogo nem a contraterra eram jamais vistos. O postulado do movimento circular uniforme que os pitagóricos adotaram iria dominar o pensamento dos astrônomos por mais de 2 000 anos. Copérnico, quase 2 000 anos depois, aceitou-o sem discussão e era aos pitagóricos que Copérnico se reportava para mostrar que sua doutrina de uma Terra móvel não era tão nova ou revolucionária.

Quão completamente os pitagóricos fizeram entrar os números em suas idéias é bem ilustrado por sua preocupação com os números figurativos. Embora nenhum triângulo possa ser formado com menos de três pontos, é possível ter triângulos de maior número de pontos, como seis, dez, ou quinze (veja Fig. 4.4). Números como três, seis, dez, e quinze ou, em geral, números dados pela fórmula

$$N = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

eram chamados triangulares; e o desenho triangular para o número dez, o sagrado *tetractys*, competia com o pentágono quanto à veneração na teoria dos números pitagóricos. Havia, é claro, uma infinidade de outras categorias de números privilegiados. Números quadrados sucessivos são formados pela seqüência $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n-1)$, em que cada número impar por sua vez era considerado como uma configuração de pontos semelhante a um gnômon (o relógio de sombra babilônio) colocado em torno de dois lados da precedente configuração de pontos em forma de quadrado (veja Fig. 4.4). Daí o termo gnômon (aparentado à palavra para saber) veio a ser ligado aos próprios números impares. A seqüência de números pares, $2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = n(n+1)$, produz o que os gregos chamaram "números oblongos", cada um dos quais é o dobro de um número triangular. Configurações pentagonais de pontos ilustravam os números pentagonais dados pela seqüência

$$N = 1 + 4 + 7 + \ldots + (3n-2) = \frac{n(3n-1)}{2},$$

e os números hexagonais provinham da seqüência

$$1 + 5 + 9 + \ldots + (4n-3) = 2n^2 - n.$$

De modo semelhante eram designados números poligonais de todas as ordens; o processo naturalmente se estende facilmente ao espaço tridimensional, em que se lida com números poliedrais. Encorajado por essas idéias, Filolaus, ao que se conta, afirmou que

> Todas as coisas que podem ser conhecidas têm número; pois não é possível que sem número qualquer coisa possa ser concebida ou conhecida.

A frase de Filolaus parece ter sido artigo de fé da escola pitagórica, daí surgindo estórias sobre a descoberta, por Pitágoras, de algumas leis simples da música. Conta-se que Pitágoras observou que quando os comprimentos de cordas vibrantes podem ser expressos como razões de números inteiros simples, como dois para três (para a quinta) ou três para quatro (para a quarta), os tons serão harmoniosos. Em outras palavras, se uma corda produz a nota dó quando tocada, então uma semelhante com o dobro do

comprimento produzirá o dó uma oitava abaixo; e os tons entre essas notas são emitidos por cordas cujos comprimentos são dados por razões intermediárias: 16:9 para ré, 8:5 para mi, 3:2 para fá, 4:3 para sol, 6:5 para lá e 16:15 para si, em ordem ascendente. Aqui temos talvez as mais antigas leis quantitativas da acústica — talvez as mais antigas leis quantitativas da física. Tão audazmente imaginativos eram os pitagóricos antigos que eles extrapolaram apressadamente para concluir que os corpos celestes em seus movimentos também emitiam tons harmoniosos, a "harmonia das esferas". A ciência pitagórica, como a matemática pitagórica, parece ter sido uma estranha mistura de pensamento lúcido e fantástica especulação. A doutrina da terra esférica é freqüentemente atribuída a Pitágoras, mas não se sabe se essa conclusão[8] era baseada em observação (talvez de novas constelações quando Pitágoras viajava para o sul) ou em imaginação. A própria idéia de que o universo é um "cosmos", ou todo harmoniosamente ordenado, parece ser uma contribuição pitagórica relacionada com essas idéias — uma idéia que na época tinha pouca base de observação direta mas que foi enormemente frutífera no desenvolvimento da astronomia. Quando sorrimos das fantasias numéricas dos antigos devemos também lembrar-nos do impulso que deram ao desenvolvimento tanto da matemática quanto da ciência. Os pitagóricos foram dos primeiros a acreditar que as operações da natureza podiam ser entendidas por meio da matemática.

8 Proclus, talvez citando Eudemo, atribuiu a Pitágoras duas descobertas matemáticas específicas: (1) a construção dos sólidos regulares e (2) a teoria das proporcionais. Embora haja dúvida sobre até que ponto isso deve ser tomado literalmente, há forte probabilidade de que a afirmação esteja de acordo com a direção do pensamento pitagórico. A teoria das proporções claramente se ajusta ao esquema de interesses matemáticos dos gregos antigos, e não é difícil achar uma provável fonte de inspiração. Conta-se que Pitágoras soube na Mesopotâmia das três médias aritmética, geométrica e a subcontrária (mais tarde chamada harmônica) — e da "proporção áurea" que relaciona duas delas: o primeiro de dois números está para sua média aritmética como a média harmônica está para o segundo número. Essa relação é a essência do algoritmo babilônio para extração de raiz quadrada, portanto o relato é ao menos plausível. Em algum momento, porém os pitagóricos generalizaram esse trabalho acrescentando sete novas médias para perfazer dez ao todo. Se b é a média de a e c, onde $a < c$ então as três quantidades estão relacionadas por uma das equações seguintes

$$(1)\quad \frac{b-a}{c-b} = \frac{a}{a}; \qquad (6)\quad \frac{b-a}{c-b} = \frac{c}{b};$$

$$(2)\quad \frac{b-a}{c-b} = \frac{a}{b}; \qquad (7)\quad \frac{c-a}{b-a} = \frac{c}{a};$$

$$(3)\quad \frac{b-a}{c-b} = \frac{a}{c}; \qquad (8)\quad \frac{c-a}{c-b} = \frac{c}{a};$$

$$(4)\quad \frac{b-a}{c-b} = \frac{c}{a}; \qquad (9)\quad \frac{c-a}{b-a} = \frac{b}{a};$$

$$(5)\quad \frac{b-a}{c-b} = \frac{b}{a}; \qquad (10)\quad \frac{c-a}{c-b} = \frac{b}{a}.$$

As três primeiras equações são, naturalmente, as equações para as médias aritmética, geométrica e harmônica respectivamente.

É difícil atribuir uma data ao estudo pitagórico das médias, e problemas semelhantes surgem a propósito da classificação dos números. O estudo das proporções ou da igualdade de razões presumivelmente formava de início uma parte da aritmética ou teoria dos

[8]A tradição que atribui o conceito de terra esférica aos pitagóricos foi questionada. Ver W. A. Heidel, *The Frame of the Ancient Greek Maps with a Discussion of the Sphericity of the Earth* (New York: Amer. Geog. Soc., 1937)

números pitagórica. Mais tarde as quantidades *a*, *b* e *c* que entravam em tais proporções seriam provavelmente olhadas como grandezas geométricas; mas o período em que teve lugar essa mudança não é claro. Além dos números poligonais mencionados acima e da distinção entre ímpares e pares, os pitagóricos começaram em dado momento a falar em número ímpar-ímpar ou par-ímpar, conforme fosse o produto de dois números ímpares ou de um ímpar e um par, de modo que às vezes o termo par era reservado às potências inteiras de dois. Pelo tempo de Filolaus a distinção entre números primos e compostos parece ter-se tornado importante. Espeusipus, sobrinho de Platão e seu sucessor como chefe da Academia, afirmava que dez era "perfeito" para os pitagóricos porque, entre outras coisas, é o menor inteiro n para o qual há exatamente tantos primos entre 1 e n quanto não-primos. (Ocasionalmente os números primos eram chamados lineares por serem usualmente representados por pontos em uma dimensão apenas.) Os neopitagóricos às vezes excluíam o dois da lista dos primos dizendo que um e dois não são números verdadeiros, mas geradores de números ímpares e pares. A supremacia dos ímpares era considerada provada pelo fato de ímpar + ímpar ser par, enquanto que par + par permanece par.

Tem sido atribuída aos pitagóricos a regra para tríadas pitagóricas dadas por $(m^2-1)/2$, m, $(m^2+1)/2$, onde m é um inteiro ímpar; mas como essa regra se relaciona de perto com os exemplos babilônios, talvez não seja uma descoberta independente. Também são atribuídas aos pitagóricos, com dúvidas quanto ao período em questão, as definições de números perfeitos abundantes e deficientes, conforme a soma dos divisores próprios do número seja igual a, maior que ou menor que o número em questão. Segundo essa definição, seis é o menor número perfeito, vinte e oito vindo em seguida. Que isso seja provavelmente um desenvolvimento mais tardio no pensamento pitagórico é sugerido pela veneração do dez em lugar do seis. Por isso a doutrina aparentada dos números "amigáveis" é também provavelmente uma noção posterior. Dois inteiros a e b se dizem "amigáveis" se a é a soma dos divisores próprios de b e b a dos divisores próprios de a. O menor tal par é o dos inteiros 220 e 284.

O quadro da matemática pitagórica que apresentamos baseia-se principalmente em relatos de comentadores que viveram muitos séculos depois e que estavam, quase sem exceção, interessados em aspectos filosóficos do pensamento. Embora pareça plausível supor, com os comentadores, que os pitagóricos foram responsáveis em grande parte pela visão abstrata que fez da matemática uma disciplina intelectual, o nível de sofisticação durante o sexto e o quinto séculos A. C. pode não ter sido tão alto quanto diz a tradição. Deve ter sido uma tentação para os seguidores posteriores de uma escola filosófica, como a pitagórica, exagerar as realizações do fundador e dos primeiros membros da seita. É muito provável que elementos de primitivismo estivessem presentes, durante os primeiros estágios do pitagorismo, mas não fossem relatados. É evidente também que o tipo de atitude, quanto à matemática, representado pelos pitagóricos era quase certamente atípico do pensamento grego no todo. Os helenos eram famosos como negociantes astutos e deve ter havido um nível inferior de aritmética ou computação que satisfazia às necessidades da vasta maioria dos gregos. Atividades numéricas desse nível não mereceriam a atenção dos filósofos e registros de aritmética prática não apareceriam nas bibliotecas dos estudiosos. Portanto, se nem fragmentos restam das obras mais sofisticadas dos pitagóricos, é claro que não é razoável esperar que manuais de aritmética comercial sobrevivessem aos estragos do tempo. Por isso não é possível dizer como os processos comuns da aritmética eram efetuados na Grécia de há 2 500 anos. O melhor que se pode fazer é descrever os sistemas de numeração que parecem ter estado em uso.

De modo geral, parecem ter existido dois sistemas principais de numeração na Grécia: um, provavelmente o mais antigo, é conhecido como notação ática (ou herodiânica); o outro é chamado sistema jônio (ou alfabético). Ambos, quanto aos inteiros, são em base dez, mas o primeiro é mais primitivo, sendo baseado num simples esquema de iteração como o encontrado na numeração hieroglífica primitiva do Egito e depois nos numerais romanos. No sistema ático os números de um a quatro eram representados por riscos

verticais repetidos. Para o número cinco adotou-se um novo símbolo — a primeira letra Π (ou Γ) da palavra para cinco, *pente*. (Só maiúsculas eram usadas na época, tanto em obras literárias como na matemática, as letras minúsculas sendo uma invenção do período antigo final ou medieval inicial.) Para números de seis a nove, o sistema ático combinava o símbolo Γ com riscos unitários, de modo que oito, por exemplo, era escrito ΓIII. Para potências inteiras positivas da base (dez), as letras iniciais das palavras correspondentes eram usadas — Δ para *deka* (dez), H para *hekaton* (cem), X para *khilioi* (mil), e M para *myrioi* (dez mil). Exceto quanto à forma dos símbolos, o sistema ático se parecia com o romano; mas tinha uma vantagem. Ao passo que o mundo latino adotou símbolos distintos para 50 e 500, os gregos escreviam esses números combinando as letras para 5, 10 e 100, usando 𐅄 (ou 5 vezes 10) para 50, e 𐅅 (ou 5 vezes 100) para 500. Da mesma forma escreviam 𐅆 para 5 000 e 𐅇 para 50 000. Na escrita ática o número 45.678, por exemplo, apareceria como

MMMM𐅆𐅅H𐅄ΔΔΓIII

10 O sistema ático (conhecido também como herodiano por estar descrito num fragmento atribuído a Herodian, um gramático do segundo século) aparece em inscrições de várias datas de 454 a 95 A. C.[9], mas pelo início da Idade Alexandrina, mais ou menos ao tempo do Ptolomeu Filadelfo, foi sendo substituído pelos numerais, iônios ou alfabéticos. Esquemas alfabéticos semelhantes foram usados em várias épocas por povos semíticos, hebreus, sírios, aramaicos e árabes entre outros — bem como por outras culturas, como a gótica, mas ao que parece foram emprestados da notação grega. O sistema jônio provavelmente começou a ser usado desde o quinto século A. C., talvez desde o oitavo século A. C. Uma razão para colocar a origem da notação relativamente cedo é que o esquema usava vinte e sete letras do alfabeto — nove para os inteiros menores que 10, nove para os múltiplos de 10 inferiores a 100 e nove para os múltiplos de 100 inferiores a 1 000. O alfabeto grego clássico contém somente vinte e quatro letras; por isso foi usado um alfabeto mais antigo que incluía três letras adicionais arcaicas — F (vau ou digama ou stigma) Ϙ (koppa) e Ϡ (sampi) — para estabelecer a seguinte associação entre letras e números.

A	B	Γ	Δ	E	F	Z	H	Θ	I	K	Λ	M	N
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	30	40	50
Ξ	O	Π	Ϙ	P	Σ	T	Υ	Φ	X	Ψ	Ω	Ϡ	
60	70	80	90	100	200	300	400	500	600	700	800	900	

Como as três letras arcaicas ocupam as posições no esquema de numeração que tinham no alfabeto mais antigo, sugeriu-se que a notação jônia foi introduzida antes que as três letras fossem abandonadas — digamos no oitavo século A. C.; essa sugestão se torna menos convincente quando consideramos o longo intervalo de tempo entre a suposta introdução e o triunfo final do sistema no terceiro século A. C.[10] A vantagem evidente da concisão do sistema alfabético deveria levar a uma aceitação mais rápida do sistema do que o intervalo indicado de meio milênio. A numeração jônia tem a mesma relação com a ática que a hierática egípcia com a hieroglífica, e a superioridade da escrita cursiva sobre a hieroglífica, mais desajeitada, tinha sido evidente para os escribas.

Após a introdução das minúsculas na Grécia, a associação entre letras e números ficou

α	β	γ	δ	ε	ς	ζ	η	θ	ι	κ	λ	μ	ν
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	30	40	50
ξ	ο	π	ϙ	ρ	σ	τ	υ	φ	χ	ψ	ω	ϡ	
60	70	80	90	100	200	300	400	500	600	700	800	900	

[9] Ver Heath, obra citada, I, 30. Veja também James Gow, *A Short History of Greek Mathematics* (Cambridge, 1884)

[10] Para outras discussões e referências, ver C. B. Boyer, "Fundamental Steps in the Development of Numeration", *Isis* 35 (1944) 153-168

Como essas formas são mais familiares hoje, nós as usaremos aqui. Para os primeiros nove múltiplos de mil o sistema jônio adotou as primeiras nove letras do alfabeto, um uso parcial do princípio posicional; mas para maior clareza essas letras eram precedidas por um risco ou acento

$,\alpha$	$,\beta$	$,\gamma$	$,\delta$	$,\varepsilon$	$,\varsigma$	$,\zeta$	$,\eta$	$,\theta$
1 000	2 000	3 000	4 000	5 000	6 000	7 000	8 000	9 000

Dentro desse sistema qualquer número inferior a 10 000 podia ser escrito facilmente com apenas quatro símbolos. O número 8 888, por exemplo, apareceria como, $,\eta\omega\pi\eta$ ou como $\eta\omega\pi\eta$, com o acento às vezes omitido, quando o contexto fosse claro. O uso das mesmas letras para milhares e para unidades deveria ter sugerido aos gregos o completo esquema posicional na aritmética decimal, mas não parece que eles tenham percebido as vantagens de uma tal idéia. Que tinham mais ou menos em mente um tal princípio é evidente não só pelo uso das letras de α a θ para unidades e milheiros, mas também pelo fato de serem os símbolos dispostos em ordem de grandeza, do menor à direita ao maior à esquerda. Ao chegar a 10 000, que para os gregos era o início de uma nova contagem ou categoria (assim como nós freqüentemente separamos os milhares das potências menores por um ponto), a notação jônia adotava um princípio multiplicativo. Um símbolo para um inteiro de 1 a 9 999, quando colocado acima da letra M, ou depois dela, separado do resto do número por um ponto, indicava o produto do inteiro pelo número 10 000 — a miríade grega. Assim o número 88 888 888 apareceria como $M,\eta\omega\pi\eta \cdot \eta\omega\pi\eta$. Se aparecessem números ainda maiores, o mesmo princípio seria aplicado à dupla miríade, 100 000 000 ou 10^8.

As notações gregas primitivas para os inteiros não eram excessivamente incômodas e serviam bem aos seus objetivos. Era no uso de frações que o sistema era fraco. Como os egípcios, os gregos se sentiram tentados a usar frações unitárias, e para estas tinham uma representação simples. Escreviam o denominador e depois simplesmente o seguiam de um sinal diacrítico ou acento para distingui-lo do inteiro correspondente. Assim 1/34 se escreveria $\lambda\delta'$. Isso, é claro, podia ser confundido com o número 30 1/4, mas podia-se supor que o contexto ou palavras explicativas, esclarecessem a situação. Em séculos posteriores frações comuns gerais e frações sexagesimais passaram a ser usadas; serão discutidas adiante em conexão com a obra de Arquimedes, Ptolomeu e Diofante, pois existem documentos que, se não datam do tempo desses homens, são cópias de obras escritas por eles — uma situação muito diferente da referente aos matemáticos do período helênico.

A história da matemática durante o tempo de Tales e dos pitagóricos depende necessariamente, em grau indesejável, de conjeturas e inferências, pois faltam inteiramente documentos da época. Há muito mais incerteza quanto à matemática grega de 600 A. C. a 450 A. C. do que acerca da álgebra babilônia ou da geometria egípcia de cerca de 1 700 A. C. Nem mesmo artefatos matemáticos dos primeiros tempos da Grécia se preservavam. É evidente que algum tipo de ábaco era usado nos cálculos, mas a natureza e a maneira de operar de tal ábaco devem ser inferidas do ábaco romano e de algumas referências casuais em autores gregos. Heródoto, escrevendo no começo do quinto século A. C. diz que, ao contar com pedrinhas, a mão dos gregos ia da esquerda para a direita e a dos egípcios da direita para a esquerda. Um vaso de um período um pouco posterior mostra um coletor de tributos com um ábaco que era usado não só para múltiplos decimais inteiros do dracma mas para subdivisões não decimais. Começando da esquerda, as colunas designam miríades, milhares, centenas e dezenas de dracmas, respectivamente, sendo os símbolos expressos em notação herodiana. Depois, seguindo a coluna de unidades para dracmas, há colunas para abdos (seis abdos = um dracma), para meio abdo, e quarto de abdo. Aqui vemos como as civilizações antigas evitaram o uso excessivo de frações: simplesmente subdividiam as unidades de comprimento, peso e dinheiro tão eficazmente que podiam calcular em termos de múltiplos inteiros das subdivisões. Essa é sem dúvida a explicação da popularidade, na antiguidade, das subdivisões duodecimais e sexagesimais, pois o sistema decimal aqui fica em forte desvantagem. Frações decimais

eram raramente usadas, seja pelos gregos seja por outros povos do Ocidente, antes do período da Renascença. O ábaco pode facilmente ser adaptado a qualquer sistema de numeração ou qualquer combinação de sistemas; é provável que o uso amplamente difundido do ábaco explique ao menos em parte o desenvolvimento estranhamente tardio de uma notação posicional consistente para inteiros e frações. Quanto a isso, a Idade Pitagórica pouco ou nada contribuiu. A visão dos pitagóricos parece ter sido tão completamente abstrata e filosófica que detalhes técnicos de computação não tinham importância nenhuma para eles. Tais técnicas eram relegadas a uma disciplina à parte, chamada logística. Essa tratava da enumeração das coisas, em vez da essência e propriedades do número em si, questões que pertenciam à aritmética. Isto é, os gregos antigos fizeram uma distinção clara entre simples cálculo de um lado e o que hoje se chama teoria dos números do outro. Se uma distinção tão nítida foi ou não uma desvantagem para o desenvolvimento histórico da matemática pode ser discutível, mas não é fácil negar aos matemáticos iônios e pitagóricos antigos o papel primordial para o estabelecimento da matemática como uma disciplina racional. É por isso que Tales é freqüentemente chamado o primeiro matemático, e que Pitágoras, é conhecido como o pai da matemática. A extensão em que aceitaremos tais apelações literalmente, em vista da falta de provas documentárias, dependerá de nossa confiança na tradição. É evidente que a tradição pode ser muito inexata, mas é raro ser totalmente mal orientada.

BIBLIOGRAFIA

Allman, G. J., *Greek Geometry from Thales to Euclid* (Dublin: Dublin University Press, 1889)

Clagett, Marshall, *Greek Science in Antiquity* (New York: Abelard-Schuman, cerca de 1955; 2.ª edição em brochura, New York: Collier, 1966)

Dantzig, Tobias, *The Bequest of the Greeks* (New York: Scribner's, 1955)

Freeman, Kathleen, *Ancilla to the Pre-Socratic Philosophers* (Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1948)

Gow, James, *A Short History of Greek Mathematics* (reimpressão, New York: Hafner, 1923)

Heath, T. L., *A History of Greek Mathematics* (Oxford: Clarendon, 1921, 2 vols.)

Heath, T. L., *Manual of Greek Mathematics* (New York: Oxford University Press, 1931; edição em brochura, New York: Dover, 1963)

Loria, Gino, *Historie des sciences mathématiques dans l'antiquité hellénique* (Paris: Gauthier-Villars, 1929)

Michel, Paul-Henri, *De Pythagore à Euclide* (Paris, 1950)

Neugebauer, O., *The Exact Sciences in Antiquity*, 2.ª edição (Providence, R. I.: Brown University Press, 1957; edição em brochura, New York: Harper)

Tannery, Paul, *La géométrie grecque, comment son histoire nous est parvenue et ce que nous en savons* (Paris, 1887)

Thomas, Ivor, ed., *Selections Illustrating the History of Greek Mathematics* (2 vols., Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1939-1941)

Van der Waerden, B. L., *Science Awakening*, traduzido por Arnold Dresden (New York: Oxford University Press, 1961; edição em brochura, New York: Wiley, 1963)

Zeller, Eduard: *A History of Greek Philosophy from the Earliest Period to the Time of Socrates*, traduzido por S. F. Alleyne (Londres: Longmans, Green, 1881, 2 volumes)

EXERCÍCIOS

1. Prove dois teoremas atribuídos a Tales e diga, justificando, se acha ou não que ele possa ter usado raciocínio semelhante.
2. Prove o teorema de Pitágoras. Acha que Pitágoras usou seu método? Explique.
3. Teon de Smirna, um neoplatonista e neopitagórico do segundo século descobriu, ao que se diz, que a soma de dois números triangulares consecutivos é um quadrado. Prove esse teorema.
4. Quais são os quatro primeiros números heptagonais (correspondendo a polígonos regulares de sete lados)?
5. Escreva os números 3 456 e 4 567 e sua soma na notação ática primitiva e no sistema jônio ou alfabético.

6. Prove que se três números a, b, c estão em progressão aritmética nessa ordem e se A, B, C são seus recíprocos respectivamente, então B é a média harmônica de A e C.

7. Filolaus chamou o cubo uma "harmonia geométrica", por causa do número de suas faces, arestas e vértices. Justifique essa designação, à luz da teoria pitagórica das proporções.

8. Mostre que 1 184 e 1 210 são números amigáveis.

9. Mostre, à maneira dos pitagóricos, que um número oblongo é a soma de dois números triangulares iguais.

10. Prove cuidadosamente que as diagonais de um pentágono se dividem mutuamente em média e extrema razão.

11. Usando régua e compasso apenas, construa um pentágono regular, sendo dado o seu lado.

12. Usando régua e compasso apenas, construa um pentágono regular, sendo dada uma diagonal.

13. Num círculo dado inscreva um pentágono regular usando apenas régua e compasso.

14. Todos os números poligonais são da forma $P_m = an^2 + bn$ onde m é o número de lados e n é a ordem. Usando esse fato, ache a e b para os números octogonais ($m = 8$) e verifique geometricamente para $n = 3$.

15. Ache o quinto número pentagonal e o sexto hexagonal.

16. 4 567 é um número heptagonal? Justifique sua resposta.

17. Mostre que se $a > b > c$, as três equações

$$\frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{a}, \frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{b}, \frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{c}$$

definem b respectivamente como média aritmética, geométrica e harmônica de a e c.

*18. Todos os números poliedrais são da forma $P_m = an^3 + bn + c$, onde m é o número de faces e n a ordem. Use esse fato para achar a e b e c para os números tetraedrais ($m = 4$) e verifique geometricamente para $n = 4$.

*19. Números poliedrais podem ser calculados somando números poligonais sucessivos de mesmo tipo. Mostre como generalizar o processo para definir números politópicos no espaço n-dimensional e ache três números politópicos não-triviais.

Capítulo **5**

A Idade Heróica

Eu preferia descobrir uma causa a ganhar o reino da Pérsia

Demócrito

1 Os relatos sobre as origens da matemática grega se concentram nas chamadas escolas jônia e pitagórica e no representante principal de cada uma — Tales e Pitágoras — embora as reconstruções de seu pensamento se baseiem em narrações fragmentárias e tradições elaboradas nos séculos posteriores. Até certo ponto essa situação permanece durante todo o quinto século A. C. Praticamente não existem documentos matemáticos ou científicos até os dias de Platão no quarto século A. C. No entanto, durante a segunda metade do quinto século circularam relatos persistentes e consistentes sobre um punhado de matemáticos que evidentemente estavam intensamente preocupados com problemas que formaram a base da maior parte dos desenvolvimentos posteriores na geometria. Por isso, chamaremos esse período a "Idade Heróica da Matemática", pois raramente, antes ou depois, homens com tão poucos recursos atacaram problemas de tal significado matemático. A atividade matemática já não se centrava quase inteiramente em duas regiões quase em extremidades opostas do mundo grego; floresceu à volta do Mediterrâneo todo. No que agora é o sul da Itália havia Arquitas de Tarento (nasceu em 428 A. C. aproximadamente) e Hipasus de Metapontum (viveu por volta de 400 A.C.); em Abdera na Trácia achamos Demócrito (nasceu em 460 A. C. aproximadamente); mais perto do centro do mundo grego, na península ática, havia Hípias de Elis (nasceu em 460 A. C. aproximadamente), e em Atenas viveram em tempos diferentes durante a segunda metade, a crítica, do quinto século A. C., três matemáticos de outras regiões: Hipócrates de Chios (viveu por volta de 430 A. C.), Anaxágoras de Clazomene (morreu em 428 A. C.), e Zeno de Eléia (viveu por volta de 450 A. C.). Através da obra desses sete homens descreveremos as mudanças fundamentais por que passou a matemática um passo antes do ano 400 A. C.

2 O quinto século A. C. foi um período crucial na história da civilização ocidental, pois iniciou-se com a derrota dos invasores persas e terminou com a rendição de Atenas a Esparta. Entre esses dois acontecimentos situa-se a grande Idade de Péricles, com suas realizações na literatura e na arte. A prosperidade e a atmosfera intelectual de Atenas durante esse século atraíram estudiosos de todas as partes do mundo grego, e uma síntese de vários aspectos foi conseguida. Da Jônia vieram homens como Anaxágoras, de espírito prático; do sul da Itália vieram outros, como Zeno, com inclinações metafísicas mais fortes. Demócrito de Abdera defendeu uma visão materialista do mundo, enquanto que Pitágoras, na Itália, sustentava atitudes idealistas na ciência e na filosofia. Em Atenas encontravam-se devotos entusiastas de antigos e novos ramos do conhecimento, da cosmologia à ética. Havia um ousado espírito de livre investigação, que às vezes entrava em conflito com os usos estabelecidos. Em particular, Anaxágoras foi preso em Atenas por impiedade, ao assegurar que o Sol não era uma divindade, mas uma grande pedra incandescente, grande como todo o Peloponeso, e que a Lua era uma terra habitada que emprestava do Sol a sua luz. Representa bem o espírito de pesquisa racional, pois considerava como objetivo de sua vida o estudo da natureza do universo, uma decisão que nele derivava da tradição jônia de que Tales fora um dos fundadores. O entusiasmo intelectual de Anaxágoras foi compartilhado com seus compatriotas através do primeiro ***best-seller*** científico — um livro *Sobre a natureza* que podia ser comprado em Atenas por apenas uma dracma. Anaxágoras foi professor de Péricles que fez com que seu mentor fosse afinal libertado da prisão. Sócrates foi, a princípio, atraído pelas idéias científicas

de Anaxágoras, mas o provocador de Atenas achou o ponto de vista naturalístico menos satisfatório que a busca de verdades éticas.

A ciência grega tinha raízes numa curiosidade altamente intelectual que é freqüentemente contrastada com o utilitarismo imediatista do pensamento pré-helênico; Anaxágoras claramente representava o motivo grego típico — o desejo de saber. Na matemática também a atitude grega diferia fortemente da das culturas potâmicas anteriores. O contraste era claro já nas contribuições geralmente atribuídas a Tales e Pitágoras, e continuou aparente nos relatos, mais dignos de confiança, sobre o que se passou em Atenas durante a Idade Heróica. Anaxágoras era primariamente um filósofo da natureza mais do que um matemático, mas sua mente inquiridora levou-o a tomar parte na investigação de questões matemáticas. Conta-nos Plutarco que, enquanto Anaxágoras esteve preso, ocupou-se com uma tentativa de quadrar o círculo. Aqui temos a primeira menção de um problema que iria fascinar os matemáticos por mais de 2 000 anos[1]. Não há outros detalhes quanto à natureza do problema ou as regras que o condicionam. Mais tarde ficou entendido que o quadrado procurado de área exatamente igual à do círculo, deveria ser construído só com régua e compasso. Aqui vemos um tipo de matemática muito diferente da dos egípcios e babilônios. Não se trata de aplicação prática de uma ciência de números a um aspecto da experiência comum, mas de uma questão teórica envolvendo uma distinção clara entre bom grau de aproximação e exatidão de pensamento. O problema matemático que Anaxágoras atacou era de tão pouco interesse para um tecnologista quanto os que ele levantou em relação à estrutura da matéria. No mundo grego a matemática era aparentada mais de perto à filosofia que a negócios práticos, e esse parentesco permaneceu até hoje.

Anaxágoras faleceu em 428 A. C., o ano em que nasceu Arquitas, um ano antes do nascimento de Platão e um ano antes da morte de Péricles. Diz-se que Péricles morreu da peste que matou talvez um quarto da população de Atenas, e que a profunda impressão criada por esta catástrofe talvez tenha originado um segundo problema matemático famoso. Diz-se que uma delegação fora enviada ao oráculo de Apolo em Delos para perguntar como a peste poderia ser combatida e que o oráculo respondeu que o altar de Apolo, cúbico, deveria ser duplicado. Os Atenienses, ao que se diz, obedientemente dobraram as dimensões do altar, mas isto não adiantou para afastar a peste. É claro, o altar tivera seu volume multiplicado por oito e não por dois. Essa, diz a lenda, era a origem do problema da "duplicação do cubo", que a partir daí foi geralmente designado como "problema deliano" — dada a aresta de um cubo, construir só com régua e compasso a aresta de um segundo cubo tendo o dobro do volume do primeiro. Mais ou menos na mesma época circulava em Atenas um terceiro problema célebre — dado um ângulo arbitrário, construir por meio de régua e compasso apenas um ângulo igual a um terço do ângulo dado. Esses três problemas — quadratura do círculo, duplicação do cubo, trissecção do ângulo — são conhecidos daí então como os "três problemas famosos (ou clássicos)" da antiguidade. Mais de 2 200 anos depois seria provado que todos os três são impossíveis de resolver só com régua e compasso. No entanto, a maior parte da matemática grega e muito da investigação matemática posterior, foi motivada por esforços para conseguir o impossível — ou, à falta disso, para modificar as regras. A Idade Heróica fracassou em seu objetivo imediato, sob as regras, mas seus esforços foram coroados por brilhante sucesso em outros pontos.

Um pouco mais jovem que Anaxágoras, e proveniente da mesma parte da Grécia aproximadamente, era Hipócrates de Chios. Não deve ser confundido com seu contemporâneo ainda mais famoso o médico Hipócrates de Cos. Tanto Cos como Chios são ilhas do grupo do Dodecaneso; mas Hipócrates de Chios, em 430 A. C. aproximadamente, deixou sua terra natal por Atenas, na qualidade de mercador. Aristóteles conta que Hipócrates era menos astuto que Tales e que perdeu seu dinheiro em Bizâncio por fraude; outros dizem que foi atacado por piratas. De qualquer modo, o incidente nunca foi lamentado por sua vítima, pois considerava que isso foi sua sorte já que, em conseqüência ele se voltou para o estudo da geometria, em que conseguiu notável sucesso — uma estória típica da Idade Heróica. Proclus escreveu que Hipócrates compôs uma obra *Elementos da geometria*, antecipando-se por mais de um século à mais conhecida *Os elementos* de Euclides. No entanto, o texto de Hipócrates — bem como outro que se diz ter sido escrito por Leon, da escola platônica — se perdeu, embora Aristóteles o tenha conhecido. Na verdade, nenhum tratado matemático do quinto século se conservou; mas temos um fragmento referente a Hipócrates, que Simplício (viveu por volta de 520) diz ter copiado literalmente da *História da matemática* (hoje perdida) de Eudemo. Essa breve menção, o que de mais próximo temos de uma fonte original sobre a matemática do tempo, descreve uma parte da obra de Hipócrates que trata da quadratura de lunas. Uma luna é uma figura limitada por dois arcos circulares de raios diferentes; o problema de sua quadratura certamente se originou do da quadratura do círculo. O fragmento atribui a Hipócrates o teorema seguinte.

Segmentos de círculo semelhantes estão na mesma razão que os quadrados de suas bases.

O relato de Eudemo diz que Hipócrates provou isso, mostrando primeiro que as áreas dos círculos estão entre si como os quadrados dos diâmetros. Aqui Hipócrates usa a linguagem e conceito de proporção que desempenhou papel tão grande no pensamento pitagórico. Na verdade alguns pensam que Hipócrates se tornou um pitagórico. A escola pitagórica de Crotona fora suprimida (talvez por causa de seu caráter secreto, talvez por causa de suas tendências políticas conservadoras), mas o fato de seus adeptos se espalharem pelo mundo grego servia simplesmente para ampliar a influência da escola. Essa influência certamente foi sentida, direta ou indiretamente, por Hipócrates.

O teorema de Hipócrates sobre as áreas de círculos parece ser o mais antigo enunciado sobre mensuração curvilínea no mundo grego. Eudemo acreditava que Hipócrates tinha dado uma prova do teorema, mas uma demonstração rigorosa parece improvável nessa época (digamos 430 A. C.). A teoria das proporções provavelmente estava feita só para grandezas comparáveis. A prova dada em Euclides XII, 2 provém de Eudoxos, que viveu numa época intermediária entre o tempo de Hipócrates e o de Euclides. No entanto, assim como muito do conteúdo dos primeiros dois livros de Euclides parece provir dos pitagóricos, também parece razoável supor que ao menos as formulações de muito do que está nos livros III e IV de *Os elementos* provinham da obra de Hipócrates. Além disso, se Hipócrates de fato deu prova de seu teorema sobre áreas de círculos, ele pode ter sido quem introduziu na matemática o método indireto de demonstração. Isto é, a razão entre as áreas de dois círculos é igual à razão dos quadrados de seus diâmetros, ou não é. Por *reductio ad absurdum* a partir da segunda possibilidade, prova-se a única alternativa.

Desse teorema Hipócrates deduziu a primeira quadratura rigorosa de uma área curvilínea, da história da matemática. Começou com um semicírculo circunscrito a um triângulo isósceles retângulo e sobre a base (hipotenusa) construiu um segmento semelhante aos segmentos circulares sobre os lados do triângulo (Fig. 5.1). Como os segmentos estão entre si como os quadrados de suas bases, resulta, usando o teorema de Pitágoras para o triângulo retângulo, que a soma dos dois segmentos circulares menores é igual ao segmento maior. Portanto, a diferença entre o semicírculo sobre AC e o segmento $ADCE$ é igual ao triângulo ABC. Logo a luna $ABCD$ é exatamente igual ao triângulo ABC; como o triângulo ABC é igual ao quadrado sobre a metade de AC, conseguiu-se a quadratura da luna[2].

Eudemo descreve também uma quadratura de lunas de Hipócrates baseada num trapézio isósceles $ABCD$ inscrito num círculo de modo que o quadrado sobre o lado maior (base) AD seja igual à soma dos quadrados sobre os três lados menores iguais AB e BC e CD (Fig. 5.2). Então se construirmos sobre AD um segmento circular $AEDF$ semelhante aos que estão sobre os três lados iguais, a luna $ABCDE$ é igual ao trapézio $ABCDF$.

[1] Veja E. W. Hobson, *Squaring the Circle* (por volta de 1913), p. 14. Essa obra foi várias vezes reimpressa. A veracidade da afirmação de Plutarco foi questionada recentemente. Sobre a obra de Anaxágoras, veja D. E. Gershenson e D. A. Greenberg, *Anaxagoras and the Birth of Physics* (New York: Blaisdell, 1964)

[2] Uma excelente exposição das quadraturas de Hipócrates encontra-se em B. L. van der Waerden, *Science Awakening* (1961), pp. 131 e seguintes

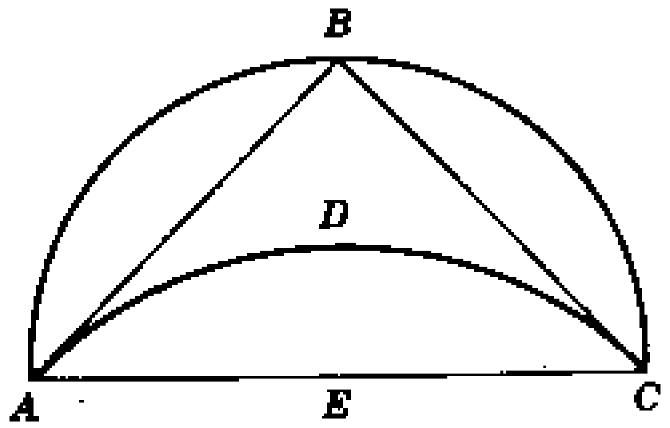


Figura 5.1

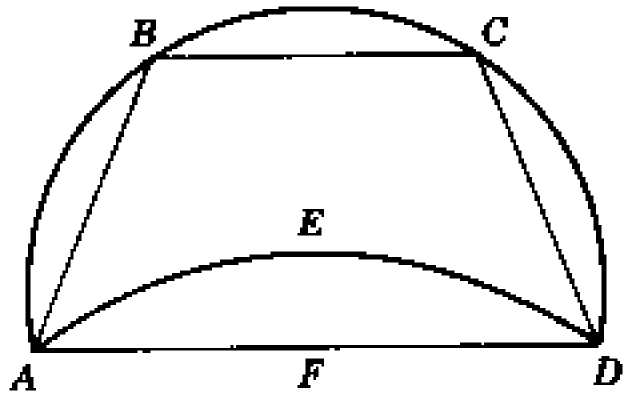


Figura 5.2

O fato de que outros estudiosos, além de Simplicius, também se referem a esse trabalho indica que estamos sobre terreno firme, historicamente falando, ao descrever a quadratura de lunas de Hipócrates. Simplicius viveu no sexto século, mas apoiou-se não só em Eudemo (viveu por volta de 320 A. C.), mas também em Alexandre de Afrodisias (viveu por volta de 200 D. C.) um dos mais importantes comentadores de Aristóteles. Alexandre descreve duas quadraturas além das mencionadas acima. (1) Se construirmos semicírculos sobre a hipotenusa e lados de um triângulo retângulo isósceles (Fig. 5.3), então as lunas criadas sobre os lados menores juntas igualam o triângulo. (2) Se sobre o diâmetro de um semicírculo construirmos um trapézio com três lados iguais (Fig. 5.4) e se sobre os três lados iguais construirmos três semicírculos, então a área do trapézio

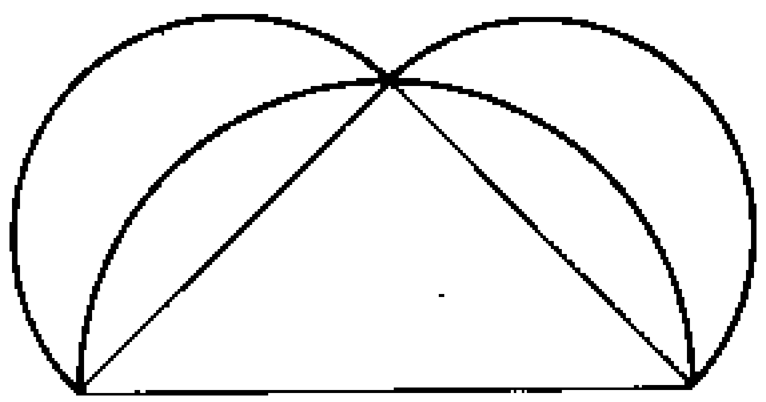


Figura 5.3

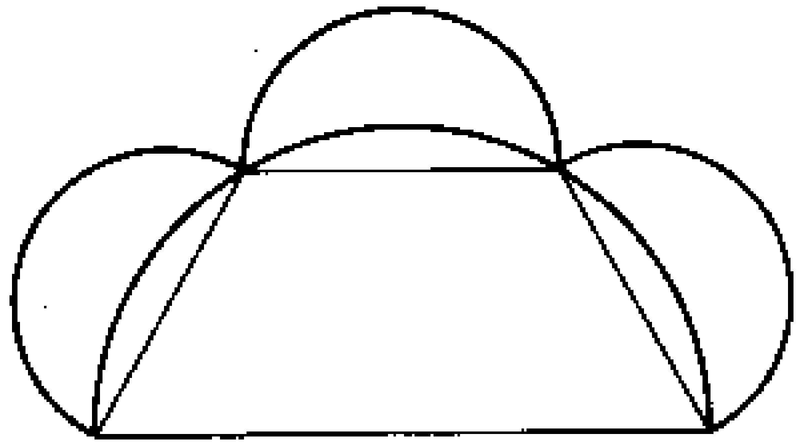


Figura 5.4

é igual à soma de quatro áreas curvilíneas: as três lunas iguais e um semicírculo sobre um dos lados iguais do trapézio. Da segunda dessas quadraturas resultaria que se as lunas pudessem ser quadradas, o semicírculo — logo o círculo — também poderia. Essa conclusão parece ter encorajado Hipócrates, bem como seus contemporâneos, a pensar que algum dia se conseguiria quadrar o círculo.

As quadraturas de Hipócrates são significativas não tanto como tentativas de quadrar o círculo mas como indicações do nível da matemática na época; mostram que os matemáticos atenienses eram hábeis no tratar transformações de áreas e proporções. Em particular, evidentemente não havia dificuldade em converter um retângulo de lados a e b num quadrado. Isso exige achar a média proporcional, ou geométrica, entre a e b. Isto é, se $a:x = x:b$, os geômetras de então construíam facilmente x. Era natural, pois, que tentassem generalizar a questão inserindo *dois* meios entre duas grandezas dadas a e b. Isto é, dados dois segmentos a e b, esperavam construir dois outros x e y tais que $a:x = x:y = y:b$. Diz-se que Hipócrates percebeu que esse problema contém o da duplicação do cubo; pois se $b = 2a$, as proporções, por eliminação de y, levam à conclusão que $x^3 = 2a^3$.

Há três opiniões quanto ao que Hipócrates deduziu de suas quadraturas de lunas. Alguns acham que ele acreditou poder quadrar todas as lunas, logo também o círculo; outros acham que ele percebia as limitações de sua obra, que lidava só com certos tipos de lunas. E pelo menos um estudioso afirmou que Hipócrates sabia não ter quadrado o círculo mas tentou enganar seus compatriotas, fazendo-os acreditar que tinha tido sucesso[3]. Há outras dúvidas, também, quanto às contribuições de Hipócrates, pois foi-lhe atribuído, com alguma incerteza, o primeiro uso de letras em figuras geométricas. É interessante notar que embora tenha feito avanços em dois ou três problemas famosos, parece

[3]Veja o artigo de Björnbo, "Hippocrates" em Pauly-Wissowa, *Real-Enzyklopädie der klassischen Altertumswissenschaft*, Vol. VIII, p. 1 796

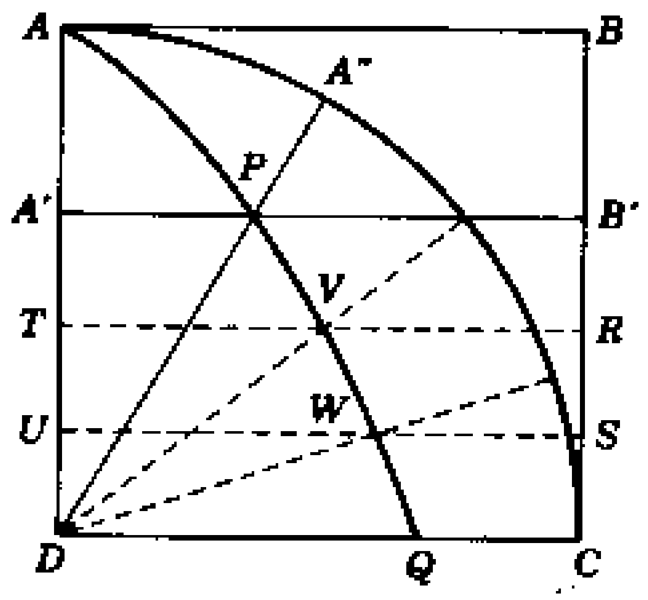
não ter feito progressos na trissecção do ângulo, problema estudado um pouco depois por Hípias de Elis.

6 Pelo fim do quinto século A. C. existia em Atenas um grupo de mestres profissionais muito diferente dos pitagóricos. Os discípulos de Pitágoras estavam proibidos de aceitar pagamento para partilhar seus conhecimentos com outros. Os sofistas, no entanto, abertamente se sustentavam dando aulas aos seus concidadãos — não só orientando-os em esforço intelectual honesto, como na arte de "fazer o pior parecer o melhor". Até certo ponto a acusação de superficialidade feita contra os sofistas era justificada; mas isto não deve ocultar o fato de serem os sofistas em geral muito bem informados em muitos assuntos e de terem alguns deles feito contribuições reais. Entre esses estava Hípias, nascido em Elis, que estava em atividade em Atenas na segunda metade do quinto século A. C. É um dos mais antigos matemáticos de que temos informação de primeira mão, pois nos diálogos de Platão encontramos muita coisa sobre ele. Lemos, por exemplo que Hípias se gabava de ter ganho mais dinheiro que quaisquer dois outros sofistas juntos. Diz-se que escreveu muito, sobre assuntos, indo desde a matemática até a oratória, mas nada se preservou. Tinha uma notável memória, gabava-se de imensa cultura, e era hábil em artesanato. A esse Hípias (havia muitos outros com o mesmo nome) aparentemente devemos a introdução na matemática da primeira curva além do círculo e da reta. Proclus e outros comentadores lhe atribuem a curva conhecida depois por trissetriz ou quadratriz de Hípias[4]. Essa é traçada assim: no quadrado $ABCD$ (Fig. 5.5) seja o lado AB deslocado para baixo uniformemente a partir de sua posição presente até coincidir com DC, e suponhamos que esse movimento leve exatamente o mesmo tempo que o lado DA leva para girar em sentido horário de sua posição presente até coincidir com DC. Se as posições dos dois segmentos são dadas em um instante fixado qualquer por $A'B'$ e DA'' respectivamente, e se P é o ponto de intersecção de $A'B'$ e DA'', o lugar descrito por P durante esses movimentos será a trissetriz de Hípias — a curva APQ na figura. Dada essa curva, faz-se a trissecção de um ângulo com facilidade. Por exemplo, se PDC é o ângulo a ser trissectado, simplesmente trissectamos os segmentos $B'C$ e $A'D$, com os pontos, R, S, T e U. Se as retas TR e US cortam a trissetriz em V e W respectivamente, as retas VD e WD, pela propriedade da trissetriz, dividirão o ângulo PDC em três partes iguais.

A curva de Hípias é geralmente chamada de quadratriz pois pode ser usada para quadrar o círculo. Se Hípias sabia ou não dessa aplicação não pode ser decidido agora. Foi conjeturado que Hípias sabia desse método de quadratura mas não podia prová-lo. Como a quadratura por meio da curva de Hípias foi especificamente dada mais tarde por Dinóstrato, deixaremos a descrição desse trabalho para o próximo capítulo.

Hípias viveu pelo menos tanto quanto Sócrates (morreu em 399 A. C.) e da pena de Platão temos uma descrição pouco lisongeira dele como típico sofista — vaidoso, cheio de si e ganancioso. Diz-se que Sócrates descreveu Hípias como bonito e culto, mas vaidoso e superficial. O diálogo de Platão sobre *Hípias* satiriza essa exibição de conhecimento, e nos *Memorabilia* de Xenofonte encontra-se uma descrição nada elogiosa de Hípias, como

Figura 5.5



[4]Um excelente relato disso se encontra em Kathleen Freeman, *The Pre-Socratic Philosophers. A Companion to Diels, Fragmente der Vorsokratiker* (1949), pp. 381-391. Veja também o artigo sobre Hípias em Pauly-Wissowa, obra citada, VIII, pp. 1 707 e seguintes

alguém que se considera profundo conhecedor de tudo desde história e literatura até artes manuais e ciência. Ao julgar essas descrições, no entanto, devemos lembrar que Platão e Xenofonte se opunham totalmente aos sofistas em geral. Também é bom ter em mente que tanto Protágoras "o pai dos sofistas", quanto Sócrates, o arquioponente do movimento, eram contrários à matemática e às ciências. Quanto ao caráter, Platão contrasta Hípias e Sócrates, mas pode-se estabelecer praticamente o mesmo contraste comparando Hípias com outro contemporâneo — o matemático pitagórico Arquitas de Tarento.

Diz-se que Pitágoras se retirou para Metapontum no fim de sua vida e morreu lá em 500 A. C. aproximadamente. A tradição diz que não deixou obras escritas, mas suas idéias foram levadas adiante por um grande número de discípulos entusiastas. O centro em Crotona foi abandonado quando um grupo político rival, de Sibaris, surpreendeu e assassinou muitos dos chefes, mas os que escaparam ao massacre levaram as doutrinas da escola a outras partes do mundo grego. Entre os que receberam ensinamentos dos refugiados estava Filolaus de Tarento, e diz-se que ele escreveu a primeira exposição do pitagorismo — tendo-lhe sido dada permissão, diz a estória, a fim de reparar sua fortuna abalada. Aparentemente foi desse livro que Platão tirou seu conhecimento da ordem pitagórica. O fanatismo pelo número, que era tão característico da irmandade, era evidentemente partilhado por Filolaus e foi de seu relato que derivou muito da fabulação em torno do *tetractys*, assim como o conhecimento da cosmologia pitagórica. O esquema cósmico de Filolaus, ao que se diz, foi modificado por dois dos pitagóricos posteriores, Ecfantus e Hicetas, que abandonaram o fogo central e a contraterra e explicaram a noite e o dia colocando a Terra girando no centro do universo. Os extremismos de adoração pelo número de Filolaus também parecem ter sofrido alguma modificação, especialmente das mãos de Arquitas, um discípulo de Filolaus em Tarento.

A seita pitagórica tinha exercido forte influência intelectual através de toda a Magna Grécia, com matizes políticos que podem ser descritos como de uma "internacional reacionária", ou talvez melhor como cruzamento entre orfismo e franco-maçonaria. Em Crotona os aspectos políticos eram particularmente observáveis, mas nos centros mais afastados, como Tarento, o impacto era sobretudo intelectual. Arquitas acreditava firmemente na eficácia do número; como governante da cidade, com poderes autocráticos, era justo e moderado, pois considerava a razão como uma força trabalhando pelo aperfeiçoamento da sociedade. Por muitos anos sucessivos foi eleito general e nunca foi derrotado; no entanto era bondoso e amava as crianças, para as quais diz-se que inventou o "chocalho de Arquitas". Talvez também a pomba mecânica de madeira, que dizem ter ele fabricado, tivesse sido feita para divertir as crianças.

Arquitas continuou a tradição pitagórica, pondo a aritmética acima da geometria, mas seu entusiasmo pelo número tinha menos da componente religiosa e mística do que se encontrava em Filolaus. Escreveu sobre a aplicação das médias aritmética, geométrica e subcontrária à música e provavelmente foi Filolaus ou Arquitas o responsável pela mudança do nome da última para "média harmônica". Entre seus enunciados a esse respeito encontra-se a observação de que entre dois inteiros que estão na razão $n:(n+1)$ não pode existir um inteiro que seja uma média geométrica. Arquitas deu mais atenção à música que seus predecessores, e achava que ela devia ter um papel mais importante que a literatura na educação das crianças. Entre suas conjeturas há uma que atribui diferenças de tom a variações do movimento resultantes do fluxo que causa o som. Arquitas parece ter dado considerável atenção ao papel da matemática no aprendizado, e foi-lhe atribuída a designação dos quatro ramos no *quadrivium* matemático — aritmética (ou números em repouso), geometria (ou grandezas em repouso), música (ou números em movimento) e astronomia (ou grandezas em movimento). Esses temas, juntos com o *trivium* consistindo de gramática, retórica e dialética (que Aristóteles atribuía a Zeno), constituíram mais tarde as sete artes liberais; portanto o papel proeminente que a matemática desempenhou na educação se deve em não pequena medida a Arquitas.

8 É provável que Arquitas tivesse acesso a um tratado mais antigo sobre os elementos da matemática, e o processo iterativo para achar a raiz quadrada, freqüentemente conhecido

pelo seu nome, tinha sido usado bem antes na Mesopotâmia. No entanto Arquitas contribuiu também com resultados originais. A sua contribuição mais notável foi uma solução tridimensional do problema de Delos, que pode ser mais facilmente descrita, ainda que anacronisticamente, em linguagem de geometria analítica. Seja a a aresta do cubo a ser duplicado, e seja $(a, 0, 0)$ o centro de três círculos mutuamente ortogonais de raio a e cada um situado num plano perpendicular a um eixo coordenado. Sobre o círculo perpendicular ao eixo $0x$ construa-se um cone circular com vértice $(0, 0, 0)$; sobre o círculo no plano xy construa-se um cilindro circular reto; seja o círculo no plano xz girado em torno do eixo $0z$ para gerar um toro. As equações dessas três superfícies são respectivamente $x^2 = y^2 + z^2$ e $2ax = x^2 + y^2$ e $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 4a^2(x^2 + y^2)$. Essas três superfícies se encontram num ponto cuja coordenada x é $a\sqrt[3]{2}$, portanto, fornece a aresta do cubo que se queria.

O resultado de Arquitas impressiona, quando se considera que ele obteve sua solução sem ajuda de coordenadas. No entanto, a sua mais importante contribuição à matemática foi sua intervenção junto ao tirano Dionísio para salvar a vida de seu amigo Platão, o qual permaneceu até o fim de sua vida profundamente penetrado na veneração pitagórica pelo número e pela geometria e a supremacia de Atenas no mundo matemático do quarto século A. C. resultou principalmente do entusiasmo de Platão, o "forjador de matemáticos". No entanto, antes de expor o papel de Platão é necessário discutir a obra de um pitagórico anterior — um apóstata chamado Hipasus.

De Hipasus de Metapontum (ou Crotona), aproximadamente contemporâneo de Filolaus, diz-se ter sido inicialmente um pitagórico, que foi depois expulso da confraria. Uma estória diz que os pitagóricos lhe erigiram um túmulo, como se estivesse morto, outra que sua apostasia foi punida pela morte num naufrágio. A causa exata da ruptura não é conhecida, em parte por causa da regra de segredo, mas três possibilidades foram sugeridas. Segundo uma, Hipasus foi expulso por insubordinação política, tendo chefiado um movimento democrático contra a conservadora regra pitagórica. Uma segunda atribui a expulsão a indiscrições relativas à geometria do pentágono ou do dodecaedro, talvez uma construção de uma dessas figuras. Uma terceira explicação mantém que a expulsão foi relacionada com a revelação de uma descoberta matemática de significação devastadora para a filosofia pitagórica — a da existência de grandezas incomensuráveis.

9 Era um artigo de fé fundamental do pitagorismo que a essência de tudo, na geometria como nas questões práticas e teóricas da vida do homem, pode ser explicado em termos de *arithmos*, ou das propriedades intrínsecas dos inteiros e suas razões. Os diálogos de Platão mostram, no entanto, que a comunidade matemática grega fora assombrada por uma descoberta que praticamente demolia a base da fé pitagórica nos inteiros. Tratava-se da descoberta que na própria geometria os inteiros e suas razões eram insuficientes para descrever mesmo simples propriedades básicas. Não bastam, por exemplo, para comparar a diagonal de um quadrado ou de um cubo ou de um pentágono com seu lado. Os segmentos são incomensuráveis, não importa quão pequena se tome a unidade de medida. Quando ou como foi feita a descoberta não se sabe, mas muita tinta se gastou em apoio de uma ou outra hipótese. Argumentos antigos a favor de uma origem hindu da descoberta[5] não têm base e parece improvável que o próprio Pitágoras conhecesse o problema de incomensurabilidade. A sugestão mais plausível é que a descoberta fosse feita por pitagóricos em algum momento antes de 410 A. C.[6] Alguns a atribuem especifi-

[5] Veja Heinrich Vogt, "Haben die alten Inder den Pythagoreischen Lehrsatz und das Irrationale gekannt"? *Bibliotheca Mathematica* (3), **7** (1906-1907), pp. 6-23; também Leopold von Schroeder, *Pythagoras und die Inder* (Leipzig, 1884)

[6] Veja especialmente Heinrich Vogt, "Die Entdeckungsgeschichte des Irrationalen nach Plato und anderen Quellen des 4. Jahrhunderts", *Bibliotheca Mathematica* (3), **10** (1910), pp. 97-155, e o artigo do mesmo autor, "Zur Entdeckungsgeschichte des Irrationalen", *Bibliotheca Mathematica* (3), **14** (1914), pp. 9-29. Cf. Heath, *History of Greek Mathematics* (1921), 1, 157

camente a Hipasus de Metapontum durante a primeira parte do último quarto do quinto século A. C.[7] enquanto que outros a colocam meio século mais tarde.

As circunstâncias que rodearam a primeira percepção da incomensurabilidade são tão incertas quanto a época da descoberta. Comumente se supõe que a percepção veio em conexão com a aplicação do teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo isósceles. Aristóteles se refere a uma prova da incomensurabilidade da diagonal de um quadrado com seu lado, indicando que se baseava na distinção entre pares e ímpares[8]. Uma tal prova é fácil de construir. Sejam d e l a diagonal e o lado do quadrado, e suponhamos que sejam comensuráveis — isto é, que a razão d/l é racional e igual a p/q, onde p e q são inteiros sem fator comum. Do teorema de Pitágoras sabemos que $d^2 = l^2 + l^2$; donde $(d/l)^2 = p^2/q^2 = 2$ ou $p^2 = 2q^2$. Logo p^2 deve ser par, e então p é par, portanto q deve ser ímpar. Fazendo $p = 2r$ e substituindo na equação $p^2 = 2q^2$ vem $4r^2 = 2q^2$, ou $q^2 = 2r^2$. Então q^2 deve ser par; logo q é par. Mas tínhamos provado acima que q deve ser ímpar e um inteiro não pode ser ao mesmo tempo par e ímpar. Resulta pois, pelo método indireto, que a hipótese de serem d e l comensuráveis deve ser falsa.

Nessa prova o grau de abstração é tão alto que a possibilidade de ter sido a base da descoberta original da incomensurabilidade tem sido questionada. Mas há outros modos pelos quais a descoberta pode ter sido feita. Entre esses, a simples observação de que quando se traçam as cinco diagonais de um pentágono, elas formam um pentágono regular menor (Fig. 5.6) e as diagonais do segundo pentágono por sua vez formam um terceiro pentágono regular, que é ainda menor. Esse processo pode ser continuado indefinidamente, resultando em pentágonos tão pequenos quanto se queira e levando à conclusão de que a razão da diagonal para o lado num pentágono regular não é racional. A irracionalidade dessa razão é uma conseqüência do argumento discutido em conexão com a Fig. 4.2 em que se viu que a secção áurea se repete indefinidamente. Foi talvez essa propriedade que levou à revelação, talvez por Hipasus, da incomensurabilidade? Não ficaram documentos que resolvam a questão, mas a sugestão é plausível. Nesse caso não seria $\sqrt{2}$ mas $\sqrt{5}$ que primeiro revelou a existência de grandezas incomensuráveis, pois a solução da equação $a:x = x:(a - x)$ leva a $(\sqrt{5} - 1)/2$ como sendo a razão entre o lado de um pentágono regular e a diagonal. A razão da diagonal do cubo para uma aresta é $\sqrt{3}$ e aqui também o espectro da incomensurabilidade ergue sua feia cabeça.

Uma prova geométrica análoga à que serve para a razão da diagonal do pentágono para seu lado pode também ser fornecida para a razão da diagonal de um quadrado para seu lado. Se no quadrado $ABCD$ (Fig. 5.7) se leva sobre a diagonal AC o segmento $AP = AB$ e em P se levanta a perpendicular PQ, a razão de CQ para PC será igual à de AC para AB. Novamente, se em CQ se leva $QR = QP$ e se constrói RS perpendicular a CR, a razão da hipotenusa para o lado será ainda igual à de antes. Esse processo também pode ser continuado indefinidamente, fornecendo uma prova de que nenhuma unidade de comprimento, por pequena que seja, pode ser achada de modo que a hipotenusa e um lado sejam comensuráveis.

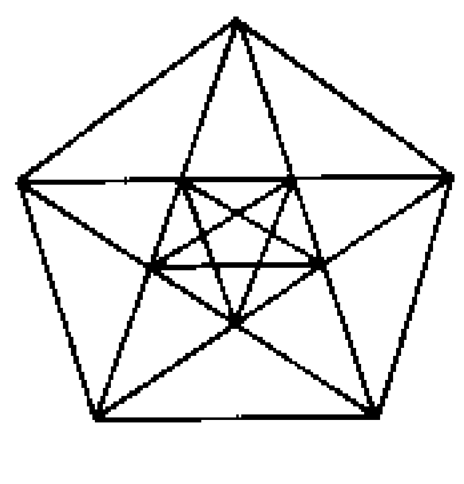


Figura 5.6

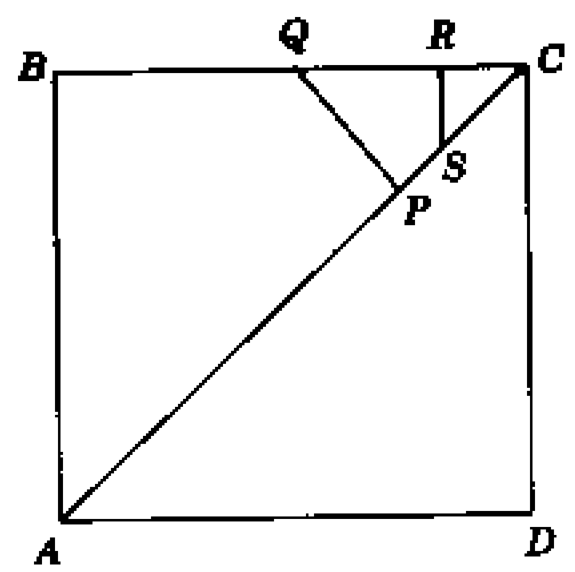


Figura 5.7

[7]Veja Kurt von Fritz, "The Discovery of Incommensurability by Hippasus of Metapontum", *Annals of Mathematics* (2), 46 (1945) pp. 242-264

[8]Veja H. G. Zeuthen, "Sur l'origine historique de la connaissance des quantités irrationelles" *Oversigt over der Kongelige Danske Videnskabernes Selskabs. Forhandlinger*, 1915, pp. 333-362

11 A doutrina pitagórica de que "Números formam o céu todo" enfrentava agora um problema realmente sério: mas não era o único, pois a escola enfrentava também os argumentos dos vizinhos eleáticos, um movimento filosófico rival. Os filósofos jônios da Ásia Menor tinham procurado identificar um primeiro princípio para todas as coisas. Tales julgara achá-lo na água, outros preferiam pensar no ar ou fogo como elemento básico Os pitagóricos tinham tomado direção mais abstrata, postulando que o número em toda sua pluralidade era a matéria básica dos fenômenos, esse atomismo numérico, lindamente ilustrado na geometria dos números figurativos, tinha sido atacado pelos seguidores de Parmênides de Eléa (viveu por volta de 450 A. C.). O artigo de fé básico dos eleáticos era a unidade e permanência do ser, visão que contrastava com as idéias pitagóricas de multiplicidade e mudança. Dentre os discípulos de Parmênides o mais conhecido foi Zeno o Eleático (viveu por volta de 450 A. C.) que enunciou argumentos para provar a inconsistência dos conceitos de multiplicidade e divisibilidade. O método adotado por Zeno era dialético, antecipando Sócrates nesse modo indireto de argumento: partindo das premissas de seus oponentes, ele as reduzia ao absurdo.

Os pitagóricos tinham assumido que o espaço e o tempo podem ser pensados como consistindo de pontos e instantes; mas o espaço e o tempo têm também uma propriedade, mais fácil de intuir do que de definir, conhecida como "continuidade". Os elementos terminais, que constituíam uma pluralidade, de um lado eram supostos como possuindo as características da unidade geométrica — o ponto — e de outro como possuindo certas características de unidades numéricas. Aristóteles descrevia um ponto pitagórico como uma "unidade tendo posição" ou "unidade considerada no espaço". Sugeriu-se[9] que foi contra tal visão que Zeno propôs seus paradoxos, dos quais aqueles sobre o movimento são citados mais freqüentemente. Na forma em que chegaram a nós, através de Aristóteles e outros, quatro parecem ter causado maior perturbação: (1) a *Dicotomia* (2) o *Aquiles* (3) a *Flecha* (4) o *Estádio*. O primeiro diz que antes que um objeto possa percorrer uma distância dada, deve percorrer a primeira metade dessa distância; mas antes disto, deve percorrer o primeiro quarto; e antes disso, o primeiro oitavo e assim por diante, através de uma infinidade de subdivisões. O corredor que quer pôr-se em movimento precisa fazer infinitos contatos num tempo finito; mas é impossível exaurir uma coleção infinita, logo é impossível iniciar o movimento. O segundo paradoxo é semelhante ao primeiro apenas a subdivisão infinita é progressiva em vez de regressiva. Aqui Aquiles aposta corrida com uma tartaruga que sai com vantagem e é argumentado que Aquiles por mais depressa que corra, não pode alcançar a tartaruga, por mais devagar que ela caminhe. Pois, quando Aquiles chegar à posição inicial da tartaruga, ela já terá avançado um pouco; e quando Aquiles cobrir essa distância, a tartaruga terá avançado um pouco mais. E o processo continua indefinidamente, com o resultado que Aquiles nunca pode alcançar a lenta tartaruga.

A *Dicotomia* e o *Aquiles* argumentam que o movimento é impossível sob a hipótese de subdivisibilidade indefinida do espaço e do tempo; a *Flecha* e o *Estádio*, de outro lado, argumentam que também é impossível, sob a hipótese contrária — de que a subdivisibilidade do tempo e do espaço termina em indivisíveis. Na *Flecha* Zeno argumenta que um objeto em vôo sempre ocupa um espaço igual a si mesmo; mas aquilo que sempre ocupa um espaço igual a si mesmo não está em movimento. Logo a flecha que voa está sempre parada, logo seu movimento é uma ilusão.

O mais discutido dos paradoxos sobre movimento e o mais complicado de descrever é o do *Estádio* (ou *Stadium*), mas o argumento pode ser descrito como segue. Sejam A_1, A_2, A_3, A_4 corpos de igual tamanho, estacionários; sejam B_1, B_2, B_3, B_4 corpos de mesmo tamanho que os A, que se movem para a direita de modo que cada B passa por um A num instante — o menor intervalo de tempo possível. Sejam C_1, C_2, C_3, C_4 também do mesmo tamanho que os A e os B, e movendo-se uniformemente para a es-

[9]Veja Paul Tannery, *La géométrie grecque* (1887) pp. 217-261. Para uma opinião diferente, ver B. L. van der Waerden, "Zenon und die Grundlagenkrise der griechischen Mathematik", *Mathematische Annalen*, 117 (1940), 141-161

querda com relação aos A de modo que cada C passa por um A num instante do tempo. Suponhamos que num dado momento os corpos ocupem as seguintes posições relativas.

A_1	A_2	A_3	A_4

B_1	B_2	B_3	B_4

C_1	C_2	C_3	C_4

Então passado um único instante, isto é, após uma subdivisão indivisível do tempo, as posições serão

A_1	A_2	A_3	A_4

B_1	B_2	B_3	B_4

C_1	C_2	C_3	C_4

É claro então que C_1 terá passado por dois dos B; logo o instante não pode ser o intervalo de tempo mínimo, pois podemos tomar como uma unidade nova e menor o tempo que C_1 leva para passar por um B.

Os argumentos de Zeno[10] parecem ter influênciado profundamente o desenvolvimento da matemática grega, influência comparável à da descoberta dos incomensuráveis, com a qual talvez se relacione. Originalmente, nos círculos pitagóricos, as grandezas eram representadas por pedrinhas ou cálculos, de onde vem nossa palavra calcular, mas na época de Euclides surge completa mudança de ponto de vista. As grandezas não são associadas a números ou pedras, mas a segmentos de reta. Em *Os elementos* os próprios inteiros são representados por segmentos. O reino dos números continuava a ser discreto, mas o mundo das grandezas contínuas (e esse continha a maior parte da matemática pré-helênica e pitagórica) era algo à parte dos números e devia ser tratado por métodos geométricos. Essa foi talvez a conclusão de maior alcance da Idade Heróica e não é improvável que se deveu em grande parte a Zeno de Elea e Hipasus de Metapontum.

2 Em geral se considera que o elemento dedutivo foi introduzido na matemática por Tales, mas recentemente se argüiu, contra essa tese, que a matemática dos sexto e quinto século A. C. era demasiado primitiva para admitir tal contribuição. Os que sustentam essa opinião às vezes se referem aos argumentos de Zeno e Hipasus como possível inspiração para o método dedutivo. Certamente as dúvidas e problemas levantados nessa questão seriam campo fértil para o surgimento da dedução e não seria absurdo considerar o fim do quinto século A. C. como um *terminus ante quem* para a forma racional dedutiva que nos é tão familiar. Pode ser oportuno indicar agora, portanto, que há várias hipóteses quanto às causas que levaram à transformação das receitas matemáticas dos pré-helênicos para a estrutura dedutiva que apareceu na Grécia. Alguns sugeriram[11] que Tales em suas viagens notara discrepâncias na matemática pré-helênica, como as regras egípcia e ba-

[10]A bibliografia sobre os paradoxos é enorme. Entre os tratamentos históricos mais informativos está o de Florian Cajori "History of Zeno's Arguments on Motion", *American Mathematical Monthly*, **22** (1915), pp. 1-6, 39-47, 77-82, 109-115, 145-149, 179-186, 215-220, 253-258, 292-297. Para fontes de informação, ver *Zeno of Elea* (texto, tradução e notas por H. D. P. Lee; 1936)

[11]Veja Van der Waerden, *Science Awakening* (1961), p. 89

bilônia para a área do círculo, e que ele e seus primeiros sucessores viram, portanto, a necessidade de um método estritamente racional. Outros, mais conservadores, colocam a forma dedutiva muito mais tarde, talvez até no início do quarto século, após a descoberta do incomensurável[12]. Outras sugestões encontram as causas fora da matemática. Uma, por exemplo, vê no desenvolvimento sóciopolítico das cidades-estado da Grécia o surgimento da dialética e a conseqüente exigência de base racional para a matemática e outros estudos; outra sugestão um tanto semelhante é que a dedução pode ter provindo da lógica, nas tentativas de convencer um oponente de uma conclusão, procurando premissas das quais a conclusão segue necessariamente[13].

13 Quer a dedução tenha penetrado na matemática no sexto século A. C. ou no quarto, quer a incomensurabilidade tenha sido descoberta antes ou depois de 400 A. C., não pode haver dúvida de que a matemática grega sofreu modificações drásticas na época de Platão. A dicotomia entre número e grandezas contínuas exigia um novo método para tratar a álgebra babilônia que os pitagóricos tinham herdado. Os velhos problemas em que, dada a soma e o produto de dois lados de um retângulo se pediam as dimensões, tinha que ser tratado de modo diferente dos algoritmos numéricos dos babilônios. Uma "álgebra geométrica" tomara o lugar da antiga "álgebra aritmética", e nessa nova álgebra não podia haver somas de segmentos com áreas ou de áreas com volumes. De agora em diante devia haver estrita homogeneidade dos termos de uma equação e as formas normais mesopotâmicas, $xy = A$, $x \pm y = b$, deviam ser interpretadas geometricamente. A conclusão óbvia, a que o leitor pode chegar eliminando y, é que se deve construir sobre um segmento dado b um retângulo cuja altura desconhecida x deve ser tal que a área do retângulo, excede a área dada A pelo quadrado x^2 ou (no caso do sinal menos) é inferior a A pelo quadrado x^2 (Fig. 5.8). Dessa forma os gregos construíram a solução de equações quadráticas pelo processo conhecido como "a aplicação de áreas", uma parte da álgebra geométrica completamente estudada em *Os elementos* de Euclides. Além disso, a inquietação resultante das grandezas incomensuráveis levou a se evitar razões, o quanto possível, na matemática elementar. A equação linear $ax = bc$, por exemplo, era considerada como uma igualdade entre as áreas ax e bc e não como uma proporção igualdade entre as razões $a:b$ e $c:x$. Conseqüentemente, ao construir a quarta proporcional, x nesse caso, era usual construir um retângulo $OCDB$ com lados $b = OB$ e $c = OC$ (Fig. 5.9) e então ao longo de OC marcar $OA = a$. Completa-se o retângulo $OAEB$ e traça-se a diagonal OE que corta CD em P. É claro agora que CP é o segmento x desejado, pois o retângulo $OARS$ tem área igual à do retângulo $OCDB$. Só no Livro V de *Os elementos* é que Euclides atacou a difícil questão da proporcionalidade.

A álgebra geométrica grega parece ao leitor atual excessivamente artificial e difícil; aos que a usaram e tornaram-se hábeis no trato de suas operações, deve ter parecido um instrumento conveniente. A lei distributiva $a(b + c + d) = ab + ac + ad$ era sem dúvida muito mais evidente para um estudioso grego que para o estudante que se inicia na álgebra hoje, pois o primeiro podia facilmente representar as áreas dos retângulos nesse teorema, que diz simplesmente que o retângulo sobre a e a soma dos segmentos b, c, d é igual à soma dos retângulos sobre a e cada um dos segmentos b, c, d tomados separadamente (Fig. 5.10). Também a identidade $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ se torna evidente com um diagrama que mostra os três quadrados e os dois retângulos iguais na identidade (Fig. 5.11); e uma diferença de dois quadrados $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ pode

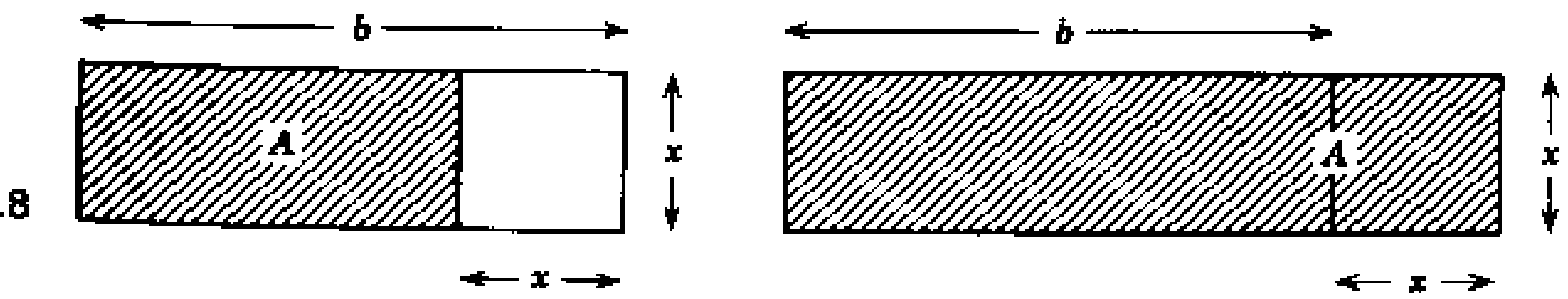


Figura 5.8

[12]Neugebauer, *The Exact Sciences in Antiquity*, pp. 148-149

[13]Veja Arpád Szabó, "Anfänge des euklidischen Axiomensystems", *Archive for History of Exact Sciences*, **1** (1960), 37-106

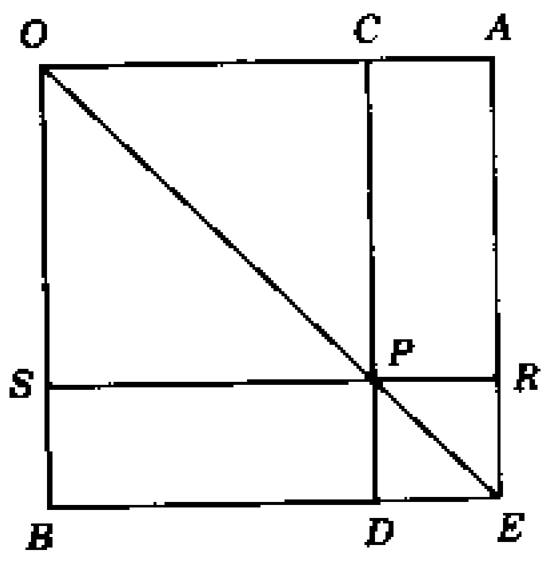


Figura 5.9

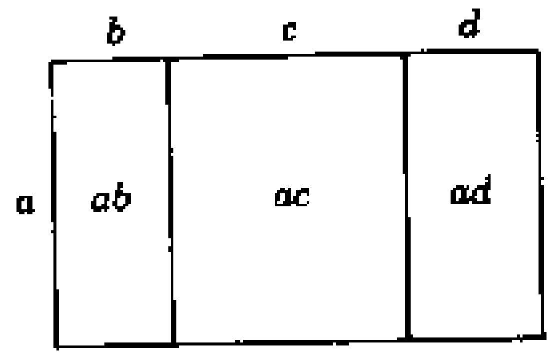


Figura 5.10

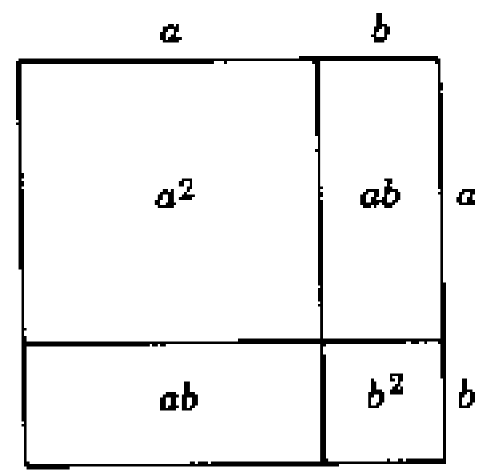


Figura 5.11

ser representada de modo semelhante (Fig. 5.12). Somas, diferenças, produtos e quocientes de segmentos podem facilmente ser construídos com régua e compasso. Raízes quadradas também não causam dificuldade na álgebra geométrica. Se quisermos achar um segmento x, tal que $x^2 = ab$, simplesmente seguimos o processo indicado nos textos de geometria elementar de hoje. Coloca-se sobre uma reta o segmento ABC onde $AB = a$ e $BC = c$ (Fig. 5.13). Com AC como diâmetro constrói-se um semicírculo (com centro O) e em B levanta-se a perpendicular BP, que é o segmento x desejado. É interessante que aqui também a prova dada por Euclides, provavelmente seguindo a linha anterior de evitar razões, usa áreas em vez de proporções. Se em nossa figura fizermos $PO = AO = CO = r$ e $BO = s$, Euclides diria essencialmente que $x^2 = r^2 - s^2 = (r-s)(r+s) = ab$.

A Idade Heróica da matemática produziu meia dúzia de grandes figuras, e entre essas deve ser incluído um homem que é mais conhecido como filósofo da química. Demócrito de Abdera (aproximadamente 460 A. C. — 370 A. C.) é célebre hoje como proponente de uma doutrina materialista atômica, mas em seu tempo adquiriu também reputação como geômetra. Diz-se que viajou mais do que qualquer outro em seu tempo — para Atenas, Egito, Mesopotâmia e talvez Índia — adquirindo tanto conhecimento quanto possível; mas seus próprios sucessos em matemática foram tais que ele se gabava de que nem os "estiradores de corda" do Egito o superavam. Escreveu muitas obras de matemática, das quais nenhuma se preservou, mas temos os títulos de algumas: *Sobre os números, Sobre a geometria, Sobre tangências, Sobre representações* e *Sobre irracionais*. Tão grande era sua fama que em séculos posteriores muitos tratados de química e matemática lhe foram atribuídos injustificadamente. Em particular, antigos tratados de alquimia por um pseudo-Demócrito não devem ser atribuídos ao nosso abderita; mas outros livros, *Sobre o pitagorismo, Sobre a ordem do mundo* e *Sobre ética*, podem ter sido genuínos. Seu material científico era considerado claro, mas era revestido de um estilo literário; Cícero escreveu a respeito de Demócrito que ele tinha um ritmo que o fazia mais poético do que os poetas. No entanto da massa de escritos atribuídos a Demócrito somente umas poucas palavras restaram.

A chave para a matemática de Demócrito sem dúvida é encontrada em sua doutrina física do atomismo. Todos os fenômenos deviam ser explicados, ele argüia, em termos de átomos rígidos infinitamente pequenos e variados (em tamanho e forma) que se movem incessantemente no espaço vazio. A criação de nosso mundo, e de inúmeros outros também, resultou de uma ordenação ou coagulação dos átomos em grupos com certas semelhanças.

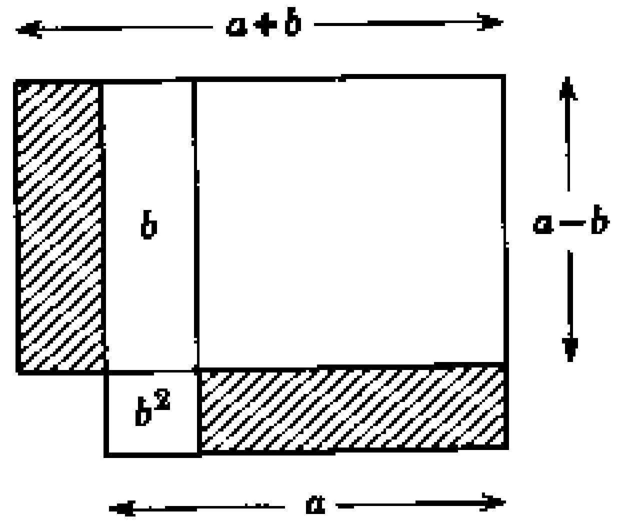


Figura 5.12

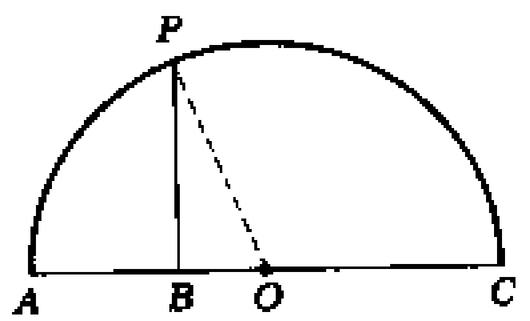


Figura 5.13

Não era uma teoria nova, pois, tinha sido proposta antes por Leucipo; portanto, os oponentes de Demócrito (e eram muitos) o acusaram de plagiador, inclusive de Anaxágoras e Pitágoras. O atomismo físico de Leucipo e Demócrito pode de fato ter sido sugerido pelo atomismo geométrico dos pitagóricos e não é de surpreender que os problemas matemáticos que mais interessavam a Demócrito fossem aqueles que exigissem alguma forma de tratamento infinitesimal. Os egípcios, por exemplo, sabiam que o volume da pirâmide é um terço da base vezes a altura, mas uma prova disto quase certamente estava acima de suas possibilidades, pois exige um ponto de vista equivalente ao do cálculo integral. Arquimedes mais tarde escreveu que esse resultado era devido a Demócrito, mas que esse não o provou rigorosamente. Isso cria um enigma, pois, se Demócrito acrescentou alguma coisa ao conhecimento egípcio aqui, só pode ter sido alguma espécie de prova, ainda que inadequada. Talvez Demócrito tenha mostrado que um prisma triangular pode ser dividido em três pirâmides triangulares que são, duas a duas, de mesma altura e de áreas da base iguais e depois deduziu, assumindo que pirâmides de mesma altura e bases iguais são iguais, o teorema egípcio familiar.

Essa pressuposição só pode ser justificada por aplicação de técnicas infinitesimais. Se, por exemplo, pensamos em duas pirâmides de mesma base e altura como compostas de uma infinidade de secções infinitamente finas e iguais em correspondência biunívoca (um artifício usualmente chamado princípio de Cavalieri em honra do geômetra do século dezessete), ela parece ficar justificada. Um tal nebuloso atomismo pode ter estado na base do pensamento de Demócrito, embora isto não tenha sido provado. De qualquer forma, depois dos paradoxos de Zeno e da percepção dos incomensuráveis, tais argumentos baseados em uma infinidade de infinitésimos já não eram aceitos. Arquimedes, conseqüentemente, podia bem achar que Demócrito não tinha dado uma prova rigorosa. O mesmo juízo se aplicaria ao teorema, também atribuído por Arquimedes a Demócrito, que diz que o volume de um cone é um terço do volume do cilindro circunscrito. Esse resultado era provavelmente considerado por Demócrito como um corolário do teorema sobre a pirâmide, pois o cone seria essencialmente uma pirâmide cuja base é um polígono regular com uma infinidade de lados.

O atomismo geométrico de Demócrito logo se deparou com certos problemas. Se a pirâmide ou o cone, por exemplo, é feita de infinitas secções infinitamente finas, triangulares ou circulares, paralelas à base, a consideração de duas quaisquer lâminas adjacentes cria um paradoxo. Se são iguais em área, então como todas serão iguais, a totalidade será o prisma ou o cilindro, não uma pirâmide ou um cone. Se, por outro lado, secções adjacentes são desiguais, a totalidade será uma pirâmide em degraus, ou cone em degraus, não a figura de superfície lisa que se tem em mente. Esse problema se aparenta com as dificuldades com incomensuráveis e com os paradoxos do movimento. Talvez em seu *Sobre os irracionais*, Demócrito tenha analisado as dificuldades encontradas aqui, mas não há como saber que direção tomaram suas tentativas. Sua extrema impopularidade nas duas escolas filosóficas dominantes do século seguinte, as de Platão e Aristóteles, pode ter encorajado o abandono das idéias de Demócrito. No entanto, o principal legado matemático da Idade Heróica pode ser condensado em seis problemas: quadratura do círculo, duplicação do cubo, trissecção do ângulo, razão de grandezas incomensuráveis, paradoxos do movimento e validade dos métodos infinitesimais. Até certo ponto eles podem ser associados, embora não exclusivamente, com homens estudados neste capítulo: Hipócrates, Arquitas, Hípias, Hipasus, Zeno e Demócrito. Outras épocas deviam produzir uma comparável coleção de talentos, mas talvez nunca mais em qualquer época se faria um ataque tão audacioso a tantos problemas matemáticos fundamentais com recursos metodológicos tão insuficientes. É por isto que chamamos esse período, de Anaxágoras a Arquitas, a Idade Heróica.

BIBLIOGRAFIA

Allman, G. J., *Greek Geometry from Thales to Euclid* (Dublin: Dublin University Press, 1889)

Cajori, Florian, "History of Zeno's Arguments on Motion," *American Mathematical Monthly*, **22** (1915), 1-6, 39-47, 77-82, 109-115, 145-149, 179-186, 215-220, 253-258, 292-297

Freeman, Kathleen, *The Pre-Socratic Philosophers*, 2.ª edição (Oxford: Blackwell, 1949)

Gow, James, *A Short History of Greek Mathematics* (reimpressão, New York: Hafner, 1923)

Heath, T. L., *History of Greek Mathematics* (New York: Oxford University Press, 1921, 2 volumes)

Hobson, E. W., *Squaring the Circle* (Cambridge, por volta de 1913)

Lee, H. D. P., ed., *Zeno of Elea* (Cambridge: Cambridge University Press, 1936)

Michel, Paul-Henri, *De Pythagore à Euclide* (Paris: Société d'Edition "Les Belles Lettres," 1950)

Neugebauer, O., *The Exact Sciences in Antiquity*, 2.ª edição, (Providence R.I.: Brown University Press, 1957; edição em brochura, New York: Harper)

Szabó, Arpád, "The Transformation of Mathematics into Deductive Science and the Beginnings of its Foundation on Definitions and Axioms." *Scripta Mathematica*, **27** (1964), 27-48, 113-139

Tannery, Paul, *La géométrie grecque, comment son histoire nous est parvenue et ce que nous en savons* (Paris, 1887)

Thomas, Ivor, ed., *Selections Illustrating the History of Greek Mathematics* (Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1939-1941, 2 volumes)

Van der Waerden, B. L., *Science Awakening* (traduzido por Arnold Dresden, New York: Oxford University Press, 1961; edição em brochura, New York: Wiley, 1963)

Von Fritz, Kurt, "The Discovery of Incommensurability by Hippasus of Metapontum," *Annals of Mathematics* (2), **46** (1945), 242-264

EXERCÍCIOS

1. Justifique as duas quadraturas atribuídas por Alexandre de Afrodisias a Hipócrates.
2. Trace um ângulo de 60° e use a trissectriz de Hípias para dividi-lo em sete partes iguais.
3. Prove cuidadosamente que os segmentos em que as diagonais de um pentágono regular se dividem mutuamente são incomensuráveis com a diagonal.
4. Qual você acredita ter sido descoberta antes, a irracionalidade de $\sqrt{2}$ ou de $\sqrt{5}$? Justifique sua resposta em termos de evidência histórica.
5. Usando apenas régua e compasso, construa o segmento x tal que $ax = b^2$, onde a e b são quaisquer segmentos dados.
6. Dados os segmentos a e b e usando régua e compasso apenas, construa x e y se $x + y = a$ e $xy = b^2$.
7. Dados os segmentos a, b e c construa x e y se $x - y = a$ e $xy = bc$.
8. Resolva a equação $x^2 + ax = b^2$ construindo um segmento que satisfaça à condição dada.
9. Dado um segmento unitário (de comprimento l), construa um segmento de comprimento $\sqrt{3} + (4/5)$.
10. Mostre que em coordenadas polares a equação da trissectriz de Hípias é $\pi r \operatorname{sen} \theta = 2a\theta$. Esboce o ramo principal dessa curva para $-\pi/2 < \theta < 3\pi/2$ e diga por que Hípias não traçou esse ramo completo.
11. As diagonais de um hexágono regular são incomensuráveis com um lado? Explique completamente e indique se sua conclusão poderia ter sido obtida na antiguidade.

*12. Mostre com todos os passos necessários que a construção de Arquitas duplica o cubo.

Capítulo **6**

A Idade de Platão e Aristóteles

> Eu, de boa vontade, morreria queimado como Faeton, se esse fosse o preço a pagar para alcançar o Sol e saber qual sua forma, tamanho e substância.
>
> *Eudoxo*

1 A Idade Heróica se situa principalmente no quinto século A. C. e desse período quase nenhuma evidência direta restou sobre o desenvolvimento da matemática. As histórias de Heródoto e Tucídides e as peças de Ésquilo, Eurípedes e Aristófanes até certo ponto se preservaram, mas quase não há uma linha do que foi escrito pelos matemáticos da época. Fontes matemáticas de primeira mão do quarto século A. C. são quase igualmente raras, mas essa falta é suprida em grande parte pelas exposições escritas por filósofos que estavam *au courant* da matemática de seu tempo. Temos a maior parte do que Platão escreveu a cerca de metade da obra de Aristóteles; com os escritos desses dois líderes intelectuais do quarto século A. C. como guia, podemos dar uma exposição muito mais digna de fé do que aconteceu em seu tempo, do que podemos fazer quanto à Idade Heróica.

Incluímos Arquitas entre os matemáticos da Idade Heróica, mas num certo sentido ele é na verdade uma figura de transição na matemática durante o tempo de Platão. Foi um dos últimos pitagóricos, tanto literal quanto figuradamente. Podia acreditar ainda que o número era o que há de mais importante na vida e na matemática, mas a onda do futuro ia elevar a geometria à posição de supremacia, em grande parte devido ao problema da incomensurabilidade. De outro lado, diz-se que foi Arquitas quem estabeleceu o *quadrivium* — aritmética, geometria, música e astronomia — como o núcleo de uma educação liberal e nisto suas opiniões iriam dominar muito do pensamento pedagógico até nossos dias. As sete artes liberais, que permaneceram intocáveis por dois milênios, eram constituídas pelo *quadrivium* de Arquitas mais o *trivium* da gramática, da retórica e da dialética de Zeno. Por isso pode-se com alguma justiça sustentar que os matemáticos da Idade Heróica foram responsáveis por muito, quanto à orientação nas tradições educacionais do Ocidente, especialmente na forma transmitida pelos filósofos do quarto século A. C.[1]

2 O quarto século A. C. iniciou-se com a morte de Sócrates, um filósofo que adotou o método dialético de Zeno e repudiou o pitagorismo de Arquitas. Sócrates reconhecia que na juventude fora atraído por questões como por que a soma 2 + 2 é igual ao produto 2 × 2, bem como pela filosofia da natureza de Anaxágoras; porém, percebendo que nem a matemática nem a ciência podiam satisfazer seu desejo de conhecer a essência das coisas, ele se entregou à sua característica busca do homem.

No *Phaedo* de Platão, o diálogo em que as últimas horas de Sócrates são tão magnificamente descritas, vemos como profundas dúvidas metafísicas impediam que Sócrates se dedicasse à matemática ou à ciência da natureza.

> Não posso me convencer de que, quando se soma um a um, o um a que foi feita a adição se transforma em dois, ou que duas unidades somadas façam dois em conseqüência da adição. Não posso entender como quando separadas cada uma era um e não dois e agora, quando reunidas, a simples justaposição ou encontro delas seja causa de se tornarem dois[2].

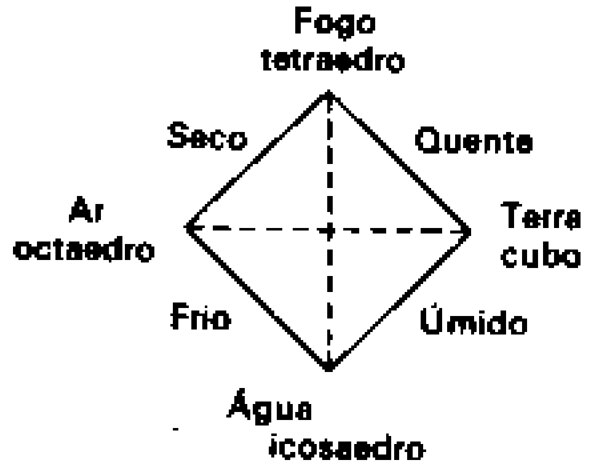
[1] O estabelecimento definitivo desse particular grupo de sete artes liberais no entanto só se deu no quarto século de nossa era, e a divisão delas no *trivium* e *quadrivium* só se tornou tradicional com o renascimento carolingiano. Marshall Clagett, em *Greek Science in Antiquity*, 2.ª edição, New York, EUA: Collier, 1966, p. 185, escreve que o uso do termo latino *quadrivium* parece vir de Boécios (aproximadamente 480-524)

[2] *Dialogues of Plato* (1875), I, 476-477

Platão e Aristóteles na "Escola de Atenas" de Rafael

Por isso, a influência de Sócrates no desenvolvimento da matemática foi ínfima, se não negativa. Isso torna ainda mais surpreendente que seu discípulo e admirador, Platão, se tornasse a inspiração para a matemática do quarto século A. C. Nesse capítulo vamos nos concentrar nas realizações matemáticas de meia dúzia de homens que viveram entre a morte de Sócrates em 399 A. C. e a morte de Aristóteles em 322 A. C. Os seis homens cujo trabalho descreveremos (além do de Platão e Aristóteles) são Teodoro de Cirene (viveu por volta de 390 A. C.), Teaetetus (morreu em 368 A. C.), Eudoxo de Cnido (morreu por volta de 355 A. C.), Menaecmus (viveu por volta de 350 A. C.) e seu irmão Dinóstrato (viveu por volta de 350 A. C.) e Autolicus de Pitane (viveu por volta de 330 A. C.).

Esses seis matemáticos não estavam espalhados pelo mundo grego, como os do quinto século A. C.; estavam associados, mais ou menos de perto, com a Academia de Platão em Atenas. Embora o próprio Platão não tenha dado contribuição específica digna de nota a resultados matemáticos técnicos, ele era o centro da atividade matemática da época e guiava e inspirava seu desenvolvimento. Sobre as portas de sua escola lia-se: "Que ninguém que ignore a geometria entre aqui"; seu entusiasmo pelo assunto fez com que se tornasse conhecido não como matemático mas como "o criador de matemáticos". É claro que a alta opinião, que tinha da matemática, Platão não recebeu de Sócrates; na verdade, os primeiros diálogos platônicos raramente mencionam a matemática. Quem converteu Platão a uma visão matemática foi certamente Arquitas, um amigo a quem ele visitou na Sicília em 388 A. C. Talvez tenha sido aqui que ele soube dos cinco sólidos regulares, que eram associados aos quatro elementos de Empédocles num esquema



cósmico que fascinou os homens por séculos. Talvez a veneração dos pitagóricos pelo dodecaedro tenha sido o que levou Platão a considerá-lo o quinto e último sólido regular, como um símbolo do universo. Platão pôs suas idéias sobre os sólidos regulares num diálogo entitulado *Tímaeus*, presumivelmente do nome de um pitagórico, que serve como principal interlocutor. Não se sabe se Timaeus de Locri realmente existiu ou se Platão o inventou como um personagem através do qual enunciou as idéias pitagóricas que ainda eram influentes no que hoje é o sul da Itália. Os poliedros regulares freqüentemente foram chamados "corpos cósmicos" ou "sólidos platônicos" devido à maneira pela qual Platão no *Timaeus* os aplicou à explicação de fenômenos científicos. Embora esse diálogo, escrito provavelmente quando Platão estava perto dos setenta anos, seja a mais antiga evidência definida da associação dos quatro elementos com os sólidos regulares, muito dessa fantasia deve-se aos pitagóricos. Proclus atribui a construção das figuras cósmicas a Pitágoras; mas o escoliasta Scridas relatou que o amigo de Platão, Teaetetus, nascido em 414 A. C. aproximadamente e filho de um dos mais ricos patrícios da Ática foi o primeiro a escrever sobre eles. Um escólio (de data incerta) ao Livro XIII de *Os elementos* de Euclides afirma que somente três dos cinco sólidos regulares eram devidos aos pitagóricos e que foi através de Teaetetus que o octaedro e o icosaedro se tornaram conhecidos. Parece provável que, em qualquer caso, Teaetetus tenha feito um dos estudos mais extensos dos cinco sólidos regulares e a ele provavelmente se deve o teorema que diz que há cinco e somente cinco poliedros regulares. Talvez seja também o responsável pelos cálculos, que se encontram em *Os elementos*, das razões das arestas dos sólidos regulares para o raio da esfera circunscrita.

Teaetetus era um jovem ateniense que morreu em 369 A. C. de uma combinação de ferimentos recebidos em batalha e disenteria, e o diálogo que tem seu nome foi um tributo comemorativo de Platão a seu amigo. No diálogo, travado supostamente trinta anos antes, Teaetetus discutiu com Sócrates e Teodoro a natureza das grandezas incomensuráveis. Supõe-se que essa discussão tomou mais ou menos a forma que encontramos no início do Livro X de *Os elementos*. Aqui são feitas distinções não só entre grandezas comensuráveis e incomensuráveis, mas entre aquelas que, sendo incomensuráveis em comprimento, são ou não são incomensuráveis em quadrado. Raízes como $\sqrt{3}$ e $\sqrt{5}$ são incomensuráveis em comprimento mas são comensuráveis em quadrado, pois seus quadrados têm razão 3 para 5. As grandezas $\sqrt{1+\sqrt{3}}$ e $\sqrt{1+\sqrt{5}}$, de outro lado, são incomensuráveis tanto em comprimento quanto em quadrado.

4 O diálogo, que Platão compôs em memória de seu amigo Teaetetus, contém informação sobre outro matemático a quem Platão admirava e que contribuiu para o desenvolvimento inicial da teoria das grandezas incomensuráveis. Falando da então recente descoberta do que chamamos irracionalidade de $\sqrt{2}$, Platão no Teaetetus diz que seu mestre, Teodoro de Cirene — de quem Teaetetus também fora aluno —, tinha sido o

primeiro a provar a irracionalidade das raízes quadradas dos inteiros não-quadrados de 3 a 17 inclusive. Não se sabe como ele o fez, nem por que parou na $\sqrt{17}$. A prova, em qualquer dos casos, poderia ser construída na linha da que Aristóteles deu para $\sqrt{2}$ e que foi interpolada em versões posteriores do Livro X de *Os elementos*. Referências em obras históricas antigas indicam que Teodoro fez descobertas em geometria elementar que mais tarde foram incorporadas em *Os elementos* de Euclides; mas as obras de Teodoro se perderam.

5 Platão é importante na história da matemática principalmente por seu papel como inspirador e guia de outros, e talvez a ele se deva a distinção clara que se fez na Grécia antiga entre aritmética (no sentido de teoria dos números) e logística (a técnica de computação). Platão considerava a logística adequada para negociantes e guerreiros, que "precisam aprender a arte dos números, ou não saberão dispor suas tropas". O filósofo, de outro lado, deve conhecer a aritmética "porque deve subir acima do mar das mudanças e captar o verdadeiro ser". Além disso, diz Platão na *República*, "a aritmética tem um efeito muito grande de elevar a mente, compelindo-a a raciocinar sobre o número abstrato". Os pensamentos de Platão sobre o número eram tão elevados que chegam ao domínio do misticismo e evidente fantasia. No último livro da *República* ele se refere a um número que ele chama "o senhor de melhores e piores nascimentos". Tem havido muita especulação sobre esse "número platônico", e uma teoria é que seja o número $60^4 = 12\,960\,000$ — importante na numerologia babilônica e possivelmente transmitido a Platão através dos pitagóricos. Nas *Leis*, o número de cidadãos no estado ideal é dado como 5 040 (isto é, $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$). Esse é às vezes chamado o número nupcial de Platão e muitas teorias foram elaboradas quanto ao que Platão teria em mente.

Assim como Platão via na aritmética uma clara separação entre os aspectos teóricos e computacionais, também na geometria ele defendia a causa da matemática pura contra a visão materialista do artesão ou técnico. Plutarco, em sua *Vida de Marcelo*, fala da indignação de Platão em face do uso de aparatos mecânicos em geometria. Aparentemente Platão considerava tal uso "pura e simples corrupção e aniquilação do que há de bom na geometria, que assim dava vergonhosamente as costas aos objetos desmaterializados da inteligência pura". Platão, conseqüentemente, pode ter sido o grande responsável pela restrição, que prevalecia nas construções geométricas gregas, às que podem ser efetuadas só com régua e compasso. A razão desta limitação provavelmente não foi a simplicidade dos instrumentos usados na construção de retas e círculos, mas antes a simetria das configurações. Qualquer dos infinitos diâmetros de um círculo é um eixo de simetria da figura; qualquer ponto de uma reta pode ser considerado um centro de simetria, assim como qualquer reta perpendicular a uma reta dada é uma reta em relação à qual a reta dada é simétrica. A filosofia platônica, com sua apostatização de idéias, naturalmente acharia um papel privilegiado para a reta e o círculo entre as figuras geométricas. De modo um tanto semelhante Platão glorificou o triângulo. As faces dos cinco sólidos regulares, segundo Platão não eram simples triângulos, quadrados e pentágonos. Por exemplo, cada uma das faces de um tetraedro, que é um triângulo equilátero, é feita de seis triângulos retângulos menores, formados com suas alturas. Por isso, ele pensava no tetraedro regular como feito de vinte e quatro triângulos retângulos escalenos em que a hipotenusa é o dobro de um dos lados; o octaedro regular contém 8×6 ou 48 de tais triângulos, e o icosaedro 20×6, ou 120. Também o hexaedro (cubo) é construído de vinte e quatro triângulos retângulos isósceles, pois cada face quadrada fica dividida em quatro triângulos retângulos quando se traçam as diagonais.

Ao dodecaedro Platão tinha atribuído papel especial como representante do universo, dizendo enigmaticamente que "Deus usou-o para o todo" (*Timaeus*, 55C)[3]. Platão considerava o dodecaedro como composto de 360 triângulos retângulos escalenos, pois, quando em cada uma das faces pentagonais são traçadas as cinco diagonais e as cinco medianas, cada uma das doze faces conterá trinta triângulos retângulos. A associação

[3]Referências aqui e em outros lugares, a menos que seja feita menção expressa, são aos diálogos de Platão e são do *Dialogues*, traduzidos para o inglês por Benjamin Jowett (Oxford, EUA, 1871, 4 volumes)

dos quatro primeiros sólidos regulares, com os tradicionais quatro elementos universais, forneceu a Platão, no *Timaeus*, uma teoria da matéria harmoniosamente unificada, de acordo com a qual tudo era construído de triângulos retângulos ideais. Toda a fisiologia, bem como as ciências da matéria inerte, está baseada, no Timaeus, nesses triângulos. O crescimento normal do corpo, por exemplo, é explicado como segue.

> Quando a criatura toda é jovem e os triângulos de seus corpos constituintes estão por assim dizer recém-saídos da oficina, as suas juntas estão firmemente unidas... Assim, como quaisquer triângulos que compõem seu alimento e bebida... são mais velhos e fracos que os seus próprios, com seus triângulos recém-feitos, a criatura os domina e os corta em pedaços e assim o animal cresce.

Na velhice, ao contrário, os triângulos do corpo estão tão afrouxados pelo uso "que não podem mais cortar à sua semelhança os triângulos do alimento quando eles entram, mas são eles próprios facilmente divididos pelos intrusos vindos de fora" e a criatura se desgasta[4].

6 A Pitágoras se atribui o ter tornado a matemática uma disciplina liberal, mas Platão teve grande influência para que se tornasse parte essencial do currículo para a educação de homens de estado. Influenciado talvez por Arquitas, Platão acrescentaria às matérias do quadrivium uma nova, a estereometria, pois acreditava que a geometria dos sólidos não tivera a ênfase necessária. Platão discutiu também os fundamentos da matemática, esclareceu algumas definições e reorganizou as hipóteses. Frisou que o raciocínio usado na geometria não se refere às figuras visíveis desenhadas, mas às idéias absolutas que elas representam. Os pitagóricos tinham definido um ponto como "unidade com posição" mas Platão preferia pensar num ponto como início de um segmento de reta. A definição de reta como "comprimento sem largura" parece originária da escola de Platão, assim como a idéia de que a reta "jaz uniformemente com seus pontos". Na aritmética Platão deu ênfase não só à distinção entre números pares e ímpares como entre as categorias "par vezes par", "ímpar vezes par" e "ímpar vezes ímpar". Embora nos seja dito que Platão deu contribuições aos axiomas da matemática, não temos uma exposição de suas premissas.

Poucas contribuições matemáticas específicas são atribuídas a Platão. Uma fórmula para triplas pitagóricas $(2n)^2 + (n^2 - 1)^2 = (n^2 + 1)^2$, onde n é qualquer número natural, tem o nome de Platão, mas é apenas uma versão ligeiramente modificada de um resultado já conhecido pelos babilônios e pitagóricos. Talvez seja mais genuinamente significativa a atribuição do chamado método analítico a Platão. Numa demonstração matemática começa-se com o que é dado, ou de modo geral nos axiomas e postulados ou mais especificamente nos problemas a resolver. Avançando passo a passo, chega-se à afirmação a ser provada. Platão parece ter observado que com freqüência convém pedagogicamente, quando a cadeia de raciocínios que leva das premissas à conclusão não é evidente, inverter o processo. Começa-se com a proposição a ser provada e dela deduz-se uma conclusão que se sabe ser válida. Se, então, é possível inverter os passos nesse raciocínio, o resultado é uma demonstração da proposição. É improvável que Platão tenha sido o primeiro a notar a eficácia do ponto de vista analítico, pois qualquer investigação prévia de um problema equivale a isso. O que Platão provavelmente fez foi formalizar o método, ou talvez dar-lhe um nome.

O papel de Platão na história da matemática causa ainda disputas acirradas. Alguns [5] o consideram um pensador excepcionalmente profundo e incisivo; outros o representam como um *flautista de Hamerlin* da matemática, que seduzia os homens a abandonar os problemas do trabalho do mundo para se perderem em especulações vadias[6]. De qualquer forma, poucos negariam que Platão teve uma tremenda influência sobre o desenvolvimento da matemática. A Academia Platônica de Atenas tornou-se o centro matemático do mundo, e dessa escola provieram os principais mestres e pesquisadores durante

[4]*Timaeus* 81B-81D. Tradução para o inglês de F. M. Cornford, *Plato's Cosmology* (1937), p. 329

[5]Veja, por exemplo, François Lasserre, *The Birth of Mathematics in the Age of Plato* (1964)

[6]Lancelot Hogben, *Science for the Citizen* (New York; 1938), p. 64. Cf. George Sarton, *A History of Science* (Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1952), Vol. I, pp. 431 e seguintes

os meados do quarto século A. C. Desses o maior foi Eudoxo de Cnido (408-355? A. C.), que foi um discípulo de Platão e tornou-se o mais célebre matemático e astrônomo de seu tempo.

7 Às vezes lemos referências à "reforma platônica" da matemática e embora a frase tenda a exagerar as mudanças que tiveram lugar então, a obra de Eudoxo foi tão significativa que cabe a ela a palavra "reforma". Na juventude de Platão a descoberta do incomensurável causou um verdadeiro escândalo lógico, pois pareceu arruinar teoremas envolvendo proporções. Duas quantidades, como a diagonal e o lado do quadrado, são incomensuráveis quando sua razão não é igual à de algum número (inteiro) para um outro número (inteiro). Como então comparar as razões de grandezas incomensuráveis? Se Hipócrates realmente provou que as áreas de círculos estão entre si como os quadrados dos diâmetros, deve ter tido algum modo de manejar proporções ou igualdade de razões. Não sabemos como o fez, ou se ele, até certo ponto, antecipou Eudoxo, que deu uma nova definição, geralmente aceita, de razões iguais. Aparentemente os gregos usaram a idéia que quatro quantidades estão em proporção, $a:b = c:d$, se as duas razões $a:b$ e $c:d$ têm a mesma subtração mútua; isto é, se em cada razão, a quantidade menor cabe um igual número inteiro de vezes na maior e o resto em cada caso cabe um igual número inteiro de vezes na menor e o novo resto no precedente o mesmo número inteiro de vezes e assim por diante. Uma tal definição é incômoda e foi um brilhante feito de Eudoxo descobrir a teoria de proporções usada no Livro V de *Os elementos* de Euclides. A palavra razão denotava essencialmente um conceito não definido na matemática grega, pois a "definição" de Euclides de razão, como uma espécie de relação de tamanho entre duas grandezas de mesmo tipo é inteiramente inadequada. Tem mais sentido o enunciado de Euclides segundo o qual se diz que duas grandezas estão numa razão se é possível achar um múltiplo de cada uma que seja maior que a outra. Isto é essencialmente o enunciado do "axioma de Arquimedes" — uma propriedade que o próprio Arquimedes atribuiu a Eudoxo. O conceito de razão de Eudoxo exclui pois o zero e esclarece o que se entende por grandezas de mesma espécie. Um segmento de reta, por exemplo, não pode ser comparado, em termos de razão, com uma área; nem uma área com um volume.

Após essas observações preliminares sobre razões, Euclides dá na Definição 5 do Livro V a célebre formulação de Eudoxo.

> Diz-se que grandezas estão na mesma razão, a primeira para a segunda e a terceira para a quarta se, quando equimúltiplos quaisquer são tomados da primeira e da terceira e equimúltiplos quaisquer da segunda e da quarta, os primeiros equimúltiplos são ambos maiores que, ou ambos iguais a, ou ambos menores que, os últimos equimúltiplos considerados em ordem correspondente[7].

Isto é, $a/b = c/d$ se, e somente se, dados inteiros m e n sempre que $ma < nb$, então $mc < nd$; ou se $ma = nb$, então $mc = nd$; ou se $ma > nb$, então $mc > nd$.

A definição de Eudoxo de igualdade de razões se assemelha ao processo de multiplicação cruzada em uso hoje para frações — $a/b = c/d$ se e somente se, $ad = bc$ — processo equivalente a reduzir ao mesmo denominador. Para mostrar que 3/6 é igual a 4/8 por exemplo, multiplicamos 3 e 6 por 4 para obter 12 e 24 e multiplicamos 4 e 8 por 3, obtendo o mesmo par de números 12 e 24. Se tivéssemos usado 7 e 13 como multiplicadores, obtendo o par 21 e 42 no primeiro caso e 52 e 104 no segundo e assim como 21 é menor que 52 também 42 é menor que 104. (Aqui permutamos o segundo e o terceiro termos na definição de Eudoxo, para ficar de acordo com as operações comumente usadas hoje, mas em qualquer caso valem relações semelhantes.) Nosso exemplo aritmético não faz justiça à sutileza e eficiência da idéia de Eudoxo, porque a aplicação aqui é trivial. Para formar uma apreciação melhor de sua definição seria conveniente substituir a, b, c, d por radicais, ou melhor, tomar a, b como volumes de esferas e c, d como cubos de seus raios. Aqui a multiplicação cruzada perde o sentido e não é evidente que a definição de Eudoxo se aplica. Na verdade a definição não está longe das definições de

[7]*The Thirteen Books of Euclid's Elements*, editado por T. L. Heath (Cambridge, 1908, 3 volumes), II, 114

número real dadas no século dezenove, pois divide a coleção dos números racionais m/n em duas classes, conforme $ma \leq nb$ ou $ma > nb$. Porque existem infinitos números racionais, os gregos, por implicação, se defrontavam com o conceito que desejavam evitar, o de conjunto infinito; mas pelo menos era possível agora dar demonstrações satisfatórias dos teoremas sobre proporções.

8 Uma crise resultante do incomensurável fora enfrentada com sucesso, graças à imaginação de Eudoxo; mas restava um problema não resolvido, o da comparação de configurações curvas e retilíneas. Aqui, também, parece ter sido Eudoxo quem forneceu a chave. Matemáticos anteriores parecem ter sugerido que se tentasse inscrever e circunscrever figuras retilíneas dentro e por fora da figura curva, e ir multiplicando-se indefinidamente o número de lados; mas não sabiam como terminar o argumento, pois não conheciam o conceito de limite. Segundo Arquimedes foi Eudoxo quem forneceu o lema que hoje tem o nome de Arquimedes, às vezes chamado axioma de Arquimedes e que serviu de base para o método de exaustão, o equivalente grego do cálculo integral. O lema, ou axioma, diz que, dadas duas grandezas que têm uma razão (isto é, nenhuma delas sendo zero), pode-se achar um múltiplo de qualquer delas que seja maior que a outra. Esse enunciado eliminava um nebuloso argumento sobre segmentos de reta indivisíveis, ou infinitésimos fixos, que às vezes aparecia. Excluía também a comparação entre o chamado ângulo de contingência (formado por uma curva C e sua tangente T num ponto P de C) com ângulos retilíneos ordinários. O ângulo de contingência parecia ser uma grandeza diferente de zero, no entanto não satisfaz ao axioma de Eudoxo com relação às medidas de ângulos retilíneos.

Do axioma de Eudoxo (ou Arquimedes) é fácil, por uma *reductio ad absurdum*, provar uma proposição que formava a base do método de exaustão dos gregos, da seguinte forma.

> Se de uma grandeza qualquer subtrairmos uma parte não menor que sua metade e do resto novamente subtrai-se não menos que a metade e se esse processo de subtração é continuado, finalmente restará uma grandeza menor que qualquer grandeza de mesma espécie[8].

Esta proposição, que chamaremos de "propriedade de exaustão" equivale à formulação moderna seguinte. Se M é uma grandeza dada, ε uma grandeza prefixada de mesma espécie e r é uma razão tal que $1/2 \leq r < 1$, então podemos achar um inteiro N tal que $M(1-r)^n < \varepsilon$ para todo inteiro $n > N$. Isto é, a propriedade de exaustão equivale a dizer que $\lim\limits_{n \to \infty} M(1-r)^n = 0$. Ainda mais, os gregos usaram essa propriedade para provar teoremas sobre as áreas e volumes de figuras curvilíneas. Em particular, Arquimedes atribuiu a Eudoxo a primeira prova satisfatória de que o volume do cone é um terço do volume do cilindro de mesma base e mesma altura, o que parece indicar que o método de exaustão vem de Eudoxo. Se é assim, então é a Eudoxo (e não a Hipócrates) que devemos provavelmente as provas encontradas em Euclides dos teoremas sobre áreas de círculos e volumes de esferas. Tinham já sido feitas, antes, sugestões fáceis de que a área do círculo podia ser esgotada inscrevendo nele um polígono regular e aumentando indefinidamente o número de lados, mas foi o método de exaustão que tornou esse processo rigoroso. (Deve-se notar que a frase "método de exaustão" não era usada pelos gregos antigos, sendo uma invenção moderna; mas está tão firmemente estabelecida na história da matemática que continuaremos a fazer uso dela.) Como ilustração do modo pelo qual Eudoxo provavelmente aplicava o método, damos aqui, em notação um tanto modernizada, a prova de que áreas de círculos estão entre si como os quadrados sobre os diâmetros. A prova tal como está em *Os elementos* de Euclides, XII, 2, é provavelmente a de Eudoxo.

[8]Veja *Elements of Euclid* (Editado por T. L. Heath, reimpresso, New York: Dover, 3 volumes 1956), III, 14. O axioma, é claro, vale ainda se substituirmos metade por um terço, ou um quarto, ou qualquer fração própria

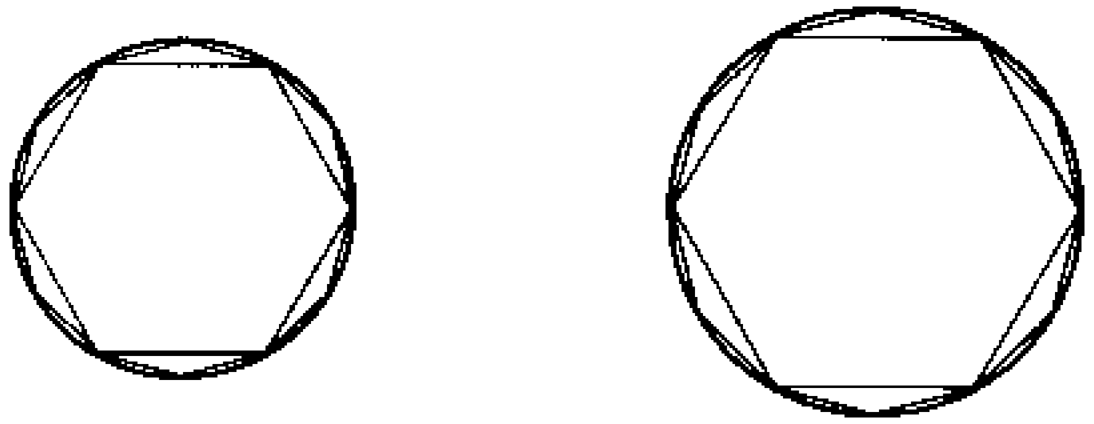


Figura 6.1

Sejam c e C os círculos, com diâmetros d e D e áreas a e A. Queremos provar que $a/A = d^2/D^2$. A prova estará completa se procedermos indiretamente, mostrando que não são verdadeiras as outras duas possibilidades, isto é, $a/A < d^2/D^2$ e $a/A > d^2/D^2$. Suponhamos pois primeiro que $a/A > d^2/D^2$. Então existe uma grandeza $a' < a$ tal que $a'/A = d^2/D^2$. Seja $a - a'$ a grandeza prefixada $\varepsilon > 0$. Vamos inscrever nos círculos c e C polígonos regulares de áreas p_n e P_n, com o mesmo número n de lados, e consideremos as áreas intermediárias, fora dos polígonos mas dentro dos círculos (Fig. 6.1). Se dobrarmos o número de lados é evidente que estaremos subtraindo dessas áreas intermediárias mais da metade. Logo, pelo processo de exaustão, dobrando sucessivamente o número de lados (isto é, fazendo crescer n), as áreas intermediárias podem ser reduzidas até que $a - p_n < \varepsilon$. Então, como $a - a' = \varepsilon$, temos $p_n > a'$. Agora, de teoremas anteriores sabemos que $p_n/P_n = d^2/D^2$ e como supusemos que $a'/A = d^2/D^2$, temos $p_n/P_n = a'/A$. Logo, se $p_n > a'$ devemos concluir que $P_n > A$. Mas como P_n é a área de um polígono *inscrito dentro* do círculo de área A, é evidente que P_n não pode ser maior que A. Como uma falsa conclusão implica que uma premissa é falsa, está excluída a possibilidade que $a/A > d^2/D^2$. De modo análogo mostramos ser impossível que $a/A < d^2/D^2$ e com isso provamos o teorema que diz que as áreas dos círculos são proporcionais aos quadrados sobre seus diâmetros.

9 A propriedade que acabamos de demonstrar parece ter sido o primeiro teorema preciso relativo a figuras curvilíneas; aponta Eudoxo como o provável originador do cálculo integral, a maior contribuição à matemática dos membros da Academia Platônica. Eudoxo, além disso, não era apenas um matemático e na história da ciência é conhecido como o pai da astronomia científica. Diz-se que Platão propôs a seus associados que tentassem dar uma representação geométrica dos movimentos do Sol, da Lua e dos cinco planetas conhecidos. É claro, era aceito tacitamente que tais movimentos se comporiam de movimentos circulares uniformes. Apesar de tal restrição, Eudoxo conseguiu dar para cada um dos sete corpos celestiais uma representação satisfatória por meio de uma composição de esferas concêntricas com a terra como centro e com raios variáveis, cada uma girando uniformemente em torno de um eixo fixo em relação à superfície da esfera seguinte, em ordem de grandeza crescente. Para cada planeta, portanto, Eudoxo deu um sistema conhecido por seus sucessores como "esferas homocêntricas"; esses esquemas geométricos foram combinados por Aristóteles na bem conhecida cosmologia peripatética, das esferas cristalinas, que prevaleceu durante quase 2 000 anos.

Eudoxo foi sem dúvida o melhor matemático da Idade Helênica, mas todas as suas obras se perderam[9]. É possível que a estimativa aristotélica para a circunferência da terra — cerca de 400 000 estados ou 60 000 quilômetros — seja devida a Eudoxo, pois Arquimedes refere que Eudoxo tinha calculado que o diâmetro do Sol era nove vezes o da Terra. Em seu esquema astronômico Eudoxo tinha visto que por uma combinação de movimentos circulares ele podia descrever os movimentos dos planetas em órbitas que se enrolavam ao longo de uma curva chamada *hippopede*. Essa curva, que se assemelha a um oito traçado sobre uma esfera, é obtida como intersecção de uma esfera com um cilindro tangente internamente à esfera — uma das poucas curvas novas reconhecidas pelos gregos. Havia, na época, duas maneiras de definir curvas: (1) por combinações de

[9]Para uma exposição extensa e bem fundamentada do que Eudoxo provavelmente fez, veja O. Becker, "Eudoxus-Studien", *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik*, Parte B, II (1933), 311-333, 369-387; III (1936), 236-244, 370-410

movimentos uniformes e (2) como intersecções de superfícies geométricas familiares. A *hippopede* de Eudoxo é um bom exemplo de uma curva que pode ser obtida das duas maneiras. Proclus, que escreveu cerca de 800 anos depois do tempo de Eudoxo, conta que Eudoxo tinha descoberto muitos teoremas gerais de geometria e tinha aplicado o método platônico de análise ao estudo da *secção* (provavelmente a secção áurea); mas a teoria das proporções e o método de exaustão são ainda as grandes contribuições que justificam sua fama.

10 Eudoxo deve ser lembrado na história da matemática, não só por seu próprio trabalho, mas também pelo de seus discípulos. Na Grécia a continuidade da tradição era mantida por um forte elo indo de mestre a discípulo. Assim Platão aprendeu de Arquitas, Teodoro e Teaetetus; a influência platônica por sua vez passou de Eudoxo aos irmãos Menaecmus e Dinóstrato, que atingiram ambos a eminência em matemática. Vimos que Hipócrates de Chios tinha mostrado que a duplicação do cubo podia ser conseguida desde que se pudesse encontrar e usar curvas com as propriedades expressas na proporção aumentada $a/x = x/y = y/2a$; vimos também que os gregos tinham somente dois processos para descobrir curvas novas. Foi, portanto, uma realização importante de Menaecmus o ter descoberto que curvas com a propriedade desejada estavam à disposição. Na verdade, havia uma família de curvas adequadas, que podiam ser obtidas de uma mesma fonte, cortando um cone circular reto por um plano perpendicular a um elemento do cone. Isto é, parece ter descoberto as curvas que mais tarde foram chamadas, elipse, parábola e hipérbole.

De todas as curvas, além de círculos e retas, que deveriam ser visíveis pela experiência diária, a elipse deveria ser a mais evidente, pois está presente sempre que um círculo é olhado obliquamente ou sempre que um tronco cilíndrico é serrado diagonalmente. No entanto a primeira descoberta da elipse parece ter sido feita por Menaecmus como um simples subproduto da pesquisa em que a parábola e a hipérbole é que ofereciam as propriedades necessárias à solução do problema de Delos. Começando com um cone circular reto simples tendo um ângulo reto no vértice (isto é, um ângulo gerador de 45°), ele descobriu que cortando-o por um plano perpendicular a um elemento, a curva de intersecção é tal que, em linguagem de geometria analítica atual, sua equação pode ser escrita na forma $y^2 = lx$, onde l é uma constante que depende da distância do plano ao vértice. Não sabemos como Menaecmus deduziu essa propriedade, mas ela depende apenas de teoremas de geometria elementar. Seja ABC o cone e seja ele cortado segundo a curva EDG por um plano perpendicular ao elemento ADC do cone (Fig. 6.2). Então, por um ponto P qualquer da curva, faça-se passar um plano horizontal, que cortará o cone segundo o círculo PVR e seja Q o outro ponto de intersecção da curva (parábola) com o círculo. Das simetrias envolvidas resulta que a reta $PQ \perp RV$ em O. Logo OP é a média proporcional entre RO e OV. Além disso, da semelhança dos triângulos OVD e BCA segue-se que $OV/DO = BC/AB$ e da semelhança dos triângulos $R'DA$ e ABC resulta $R'D/AR' = BC/AB$. Se $OP = y$ e $OD = x$ são coordenadas do ponto P, temos $y^2 = RO \cdot OV$,

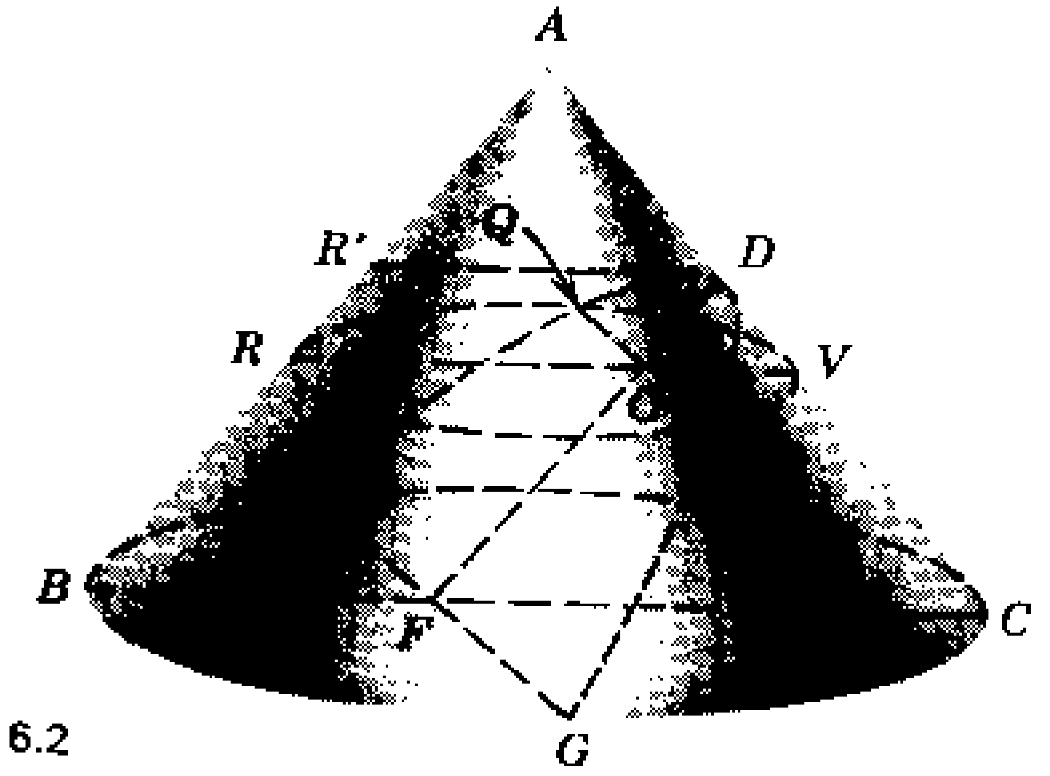


Figura 6.2

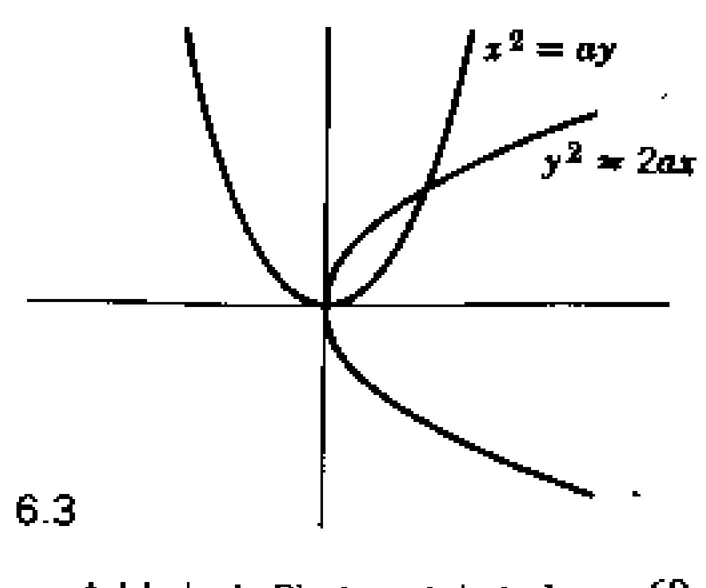


Figura 6.3

ou substituindo

$$y^2 = R'D \cdot OV = AR' \cdot \frac{BC}{AB} \cdot DO \cdot \frac{BC}{AB} = \frac{AR' \cdot BC^2}{AB^2} \cdot x$$

Como os segmentos AR', BC, e AB são os mesmos para todos os pontos P da curva $EQDPG$, podemos escrever a equação da curva, uma "secção de cone circular retângulo", como $y^2 = lx$, onde l é uma constante, mais tarde chamada o *latus rectum* da curva. De modo semelhante podemos achar uma equação da forma $y^2 = lx - b^2x^2/a^2$ para uma "secção de cone acutângulo" e uma equação da forma $y^2 = lx + b^2x^2/a^2$ para uma "secção de cone obtusângulo", onde a e b são constantes e o plano de corte é perpendicular a um elemento do cone circular reto, acutângulo ou obtusângulo.

Menaecmus aparentemente deduziu essas propriedades das secções cônicas e outras mais. Como esse material tem forte ar de uso de coordenadas, como foi ilustrado acima, foi algumas vezes sustentado que ele dispunha da geometria analítica[10]. Tal opinião é apenas parcialmente justificável, pois certamente Menaecmus não sabia que uma equação em duas quantidades incógnitas determina uma curva. Na verdade, o conceito geral de equação em quantidades incógnitas era estranho ao pensamento grego. Foram as deficiências de notações algébricas que mais fortemente operaram para impedir que os gregos construíssem uma verdadeira geometria de coordenadas.

Menaecmus não poderia prever quantas belas propriedades o futuro desvendaria. Tinha esbarrado nas cônicas numa busca bem sucedida por curvas com as propriedades adequadas à duplicação do cubo. Em termos de notação moderna é fácil chegar à solução. Deslocando o plano de secção (Fig. 6.2) podemos achar uma parábola com qualquer *latus rectum*. Se, então, quisermos duplicar um cubo de aresta a, determinamos sobre um cone retângulo duas parábolas, uma com latus rectum a, outra com latus rectum $2a$. Se agora as colocarmos com vértices na origem e eixos segundo o dos x e o dos y respectivamente, o ponto de intersecção das duas curvas terá coordenadas (x, y) satisfazendo a proporção continuada $a/x = x/y = y/2a$ (Fig. 6.3) — isto é, $x = a\sqrt[3]{2}$, $y = a\sqrt[3]{4}$. A abscissa x é pois a aresta do cubo procurado.

É provável que Menaecmus soubesse que a duplicação também pode ser efetuada por meio de uma hipérbole retangular mais uma parábola. Se a parábola de equação $y^2 = (a/2)x$ e a hipérbole $xy = a^2$ são colocadas sobre um mesmo sistema de coordenadas, o ponto de intersecção terá coordenadas $x = a\sqrt[3]{2}$, $y = a/\sqrt[3]{2}$, a abscissa x sendo o lado do cubo procurado. Menaecmus provavelmente conhecia muitas das propriedades hoje familiares das secções cônicas, inclusive as assíntotas da hipérbole, que lhe permitiriam operar com os equivalentes das equações modernas que usamos acima. Proclus diz que Menaecmus foi um daqueles que "tornaram toda a geometria mais perfeita"; mas pouco sabemos do que fez realmente. Sabemos que Menaecmus ensinou Alexandre, o Grande, e a lenda atribui a Menaecmus o célebre comentário, quando seu real discípulo lhe pediu um atalho mais curto para a geometria: "Rei, para viajar pelo país há estradas reais e estradas para os cidadãos comuns; mas na geometria há só uma estrada para todos." Entre as principais autoridades, quanto à atribuição a Menaecmus da descoberta das secções cônicas, há uma carta de Eratóstenes ao rei Ptolomeu Energetes, citada 700 anos depois por Eutocius, em que várias duplicações do cubo são mencionadas. Entre elas, uma com a desajeitada construção de Arquitas e outra "cortando o cone nas tríadas de Menaecmus".

2 Dinóstrato, irmão de Menaecmus, era também um matemático, e se um irmão "resolveu" o problema da duplicação do cubo, o outro "resolveu" o da quadratura do círculo. A quadratura tornou-se uma questão simples quando foi observada uma notável propriedade da extremidade Q da trissectriz de Hípias, aparentemente por Dinóstrato. Se a equação da trissectriz (Fig. 6.4) é $\pi r \operatorname{sen} \theta = 2a\theta$, onde a é o lado do quadrado $ABCD$ associado à curva, então o limite de r quando θ tende a zero é $2a/\pi$. Isso é evidente para quem co-

[10]Veja J. L. Coolidge, *A History of Geometrical Methods* (1940), pp. 117-119, e H. G. Zeuthen, "Sur l'usage des coordonnées dans l'antiquité", *Kongelige Danske Videnskabernes Selskabs, Forhandlinger, Oversigt*, 1888, pp. 127-144

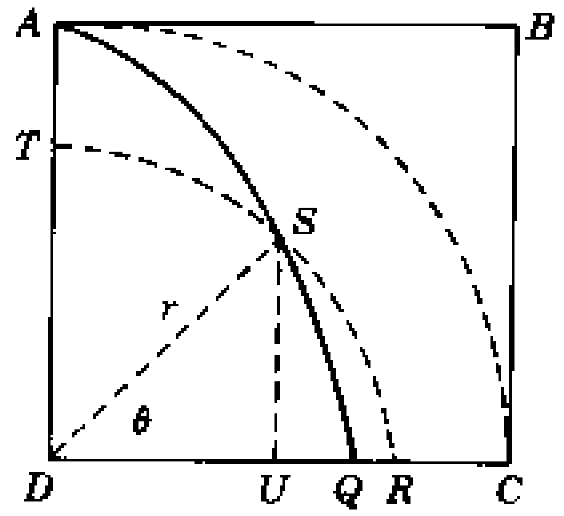


Figura 6.4

nhece rudimentos de cálculo e se lembra do fato que $\lim_{\theta \to 0} \operatorname{sen} \theta/\theta = 1$ para a medida em radianos. A prova, tal como é dada por Papus e provavelmente devida a Dinóstrato, baseia-se unicamente em considerações de geometria elementar. O teorema de Dinóstrato diz que o lado a é a média proporcional entre o segmento DQ e o arco do quarto de círculo AC, isto é, $\widehat{AC}/AB = AB/DQ$. Usando uma prova indireta tipicamente grega, estabelecemos o teorema por destruição das alternativas. Suponhamos primeiro que $\widehat{AC}/AB = AB/DR$ onde $DR > DQ$. Então seja S a intersecção do círculo de centro D e raio DR com a trissectriz e T a intersecção do mesmo círculo com o lado AD do quadrado. De S baixemos a perpendicular SU ao lado CD. Conforme Dinóstrato sabia os arcos de círculo correspondentes são proporcionais aos raios logo $\widehat{AC}/AB = \widehat{TR}/DR$; e como por hipótese $\widehat{AC}/AB = AB/DR$, resulta que $\widehat{TR} = AB$. Mas pela propriedade que define a trissectriz sabemos que $\widehat{TR}/\widehat{SR} = AB/SU$. Logo, como $\widehat{TR} = AB$, deve seguir-se que $\widehat{SR} = SU$, o que é evidentemente falso, pois a perpendicular é mais curta que qualquer outro segmento ou curva indo de S à reta DC. Portanto o quarto termo DR na proporção $\widehat{AC}/AB = AB/DR$ não pode ser maior que DQ. De modo semelhante provamos que essa quarta proporcional não pode ser menor que DQ; portanto o teorema de Dinóstrato está provado; isto é, $\widehat{AC}/AB = AB/QD$.

Dado o ponto Q de intersecção da trissetriz com DC, temos, pois, uma proporção envolvendo três segmentos retilíneos e o arco circular AC. Por uma construção geométrica simples do quarto termo numa proporção podemos facilmente traçar um segmento de reta b de comprimento igual a AC. O retângulo que tem um lado $2b$ e a como o outro lado, tem área exatamente igual à do círculo com raio a; constrói-se facilmente um quadrado de área igual à do retângulo, tomando como lado do quadrado a média geométrica dos lados do retângulo. Como Dinóstrato provou que a trissetriz de Hípias serve para quadrar o círculo, a curva veio a ser chamada mais comumente de quadratriz. Naturalmente, era sempre perfeitamente claro para os gregos que o uso da curva para problemas de trissecção e quadratura viola as regras do jogo — que só permitem círculos e retas. As "soluções" de Hípias e Dinóstrato, como seus autores sabiam, eram sofísticas; por isso a procura de outras soluções, canônicas ou ilegítimas, continuou, com o resultado que várias curvas novas foram descobertas pelos geômetras gregos.

13 Poucos anos depois de Dinóstrato e Menaecmus viveu um matemático que se distingue por ter escrito o mais antigo tratado matemático grego preservado. Descrevemos bem completamente a obra de matemáticos helênicos anteriores, mas deve-se ter em mente que essas exposições não se baseiam em obras originais mas em sumários, comentários ou descrições posteriores. Ocasionalmente um comentador parece estar copiando de uma obra original existente na época, como quando Simplicius no sexto século de nossa era descreve a quadratura de lunas por Hipócrates. Mas só quando chegamos a Autólico de Pitane, um contemporâneo de Aristóteles, é que encontramos um autor grego do qual uma obra se preservou. Uma razão para a sobrevivência é que esse pequeno tratado, *Sobre a esfera móvel*, fazia parte de uma coleção conhecida por "Pequena astronomia", largamente usada pelos antigos astrônomos. *Sobre a esfera móvel* não é uma obra profunda, nem provavelmente muito original, pois contém pouca coisa além dos teoremas elementares de geometria da esfera, que seriam necessários à astronomia. Seu significado principal está no fato de indicar que a geometria grega tinha evidentemente atingido a

forma que consideramos típica da idade clássica. Teoremas são claramente enunciados e provados. Além disso, o autor usa, sem prova ou indicação de fonte, outros teoremas que ele considera bem conhecidos; concluímos, pois, que havia na Grécia em seu tempo, por volta de 320 A. C., uma tradição bem estabelecida de textos de geometria.

Autólico foi um contemporâneo de Aristóteles — o homem mais erudito de todos os tempos, cuja morte em geral se considera como o marco do fim do primeiro grande período, a Idade Helênica, na história da civilização grega. Aristóteles, como Eudoxo, foi discípulo de Platão e, como Menaecmus, mestre de Alexandre, o Grande. Aristóteles era antes de tudo um filósofo e biólogo, mas estava completamente a par das atividades dos matemáticos. Pode ter tido um papel em uma das principais controvérsias da época, pois foi-lhe atribuido um tratado *Sobre retas indivisíveis*. Os historiadores modernos questionam a autenticidade dessa obra, mas de qualquer forma provavelmente ela resultou das discussões que se verificam no Liceu Aristotélico. A tese do tratado é que a doutrina dos indivisíveis defendida por Xenócrates, um sucessor de Platão como chefe da Academia, é insustentável. O indivisível, ou infinitésimo fixo de comprimento, área, ou volume, fascinou homens de muitas épocas; Xenócrates julgou que esse conceito resolveria os paradoxos, como os de Zeno, que atormentavam matemáticos e filósofos. Aristóteles também dedicou muita atenção aos paradoxos de Zeno, mas procurou refutá-los baseado no senso comum. Por ter hesitado em acompanhar os matemáticos platônicos nas abstrações e tecnicalidades da época, não deu contribuição importante ao assunto. Diz-se que ele escreveu uma biografia de Pitágoras, embora esta se tenha perdido, e Eudemus, um de seus estudantes, escreveu uma história da geometria, também perdida. Além disso, por ter fundado a lógica e por suas freqüentes alusões a conceitos e teoremas matemáticos em sua volumosa obra[11] pode-se considerar que Aristóteles contribuiu para o desenvolvimento da matemática. A discussão aristotélica sobre o infinito potencial e atual na aritmética e geometria influenciou muitos dos que mais tarde escreveram sobre fundamentos da matemática; mas a afirmação de Aristóteles, de que os matemáticos "não precisam do infinito, nem o usam" deve ser comparada com as asserções de nosso tempo de que o infinito é o paraíso dos matemáticos. De significado mais positivo é a análise que Aristóteles fez do papel das definições e hipóteses na matemática.

5 Em 323 A. C. Alexandre, o Grande, morreu subitamente e seu império se desfez. Seus generais dividiram o território que o jovem conquistador dominava; Ptolomeu ficou com o Egito, Seleuco e Lisímaco disputaram a Síria e o Oriente, Antígono e Cassander, cada um durante algum tempo, governaram a Macedônia. Em Atenas, onde Aristóteles fora considerado um estrangeiro, o filósofo verificou que se tornara impopular, agora que seu poderoso soldado-estudante estava morto. Deixou Atenas e morreu no ano seguinte. Em toda a Grécia a ordem antiga mudava, política e culturalmente. Sob Alexandre tinha-se dado uma fusão gradual de costumes e cultura helênicos e orientais, de modo que era mais apropriado falar da nova civilização como sendo helenística em vez de Helênica. Além disso, a nova cidade de Alexandria, fundada pelo conquistador do mundo, agora tomou o lugar de Atenas como centro do mundo matemático. Na história da civilização costuma-se por isso distinguir dois períodos no mundo grego, separados por uma linha divisória conveniente constituída pelas mortes quase simultâneas de Alexandre e Aristóteles (assim como de Demóstenes). A parte mais antiga chama-se Idade Helênica, a segunda Helenística ou Alexandrina; nos capítulos imediatamente seguintes descrevemos a matemática do primeiro século de nova era, freqüentemente chamada a Idade Áurea da matemática grega.

BIBLIOGRAFIA

Becker, O., "Eudoxus-Studien," *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik*, Parte B, *Studien*, II (1933), 311-333, 369-387; III (1936), 236-244, 370-410

Brumbaugh, R. S., *Plato's Mathematical Imagination* (Bloomington, Ind.: Indiana University Press, 1954)

[11] Veja T. L. Heath, *Mathematics in Aristotle* (1949)

Coolidge, J. L., *A History of the Conic Sections and the Quadric Surfaces* (Oxford: Clarendon, 1945)

Coolidge, J. J., *A History of Geometrical Methods* (Oxford: Clarendon, 1940; edição em brochura, New York: Dover, 1963)

Cornford, F. M., *Plato's Cosmology*, The Timaeus of Plato traduzido com comentário (Londres: Routledge and Kegan Paul, 1937)

Görland, Albert, *Aristoteles und die Mathematik* (Marburg, 1899)

Heath, T. L., *History of Greek Mathematics* (Oxford, 1921, 2 volumes)

Heath, T. L., *Mathematics in Aristotle* (Oxford, 1949)

Heiberg, J. L., "Mathematisches zu Aristoteles," *Abhandlungen zur Geschichte der Mathematischen Wissenschaften*, **18** (1904), 1-49

Lasserre, François, *The Birth of Mathematics in the Age of Plato*, traduzido por Helen Mortimer (Londres: Hutchinson, 1964)

Loria, Gino, *Historie des sciences mathématiques dans l'antiquité hellénique* (Paris: Gauthier-Villars, 1929)

Michel, Paul-Henri, *De Pythagore à Euclide* (Paris: Société d'Edition "Les Belles Lettres," 1950)

Plato, *Dialogues*, traduzido por Benjamin Jowett (Oxford, 1871, 4 volumes)

Solmsen, Friedrich, "Platos Einfluss auf die Bildung der mathematischen Methode," *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik*, Parte B, *Studien*, I (1929-1931), 93-107

Toeplitz, Otto, "Das Verhältnis von Mathematik und Ideenlehre bei Plato," *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik*, Parte B, *Studien*, I (1931), 3-33

Wedberg, Anders, *Plato's Philosophy of Mathematics* (Estocolmo: Almquist & Wiksell, 1955)

Zeuthen, H. G., *Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum* (Copenhagen, 1886)

EXERCÍCIOS

1. Acredita-se que Teaetetus achou, para os sólidos regulares, a razão da aresta para o raio da esfera circunscrita. Faça isso para três sólidos regulares. (Ver Livro XII de *Os elementos* de Euclides.)

2. Prove o teorema, provavelmente devido a Teaetetus, de que não há mais do que cinco sólidos regulares. (Ver Livro XIII de *Os elementos* de Euclides.)

3. Platão no *Teaetetus* diz que Teodoro provou que $\sqrt{3}$ é irracional. Dê uma prova cuidadosa desse teorema.

4. Ache os ângulos dos 360 triângulos retângulos escalenos que Platão indicou sobre a superfície do dodecaedro.

5. Complete a outra metade da prova por exaustão (ver texto) de que áreas de círculos estão entre si como quadrados sobre seus raios. (Use polígonos circunscritos.)

6. Descreva um método pelo qual Eudoxo poderia ter medido a circunferência da terra.

7. Usando o método sugerido em conexão com a obra de Menaecmus, prove que a secção de um cilindro é uma elipse. Isso foi provado por Serenus, que provavelmente viveu no quarto século de nossa era.

8. Em sua teoria do arco-íris Aristóteles usou um lugar geométrico usualmente atribuído a Apolônio, um matemático posterior: o lugar de todos os pontos P tais que as distâncias de P a dois pontos fixos P_1 e P_2 estão numa razão fixa diferente de um. Identifique o lugar.

*9. Prove que uma secção de Menaecmus (perpendicular a um elemento) de um cone acutângulo é uma elipse.

*10. Complete a prova de Dinóstrato (ver texto) mostrando que a hipótese $DR < DQ$ leva a um absurdo.

Capítulo **7**

Euclides de Alexandria

Ptolomeu uma vez perguntou a Euclides se havia um caminho mais curto, para a geometria, que o estudo de *Os elementos*, e Euclides lhe respondeu que não havia estrada real para a geometria.

Proclus Diadocus

1 A morte de Alexandre, o Grande, levou a disputas entre os generais do exército grego; mas em 306 A. C. o controle da parte egípcia do império estava firmemente nas mãos de Ptolomeu I, e esse governante pode voltar a atenção para esforços construtivos. Entre seus primeiros atos está a criação em Alexandria de uma escola ou instituto conhecido como Museu, insuperado em seu tempo. Como professores ele chamou um grupo de sábios de primeira linha, entre eles o autor do texto de matemática mais bem sucedido de todos os tempos — *Os elementos* (*Stoichia*) de Euclides. Considerando a fama do autor e de seu *best seller*, sabe-se notavelmente pouco sobre a vida de Euclides. Tão obscura ficou sua vida que nenhum lugar de nascimento é associado a seu nome. Embora edições de *Os elementos* freqüentemente identificassem o autor como Euclides de Megara, e um retrato de Euclides em Megara freqüentemente apareça em histórias da matemática, trata-se de um erro de identidade[*]. O verdadeiro Euclides de Megara era um discípulo de Sócrates e, embora se preocupasse com lógica, não se sentia mais atraído pela matemática que seu mestre. Nosso Euclides, em contraste, é conhecido como Euclides de Alexandria, porque foi chamado para lá ensinar matemática. Da natureza de seu trabalho pode-se presumir que tivesse estudado com discípulos de Platão, se não na própria Academia. Lendas associadas com Euclides o pintam como um bondoso velho. A estória contada acima em relação a Alexandre, o Grande, que desejava uma introdução fácil à geometria é repetida no caso de Ptolomeu, a quem se diz que Euclides garantiu que "não há uma estrada real para a geometria". Evidentemente Euclides não dava ênfase aos aspectos práticos do assunto, pois há uma estória contada sobre ele que diz que quando um estudante perguntou para que servia o estudo da geometria, Euclides disse a seu escravo que desse três moedas ao estudante, "pois ele precisa ter lucro com o que aprende".

Euclides e *Os elementos* são freqüentemente considerados sinônimos; na realidade o homem escreveu cerca de uma dúzia de tratados, cobrindo tópicos variados, desde óptica, astronomia, música e mecânica até um livro sobre secções cônicas. Com exceção de *A esfera* de Autólico, os livros de Euclides que sobreviveram são os mais antigos tratados gregos existentes; no entanto, do que Euclides escreveu mais da metade se perdeu, inclusive algumas das obras mais importantes, como o tratado sobre cônicas. Euclides considerava Aristeu, um geômetra contemporâneo, merecedor de grande crédito por ter escrito um tratado mais antigo sobre *Lugares sólidos* (o nome grego para secções cônicas, oriundo provavelmente da definição estereométrica das curvas na obra de Menaecmus). Os tratados sobre cônicas de Aristeu e Euclides se perderam ambos, provavelmente sem possibilidade de recuperação, talvez porque logo foram superados pelo trabalho mais extenso sobre cônicas de Apolônio, que será descrito abaixo. Entre as obras perdidas de Euclides está também uma sobre *Lugares de superfície*, outra sobre *Pseudaria* (ou falácias) e uma terceira sobre *Porismas*. Pelas referências antigas não fica sequer claro que material continham. A primeira, por exemplo, poderia dizer respeito a superfícies conhecidas pelos antigos — esfera, cone, cilindro, toro, elipsóide de revolução, parabolóide de revolução e hiperbolóide de revolução de duas folhas — ou talvez a curvas

[*]Veja frontispício na p. 198

sobre estas superfícies. Tanto quanto sabemos, os gregos não estudaram outras superfícies além das de sólidos de revolução.

A perda dos Porismas de Euclides é particularmente irritante, pois podem ter representado uma antiga aproximação à geometria analítica. Papus disse mais tarde que um *porisma* é algo intermediário entre um teorema, em que alguma coisa é proposta para demonstração, e um problema em que alguma coisa é proposta para construção. Outros descreveram um porisma como uma proposição em que se determina uma relação entre quantidades conhecidas e variadas ou indeterminadas, talvez a melhor aproximação da idéia de função da antiguidade. Se um porisma era, como se pensou, uma espécie de equação verbal de uma curva, o livro de Euclides sobre *Porismas* pode ter diferido de nossa geometria analítica principalmente pela falta de símbolos e técnicas algébricas. O historiador da geometria do século dezenove, Michel Chasles, sugeriu como porisma típico a determinação do lugar geométrico de um ponto para o qual a soma dos quadrados das distâncias a dois pontos fixos é constante.

2 Cinco obras de Euclides sobreviveram até hoje: *Os elementos*, *Os dados*, *Divisão de figuras*, *Os fenômenos* e *Óptica*. Essa última tem interesse por ser um dos primeiros trabalhos sobre perspectiva, ou a geometria da visão direta. Os antigos dividiam o estudo da óptica em três partes: (1) óptica (a geometria da visão direta) (2) catóptrica (geometria dos raios refletidos) e (3) dióptrica (a geometria de raios refratados). Uma *Catóptrica* às vezes atribuída a Euclides é de duvidosa autenticidade, sendo talvez de Teon de Alexandria, que viveu seis séculos depois. *Óptica*[1] de Euclides é digna de nota por adotar uma teoria de "emissão" para a visão, segundo o qual o olho envia raios que vão até o objeto, em contraste com uma doutrina rival de Aristóteles, na qual uma atividade num meio caminha em linha reta do objeto para o olho. Deve-se notar que a matemática da perspectiva (em contraposição à descrição física) é a mesma em qualquer das duas teorias. Entre os teoremas que se encontram na *Óptica* de Euclides está um largamente usado na antiguidade — $\text{tg}\,\alpha/\text{tg}\,\beta < \alpha/\beta$ se $0 < \alpha < \beta < \pi/2$. Um objetivo da *Óptica* era combater a insistência dos epicuristas de que um objeto é exatamente do tamanho que aparenta, não se devendo fazer ajustes para compensar os efeitos da perspectiva.

Os fenômenos, de Euclides, é muito semelhante a *A esfera* de Autólico — isto é, uma obra de geometria esférica para uso dos astrônomos. Uma comparação entre as duas mostra que os dois autores se aproveitaram fortemente de uma tradição de livros-texto que era bem conhecida de sua geração. É possível que o mesmo seja verdade quanto a *Os elementos* de Euclides, mas, nesse caso, não há obra contemporânea preservada com a qual possa ser comparada.

A *Divisão de figuras* é significativa por ser uma obra que se teria perdido se não fosse pela cultura dos sábios árabes. Não sobreviveu no original grego; mas antes do desaparecimento das versões gregas, uma tradução árabe tinha sido feita (omitindo algumas das provas originais "porque são fáceis"), a qual por sua vez foi mais tarde traduzida para o latim, e finalmente para as línguas modernas[2]. Isso não é excepcional, para obras antigas. A *Divisão de figuras* contém uma coleção de trinta e seis proposições relativas à divisão de configurações planas. Por exemplo, a Proposição 1 pede a construção de uma reta que seja paralela à base de um triângulo e que divida o triângulo em duas áreas iguais. A Proposição 4 pede a bissecção de um trapézio *abqd* (Fig. 7.1) por uma reta paralela às bases; a reta *zi* pedida é achada determinando *z* tal que $\overline{za}^2 = 1/2(\overline{eb}^2 + \overline{ea}^2)$. Outras proposições requerem a divisão de um paralelogramo em duas partes iguais por uma reta traçada por um ponto dado num dos lados (Proposição 6) ou por um ponto dado fora do paralelogramo (Proposição 10). A proposição final pede a divisão de um quadrilátero numa região dada por uma reta passando por um ponto sobre um dos lados do quadrilátero. Um tanto semelhante à *Divisão de figuras* em natureza é

[1]Veja M. R. Cohen e I. E. Drabkin: *A Source Book in Greek Science* (1948) pp. 257 e seguintes

[2]Uma versão em inglês intitulada *Euclid's Book on Divisions of Figures* foi editada por R. C. Archibald (1915)

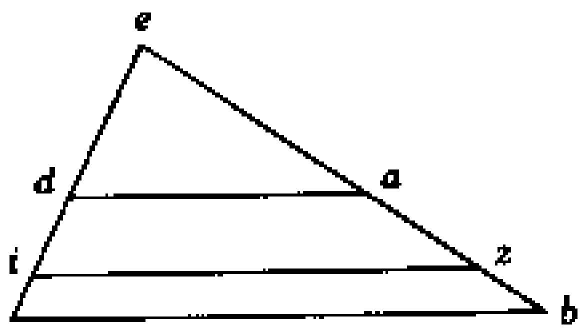


Figura 7.1

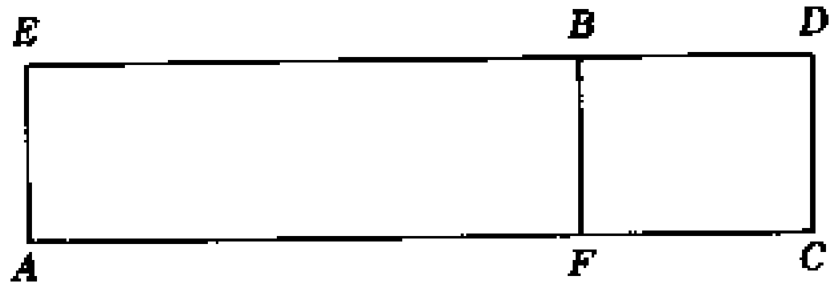


Figura 7.2

Os dados de Euclides, obra que chegou até nós tanto em grego como em árabe. Parece ter sido escrita para uso na universidade de Alexandria, servindo de complemento aos seis primeiros volumes de *Os elementos*, de modo semelhante a um manual de tabelas. Deveria ser útil como um guia para a análise de problemas de geometria a fim de descobrir provas. Inicia-se com quinze definições relativas a grandezas e lugares geométricos. A parte principal do texto compõe-se de noventa e cinco enunciados relativos às implicações das condições e grandezas que podem ser dadas num problema. Os dois primeiros dizem que se duas grandezas a e b são dadas, sua razão está dada, e que se uma grandeza é dada e também sua razão para uma segunda, a segunda grandeza está dada. Há cerca de duas dúzias de enunciados semelhantes, servindo como regras ou fórmulas algébricas. Seguem-se regras geométricas simples sobre retas paralelas e grandezas proporcionais, lembrando ao estudante as implicações dos dados de um problema, como o lembrete de que se dois segmentos estão numa razão dada, então se conhece a razão das áreas de figuras retilíneas semelhantes construídas sobre esses segmentos. Alguns dos enunciados são equivalentes geométricos da resolução de equações quadráticas. Por exemplo, ele nos diz que se uma área (retangular) dada AB é colocada sobre um segmento AC de comprimento dado (Fig. 7.2) e se a área BC que falta à área AB para completar todo o retângulo AD é dada, então as dimensões de BC são conhecidas. Isto é fácil de provar com nossa álgebra. Seja a o comprimento de AC, b^2 a área de AB e $c:d$ a razão de FC para CD. Então, se $FC = x$ e $CD = y$, temos $x/y = c/d$ e $(a-x)y = b^2$. Eliminando y temos $(a-x)dx = b^2c$ ou $dx^2 - adx + b^2c = 0$, donde $x = a/2 \pm \sqrt{(a/2)^2 - b^2c/d}$. A solução geométrica dada por Euclides é equivalente a isto, exceto pelo fato de ser usado o sinal negativo antes do radical. Os enunciados 84 e 85 de *Os dados* são equivalentes geométricos das familiares soluções algébricas babilônicas dos sistemas $xy = a^2$, $x \pm y = b$, que por sua vez são equivalentes de soluções de equações simultâneas. Os últimos enunciados em *Os dados* se referem a relações entre medidas lineares e angulares num círculo dado.

3 A universidade de Alexandria evidentemente não diferia muito de instituições modernas de cultura superior. Parte dos professores provavelmente se notabilizava na pesquisa, outros eram melhores como administradores e outros ainda eram conhecidos pela capacidade de ensinar. Pelos relatos que possuímos parece que Euclides definitivamente pertencia à última categoria. Nenhuma descoberta nova é atribuída a ele, mas ele era conhecido pela sua habilidade ao expor. Essa é a chave do sucesso de sua maior obra, *Os elementos*. Era, francamente, um livro-texto e de modo nenhum o primeiro. Sabemos da existência de pelo menos três anteriores, inclusive o de Hipócrates de Chios; mas não resta traço desses, nem de outros rivais potenciais de tempos antigos. *Os elementos* de Euclides superaram de tanto seus competidores que foram os únicos a sobreviver. Não eram, como se pensa às vezes, um compêndio de todo o conhecimento geométrico; ao contrário, trata-se de um texto introduzido cobrindo toda a matemática *elementar* — isto é, aritmética (no sentido de "teoria dos números"), geometria sintética (de pontos, retas, círculos e esferas), e álgebra (não no sentido simbólico moderno, mas um equivalente em roupagem geométrica). Note-se que a arte de calcular não está incluída, pois não era parte da instrução na universidade; nem o estudo das cônicas ou de curvas planas de maior grau, pois esse era parte da matemática mais avançada. Proclus descreve *Os elementos*, em relação com o resto da matemática, como as letras do alfabeto em relação com a linguagem. Se *Os elementos* pretendesse ser uma fonte completa de informação, o autor provavelmente incluiria referências a outros autores, informação sobre pesquisas recentes e explicações informais. Porém *Os elementos* se limitam austeramente ao seu campo — a exposição em ordem lógica dos assuntos básicos da matemática elementar. Ocasionalmente, no entanto, autores posteriores interpolaram no texto escólios explicativos, e tais adições foram copiadas por escribas posteriores como parte do texto original. Algumas dessas aparecem em todos os manuscritos existentes agora. O próprio Euclides não manifesta qualquer pretensão de originalidade, e é claro que ele utilizou grandemente obras de seus predecessores. Acredita-se que a ordenação seja dele, e presumivelmente algumas provas foram fornecidas por ele; mas afora isso é difícil avaliar o grau de originalidade dessa obra, a mais renomada na história da matemática.

4 *Os elementos* estão divididos em treze livros ou capítulos, dos quais os seis primeiros são sobre geometria plana elementar, os três seguintes sobre teoria dos números, o Livro X sobre incomensuráveis e os três últimos versam principalmente sobre geometria no espaço. Não há introdução ou preâmbulo, e o primeiro livro começa abruptamente com uma lista de vinte e três definições. A deficiência, aqui, é que algumas definições não definem, pois não há um conjunto prévio de elementos não-definidos em termos dos quais os outros sejam definidos. Assim, dizer como Euclides, que "um ponto é o que não tem parte", ou que "uma reta é comprimento sem largura", ou que "uma superfície é o que tem apenas comprimento e largura" não é definir esses entes, pois uma definição deve ser expressa em termos de coisas precedentes que são melhor conhecidas que as coisas definidas. Também se pode facilmente fazer objeções, por razão de circularidade lógica, a outras assim chamadas "definições" de Euclides tais como "As extremidades de uma reta são pontos", ou "Uma linha reta é uma linha que jaz igualmente com os pontos sobre ela", ou "As extremidades de uma superfície são linhas", todas as quais podem ser devidas a Platão. A definição de Euclides de um ângulo plano como "a inclinação uma com relação a outra de duas retas de um plano que se encontram e não jazem sobre uma mesma reta" é defeituosa porque "inclinação" não foi previamente definida, nem é melhor conhecida que a palavra "ângulo".

Em seguida às definições, Euclides dá uma lista de cinco postulados e cinco noções comuns. Aristóteles tinha feito uma forte distinção entre axiomas (ou noções comuns) e postulados; as primeiras, ele dizia, devem ser convincentes por elas mesmas — verdades comuns a todos os estudos — mas os postulados são menos óbvios e não pressupõem o assentimento do estudante, pois dizem respeito somente ao assunto em discussão. Alguns autores posteriores distinguiram entre os dois tipos de pressuposições aplicando a palavra axioma somente a algo conhecido ou aceito como evidente, enquanto a palavra postulado se referia a alguma coisa a ser "requerida". Não sabemos se Euclides adotava qualquer dessas opiniões, nem mesmo se ele fazia distinção entre dois tipos de pressuposições. Os manuscritos preservados não estão de acordo aqui e em alguns casos as dez pressuposições aparecem juntas numa só categoria. Os matemáticos modernos não vêem diferença entre axioma e postulado. Na maioria dos manuscritos de *Os elementos* encontramos as dez pressuposições seguintes[3].

Postulados. Seja postulado o seguinte.

1. Traçar uma reta de qualquer ponto a qualquer ponto.
2. Prolongar uma reta finita continuamente em uma linha reta.
3. Descrever um círculo com qualquer centro e qualquer raio.
4. Que todos os ângulos retos são iguais.
5. Que, se uma reta cortando duas retas faz os ângulos interiores de um mesmo lado menores que dois ângulos retos, as duas retas, se prolongadas indefinidamente, se encontram desse lado em que os ângulos são menores que dois ângulos retos.

Noções comuns

1. Coisas que são iguais a uma mesma coisa são também iguais entre si.
2. Se iguais são somados a iguais, os totais são iguais.

[3]Veja *The Thirteen Books of Euclid's Elements*, traduzidos e editados por T. L. Heath (1956, 3 vols.)

3. Se iguais são subtraídos de iguais, os restos são iguais.
4. Coisas que coincidem uma com a outra são iguais uma a outra.
5. O todo é maior que a parte.

Aristóteles tinha escrito que "outras coisas sendo iguais, a prova melhor é a que provém de menos postulados", e Euclides evidentemente aceitava esse princípio. Por exemplo, o Postulado 3 é interpretado em seu sentido literal muito limitado, às vezes descrito como uso do compasso euclidiano (não fixável), cujas pernas mantêm uma abertura constante somente enquanto a ponta está sobre o papel, mas caem uma sobre a outra quando levantadas. Isto é, o postulado não é interpretado de modo a permitir o uso de um compasso para marcar uma distância igual a um segmento sobre um outro segmento maior não contíguo, a partir de uma extremidade. Prova-se nas três primeiras proposições do Livro I que essa construção é sempre possível, mesmo com a interpretação estreita do Postulado 3. A primeira proposição justifica a construção de um triângulo equilátero *ABC*, sobre um segmento dado *AB*, construindo por *B* um círculo de centro *A* e um outro por *A* com centro *B*, e tomando como *C* o ponto de intersecção dos dois círculos. (Que eles se cortam é implicitamente assumido.) A Proposição 2 então usa a Proposição 1, mostrando que de qualquer ponto *A*, como extremidade (Fig. 7.3), pode-se marcar um segmento de reta igual a um segmento dado *BC*. Primeiro Euclides traça *AB*, e sobre esse segmento constrói o triângulo equilátero *ABD*, prolongando os lados *DA* e *DB* a *E* e *F* respectivamente. Com *B* como centro traçar o círculo por *C* que corta *BF* em *G*; então com *D* como centro traçar o círculo por *G* que corta *DE* em *H*. Mostra-se então facilmente que *AH* é o segmento pedido. Finalmente, na Proposição 3, Euclides usa a Proposição 2 para mostrar que, dados dois quaisquer segmentos desiguais, pode-se marcar sobre o maior um segmento igual ao menor.

5 Nas três primeiras proposições Euclides se deu a grande trabalho para mostrar que uma interpretação muito limitada do Postulado 3 implica, no entanto, o livre uso de compassos, como usualmente se faz, para marcar distâncias. Mesmo assim, por padrões modernos de rigor as pressuposições euclidianas são inadequadas, e em suas provas Euclides freqüentemente usa postulados tácitos. Por exemplo, na primeira proposição de *Os elementos* ele assume sem prova que os dois círculos vão se cortar num ponto. Para essa situação e outras semelhantes é necessário acrescentar aos postulados um equivalente a um princípio de continuidade. Além disso, os Postulados 1 e 2 como foram expressos por Euclides não garantem nem a unicidade da reta passando por dois pontos não coincidentes, nem sequer sua infinitude; eles dizem apenas que há pelo menos uma, e que ela não tem extremos, no entanto, em suas provas Euclides usa livremente a unicidade e a infinitude. É fácil, é claro, criticar a obra de um homem à luz de desenvolvimentos posteriores e esquecer que "suficiente para o dia é o rigor desse dia". Em seu tempo, *Os elementos*, evidentemente, constituiu o desenvolvimento lógico mais rigorosamente tra-

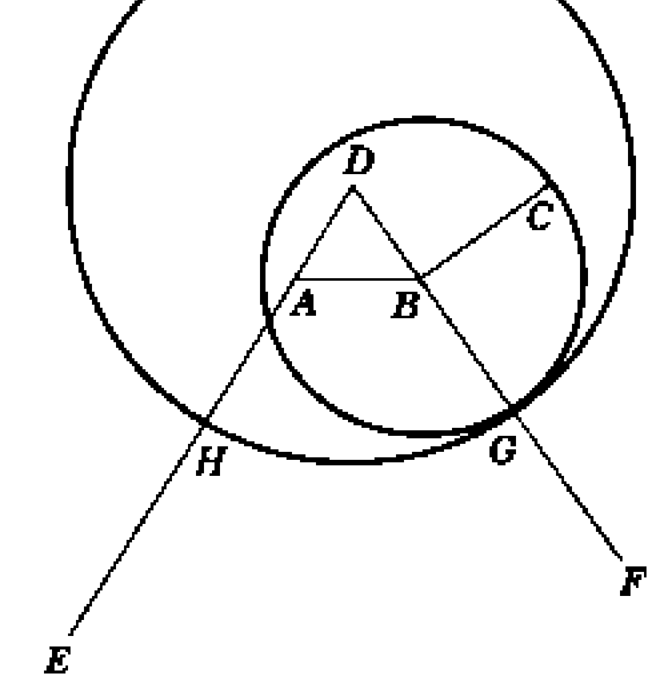


Figura 7.3

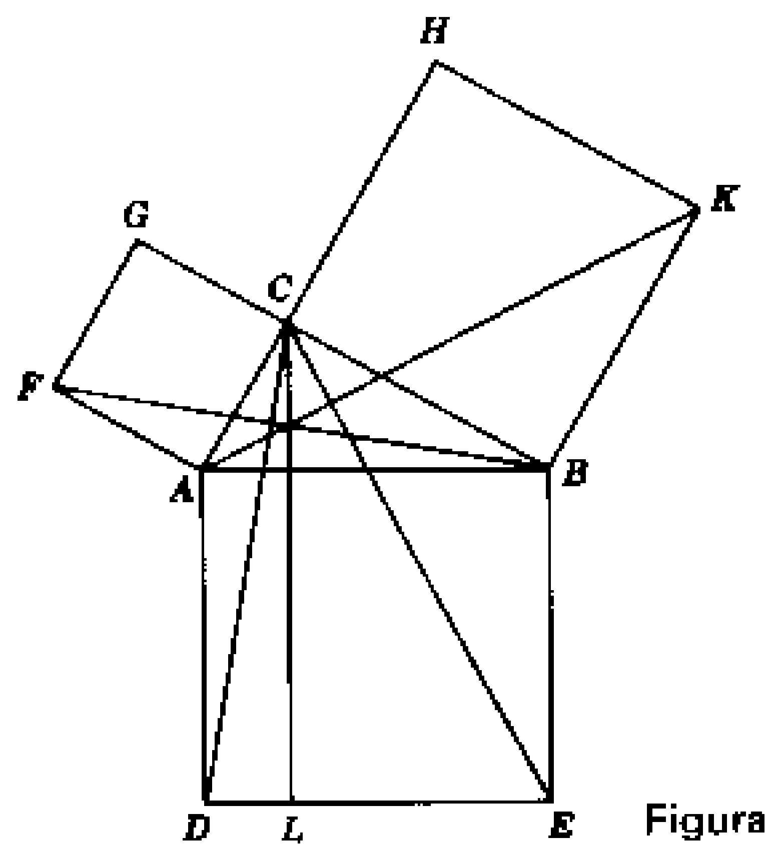


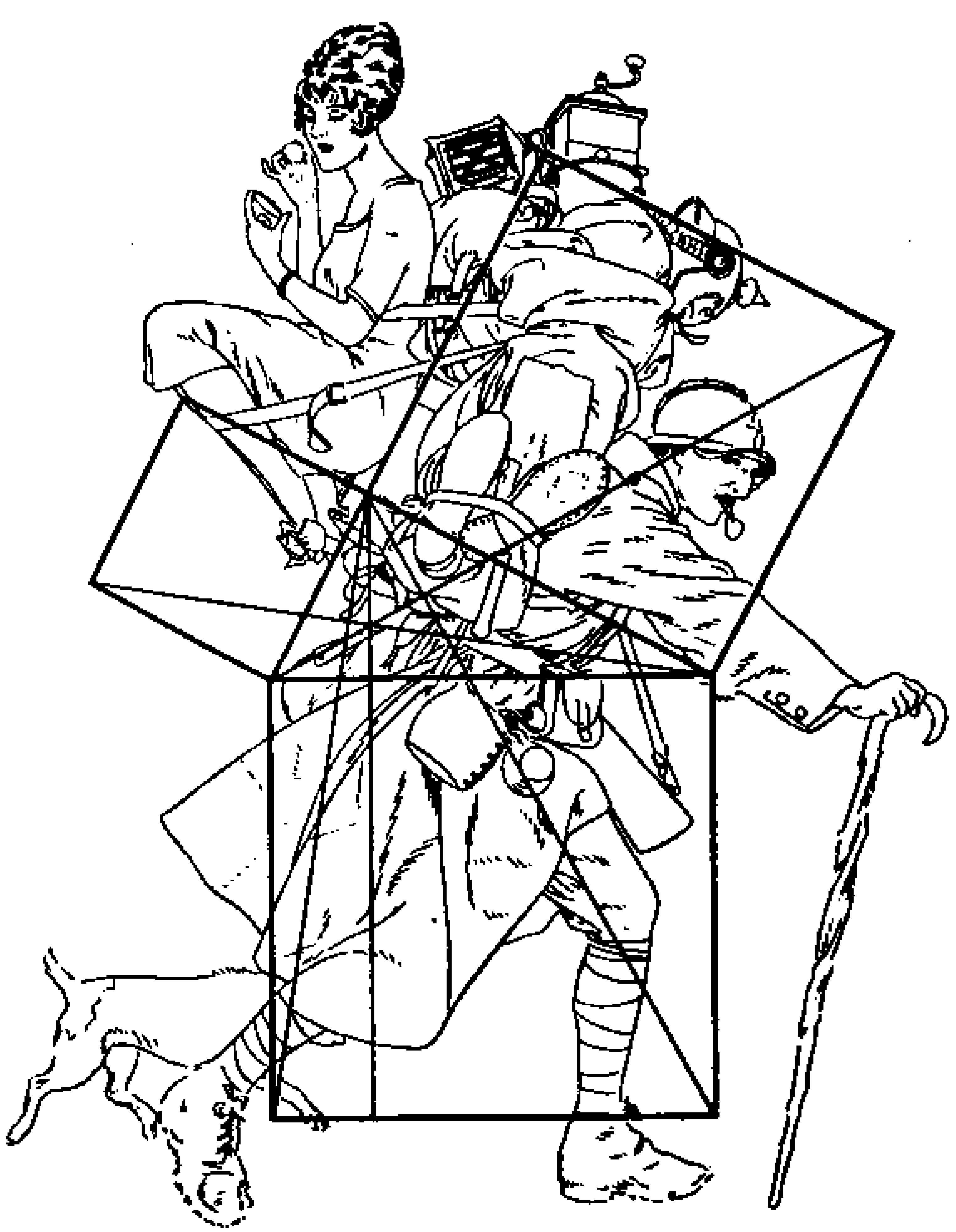
Figura 7.4

tado da matemática elementar que já fora erigido, e dois mil anos deveriam passar-se antes que surgisse uma apresentação mais cuidadosa. Durante esse longo intervalo a maior parte dos matemáticos considerou a exposição de Euclides como logicamente satisfatória e pedagogicamente aceitável.

A maior parte das proposições no Livro I de *Os elementos* é dada em qualquer curso de geometria de escola secundária. Contém os teoremas familiares sobre congruência de triângulos (mas sem um axioma que justifique o método de superposição) sobre construções simples com régua e compasso, sobre desigualdades relativas a ângulos e lados de um triângulo, sobre propriedades de retas paralelas (levando ao fato de ser a soma dos ângulos de um triângulo igual a dois ângulos retos), e sobre paralelogramos (inclusive a construção de um paralelogramo tendo ângulos dados e área igual à de um triângulo dado ou à de uma figura retilínea dada). O livro termina com a demonstração (nas Proposições 47 e 48) do teorema de Pitágoras e sua recíproca. A prova do teorema dada por Euclides não é a usualmente dada nos livros de hoje, nos quais são aplicadas proporções simples aos lados de triângulos semelhantes formados baixando a altura sobre a hipotenusa. Foi dito que Euclides pode ter evitado tal prova por causa das dificuldades envolvidas em comensurabilidade. Somente no Livro V é que Euclides apresenta a bem fundamentada teoria das proporções, e até então o uso de proporcionalidades é evitado o quanto possível. Para o teorema pitagórico Euclides usou em vez disso a bela prova com uma figura às vezes descrita como um moinho de vento, cauda de pavão ou cadeira da noiva (Fig. 7.4). A prova é feita mostrando que o quadrado sobre *AC* é igual a duas vezes o triângulo *FAB* ou a duas vezes o triângulo *CAD* ou ao retângulo *AL*, e que o quadrado sobre *BC* é igual a duas vezes o triângulo *ABK* ou a duas vezes o triângulo *BCE* ou ao retângulo *BL*. Logo a soma dos quadrados é igual à soma dos retângulos, isto é, ao quadrado sobre *AB*. Supõe-se que esta prova é original de Euclides, e muitas conjeturas têm sido feitas quanto à forma possível de provas anteriores. Desde os tempos de Euclides muitas outras provas têm sido propostas.

Euclides tem a seu favor o fato de o teorema de Pitágoras ser seguido imediatamente por uma prova da recíproca: se num triângulo o quadrado sobre um lado é igual à soma dos quadrados sobre os outros dois lados, o ângulo entre esses dois outros lados é reto. Não raro em textos modernos os exercícios que se seguem à prova do teorema de Pitágoras são tais que exigem, não o teorema, mas a recíproca não provada. Há muitas falhas pequenas em *Os elementos*, mas o livro tem todas as virtudes lógicas maiores.

6 O Livro II de *Os elementos* é curto, contendo apenas quatorze proposições, nenhuma das quais desempenha qualquer papel em textos modernos; mas nos dias de Euclides esse livro tinha grande significado. É fácil explicar essa discrepância — hoje temos álgebra simbólica e trigonometria, que substituíram os equivalentes geométricos da Grécia. Por exemplo, a Proposição II.1 diz que "Se são dadas duas retas, e uma é cortada em um número qualquer de segmentos, o retângulo contido pelas duas é igual aos retângulos contidos pela reta não cortada e cada um dos segmentos". Esse teorema que diz (Fig. 7.5) que $AD(AP + PR + RB) = AD \cdot AP + AD \cdot PR + AD \cdot RB$, não é nada mais que um enunciado geométrico de uma das leis fundamentais da aritmética, conhecida hoje como lei distributiva: $a(b + c + d) = ab + ac + ad$. Mais adiante em *Os elementos* (V e VII) achamos demonstrações das leis comutativa e associativa da multiplicação. Ao passo que em nosso tempo as grandezas são representadas por letras que se entende representarem números, conhecidos ou não, sobre os quais operamos com as regras algorítmicas da álgebra, nos dias de Euclides as grandezas eram representadas como segmentos de reta, satisfazendo aos axiomas e teoremas da geometria. Diz-se às vezes que os gregos não possuíam uma álgebra, mas isto é evidentemente falso. Tinham o Livro II de *Os elementos*, que é uma álgebra geométrica servindo aos mesmos fins que nossa álgebra simbólica. Não há dúvida que a álgebra moderna facilita grandemente a manipulação de relações entre grandezas. Mas também é verdade que um geômetra grego conhecendo os quatorze teoremas da "álgebra" de Euclides era muito mais capaz de aplicar esses teoremas a questões práticas de mensuração do que um geômetra experimentado de hoje. A álgebra



τὸ θεώρημα τῆς νύμφης.

(With apologies to *La Vie Parisienne*.)

A "Cadeira da Noiva", diagrama de *Os elementos* I. 47, num cenário da Primeira Guerra Mundial. [*The Mathematical Gazette*, **11** (1922-1923), 364]

geométrica antiga não era um instrumento ideal, mas era eficaz. A afirmação de Euclides (Proposição 4), "se uma reta é cortada ao acaso, o quadrado sobre o todo é igual aos quadrados sobre os segmentos e duas vezes o retângulo contido pelos segmentos" é uma maneira prolixa de dizer que $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, mas seu apelo visual para um escolar de Alexandria deve ter sido muito mais vivido do que seu equivalente algébrico pode ser. É verdade que a prova ocupa página e meia de *Os elementos*; mas quantos escolares de hoje seriam capazes de dar uma prova cuidadosa da regra que usam tão

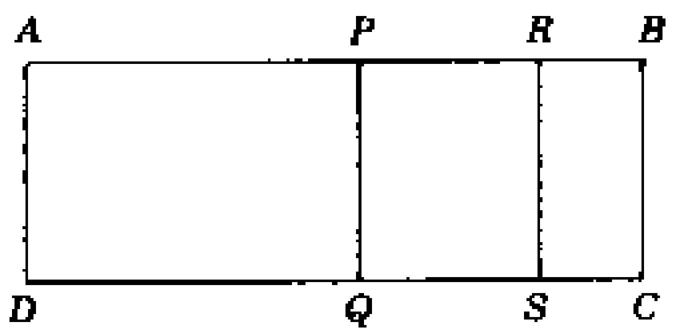


Figura 7.5

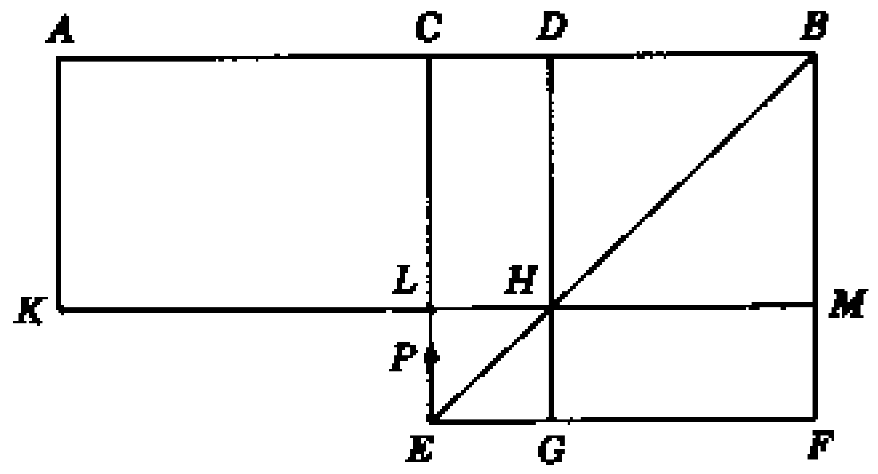


Figura 7.6

livremente? O mesmo vale para *Os elementos* II.5, que contém o que consideraríamos um circunlóquio pouco prático para $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$:

> Se uma reta é cortada em segmentos iguais e desiguais, o retângulo contido pelos segmentos desiguais do todo, junto com o quadrado sobre a reta entre os pontos de secção, é igual ao quadrado sobre a metade.

O diagrama que Euclides usa aqui desempenhou um papel chave na álgebra grega; por isso nós o reproduzimos[4] sem mais explicações. Se no diagrama (Fig. 7.6) fazemos $AC = CB = a$, e $CD = b$, o teorema diz que $(a + b)(a - b) + b^2 = a^2$. A verificação geométrica dessa afirmação não é difícil. Mas o significado do diagrama não está tanto na prova do teorema como no uso que os algebristas geométricos fizeram de diagramas semelhantes. O orgulho do escolar moderno em álgebra é a solução da equação de segundo grau (que ele pode ser ou não capaz de justificar), e um diagrama semelhante a Fig. 7.6 era o equivalente geométrico para o escolar grego. Se lhe pedissem para construir um segmento x tendo a propriedade expressa por $ax - x^2 = b^2$, onde a e b são segmentos tais que $a > 2b$, ele traçaria $AB = a$ e o dividiria ao meio em C. Então em C ele levantaria uma perpendicular CP de comprimento igual a b; com P como centro e raio $a/2$ ele traçaria um círculo, que encontra AB em um ponto D. Então sobre AB ele construiria o retângulo $ABMK$ de largura $BM = BD$ e completaria o quadrado $BDHM$. Essa é a área x^2 que tem a propriedade expressa pela equação quadrática. Os gregos diriam que aplicamos ao segmento $AB (= a)$ um retângulo $AH (= ax - x^2)$ que é igual a um quadrado dado b^2, e que difere para menos (de AM) por um quadrado DM. A demonstração disso resulta da proposição citada acima (II.5) na qual é claro que o retângulo $ADHK$ é igual ao polígono côncavo $CBFGHL$ — isto é, difere de $(a/2)^2$ pelo quadrado $LHGE$, cujo lado, por construção, é $CD = \sqrt{(a/2)^2 - b^2}$.

De modo inteiramente semelhante a equação quadrática $ax + x^2 = b^2$ pode ser resolvida usando II.6:

> Se um segmento de reta é bissectado e um outro é acrescentado a ele em linha reta, o retângulo contido pelo todo (com o segmento que foi acrescentado) e pelo segmento acrescentado junto com o quadrado sobre a metade é igual ao quadrado sobre a reta formada com a metade e o segmento acrescentado.

Dessa vez nós "aplicamos a uma reta dada ($AB = a$) um retângulo ($AM = ax + x^2$) que será igual a um quadrado dado (b^2) e que excederá (AH) por um quadrado" (Fig. 7.7). Nesse caso a distância $CD = \sqrt{(a/2)^2 + b^2}$; como da proposição sabemos que o retângulo $AM (= ax + x^2)$ mais o quadrado $LG [= (a/2)^2]$ é igual ao quadrado $CF [= (a/2)^2 + b^2]$, resulta que a condição $ax + x^2 = b^2$ está satisfeita.

As proposições seguintes no Livro II são variações da álgebra geométrica de que demos exemplos, II.11 sendo um caso especial importante de II.6. Aqui Euclides resolve a equação $ax + x^2 = a^2$ traçando um quadrado $ABCD$ de lado a, bissectando AD em E, traçando EB, prolongando o lado DA a F tal que $EF = EB$, e completando o quadrado $AFGH$ (Fig. 7.8). Então estendendo GH para cortar DC em K, teremos aplicado ao seg-

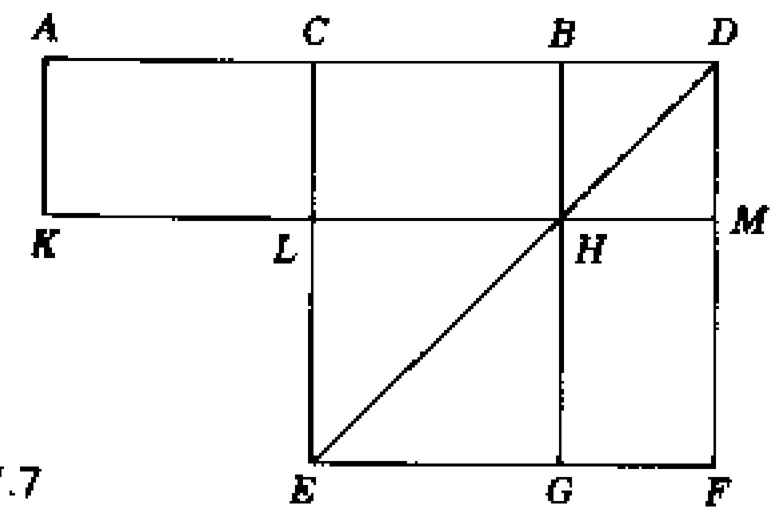


Figura 7.7

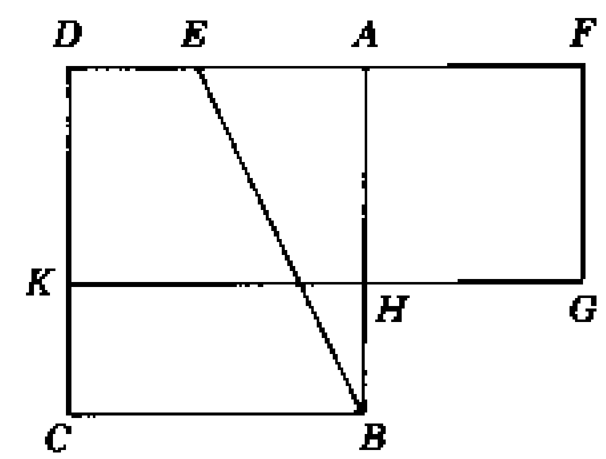


Figura 7.8

[4] Em todo este capítulo as traduções para o inglês e a maior parte dos diagramas são de *Thirteen Books of Euclid's Elements* na edição de T. L. Heath

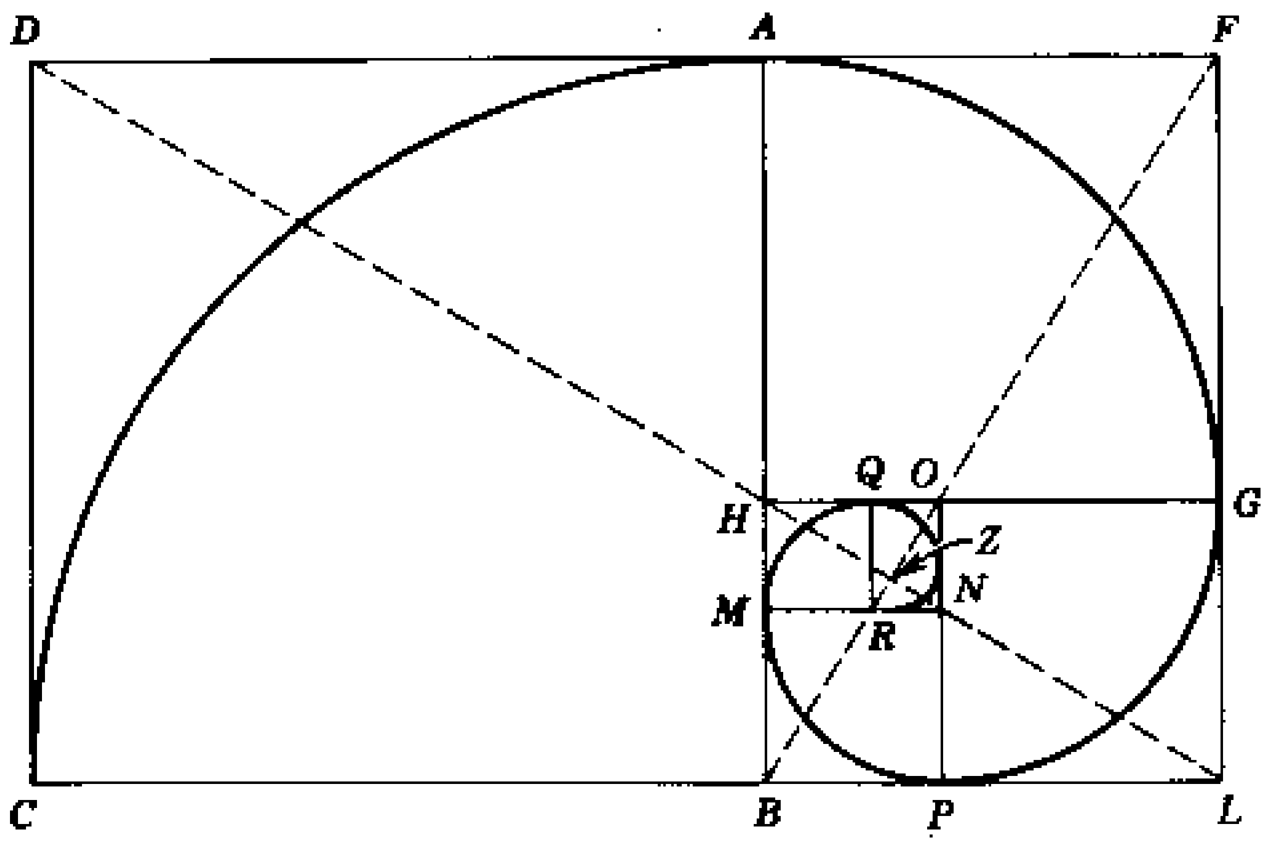


Figura 7.9

mento AD um retângulo $FK(= ax + x^2)$ igual a um quadrado dado $AC(= a^2)$ e excedendo por um quadrado (x^2).

A figura usada por Euclides em *Os elementos* II.11 e novamente em VI.30 (nossa Fig. 7.8), é a base de um diagrama que aparece hoje em muitos livros para ilustrar a propriedade iterativa da secção áurea. Ao *gnômon BCDFGH* acrescentamos o ponto L para completar o retângulo $CDFL$ (Fig. 7.9), e dentro do retângulo menor $LBGH$, que é semelhante ao maior $LCDF$, construímos tomando $GO = GL$, o gnômon $LBMNOG$ semelhante ao $BCDFGH$. Agora dentro do retângulo $BHOP$ que é semelhante aos retângulos maiores $CDFL$ e $LBHG$, construímos o gnômon $PBHQRN$ semelhante aos $BCDFGH$ e $LBMNOG$. Continuando assim indefinidamente, temos uma seqüência infinita de retângulos encaixantes semelhantes, tendendo a um ponto limite Z. Verifica-se que Z, que como se vê facilmente é a intersecção das retas FB e DL, é também o pólo de uma espiral logarítmica tangente aos lados dos retângulos nos pontos $C, A, G, P, M, Q, \ldots$ Outras propriedades notáveis podem ser observadas nesse fascinante diagrama[5].

As Proposições II.12 e II.13 são interessantes porque são um prenúncio do interesse por trigonometria que logo iria florescer na Grécia. Essas proposições serão reconhecidas pelo leitor como formulações geométricas — primeiro para o ângulo obtuso, depois para o ângulo agudo — do que depois se chamou a lei dos co-senos para triângulos planos:

Proposição 12

Em triângulos obtusângulos o quadrado sobre o lado que subentende o ângulo obtuso é maior que os quadrados sobre os lados contendo o ângulo obtuso por duas vezes o retângulo contido por um dos lados contendo o ângulo obtuso, aquele sobre o qual cai a perpendicular, e pelo segmento, cortado do lado de fora pela perpendicular, em direção ao ângulo obtuso.

Proposição 13

Em triângulos acutângulos o quadrado sobre o lado que subentende o ângulo agudo é menor que os quadrados sobre os lados que contêm o ângulo agudo por duas vezes o retângulo contido por um dos lados contendo o ângulo agudo, aquele sobre o qual cai a perpendicular, e o segmento cortado dentro dele pela perpendicular, em direção ao ângulo agudo.

As provas das Proposições 12 e 13 são análogas às usadas hoje em trigonometria, feitas por aplicação dupla do teorema de Pitágoras.

7 Supõe-se geralmente que o conteúdo dos dois primeiros livros de *Os elementos* seja em grande parte devido aos pitagóricos. Os Livros III e IV, de outro lado, tratam da geometria do círculo, e aqui presume-se que muito venha de Hipócrates de Chios. O que

[5]Veja H. S. M. Coxeter, "The Golden Section, Phyllotaxis, and Wythoff's Game", *Scripta Mathematica*, 19 (1953), 135-143

os dois livros contêm não difere muito dos teoremas sobre círculos encontrados nos textos de hoje. A primeira proposição do Livro III, por exemplo, pede a construção do centro de um círculo; a última, Proposição 37, é o enunciado familiar que diz que se de um ponto de um círculo se traçam uma tangente e uma secante, o quadrado sobre a tangente é igual ao retângulo sobre a secante toda e o segmento externo. O Livro IV contém dezesseis proposições, em geral familiares aos estudantes de hoje, relativas a figuras inscritas em, ou circunscritas a, um círculo. Os teoremas sobre medida de ângulos são deixados para depois que a teoria das proporções esteja estabelecida.

8 Dos treze livros de Euclides os mais admirados têm sido o quinto e o décimo — um sobre a teoria das proporções, o outro sobre os incomensuráveis. A descoberta dos incomensuráveis tinha ameaçado a matemática de uma crise lógica, lançando dúvidas sobre provas que usassem proporcionalidade, mas a crise foi enfrentada com sucesso, graças aos princípios enunciados por Eudoxo. Mesmo assim a matemática grega tendia a evitar as proporções. Vimos que Euclides adiou seu uso o quanto possível, e uma relação entre comprimentos da forma $x:a = b:c$ seria pensada como uma igualdade entre áreas $cx = ab$. Mais cedo ou mais tarde, porém, as proporções são necessárias, e assim Euclides atacou o problema no Livro V de *Os elementos*. Alguns comentadores chegaram a sugerir que o livro todo, consistindo de vinte e cinco proposições, é obra de Eudoxo, mas isto parece improvável. Algumas definições — como a de razão — são tão vagas que são inúteis. A Definição 4, porém, é essencialmente o axioma de Eudoxo e Arquimedes: "Diz-se que grandezas têm uma razão de uma para a outra se são capazes, quando multiplicadas, de excederem uma à outra." A Definição 5, de igualdade de razões, é precisamente a que foi dada antes, quando tratamos da definição de proporcionalidade de Eudoxo.

Para o leitor casual o Livro V pode parecer tão supérfluo quanto o Livro II, pois ambos foram superados por regras correspondentes de álgebra simbólica. Um leitor mais cuidadoso, interessado em axiomática, verá que o Livro V trata de tópicos de importância fundamental em toda a matemática. Começa com proposições que equivalem a coisas como distributividade à esquerda e à direita da multiplicação em relação à adição, distributividade à esquerda da multiplicação em relação à subtração, e a lei associativa da multiplicação $(ab)c = a(bc)$. Seguem-se regras para "maior que" e "menor que" e as propriedades bem conhecidas das proporções. Freqüentemente se afirma que a álgebra geométrica grega não poderia ir além do segundo grau em geometria plana, ou do terceiro grau em geometria no espaço, mas não é verdade. A teoria geral das proporções permitiria trabalhar com produtos de qualquer número de dimensões, pois uma equação da forma $x^4 = abcd$ equivale a uma envolvendo produtos de razões de segmentos, como $x/a \cdot x/b = c/x \cdot d/x$.

Tendo desenvolvido a teoria das proporções no Livro V, Euclides explorou-a no Livro VI provando teoremas relativos a razões e proporções que aparecem em triângulos, paralelogramos e outros polígonos que são semelhantes. Merece destaque a Proposição 31, uma generalização do teorema de Pitágoras. "Em triângulos retângulos a figura sobre o lado que subentende o ângulo reto é igual às figuras semelhantes e semelhantemente descritas sobre os lados que contêm o ângulo reto." Proclus atribui esta extensão ao próprio Euclides. O Livro VI contém também (nas Proposições 28 e 29) uma generalização do método de aplicação de áreas, pois a base sólida para as proporções, dada no Livro V, permitia ao autor fazer um uso livre do conceito de semelhança. Os retângulos do Livro II são agora substituídos por paralelogramos, e pede-se aplicar sobre um segmento dado um paralelogramo semelhante a um dado paralelogramo. Essas construções, como as de II.5-6, são na realidade resoluções das equações quadráticas $bx = ac + x^2$, sujeitas à restrição (implicada em IX.27) de ser o discriminante não negativo.

Freqüentemente se pensa, erradamente, que *Os elementos* de Euclides só tratam de geometria. Já descrevemos dois livros (II e V) que são quase exclusivamente algébricos; três livros (VII, VIII e IX) são dedicados à teoria dos números. A palavra "número" para os gregos sempre se referia ao que chamamos números naturais — os inteiros positivos. O Livro VII começa por uma lista de vinte e duas definições distinguindo vários tipos de números — ímpares e pares, primos e compostos, planos e sólidos (isto é, os que são produtos de dois ou três inteiros) e finalmente definindo número perfeito como "aquele que é igual às suas partes". Os teoremas nos Livros VII, VIII e IX devem ser familiares aos leitores que tenham tido um curso elementar de teoria dos números, mas a linguagem das provas certamente não será familiar. Em todos esses livros cada número é representado por um segmento, de modo que Euclides se refere a um número *AB*. (A descoberta dos incomensuráveis tinha mostrado que nem todos os segmentos podem representar inteiros, mas a afirmação recíproca — de que números inteiros podem ser representados por segmentos evidentemente continua válida.) Por isso Euclides não usa frases como "é um múltiplo de" ou "é um fator de", pois ele as substitui por "é medido por" e "mede respectivamente". Isto é, um número n é medido por outro número m se existe um terceiro número k tal que $n = km$.

O Livro VII começa com duas proposições que constituem a célebre regra na teoria dos números, hoje conhecida como "algoritmo de Euclides" para achar o máximo divisor (medida) comum de dois números. É um esquema que sugere a aplicação inversa repetida do axioma de Eudoxo. Dados dois números diferentes, subtrai-se o menor a do maior b repetidamente até que se obtenha um resto r_1 menor do que o menor número; então subtrai-se repetidamente esse resto r_1 de a até resultar um resto $r_2 < r_1$; então subtrai-se repetidamente r_2 de r_1; e assim por diante. Finalmente o processo leva a um resto r_n que mede r_{n-1}, portanto todos os restos precedentes, bem como a e b; este número r_n será o máximo divisor comum de a e b. Entre as proposições seguintes achamos equivalentes de teoremas familiares da aritmética. Assim a Proposição 8 afirma que se $an = bm$ e $cn = dm$ então $(a - c)n = (b - d)m$; a Proposição 24 diz que se a e b são primos com c, então ab é primo com c. Esse livro termina com uma regra (Proposição 39) para achar o mínimo múltiplo comum de vários números.

O Livro III é dos menos interessantes dos treze livros de *Os elementos*. Começa com proposições sobre números em proporção continuada (progressão geométrica) e depois volta-se para propriedades simples de quadrados e cubos, terminando com a Proposição 27: "Números sólidos semelhantes têm entre si a razão que um número cúbico tem a um número cúbico." Esse enunciado diz simplesmente que se temos um "número sólido" $ma \cdot mb \cdot mc$ e um "número sólido semelhante" $na \cdot nb \cdot nc$ então sua razão será $m^3 : n^3$ — isto é, como de um cubo para um cubo.

10 O Livro IX, o último dos três sobre teoria dos números, contém vários teoremas interessantes. Desses o mais célebre é a Proposição 20: "Números primos são mais do que qualquer quantidade fixada de números primos." Isto é, Euclides dá aqui a prova elementar bem conhecida do fato que há infinitos números primos. A prova é indireta, pois mostra-se que a hipótese de haver só um número finito de primos leva a uma contradição. Seja P o produto de todos os primos, supostos em número finito, e consideremos o número $N = P + 1$. N não pode ser primo, pois isso contradiria a hipótese de P ser o produto de *todos* os primos. Logo N é composto e deve ser medido por algum número p. Mas p não pode ser nenhum dos fatores primos que entram em P, senão seria um fator de 1. Logo p deve ser um primo diferente de todos os fatores de P; portanto, a hipótese de P ser o produto de *todos* os primos é falsa.

A Proposição 35 desse livro contém uma fórmula para a soma de números em progressão geométrica, expressa em termos elegantes mas pouco usuais:

> Se tantos números quantos quisermos estão em proporção continuada, e se subtrairmos do segundo e último números iguais ao primeiro, então assim como o excesso do segundo está para o primeiro, o excesso do último estará para todos os que o precedem.

Esse enunciado, é claro, é equivalente à fórmula

$$\frac{a_{n+1} - a_1}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} = \frac{a_2 - a_1}{a_1},$$

que por sua vez equivale a

$$S_n = \frac{a - ar^n}{1 - r}.$$

A proposição seguinte, a última do Livro IX, é a fórmula bem conhecida para números perfeitos: "Se tantos números quantos quisermos, começando com a unidade, forem colocados continuadamente em dupla proporção até que a soma de todos seja um primo, e se a soma for multiplicada pelo último, o produto será perfeito." Isto é, em notação moderna, se $S_n = 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1$ é um primo, então $2^{n-1}(2^n - 1)$ é perfeito. A prova é fácil, em termos da definição de número perfeito dada no Livro VII. Os gregos antigos conheciam os quatro primeiros números perfeitos: 6, 28, 496 e 8 128. Euclides não respondeu à pergunta recíproca — se essa fórmula fornece ou não *todos* os números perfeitos. Sabe-se agora que todos os números perfeitos *pares* são desse tipo, mas a questão da existência de números perfeitos ímpares é ainda um problema não resolvido[6]. Da dúzia e meia de números perfeitos conhecidos hoje todos são pares, mas é arriscado supor que todos sejam.

Nas Proposições 21 a 36 do Livro IX há uma unidade que sugere que em algum período esses teoremas formassem em si um completo sistema matemático, talvez o mais antigo na história da matemática e presumivelmente datando do meio ou começo do quinto século A. C. Foi até sugerido que as Proposições 1 a 36 do Livro IX foram tiradas por Euclides, sem mudança essencial, de um texto pitagórico[7].

11 Antes do advento da álgebra moderna o Livro X era o mais admirado — e o mais temido. Trata da classificação sistemática de segmentos incomensuráveis das formas $a \pm \sqrt{b}$, $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$, $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$ e $\sqrt{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$, onde a e b, quando são da mesma dimensão, são comensuráveis. Hoje diríamos que esse livro trata de *números* irracionais dos tipos acima, onde a e b são *números* racionais; mas Euclides via esse livro como parte da geometria, não da aritmética. Na verdade as Proposições 2 e 3 do livro repetem para grandezas geométricas as duas primeiras proposições do Livro VII, onde o autor tratava de números inteiros. Aqui ele prova que se a dois segmentos desiguais se aplica o processo descrito acima como algoritmo de Euclides, e se o resto nunca mede o que o precede, as grandezas são incomensuráveis. A Proposição 3 mostra que o algoritmo quando aplicado a duas grandezas comensuráveis, fornece a maior medida comum dos segmentos.

O Livro X contém 115 proposições — mais do que qualquer outro — a maior parte das quais contém equivalentes geométricos de números expressos com radicais quadráticos. Entre os teoremas há alguns equivalentes aos processos para racionalizar denominadores de frações da forma $a/(b \pm \sqrt{c})$ e $a/(\sqrt{b} \pm \sqrt{c})$. Segmentos dados por raízes quadradas, ou por raízes quadradas de somas de raízes quadradas, são quase tão fáceis de construir com régua e compasso quanto combinações racionais. Uma razão para os gregos construírem uma álgebra geométrica em vez de uma álgebra aritmética é que, na falta de um conceito de número real, a primeira parecia mais geral. As raízes de $ax - x^2 = b^2$, por exemplo, sempre podem ser construídas (desde que $a > 2b$). Porque, então, Euclides se daria a um trabalho enorme para provar, nas Proposições 17 e 18 do Livro X, as condições sob as quais as raízes dessa equação são comensuráveis com a? Ele mostrou que as raízes são comensuráveis ou incomensuráveis com a conforme a e $\sqrt{a^2 - 4b^2}$ sejam comensuráveis ou não. Foi sugerido[8] que tais considerações indicam que os gregos usavam suas soluções de equações quadráticas para problemas *numéricos* também, como os babilônios o faziam com seus sistemas de equações $x + y = a$, $xy = b^2$. Em tais casos seria vantajoso saber se as raízes serão ou não passíveis de serem expressas como quocientes de inteiros. Um estudo minucioso da matemática grega parece indicar

[6] Para mais detalhes, veja L. E. Dickson, *History of the Theory of Numbers.* (Washington, D. C., 1919-1923, 3 volumes) I, 3-33

[7] Veja Arpád Szabó, "The Transformation of Mathematics into Deductive Science and the Beginnings of Its Foundations on Definitions and Axioms", *Scripta Mathematica*, 27 (1964), 27-48A

[8] Veja Heath, *Elements of Euclid*, III, 43-45

que sob o verniz geométrico havia mais preocupação com a logística e as aproximações numéricas do que os tratados clássicos preservados retratam.

2 O material no Livro XI, que contém trinta e nova proposições sobre geometria em três dimensões, será familiar a quem tenha tido um curso sobre elementos de geometria no espaço. Novamente é fácil criticar as definições, pois Euclides define como sólido "aquilo que tem comprimento, largura e espessura" e então nos diz que "uma extremidade de um sólido é uma superfície". As quatro últimas definições são de quatro sólidos regulares. O tetraedro não está entre eles, presumivelmente por causa de uma definição anterior de pirâmide como "figura sólida, limitada por planos, construída de um plano para qualquer ponto." As dezoito proposições do Livro XII são todas referentes à medida de figuras, usando o método de exaustão. O livro começa com uma prova cuidadosa do teorema que diz que as áreas de círculos estão entre si como os quadrados dos diâmetros. Aplicações semelhantes do típico método de *reductio ad absurdum* são então feitas a medidas volumétricas de pirâmides, cones, cilindros, e esferas. Arquimedes atribui as provas rigorosas desses teoremas a Eudoxo, de quem Euclides provavelmente adaptou muito desse material.

O último livro é inteiramente dedicado a propriedades dos cinco sólidos regulares, fato que levou alguns historiadores a dizer que *Os elementos* foram compostos como uma glorificação das figuras cósmicas ou platônicas. Como uma grande parte do material precedente não tem relação nenhuma com poliedros regulares, tal sugestão é inteiramente gratuita; mas os teoremas finais são um clímax digno desse notável tratado. Seu objetivo é "compreender" cada um dos sólidos numa esfera — isto é, achar a razão de uma aresta do sólido ao raio da esfera circunscrita. Tais cálculos são atribuídos por comentadores gregos a Teaetetus a quem se deve provavelmente muito do Livro XIII. Em preliminares a esses cálculos, Euclides se refere ainda uma vez à divisão de um segmento em média e extrema razão, mostrando que "o quadrado sobre o segmento maior somado com metade do todo é cinco vezes o quadrado sobre a metade" — como se verifica facilmente resolvendo $a/x = x/(a-x)$ — e citando outras propriedades das diagonais de um pentágono regular. Então, na Proposição 10, Euclides provou o teorema, bem conhecido, que um triângulo cujos lados são respectivamente lados do pentágono regular, hexágono regular e decágono regular inscritos num mesmo círculo é retângulo. As proposições 13 a 17 exprimem a razão da aresta para o diâmetro, para cada um dos sólidos regulares, sucessivamente: e/d é $\sqrt{2/3}$ para o tetraedro, $\sqrt{1/2}$ para o octaedro, $\sqrt{1/3}$ para o cubo ou hexaedro, $\sqrt{(5-\sqrt{5})/10}$ para o icosaedro, e $(\sqrt{5}-1)/2\sqrt{3}$ para o dodecaedro. Finalmente, na Proposição 18, a última de *Os elementos*, prova-se facilmente que não pode haver outro poliedro regular além desses. Cerca de 1 900 anos depois, o astrônomo Kepler ficou tão assombrado com esse fato que construiu uma cosmologia sobre os cinco sólidos regulares, acreditando que deveriam ser a chave do criador para a estrutura dos céus.

3 Antigamente não era raro que se atribuísse a um autor célebre obras que não eram dele; assim algumas versões de *Os elementos* de Euclides contêm um décimo quarto e mesmo um décimo quinto volumes, ambos os quais se provou mais tarde serem apócrifos. O assim chamado Livro XIV continua a comparação de Euclides dos sólidos regulares inscritos numa esfera, os resultados principais sendo que a razão das superfícies do dodecaedro e do icosaedro inscritos na mesma esfera é igual à razão de seus volumes, sendo a razão a da aresta do cubo para a aresta do icosaedro — isto é, $\sqrt{10/[3(5-\sqrt{5})]}$. Pensa-se que esse livro pode ter sido escrito por Hipsicles com base num tratado (agora perdido) de Apolônio, comparando o dodecaedro e o icosaedro. (Hipsicles, que provavelmente viveu na segunda metade do segundo século A. C., é o suposto autor de uma obra de astronomia, *De ascensionibus*, a partir da qual pode ter sido adotada a divisão do círculo em 360 partes.) Que o mesmo círculo circunscreve o pentágono do dodecaedro e o triângulo do icosaedro (inscritos na mesma esfera) foi provado, ao que se diz, por Aristeu aproximadamente contemporâneo de Euclides.

O espúrio Livro XV, que é inferior, pensa-se ter sido (ao menos em parte) escrito por Isidoro de Mileto (viveu por volta de 532 D. C.) arquiteto da catedral da Santa

Sabedoria (Hágia Sophia) em Constantinopla. Esse livro também trata dos sólidos regulares, mostrando como inscrever alguns deles em outros, contando o número de arestas e ângulos sólidos nos sólidos, e achando as medidas dos ângulos diedros de faces que se encontram numa aresta. É interessante notar que apesar dessas enumerações os antigos não perceberam a chamada fórmula poliedral enunciada por Euler no século dezoito.

14 *Os elementos* de Euclides não só constituem a mais antiga obra matemática grega importante a chegar até nós, mas o texto mais influente de todos os tempos. Foi composto em 300 A. C. aproximadamente e foi copiado e recopiado repetidamente depois. Erros e variações inevitavelmente se inseriram, e alguns editores posteriores, notadamente Teon de Alexandria no fim do quarto século, tentaram melhorar o original. No entanto, foi possível obter uma boa impressão do conteúdo da versão original comparando a mais de meia dúzia de cópias manuscritas gregas datando principalmente dos séculos dez a doze. Acréscimos posteriores, geralmente aparecendo como escólios, ajuntam informação suplementar, freqüentemente de natureza histórica, e na maior parte dos casos é fácil distingui-los do original. Cópias de *Os elementos* chegaram até nós também em traduções árabes, mais tarde vertidas para o latim no século doze, e finalmente, no século dezesseis, em vernáculo. A primeira versão impressa de *Os elementos* apareceu em Veneza em 1482, um dos primeiros livros de matemática impressos; calcula-se que desde então pelo menos mil edições foram publicadas. Talvez nenhum livro, além da Bíblia, possa se gabar de tantas edições, e certamente nenhuma obra matemática teve influência comparável à de *Os elementos* de Euclides. Como é apropriado o nome que os sucessores de Euclides lhe deram, "o Elementador"!

BIBLIOGRAFIA

Archibald, R. C., ed., *Euclid's Book on Divisions of Figures* (Cambridge: Cambridge University Press, 1915)

Cohen, M. R., e I. E. Drabkin, *A Source Book in Greek Science* (New York: McGraw-Hill, 1948; reimpresso Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1958)

Frankland, W. B., *The First Book of Euclid's Elements, with a Commentary Based Principally upon that of Proclus Diadochus* (Cambridge: Cambridge University Press, 1905)

Heath, T. L., *History of Greek Mathematics* (Oxford: Clarendon, 1921, 2 volumes)

Heath, T. L., ed. *The Thirteen Books of Euclid's Elements* (Cambridge, 1908, 3 volumes; edição em brochura, New York: Dover, 1956)

Hultsch, F. O., "Eukleides", in Pauly-Wissowa, *Real-Enzyclopädie der klassischen Altertumswissenschaft* (Stuttgart, 1909), Vol. VI, colunas 1003-1052

Loria, Gino, *Storia delle matematiche* (Turin: Sten, 1929-1933, 3 volumes)

Sarton, George, *Ancient Science and Modern Civilization* (Lincoln, Nebr.: University of Nebraska Press, 1954)

Szabó, Arpád, "Anfänge des euclidischen Axiomensystems", *Archive for History of Exact Sciences*, **1** (1960), 37-106

Thomas, Ivor, ed., *Selections Illustrating the History of Greek Mathematics* (Cambridge, Mass.: Loeb Classical Library, 1939-1941, 2 volumes)

Thomas-Stanford, Charles, *Early Editions of Euclid's Elements* (Londres: Bibliographical Society, 1926)

Vogt, Heinrich, "Die Lebenzeit Euklids," *Bibliotheca Mathematica* (3), **13** (1913), 193-202

EXERCÍCIOS

1. Descreva as fontes que Euclides provavelmente usou ao escrever *Os elementos*; justifique suas conjeturas.
2. Quais dos treze livros de *Os elementos* você considera o mais importante? Justifique sua resposta.
3. Quais deles você julga mais dispensáveis? Justifique sua resposta.
4. Dados os segmentos a e b construa, só com régua e compasso, segmentos x e y satisfazendo as condições $x + y = a$, $xy = b^2$.
5. Dados os segmentos a e b construa, só com régua e compasso, uma solução x da equação $x^2 = ax + b^2$.
6. Use o algoritmo de Euclides para achar o máximo divisor comum de 456 e 759.
7. Use o algoritmo de Euclides para achar o máximo divisor comum de 567 e 839 e 432.

8. Qual é a maior medida comum de dois segmentos de comprimentos 2/3 e 4/7 respectivamente? De dois segmentos de comprimentos a/b e c/d respectivamente, onde a, b, c, d são inteiros primos entre si?

9. Dados dois segmentos desiguais, a e b, prove que se um segmento c é obtido pelo algoritmo de Euclides, ele é a maior medida comum de a e b.

10. Dê todos os detalhes da prova do teorema de Pitágoras pelo método do "moinho de vento".

11. Todos os números perfeitos pares terminam em 6 ou em 28, e, tirando noves fora, deixam resto 1 (excetuado o primeiro número perfeito). Verifique essas afirmações para os quatro primeiros números perfeitos.

12. Mostre como construir uma tangente a um círculo, por um ponto fora do círculo.

13. Justifique a fórmula de Euclides para a soma dos termos de uma progressão geométrica.

14. O número $2^{13}-1$ é primo. Use esse fato para achar o quinto número perfeito em ordem de grandeza.

15. Prove que não pode haver sólido regular convexo além dos dados por Euclides.

16. Prove a lei dos co-senos para um triângulo acutângulo, indicando até onde Euclides podia ir ao exprimir essa relação.

*17. Em *Os elementos* IX. 14 prova-se que um número pode ser decomposto em fatores primos de uma única maneira.

*18. Prove a fórmula de Euclides para números perfeitos.

*19. Prove, pelo método de exaustão, que os volumes das esferas estão entre si como os cubos dos diâmetros (*Os elementos* XII. 18).

*20. Prove que se um pentágono, um hexágono e um decágono são inscritos no mesmo círculo, um triângulo feito com um lado do pentágono, um do hexágono e um do decágono, é retângulo (*Os elementos* XIII. 10).

*21. A *Divisão de figuras* de Euclides inclui uma construção de uma reta paralela às bases de um trapézio e que divide o trapézio em duas áreas iguais. Mostre como se pode fazer essa construção só com régua e compasso.

Capítulo **8**

Arquimedes de Siracusa

Havia mais imaginação na cabeça de Arquimedes que na de Homero.

Voltaire

1 Durante toda a Idade Helenística o centro da atividade matemática permaneceu em Alexandria, mas o maior matemático desse tempo — e de toda a antiguidade — não nasceu nessa cidade. Arquimedes pode ter estudado por algum tempo em Alexandria com os estudantes de Euclides, e manteve comunicação com os matemáticos de lá, mas ele viveu e morreu em Siracusa. Conhece-se poucos fatos de sua vida, mas tem-se alguma informação tirada da narração de Plutarco da vida de Marcelo, o general romano. Durante a Segunda Guerra Púnica a cidade de Siracusa se viu envolvida na luta entre Roma e Cartago; tendo-se associado a essa última, a cidade foi sitiada pelos romanos durante os anos de 214 a 212 A. C. Lemos que durante o cerco Arquimedes inventou engenhosas máquinas de guerra para conservar o inimigo à distância — catapultas para lançar pedras; cordas, polias e ganchos para levantar e espatifar os navios romanos; invenções para queimar os navios. Por fim, no entanto, Siracusa caiu devido a uma "quinta coluna"; durante o saque da cidade Arquimedes foi morto por um soldado romano, apesar das ordens de Marcelo para que o geômetra fosse poupado. Como se diz que Arquimedes tinha então setenta e cinco anos, provavelmente nasceu em 287 A. C. Seu pai era um astrônomo, e Arquimedes também adquiriu uma reputação em astronomia. Diz-se que Marcelo reservou para si, como parte do saque, engenhosos planetários que Arquimedes tinha construído para retratar os movimentos dos corpos celestes. Todas as narrações da vida de Arquimedes, no entanto, concordam em que ele dava pouco valor a seus engenhos mecânicos, em comparação com o produto de seus pensamentos. Mesmo quando lidava com alavancas e outras máquinas simples, ele estava muito mais interessado em princípios gerais que em aplicações práticas.

2 Arquimedes não foi, é claro, o primeiro a usar alavancas, nem mesmo o primeiro a formular a lei geral. As obras de Aristóteles contêm a afirmação de que dois pesos numa alavanca se equilibram quando são inversamente proporcionais a suas distâncias ao fulcro; e os peripatéticos associavam essa lei à sua pressuposição de que o movimento retilíneo vertical é o único movimento natural sobre a terra. Eles faziam observar que as extremidades dos braços desiguais de uma alavanca, em seus deslocamentos em torno do fulcro, descrevem círculos em vez de retas; a extremidade do braço maior se moverá num círculo que é maior, por isso o caminho se aproximará mais do movimento retilíneo vertical natural do que o do braço mais curto. Portanto, a lei da alavanca é uma conseqüência natural desse princípio cinemático. Arquimedes, de outro lado, deduziu a lei de um postulado estático muito mais plausível — que corpos bilateralmente simétricos estão em equilíbrio. Isto é, suponhamos que uma barra sem peso de quatro unidades de comprimento e suportando três unidades de peso, uma em cada ponta e uma no meio (Fig. 8.1) é balanceada sobre um fulcro no seu centro. Pelo axioma de simetria de Arquimedes o sistema está em equilíbrio. Mas o princípio de simetria mostra também, considerando só o lado direito do sistema, que o equilíbrio se preservará se os dois pesos, situados a uma distância de duas unidades, forem reunidos no ponto médio do braço direito. Isso significa que um peso de uma unidade, a duas unidades do fulcro, suportará um peso sobre o outro braço, de duas unidades, colocado a uma unidade do fulcro. Por uma generalização desse processo, Arquimedes chegou à lei da alavanca por princípios estáticos apenas, sem recorrer ao argumento ci-

Representação em mosaico da morte de Arquimedes. Um tempo se pensou que proviesse do chão de uma sala em Pompéia, hoje se acredita ser uma cópia (ou falsificação) do século dezesseis. (Instituto Municipal de Arte, Frankfurt am Main)

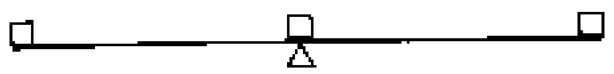


Figura 8.1

nemático aristotélico. Na história da ciência no período medieval se verá que uma conjunção de argumentos cinemáticos e estáticos produziu progressos tanto na ciência como na matemática.

A obra de Arquimedes sobre a lei da alavanca é parte de seu tratado, em dois livros, *Sobre o equilíbrio de planos*. Não é o mais antigo livro existente sobre o que se pode chamar de ciência física, pois, cerca de um século antes, Aristóteles tinha publicado uma obra em oito volumes, chamada *Física*, que foi muito influente; mas ao passo que a obra de Aristóteles era especulativa e não-matemática, o desenvolvimento de Arquimedes se assemelhava à geometria de Euclides. De um conjunto de postulados simples Arquimedes extraía algumas conclusões bastante abstrusas, estabelecendo a relação estreita entre a matemática e a mecânica que deveria vir a ser tão significativa, tanto para a física quanto para a matemática[1]. O primeiro livro no *Equilíbrio de planos* trata de figuras retilíneas e termina com os centros de gravidade do triângulo e do trapezóide. O Livro II concentra a atenção no centro de gravidade de um segmento parabólico e contém o fato que esse centro jaz sobre o diâmetro do segmento e divide esse diâmetro em segmentos, na razão de 3 para 2. O método usado é o já familiar, de exaustão, mas um estudante que conheça

[1]Veja E. J. Dijksterhuis *Archimedes* (1957), pp. 286 e seguintes, onde se chama a atenção para diferenças de opinião quanto ao rigor das provas de Arquimedes

cálculo e o princípio dos momentos (ou lei da alavanca) pode facilmente verificar o resultado.

3 Arquimedes pode bem ser chamado de pai da física matemática, não só por seu *Sobre o equilíbrio de planos* como também por outro tratado, em dois livros, *Sobre corpos flutuantes*. De novo, começando com um simples postulado sobre a natureza da pressão dos fluidos, ele obtém resultados muito profundos. Entre as primeiras proposições estão duas que exprimem o bem conhecido princípio hidrostático de Arquimedes:

> Todo sólido mais leve que um fluido, se colocado nele ficará imerso o suficiente para que o peso do sólido seja igual ao do fluido deslocado (I. 5). Um sólido mais pesado que um fluido, se colocado nele, descerá até o fundo do fluido, e o sólido, se pesado dentro do fluido, pesará menos do que seu peso real de um tanto igual ao peso do fluido deslocado (I. 7)[2].

A derivação matemática desse princípio de flutuação é certamente a descoberta que levou o distraído Arquimedes a saltar fora do banho e correr para casa nu, exclamando "Eureka" (eu achei). É também possível, embora menos provável, que o princípio o tenha ajudado a verificar a honestidade do ourives suspeito de fraudulentamente substituir parte do ouro por prata numa coroa feita para o rei Hiero de Siracusa, amigo (se não parente) de Arquimedes. Uma tal fraude podia facilmente ser detectada pelo método mais simples de comparar as densidades do ouro, da prata, e da coroa simplesmente medindo deslocamentos de água quando pesos iguais de cada um fossem mergulhados num vaso cheio de água. O arquiteto romano posterior, Vitruvius, atribuiu esse método a Arquimedes, ao passo que uma narração poética latina anônima, *De ponderibus et mensuris*, escrita provavelmente em 500 D. C., diz que Arquimedes usou o princípio de flutuação.

O tratado de Arquimedes *Sobre corpos flutuantes* contém muito mais do que as propriedades simples dos fluidos que acabamos de descrever. Virtualmente todo o Livro II, por exemplo, diz respeito à posição de equilíbrio de segmentos de parabolóides imersos em fluidos, mostrando que a posição de equilíbrio depende das gravidades específicas relativas do parabolóide sólido e do fluido em que flutua. A Proposição 4 é um exemplo típico:

> Dado um segmento reto de parabolóide de revolução cujo eixo a é maior que $3/4\,p$ (onde p é o parâmetro), e cuja gravidade específica é menor do que a de um fluido, mas está para esta numa razão não menor que $[a-(3/4)p]^2 : a^2$, se o segmento de parabolóide for colocado no fluido com seu eixo em qualquer ângulo com a vertical, mas de modo que sua base não toque na superfície do fluido, ele não ficará nessa posição mas voltará à posição em que seu eixo está vertical.

Casos ainda mais complicados, com provas longas, vêm em seguida. Arquimedes poderia bem ministrar um curso teórico de arquitetura naval, embora provavelmente preferisse um curso avançado de matemática pura. Não sendo um sábio de gabinete, ele acudia em emergências mecânicas. Uma vez, conta-se, fora construído um navio para o rei Hiero que era pesado demais para ser lançado ao mar, mas Arquimedes, com uma combinação de alavancas e polias, realizou a tarefa. Diz-se que ele se gabou de que, se lhe dessem uma alavanca suficientemente longa e um fulcro para apoiá-la, poderia mover a terra. Foi provavelmente em Alexandria que Arquimedes ficou interessado no problema técnico de fazer subir a água no Nilo para irrigar as partes aráveis do vale; para isso ele inventou um engenho, agora chamado parafuso de Arquimedes, feito de tubos em hélice presos a um eixo inclinado com uma manivela para fazê-lo girar.

4 Na Grécia antiga fazia-se uma clara distinção não só entre teoria e aplicação como entre computação de rotina e o estudo teórico das propriedades dos números. Àquela, que os matemáticos gregos, ao que se diz, olhavam com desprezo, era dado o nome de logística, enquanto que a aritmética, um respeitável assunto de investigação filosófica, entendia-se considerar apenas esse último aspecto. Foi dito até que a atitude antiga com relação à computação rotineira refletia a estrutura social de então, a computação sendo

[2]As traduções para o inglês deste capítulo foram tiradas de *The Works of Archimedes*, editado por T. L. Heath (1897)

relegada aos escravos. Qualquer dose de verdade que haja nisto foi certamente exagerada, pois os gregos se deram ao trabalho de substituir seu sistema numérico antigo, ático ou herodiânico, por um outro marcadamente superior — o jônio ou alfabético. Arquimedes viveu mais ou menos na época em que se efetivou a transição da numeração ática para a jônica[3], e isso pode explicar o fato de ele ter-se rebaixado a dar uma contribuição à logística. Numa obra chamada *Psammites* (computador de areia) Arquimedes se gabava de poder escrever um número maior do que o número de grãos de areia necessários para encher o universo. Ao fazer isso ele se referia a uma das mais audaciosas especulações astronômicas da antiguidade — aquela em que Aristarco de Samos, por meados do terceiro século A. C., propunha pôr a Terra em movimento ao redor do Sol. Um tal sistema astronômico sugeriria que a posição das estrelas fixas deveria mudar quando a terra se deslocasse de muitos milhões de quilômetros ao girar em torno do Sol. A ausência desse deslocamento paralático foi o fator que levou os maiores astrônomos da antiguidade (inclusive, provavelmente, Arquimedes) a rejeitar a hipótese heliocêntrica; mas Aristarco afirmou que a ausência de paralaxe pode ser atribuída à enormidade da distância das estrelas fixas à Terra. Agora, para realizar o que anunciava, Arquimedes tinha, por força, que prever todas as possíveis dimensões do universo, e, portanto, mostrou que podia enumerar os grãos de areia necessários para preencher mesmo o imenso mundo de Aristarco. Arquimedes começou com certas avaliações que tinham sido feitas em seu tempo sobre os tamanhos da Terra, da Lua e do Sol, e as distâncias da Lua, Sol e estrelas. Uma avaliação da circunferência da Terra feita em seu tempo, ele diz, tinha dado como resultado 300 000 estádios (cerca de 30 000 milhas, ou 45 000 quilômetros pois o estádio geralmente usado era aproximadamente um décimo de milha); Arquimedes admitiu a possibilidade de subestimação e assumiu uma circunferência de 3 000 000 estádios. Além disso, Aristarco avaliara o diâmetro do Sol como sendo dezoito ou vinte vezes o da Lua, que por sua vez é menor que a Terra. Por segurança, Arquimedes tomou o diâmetro do Sol como sendo não mais de trinta vezes maior que o da Lua (ou, a fortiori, que o da Terra). Em seguida Arquimedes assumiu que o tamanho aparente do Sol era maior que a milésima parte de um círculo, pois Aristarco tinha calculado que fosse de meio grau, resultado confirmado pela observação. Conhecendo uma limitação superior para o tamanho real do Sol e uma inferior para o tamanho aparente, uma limitação superior para a distância é fácil de calcular. Finalmente, Arquimedes interpretou o universo de Aristarco como tendo um raio que está para a distância do Sol, como esta está para o raio da Terra[4]. Com essas hipóteses Arquimedes mostra que o diâmetro do universo ordinário, indo até o Sol, é menor que 10^{10} estádios. Em seguida ele tinha que avaliar o tamanho de um grão de areia; para maior segurança, ele assumiu que 10 000 grãos de areia não são menos que uma semente de papoula, que o diâmetro de uma semente de papoula não é menor que um quarenta avos da largura de um dedo, e que o estádio por sua vez é menos que 10 000 larguras de dedos. Reunindo todas essas desigualdades, Arquimedes concluiu que o número de grãos de areia necessários para encher a esfera do universo então geralmente aceito é menor que um número que nós escreveríamos como 10^{51}. Para o universo de Aristarco, que está para o universo ordinário como esse está para a Terra, Arquimedes mostrou que são necessários não mais que 10^{63} grãos de areia. Arquimedes não usou essa notação, mas em vez disso descreveu o número como sendo dez milhões de unidades da oitava ordem de números (onde os números de segunda ordem começam com uma miríade de miríades, e os de oitava com a sétima potência de uma miríade de miríades). Para mostrar que podia exprimir um número maior ainda, Arquimedes estendeu sua ter-

[3]No entanto, O. Neugebauer em *Exact Sciences in Antiquity*, 2.ª edição (Providence, R. I.: Brown University Press, 1957), p. 11, acredita que o sistema alfabético já estava em uso vários séculos antes do tempo de Arquimedes

[4]A linguagem do *Psammites* não é clara aqui, mas a interpretação que adotamos parece adequada. Erika e Rudolf von Erhardt, "Archimedes' Sand-Reckoner", *Isis*, 33 (1942), 578-602, disputam a autenticidade do *Psammites*, mas esta é defendida por O. Neugebauer, "Archimedes and Aristarchus", *Isis*, 34 (1942), 4-6

minologia para chamar todos os números de ordem menor que uma miríade de miríades os do primeiro período, o segundo período conseqüentemente começando com o número $(10^8)^{10^8}$, um número que teria 800 000 000 de algarismos. Os períodos é claro continuam pelo 10^8 ésimo período. Isto é, seu sistema iria até uma miríade de miríades de unidades da ordem miríade de miríades, do período miríade de miríades-ésimo - um número que se escreveria como um, seguido de uns oitenta mil milhões de milhões de algarismos. Foi em conexão com esse trabalho sobre números imensos que Arquimedes mencionou, muito incidentalmente, o princípio que mais tarde levou à invenção dos logaritmos — a adição das "ordens" dos números (o equivalente de seus expoentes quando a base é 100 000 000) corresponde a achar o produto dos números.

Ao avaliar a razão da circunferência para o diâmetro de um círculo novamente Arquimedes provou sua habilidade em computação. Começando com o hexágono regular inscrito, ele calculou os perímetros de polígonos obtidos dobrando sucessivamente o número de lados até chegar a noventa e seis lados. Seu processo iterativo para esses polígonos relacionava-se com o que às vezes se chama algoritmo de Arquimedes. Escreve-se a seqüência $P_n, p_n, P_{2n}, p_{2n}, P_{4n}, p_{4n}, \ldots$ onde P_n e p_n são os perímetros dos polígonos regulares circunscrito e inscrito de n lados. Começando do terceiro termo, calcula-se cada termo a partir dos dois precedentes tomando alternadamente a média harmônica e a média geométrica. Isto é, $P_{2n} = 2p_nP_n/(p_n + P_n)$, $p_{2n} = \sqrt{p_nP_{2n}}$, etc. Também se pode usar a seqüência $a_n, A_n, a_{2n}, A_{2n}, \ldots$ onde a_n e A_n são as áreas dos polígonos regulares inscrito e circunscrito de n lados. O terceiro termo e os seguintes são calculados tomando alternadamente as médias geométrica e harmônica, de modo que $a_{2n} = \sqrt{a_nA_n}$, $A_{2n} = 2A_na_{2n}/(A_n + a_{2n})$, etc. Seu método para calcular raízes quadradas, ao achar o perímetro do hexágono circunscrito, e para médias geométricas, era semelhante ao dos babilônios. O resultado do cálculo de Arquimedes sobre o círculo foi uma aproximação do valor de π expressa pelas desigualdades $3\,10/71 < \pi < 3\,10/70$, uma aproximação melhor que a dos egípcios e a dos babilônios. (Deve-se ter em mente que nem Arquimedes nem qualquer outro matemático grego jamais usou nossa notação para a razão da circunferência para o diâmetro num círculo.) Esse resultado foi dado na Proposição 3 do tratado *Sobre as medidas do círculo*, uma das obras de Arquimedes mais populares no período medieval. Essa pequena obra, provavelmente incompleta na forma que chegou até nós, contém apenas três proposições, das quais uma é a prova, pelo método de exaustão, de que a área do círculo é igual à do triângulo retângulo tendo a circunferência do círculo como um lado e o raio do círculo como o outro. É improvável que Arquimedes tenha sido o descobridor desse teorema, pois está pressuposto na quadratura do círculo atribuída a Dinóstrato.

Arquimedes, como seus predecessores, foi atraído pelos três famosos problemas de geometria, e a bem conhecida espiral de Arquimedes forneceu soluções para dois deles (não, é claro, só com régua e compasso). A espiral é definida como o lugar geométrico no plano de um ponto que se move, partindo da extremidade de um raio ou semi-reta, uniformemente ao longo do raio enquanto esse por sua vez gira uniformemente em torno de sua origem. Em coordenadas polares a equação é $r = a\theta$. Dada uma tal espiral, a trissecção de um ângulo é fácil. O ângulo é colocado de modo que seu vértice e primeiro lado coincidam com o ponto inicial O da espiral e a posição inicial OA da semi-reta. O segmento OP, onde P é o ponto em que o segundo lado do ângulo corta a espiral, é então dividido em terços pelos pontos R e S (Fig. 8.2), e círculos são traçados com O como centro e raios OR e OS. Se esses círculos cortam a espiral nos pontos U e V, as retas OU e OV trissectam o ângulo AOP.

A matemática grega tem sido descrita como essencialmente estática, com pouca consideração pela idéia de variabilidade; mas Arquimedes, em seu estudo da espiral, parece ter achado a tangente a uma curva por considerações cinemáticas aparentadas ao cálculo diferencial. Pensando num ponto sobre a espiral $r = a\theta$ como sujeito a um duplo movimento — um movimento radial uniforme, afastando-se da origem das coordenadas e um movimento circular uniforme em torno da origem — ele parece ter achado

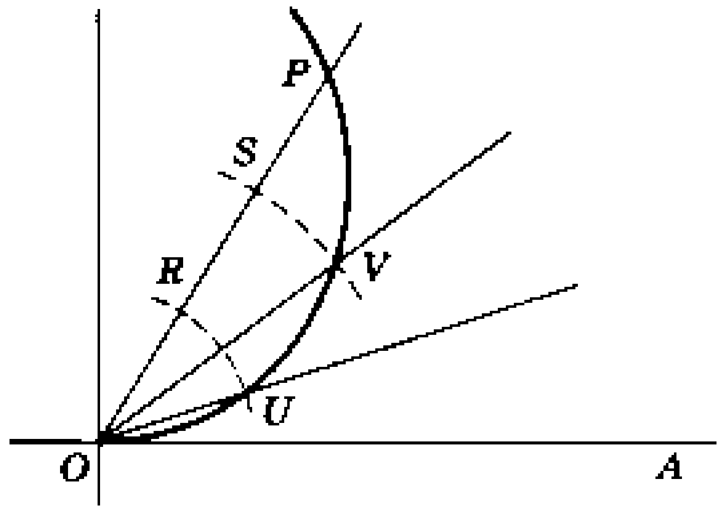


Figura 8.2

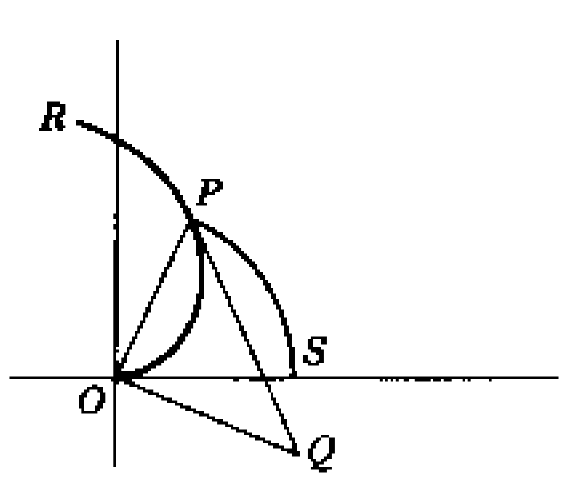


Figura 8.3

(através do paralelogramo de velocidades) a direção do movimento (logo da tangente à curva) observando o resultante dos dois movimentos componentes. Parece ser esse o primeiro caso em que foi achada a tangente a uma curva que não era o círculo.

O estudo que Arquimedes fez da espiral, curva que ele atribuiu a seu amigo Conon de Alexandria, era parte da busca de soluções dos três problemas famosos. A curva se presta tão bem a subdivisões de ângulos que pode bem ter sido inventada por Conon para esse fim. Como no caso da quadratriz, porém, ela também serve para quadrar o círculo, como Arquimedes mostrou. Pelo ponto P trace-se a tangente à espiral OPR e suponhamos que essa tangente corte no ponto Q a reta por O que é perpendicular a OP. Então, provou Arquimedes, o segmento de reta OQ (chamado subtangente polar para o ponto P) tem comprimento igual ao do arco circular PS do círculo com centro O e raio OP (Fig. 8.3) que é cortado pela semi-reta inicial (polar) e pela semi-reta OP (raio vetor). Esse teorema, provado por Arquimedes por uma típica dupla *reductio ad absurdum*, pode ser verificado por um estudante de cálculo que se lembre de que tg $\psi = r/r'$, onde $r = f(\theta)$ é a equação polar de uma curva, r' é a derivada de r em relação a θ, e ψ é o ângulo entre o raio vetor num ponto P e a tangente à curva no ponto P. Uma grande parte da obra de Arquimedes, é tal que hoje seria incluída num curso de cálculo, o que é particularmente verdade da obra *Sobre espirais*. Se o ponto P sobre a espiral é escolhido como intersecção da espiral com a reta de ângulo 90° em coordenadas polares a subtangente polar OQ será precisamente igual ao quarto da circunferência do círculo de raio OP. Portanto, a circunferência toda se constrói facilmente, como quatro vezes o segmento OQ, e pelo teorema de Arquimedes se acha um triângulo de área igual à do círculo. Uma transformação geométrica simples produz um quadrado em lugar do triângulo, e a quadratura do círculo está feita.

Entre as vinte e oito proposições em *Sobre espirais* há várias que dizem respeito a áreas associadas à espiral. Por exemplo, mostra-se na Proposição 24 que a área varrida pelo raio vetor em sua primeira rotação completa é um terço da área do "primeiro círculo" — isto é, o círculo com centro no pólo e raio igual ao comprimento do raio vetor correspondente ao fim da primeira rotação completa. Arquimedes usou o método de exaustão mas novamente um estudante hoje pode facilmente verificar o resultado lembrando que essa área é $1/2 \int_0^{2\pi} r^2\, d\theta$. Ainda mais, pode-se mostrar facilmente com métodos de cálculo, como Arquimedes mostrou pelo método mais difícil de exaustão, que na rotação seguinte a área do anel adicional R_2 (limitado pela primeira e segunda voltas da espiral e a parte do eixo polar entre as duas intersecções, após a primeira e a segunda voltas) é seis vezes a da região R_1 varrida na primeira rotação. As áreas dos anéis adicionais, acrescentadas em sucessivas rotações, são dadas pela regra simples de recorrência $R_{n+1} = nR_n/(n-1)$, como Arquimedes mostrou.

7 A obra *Sobre espirais* foi muito admirada mas pouco lida, pois era geralmente considerada a mais difícil obra de Arquimedes. Dos tratados que se ocupavam principalmente do método de exaustão (isto é, o cálculo integral) o mais popular era *Quadratura da parábola*. As secções cônicas eram conhecidas havia já mais de um século quando Arquimedes escreveu, mas nenhum progresso fora feito no cálculo de suas áreas. Só o maior matemático da antiguidade conseguiu resolver a questão de quadrar uma secção cônica — um segmento de parábola — coisa que ele realizou na Proposição 17 da obra em que o objetivo era a quadratura. A prova pelo método de exaustão é longa e elaborada, mas Arquimedes provou rigorosamente que a área K de um segmento parabólico $APBQC$ (Fig. 8.4) é quatro

terços da área de um triângulo T tendo a mesma base e mesma altura. Nas sete proposições seguintes (e últimas) Arquimedes deu uma segunda prova, diferente, do mesmo teorema. Primeiro mostrou que a área do maior triângulo inscrito, ABC, sobre a base AC é quatro vezes a soma dos triângulos correspondentes inscritos sobre cada um dos lados AB e BC como base. Continuando o processo sugerido por essa relação, fica claro que a área K do segmento parabólico ABC é dado pela soma da série infinita $T + T/4 + T/4^2 + \ldots + T/4^n + \ldots$, que vale $4/3\ T$. Arquimedes não falou em soma de série infinita, pois, processos infinitos eram mal vistos em seu tempo; em vez disso ele provou por uma dupla *reductio ad absurdum* que K não pode ser nem maior nem menor que $4/3\ T$. (Arquimedes, como seus predecessores, não usou o nome *parábola*, mas a palavra *orthotome* ou secção de um cone reto.)

No preâmbulo da *Quadratura da parábola* encontramos a pressuposição ou lema que se chama usualmente hoje de axioma de Arquimedes: "Que o excesso pelo qual a maior de duas áreas diferentes excede a menor pode, sendo somada a si mesma, vir a exceder qualquer área finita dada." Esse axioma elimina o infinitésimo ou indivisível fixo, que tinha sido muito discutido no tempo de Platão. É essencialmente o mesmo que o axioma de exaustão e Arquimedes admitiu francamente que

> Os geômetras de antes também usaram esse lema, pois é por seu uso que mostraram que círculos estão entre si na razão dupla de seus diâmetros, e que esferas estão entre si na razão tripla de seus diâmetros; e ainda que toda pirâmide é um terço do prisma de mesma base que a pirâmide e mesma altura; também, que todo cone é um terço do cilindro de mesma base que o cone e mesma altura, eles provaram assumindo um lema semelhante a esse.

Os "geômetras de antes" mencionados aqui presumivelmente incluem Eudoxo e seus sucessores.

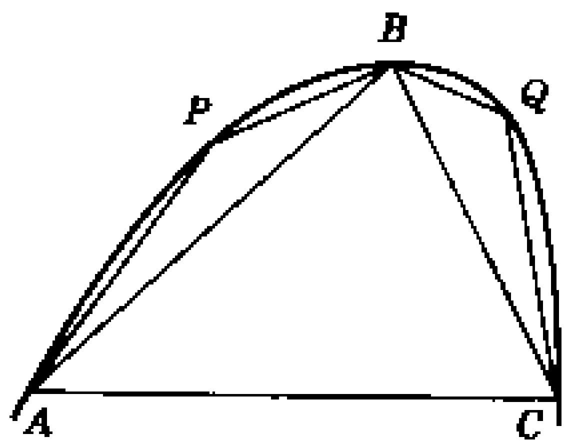


Figura 8.4

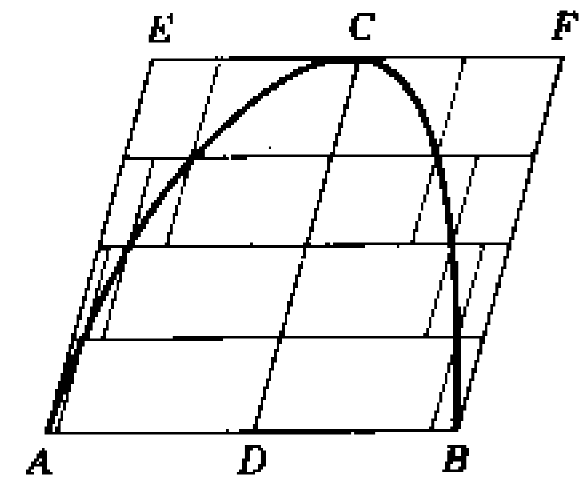


Figura 8.5

Arquimedes aparentemente não conseguiu achar a área de um segmento geral de elipse ou hipérbole. Achar hoje a área de um segmento parabólico por integração não envolve nada pior do que polinômios, mas as integrais que surgem na quadratura de um segmento de elipse ou hipérbole (assim como nos comprimentos de arco dessas curvas ou da parábola) exigem funções transcendentes. No entanto, em seu importante tratado *Sobre conóides e esferóides* Arquimedes achou a área da elipse *inteira*: "As áreas das elipses são como os retângulos sob seus eixos." (Proposição 6). Isso é dizer que a área de $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ é πab ou que a área da elipse é igual à área de um círculo cujo raio é a média geométrica dos semieixos da elipse. Além disso, no mesmo tratado Arquimedes mostrou como achou os volumes dos segmentos cortados de um elipsóide ou parabolóide ou hiperbolóide (de duas folhas) de revolução em torno do eixo principal. O processo que usou se parece tanto com o de integração que o descreveremos em um caso. Seja ABC um segmento de parabolóide (ou conóide paraboloidal) e seja CD seu eixo (Fig. 8.5); em volta do sólido vamos circunscrever o cilindro circular $ABEF$, também tendo CD como eixo. Dividamos o eixo em n partes iguais de comprimento h, e pelos pontos de divisão tomemos os planos paralelos à base. Sobre as secções circulares que são cortadas no parabolóide por esses planos construímos os troncos cilíndricos circunscrito e inscrito, como se vê na figura. É fácil estabelecerem-se então, usando a equação da parábola e a soma de progressão aritmética, as seguintes proporções e desigualdades:

$$\frac{\text{cilindro } ABEF}{\text{figura inscrita}} = \frac{n^2h}{h + 2h + 3h + \ldots + (n-1)h} > \frac{n^2h}{1/2\, n^2h};$$

$$\frac{\text{cilindro } ABEF}{\text{figura circunscrita}} = \frac{n^2h}{h + 2h + 3h + \ldots + nh} < \frac{n^2h}{1/2\, n^2h}.$$

Arquimedes tinha mostrado previamente que a diferença de volume entre as figuras circunscrita e inscrita era igual ao volume da fatia de baixo do cilindro circunscrito; aumentando o número h de subdivisões do eixo, com isso fazendo cada fatia ficar mais fina, a diferença entre as figuras circunscrita e inscrita pode ser tornada menor que qualquer grandeza prefixada. Daí as desigualdades levam à conclusão que o volume do cilindro é duas vezes o volume do segmento conoidal. Essa obra difere do processo moderno do cálculo integral essencialmente pela falta de conceito de limite de função — conceito que estava tão próximo e no entanto nunca foi formulado pelos antigos, nem mesmo por Arquimedes, o homem que chegou mais perto de consegui-lo.

9 Arquimedes escreveu muitos tratados maravilhosos, dentre os quais seus sucessores se inclinavam a admirar mais *Sobre espirais*. O próprio autor parece ter preferido outro, *Sobre a esfera e o cilindro*. Arquimedes pediu que sobre seu túmulo fosse esculpida uma representação de uma esfera inscrita num cilindro circular reto cuja altura é igual ao seu diâmetro, pois ele tinha descoberto, e provado, que a razão dos volumes do cilindro e da esfera é igual à razão das áreas, isto é, três para dois. Essa propriedade, que Arquimedes descobriu após sua *Quadratura da parábola* era, diz ele, desconhecida dos geômetras que o precederam. Tinha-se pensado outrora[5] que os egípcios sabiam achar a área de um hemisfério; mas agora Arquimedes aparece como o primeiro a saber, e provar que a área da esfera é quatro vezes a área de um seu círculo máximo. Além disso, Arquimedes mostrou que "a superfície de qualquer segmento da esfera é igual à de um círculo cujo raio é igual a uma reta tirada do vértice do segmento à circunferência do círculo que é base do segmento". Isso, é claro, equivale ao enunciado mais familiar que diz que a área da superfície de qualquer segmento esférico é igual à da superfície curva de um cilindro cujo raio é o mesmo que o da esfera e cuja altura é igual à do segmento. Isto é, a área da superfície do segmento não depende da distância do centro da esfera, mas somente da altura (ou espessura) do segmento. O teorema crucial sobre a superfície da esfera aparece em Proposição 33, após uma longa série de teoremas preliminares incluindo um que equivale à integração da função seno:

Se um polígono é inscrito num segmento de círculo LAL' de modo que todos os seus lados exceto a base são iguais e seu número par, como $LK \ldots A \ldots K'L'$, sendo A o ponto médio do segmento; e se as retas BB', CC', ... paralelas à base LL' e unindo pares de vértices são traçadas, então $(BB' + CC' + \ldots + LM) : AM = A'B : BA$, onde M é o ponto médio de LL' e AA' é o diâmetro por M (Fig. 8.6).

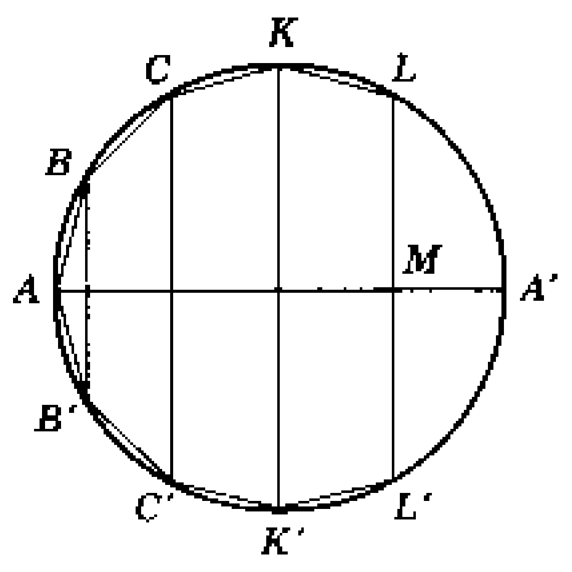


Figura 8.6

[5]Veja R. G. Archibald, *Outline of the History of Mathematics*, 6.ª ed., (The American Mathematical Monthly, Slaught Memorial Papers N.º 2, Janeiro, 1949), pp. 15-16. Cf. notas de rodapé 10 e 11 do Cap. 2

Isso é o equivalente geométrico da equação trigonométrica.

$$\operatorname{sen}\frac{\theta}{n} + \operatorname{sen}\frac{2\theta}{n} + \ldots + \operatorname{sen}\frac{n-1}{n}\,\theta + \frac{1}{2}\operatorname{sen}\frac{n\theta}{n} = \frac{1-\cos\theta}{2}\operatorname{cotg}\frac{\theta}{2n}.$$

Desse teorema é fácil obter a expressão $\int_0^\phi \operatorname{sen} x\, dx = 1 - \cos \phi$, multiplicando ambos os membros da equação acima por θ/n e passando ao limite para n crescendo a infinito. O primeiro membro fica

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \operatorname{sen} x_i \Delta x_i ,$$

onde $x_i = i\theta/n$ para $i = 1, 2, \ldots, n$, $\Delta x_i = \theta/n$ para $i = 1, 2, \ldots, n-1$, e $\Delta x_n = \theta/2n$. O segundo membro fica

$$(1 - \cos\theta) \lim_{n\to\infty} \frac{\theta}{2n} \operatorname{cotg} \frac{\theta}{2n} = 1 - \cos\theta.$$

O equivalente do caso especial $\int_0^\pi \operatorname{sen} x\, dx = 1 - \cos\pi = 2$ tinha sido dado por Arquimedes na proposição anterior.

A fórmula familiar para o volume da esfera aparece em *Sobre a esfera e cilindro* I.34:

Toda esfera é igual a quatro vezes o cone que tem base igual ao círculo máximo da esfera e altura igual ao raio da esfera.

O teorema é provado pelo método usual de exaustão, e a razão entre o volume e a área da superfície da esfera e cilindro circunscrito seguem como corolário simples. O diagrama da esfera em um cilindro foi de fato esculpido no túmulo de Arquimedes, como sabemos por uma referência de Cícero. Quando foi questor na Sicília, o orador romano achou o túmulo abandonado com a figura. Ele restaurou o túmulo — o que foi quase a única contribuição de um romano à história da matemática — mas a partir daí qualquer traço dele desapareceu.

10 Um problema no Livro II de *Sobre a esfera e cilindro* lança uma curiosa luz sobre a álgebra geométrica dos gregos. Na Proposição 2 Arquimedes justifica sua fórmula para o volume de um segmento de uma esfera dada; na Proposição 3 ele mostra que, para cortar uma esfera dada por um plano de modo que as *superfícies* dos segmentos estejam numa razão dada, simplesmente se traça um plano perpendicular a um diâmetro por um ponto sobre o diâmetro que o divida em dois segmentos tendo a razão dada. Então mostra na Proposição 4 como cortar a esfera dada de modo que os *volumes* dos dois segmentos estejam numa razão dada um problema muito mais difícil. Em notação moderna, Arquimedes foi levado à equação

$$\frac{4a^2}{x^2} = \frac{(3a - x)(m + n)}{ma},$$

onde $m{:}n$ é a razão dos segmentos. Essa é uma equação cúbica, e Arquimedes atacou sua solução como seus predecessores tinham feito com o problema de Delos — através de intersecções de cônicas. É interessante que o método de ataque usado pelos gregos para cúbicas era muito diferente do usado para a equação quadrática. Por analogia com a "aplicação de áreas" no último caso, esperaríamos uma "aplicação de volumes", mas esse não foi o caminho seguido. Por substituições Arquimedes reduziu sua equação cúbica à forma $x^2(c - x) = db^2$ e prometeu dar em separado uma análise completa dessa cúbica quanto ao número de raízes positivas. Essa análise tinha aparentemente estado perdida havia séculos quando Eutocius, um importante comentador do começo do sexto século, achou um fragmento que parece conter a autêntica análise de Arquimedes. A solução foi obtida por meio da intersecção da parábola $cx^2 = b^2y$ e da hipérbole $(c - x)y = cd$. Indo além, ele achou uma condição sobre os coeficientes que determina o número de raízes reais que satisfazem às condições dadas — uma condição equivalente a achar o discri-

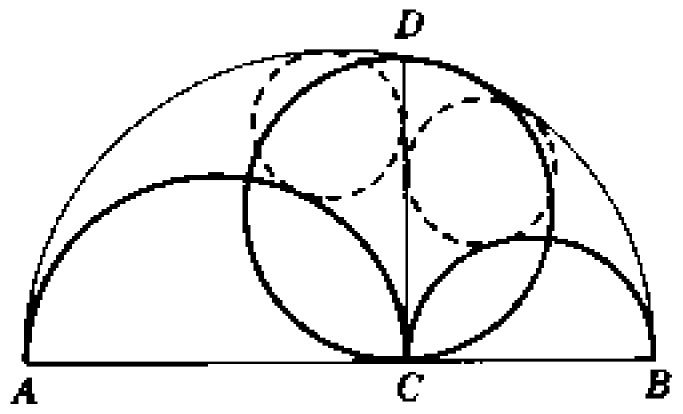


Figura 8.7

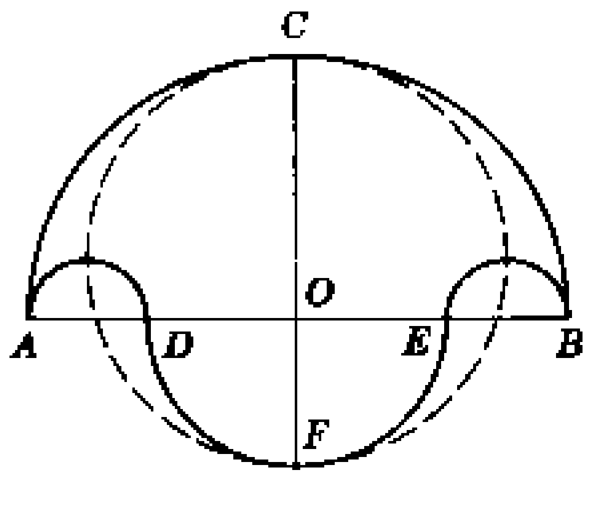


Figura 8.8

minante, $27b^2d-4c^3$, da equação cúbica $b^2d = x^2(c-x)$. (Isso pode ser facilmente verificado usando um pouco de Cálculo elementar.) Como toda equação cúbica pode ser transformada no tipo arquimediano, temos a essência de uma análise completa da cúbica geral. O interesse pela equação cúbica desapareceu logo após Arquimedes, sendo revivido por algum tempo por Eutocius e séculos mais tarde pelos Árabes.

11 A maior parte dos tratados de Arquimedes que descrevemos dizem respeito a matemática avançada, mas o grande siracusano não desprezava problemas elementares. Em seu *Livro de lemas*, por exemplo, achamos um estudo do chamado *arbelos* ou "faca do sapateiro". A faca do sapateiro é a região limitada pelos três semicírculos tangentes em pares na Fig. 8.7, a área em questão sendo aquela que está dentro do semicírculo maior e fora dos menores. Arquimedes mostrou na Proposição 4 que se CD é perpendicular a AB, a área do círculo com CD como diâmetro é igual à área do arbelos. Na proposição seguinte ele mostra que os dois círculos inscritos nas duas regiões em que CD divide o arbelos são iguais.

O *Livro de lemas* contém também um teorema (Proposição 14) sobre o que Arquimedes chamou o *salinon* ou "saleiro". Trace semicírculos com os segmentos AB, AD, DE e EB como diâmetros (Fig. 8.8) com $AD = EB$. Então a área total limitada pelo *salinon* (inteiramente limitada por arcos semicirculares) é igual à área do círculo tendo por diâmetro o eixo de simetria da figura, FOC.

É no *Livro de lemas* que achamos também (como Proposição 8) a bem conhecida trissecção do ângulo de Arquimedes. Seja ABC o ângulo a ser trissectado (Fig. 8.9). Então com B como centro, traçar um círculo de qualquer raio, que cortará AB em P, BC em Q, e BC estendido em R. Então traçar uma reta STP tal que S esteja em $CQBR$ estendida e T sobre o círculo e tal que $ST = BQ = BP = BT$. Verifica-se então facilmente, pois que os triângulos STB e TBP são isósceles, que o ângulo BST é precisamente um terço do ângulo QBP, o ângulo a ser trissectado. Arquimedes e seus contemporâneos sabiam, é claro, que essa não era uma trissecção canônica no sentido platônico, pois envolve o que chamavam de *neusis* — isto é, a inserção de um comprimento dado, no caso $ST = BQ$, entre duas figuras, aqui a reta QR estendida e o círculo.

O *Livro de lemas* não se preservou no original grego mas em tradução árabe, que depois foi por sua vez traduzida para o latim. (Por isso freqüentemente é designado por seu título em latim de *Liber assumptorum*.) Na verdade a obra que chegou em latim até nós não pode ser genuinamente a de Arquimedes, pois seu nome é várias vezes citado no texto. No entanto, mesmo que não seja senão uma miscelânia de teoremas que os árabes atribuíam a Arquimedes, a obra provavelmente é, em substância, autêntica. Há

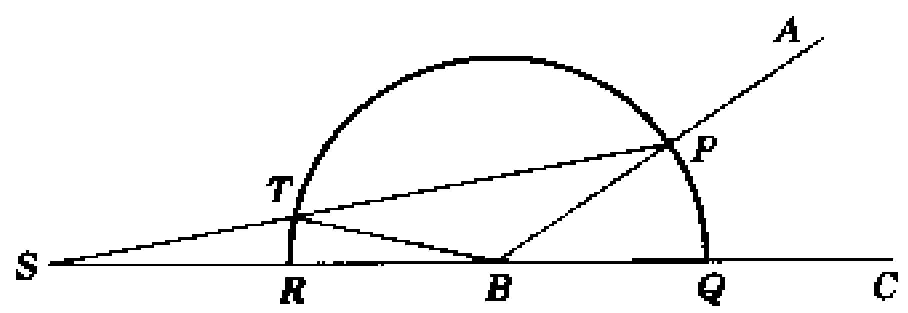


Figura 8.9

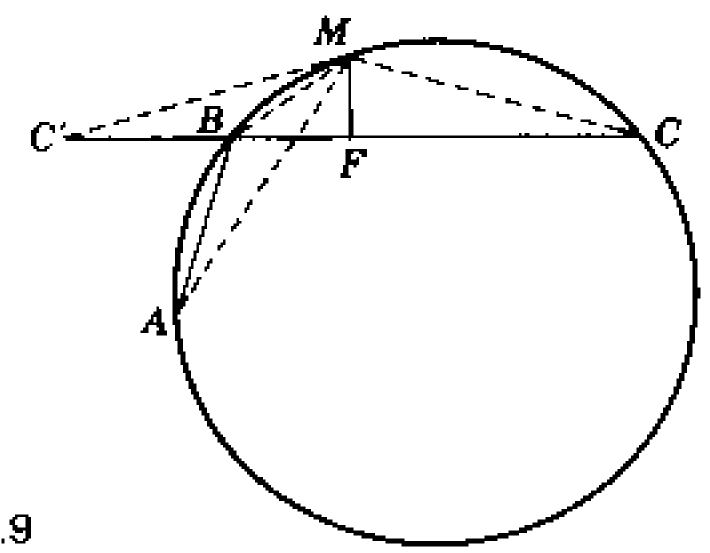


Figura 8.10

dúvidas também quanto à autenticidade do *problema do gado*, que em geral supõe-se ser de Arquimedes, e certamente data de alguma época poucas décadas distante de sua morte. O *problema do gado* é um desafio aos matemáticos para resolver um sistema de equações indeterminadas em oito incógnitas — o número de touros e vacas de cada uma de quatro cores diferentes. Há alguma ambigüidade na formulação do problema, mas segundo uma interpretação seria necessário um volume de mais de 600 páginas para dar os valores das oito incógnitas contidas numa das possíveis soluções. O problema, que envolve a solução de $x^2 = 1 + 4729494y^2$, incidentalmente fornece um primeiro exemplo do que mais tarde (ver abaixo) se chamou uma "equação de Pell".

12 É certo que nem todas as obras de Arquimedes chegaram até nós, pois por um comentário de época posterior sabemos (por Papus) que Arquimedes descobriu todos os treze possíveis sólidos ditos semi-regulares. Ao passo que um poliedro regular tem faces que são polígonos regulares do mesmo tipo, um sólido semi-regular é um poliedro convexo cujas faces são polígonos regulares mas não todos do mesmo tipo. Por exemplo, se dos oito cantos de um cubo de aresta a cortamos tetraedros com arestas $a(2-\sqrt{2})/2$, a figura resultante será um sólido semi-regular ou arquimediano com a superfície feita de oito triângulos equiláteros e seis octógonos regulares.

Que um bom número de obras de Arquimedes se perdeu é claro por muitas referências. Pelos árabes sabemos que a familiar fórmula para a área de um triângulo em termos de seus lados, conhecida como fórmula de Heron — $K = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ onde s é o semiperímetro — era conhecida por Arquimedes vários séculos antes de Heron ter nascido. Também os árabes atribuem a Arquimedes o "teorema sobre a corda quebrada" — se AB e BC formam uma corda quebrada num círculo (com $AB \neq BC$) e se M é o ponto médio do arco ABC e F o pé da perpendicular de M à corda maior, F será o ponto médio da corda quebrada ABC (Fig. 8.10). Dizem os árabes que Arquimedes deu várias provas desse teorema, uma das quais obtida traçando as linhas pontilhadas da figura, tomando $FC' = FC$, e provando que $\Delta MBC' \simeq \Delta MBA$. Logo $BC' = BA$, e resulta que $C'F = AB + BF = FC$. Não sabemos se Arquimedes viu algum significado trigonométrico no teorema, mas sugeriu-se[6] que ele lhe servia como uma fórmula análoga à nossa sen $(x-y)$ = sen x cos y − cos x sen y. Para mostrar a equivalência pomos $\widehat{MC} = 2x$ e $\widehat{BM} = 2y$. Então $\widehat{AB} = 2x-2y$. Agora, as cordas que correspondem a esses arcos são respectivamente $MC = 2 \operatorname{sen} x$, $BM = 2 \operatorname{sen} y$ e $AB = 2 \operatorname{sen} (x-y)$. Além disso, as projeções de MC e MB sobre BC são $FC = 2 \operatorname{sen} x \cos y$ e $FB = 2 \operatorname{sen} y \cos x$. Se, finalmente escrevermos o teorema da corda quebrada na forma $AB = FC - FB$ e substituirmos os equivalentes trigonométricos dessas três cordas, resulta a fórmula para sen $(x-y)$. Outras identidades trigonométricas podem ser obtidas, é claro, do mesmo teorema da corda quebrada, o que indica que Arquimedes pode tê-lo achado útil em seus cálculos astronômicos.

13 Ao contrário de *Os elementos* de Euclides que foram conservados em muitos manuscritos gregos e árabes, os tratados de Arquimedes chegaram a nós por um fio frágil. Quase todas as cópias derivam de um mesmo original grego que existia no começo do século dezesseis e que era ele próprio copiado de um original do século nove ou dez. *Os elementos* de Euclides eram familiares aos matemáticos, quase sem interrupção, desde sua composição; mas os tratados de Arquimedes tiveram uma carreira mais aventurosa. Houve épocas em que poucas ou nenhuma das obras de Arquimedes eram conhecidas. Nos dias de Eutocius, um conhecedor de primeira linha e hábil comentador do século seis, somente três obras de Arquimedes eram bastante conhecidas — *Sobre o equilíbrio de planos*, a incompleta *Medida de um círculo*, e o admirável *Sobre a esfera e cilindro*. Em tais circunstâncias é de admirar que tão grande parte do que Arquimedes escreveu tenha sobrevivido até hoje. Entre os aspectos assombrosos da proveniência das obras de Arquimedes está a descoberta no século vinte de um de seus mais importantes tratados — um que Arquimedes chamou simplesmente *O método* e que esteve perdido desde os primeiros séculos de nossa era até sua redescoberta em 1906.

[6]Veja Johannes Tropfke "Archimedes und die Trigonometrie" *Archiv für die Geschichte der Mathematik*, **10** (1927-1928), 432-463

O método de Arquimedes é de particular importância porque nos revela uma faceta do pensamento de Arquimedes não encontrada em outras obras. Seus outros tratados são jóias de precisão lógica, com poucos traços da análise preliminar que possa ter levado à formulação definitiva. Suas provas pareceram tão completamente sem motivação a alguns escritores do século dezessete que eles suspeitaram que Arquimedes tivesse ocultado seu método de descoberta a fim de que sua obra fosse ainda mais admirada. O quanto essa avaliação pouco generosa do grande siracusano era injustificada se tornou claro em 1906 com a descoberta do manuscrito contendo *O método*. Aqui Arquimedes publicou, para que todos lessem, uma descrição das investigações "mecânicas" preliminares que levaram a muitas de suas principais descobertas matemáticas. Ele julgava que seu "método" nesses casos não tinha rigor, pois considerava uma área, por exemplo, como soma de segmentos de reta.

O método, na forma em que o temos, contém a maior parte do texto de umas quinze proposições, enviadas em forma de carta a Eratóstenes, matemático e bibliotecário na universidade de Alexandria. O autor começa dizendo que é mais fácil fornecer uma prova de um teorema se sabemos antes o que está envolvido; como exemplo, cita as provas de Eudoxos sobre o cone e a pirâmide, que tinham sido facilitadas por asserções prévias, sem prova, feitas por Demócrito. Depois Arquimedes anuncia que ele próprio tinha um método "mecânico" que abria caminho para algumas de suas provas. O primeiro teorema que ele descobriu desse modo foi o teorema sobre a área de um segmento parabólico; na Proposição 1 de *O método* o autor descreve como chegar a esse teorema, equilibrando retas como se faz com pesos em mecânica. Pensou nas áreas do segmento parabólico ABC e do triângulo AFC (onde FC é tangente à parábola em C) como sendo a totalidade de uma coleção de segmentos de reta paralelos ao diâmetro OB da parábola, tais como OP (Fig. 8.11) para a parábola e OM para o triângulo. Se, agora, colocarmos em H (onde $HK = KC$) um segmento igual a OP, isso equilibraria OM onde está, sendo K o fulcro. (Isso pode ser provado usando a lei da alavanca e a propriedade da parábola.) Logo a área da parábola, se colocada com o centro de gravidade em H, equilibrará o triângulo, cujo centro de gravidade está sobre KC, a um terço da distância de K a C. Disso resulta facilmente que a área do segmento parabólico é um terço da área do triângulo AFC, ou quatro terços da área do triângulo inscrito ABC.

14 O teorema favorito de Arquimedes, representado em seu túmulo, também foi sugerido pelo seu método mecânico. É descrito na Proposição 2 de *O método*:

> Qualquer segmento de esfera tem para o cone de mesma base e altura a razão que a soma do raio da esfera e da altura do segmento complementar tem com a altura do segmento complementar.

O teorema resulta de uma bela propriedade de equilíbrio que Arquimedes descobriu (e que pode ser facilmente verificada em termos de fórmulas modernas). Seja $AQDCP$ uma

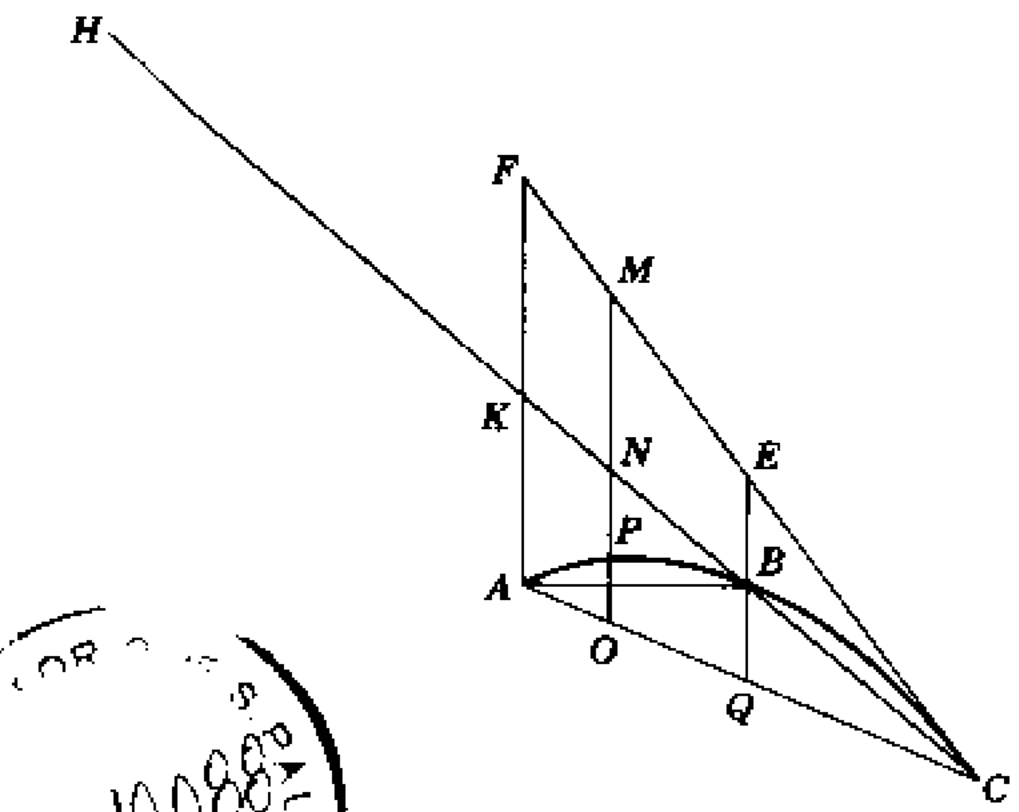


Figura 8.11

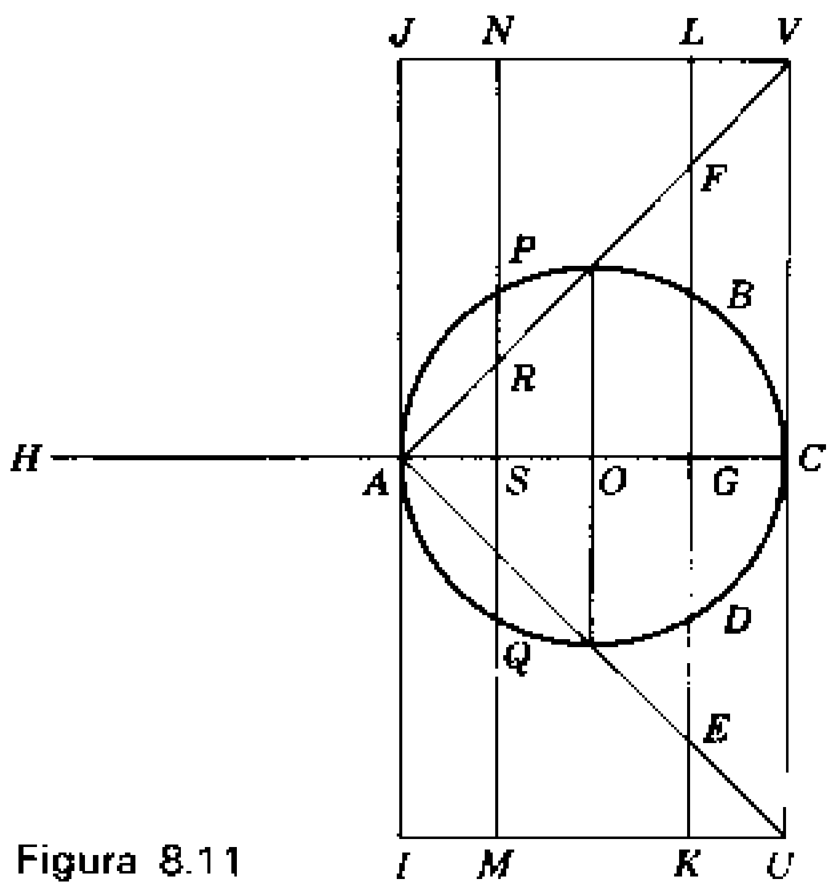
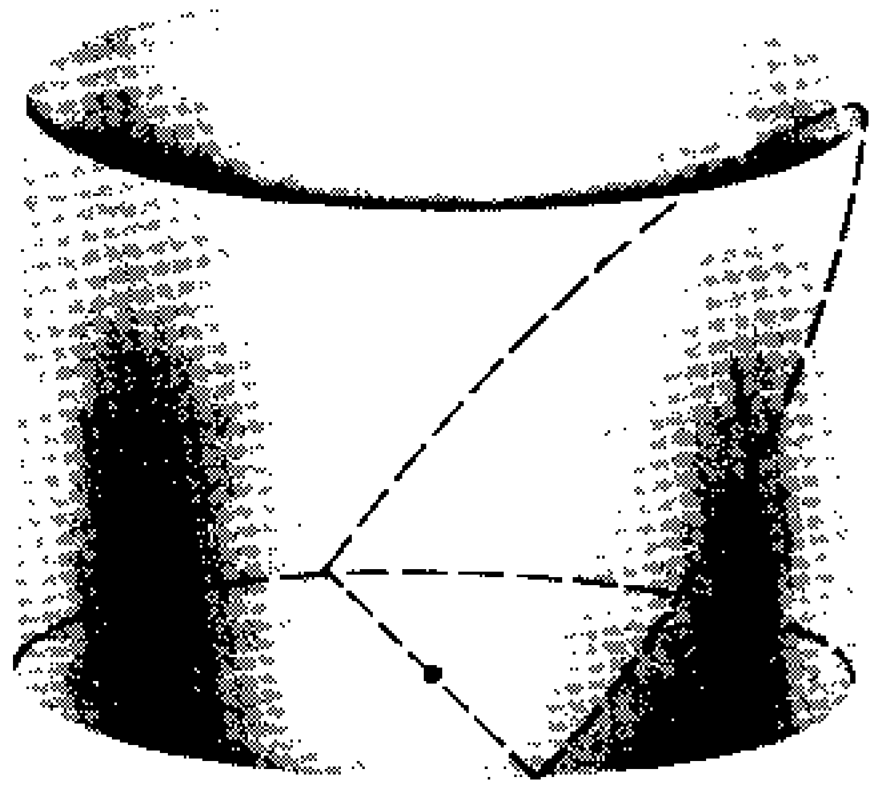


Figura 8.12

secção transversal de uma esfera com centro O e diâmetro AC (Fig. 8.12) e seja AUV uma secção plana de um cone circular reto com eixo AC e UV como diâmetro da base. Seja $IJUV$ um cilindro circular reto com eixo AC e com $UV = IJ$ como diâmetro, e seja $AH = AC$. Se traçarmos um plano por um ponto S qualquer do eixo AC e perpendicular a AC, o plano cortará a esfera, o cone, e o cilindro em círculos de raios $r_1 = SP$, $r_2 = SR$, e $r_3 = SN$ respectivamente. Se chamarmos as áreas desses círculos A_1, A_2, e A_3, então, Arquimedes descobriu, A_1 e A_2, quando colocados com seus centros em H, equilibrarão A_3 onde está, com A como fulcro. Logo se chamarmos os volumes da esfera, do cone e do cilindro de V_1, V_2, V_3 vem que $V_1 + V_2 = 1/2\ V_3$; e como $V_2 = 1/3\ V_3$ a esfera deve ser $1/6\ V_3$. Como o volume V_3 do cilindro é conhecido (por Demócrito e Eudoxo), o volume da esfera fica também conhecido — em notação atual, $V = 4/3\ \pi r^3$. Aplicando a mesma técnica de equilíbrio ao segmento esférico com diâmetro da base BD, ao cone de diâmetro da base EF, e ao cilindro com diâmetro da base KL, o volume do segmento esférico é achado do mesmo modo que o da esfera toda.

15 O método do equilíbrio de secções circulares com um vértice como fulcro foi aplicado por Arquimedes para descobrir os volumes dos segmentos de três sólidos de revolução — o elipsóide, o parabolóide e o hiperbolóide, bem como os centros de gravidade do parabolóide (conóide), de qualquer hemisfério, e de um semicírculo. *O método* conclui com a determinação dos volumes de dois sólidos que são os favoritos dos livros atuais de Cálculo — uma cunha cortada de um cilindro circular reto por dois planos (como na Fig. 8.13) e o volume comum a dois cilindros circulares retos iguais que se cortam em ângulo reto. A obra contendo esses maravilhosos resultados de há mais de 2000 anos foi recuperada quase acidentalmente em 1906. O infatigável erudito dinamarquês J. L. Heiberg tinha lido que em Constantinopla se encontrava um palimpsesto de conteúdo matemático. (Um palimpsesto é um pergaminho em que a escrita original foi imperfeitamente apagada e substituída por um texto diferente). Uma inspeção cuidadosa mostrou-lhe que o texto original tinha contido algo de Arquimedes, e por meio de fotografias ele conseguiu ler a maior parte do texto primitivo. O manuscrito consistia de 185 folhas, quase todas de pergaminho mas algumas de papel, com o texto de Arquimedes copiado por mão do século dez. Uma tentativa — felizmente não muito bem sucedida — tinha sido feita para apagar esse texto a fim de usar o pergaminho para um Euchologion (uma coleção de orações e liturgias usadas na Igreja Ortodoxa Oriental) escrito por volta do século treze. O texto matemático continha *Sobre a esfera e o cilindro*, a maior parte da obra *Sobre espirais*, parte de *Medida de um círculo* e de *Sobre o equilíbrio de planos*, e *Sobre corpos flutuantes*, todas obras preservadas em outros manuscritos; mais importante que tudo isto, é que o pelimpsesto nos dá a única cópia existente de *O método*. Num certo sentido o palimpsesto simboliza a contribuição da Idade Média. A intensa preocupação com assuntos religiosos quase apagou de vez uma das mais importantes obras do

Figura 8.13



maior matemático da antiguidade; mas afinal foi a atividade cultural medieval que inadvertidamente preservou isso, e muito mais, que de outra forma se perderia.

BIBLIOGRAFIA

Bromwich, T. J., "The Methods Used by Archimedes for Approximating to Square Roots, *The Mathematical Gazette*, **14** (1928-1929), 253-257

Clagett, Marshall, *Archimedes in the Middle Ages* (Madison, Wis.: University of Wisconsin Press, 1964, 2 vols.)

Cohen, M. R., e I. E. Drabkin, *A Source Book in Greek Science* (New York: McGraw-Hill, 1948; reimpresso Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1958)

Davis, H. T., "Archimedes and Mathematics," *School Science and Mathematics*, **44** (1944), 136-145, 213-221

Dijksterhuis, E. J., *Archimedes* (New York: Humanities Press, 1957)

Erhardt, Erika von, e Rudolf von Erhardt, "Archimedes' Sand-Reckoner," *Isis*, **33** (1942), 578-602

Heath, T. L., *The Works of Archimedes* (Cambridge, 1897; reimpresso em brochura, incluindo *O método de Archimedes*, New York: Dover, s.d.)

Heiberg, J. L., *Quaestiones archimedae* (Copenhagen, 1879)

Heiberg, J. L., "Le rôle d'Archimède dans le développement des sciences exactes," *Scientia*, **20** (1916), 81-89

Heiberg, J. L., ed., *Archimedes, Opera omnia* (Leipzig, 1880-1881, 3 volumes)

Heiberg, J. L., e H. G. Zeuthen, "Eine neue Schrift des Archimedes," *Bibliotheca Mathematica* (3), 7 (1906-1907), 321-363

Hofmann, J. E., "Erklärungsversuche für Archimeds Berechnung von $\sqrt{3}$," *Archiv für die Geschichte der Mathematik*, **12** (1929), 386-408

Hoppe, Edmund, "Die zweite Methode des Archimedes zur Berechnung von π," *Archiv für die Geschichte der Mathematik*, **9** (1920-1922), 104-107

Midolo, P., *Archimede e il suo tempo* (Syracuse, 1912)

Neugebauer, O., "Archimedes and Aristarchus," *Isis*, **34** (1942), 4-6

Smith, D. E., "A Newly Discovered Treatise of Archimedes," *Monist*, **19** (1909), 202-230

Thomas, Ivor, *Selections Illustrating the History of Greek Mathematics* (Cambridge, Mass.: Leob Classical Library, 1939-1941, 2 vols.)

Tropfke, Johannes, "Archimedes und die Trigonometrie," *Archiv für die Geschichte der Mathematik*, **10** (1927-1928), 432-463

Weissenborn, Hermann, "Die irrationalen Quadratwurzeln bei Archimedes und Heron," *Berliner Studien für Klassische Philologie und Archaeologie*, **1** (1884), 357-408

EXERCÍCIOS

1. Arquimedes é às vezes considerado o inventor do cálculo integral. Até que ponto você concorda ou discorda dessa opinião?

2. Euclides se apoiou pesadamente na obra de seus predecessores. Até que ponto o mesmo vale para Arquimedes?

3. Aristóteles conhecia a lei da alavanca antes de Arquimedes nascer. Por que, então, a lei é às vezes atribuída a Arquimedes? Explique.

4. Dos muitos tratados que Arquimedes escreveu e que nos são familiares, qual considera o mais significativo para o desenvolvimento da matemática? Explique.

5. Arquimedes é em geral considerado o maior matemático da antiguidade. Explique completamente a justificativa para essa opinião, comparando sua obra com pelo menos a de dois rivais potenciais anteriores.

6. Se a_i e A_i são respectivamente as áreas de polígonos regulares de i lados inscritos em e circunscritos a um círculo, prove as fórmulas de recorrência de Arquimedes $a_{2n} = \sqrt{a_n A_n}$ e $A_{2n} = 2A_n a_{2n}/(A_n + a_{2n})$.

7. Se p_i e P_i são os *perímetros* de polígonos regulares inscritos em e circunscritos a um círculo, prove o algoritmo de Arquimedes $P_{2n} = 2P_n p_n/(P_n + p_n)$ e $p_{2n} = \sqrt{p_n P_{2n}}$.

8. Começando, como o fez Arquimedes, com um hexágono regular inscrito num círculo, use um algoritmo arquimediano de recorrência para achar ou p_{12} e P_{12} ou a_{12} e A_{12}. Que valor de π surgiria como média aritmética de suas respostas?

9. Ache a área entre as porções da espiral $r = a\theta$ formadas para $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e para $2\pi \leq \theta \leq 4\pi$.

10. Mostre claramente como dividir a área da superfície da esfera por dois planos paralelos em três áreas numericamente iguais.

11. Prove o teorema (de Arquimedes) que diz que a área da "faca de sapateiro" é igual à área do círculo de diâmetro CD (Fig. 8.7).

12. Prove o método de trissecção de Arquimedes descrito no texto.

13. Construa ou desenhe diagramas de três sólidos arquimedianos semi-regulares.

*14. Ache, para a espiral arquimediana $r = a\theta$, o comprimento da subtangente polar para $\theta = 2\pi$ e mostre como pode ser usada na quadratura do círculo.

*15. Prove o teorema de Arquimedes sobre a corda quebrada.

*16. Usando ou a propriedade de equilíbrio arquimediana, ou integração moderna, prove a fórmula para o volume de um segmento de esfera.

*17. Prove o teorema arquimediano sobre o salinon.

*18. No diagrama do teorema de Arquimedes sobre a corda quebrada (Fig. 8.10) use a equação $BF + FC = BC$ para obter a identidade trigonométrica familiar para sen $(x + y)$.

*19. Você pode dividir, exata ou aproximadamente, a esfera unitária por dois planos paralelos em três segmentos de volumes iguais? Explique.

*20. Prove que os dois círculos inscritos nas duas partes em que CD divide a "faca de sapateiro" (Fig. 8.7) são iguais.

Capítulo **9**

Apolônio de Perga

Parece-me que toda a evidência indica ter sido Apolônio o fundador da astronomia matemática grega.

Otto Neugebauer

1 Durante o primeiro século aproximadamente da Idade Helenística três matemáticos se destacaram a grande distância dos demais da época, assim como da maior parte de seus predecessores e sucessores. Esses homens foram Euclides, Arquimedes e Apolônio; é por causa da obra deles que o período de cerca de 300 a 200 A. C. foi denominado "Idade Áurea" da matemática grega. Num certo sentido a matemática estava em atraso com relação às artes e à literatura, pois foi a Idade de Péricles, em meados do quinto século A. C., que em sentido mais amplo mereceu o nome de "Idade Áurea da Grécia". Durante todo o período helenístico a cidade de Alexandria permaneceu o foco matemático do Ocidente mas Apolônio, como Arquimedes, não nasceu aí. Nasceu em Perga em Panfília (sul da Ásia Menor); mas pode ter sido educado em Alexandria, e parece ter passado algum tempo lá ensinando na universidade. Durante certo tempo esteve em Pérgamo, onde havia uma universidade e uma biblioteca só inferiores às de Alexandria, graças ao apoio do general de Alexandre, Lisímaco, e de seus sucessores. Como houve muitos homens chamados Apolônio na antiguidade (129 desses, com biografias, são mencionados em Pauly Wissowa, *Real-Enzyclopädie der Klassischen Altertumswissenschaft*) nosso matemático é distinguido dos demais pelo uso de seu nome completo, Apolônio de Perga. Não conhecemos as datas precisas de sua vida, mas diz-se que viveu durante os reinos de Ptolomeu Euergetes e de Ptolomeu Filopater; um relato diz que foi o tesoureiro geral de Ptolomeu Filadelfo, e diz-se ainda que era vinte e cinco a quarenta anos mais jovem que Arquimedes. Sugeriu-se que viveu de 262 a 190 A. C., e pouco se sabe de sua vida. Parece ter-se considerado rival de Arquimedes; assim, ele tratou de vários dos assuntos que discutimos no capítulo anterior. Desenvolveu um esquema de "tetradas" para exprimir grandes números, usando equivalentes de expoentes da miríade, ao passo que Arquimedes usava a dupla miríade como base. O esquema de Apolônio provavelmente era aquele de que parte está descrita no que restou do Livro II da *Coleção matemática* de Papus. (Todo o Livro I e parte do II se perderam.) Aqui o número $5\,462\,360\,064 \times 10^6$ é escrito como $\mu^{\gamma}\,,\varepsilon\nu\xi\beta\mu^{\beta}\,,\gamma\chi\mu^{\alpha}\,,\varsigma\nu$ onde μ^{γ}, μ^{β}, e μ^{α} são a terceira, segunda e primeira potências, respectivamente, de uma miríade.

Apolônio escreveu uma obra (agora perdida) chamada *Resultado rápido* que parece ter tratado de processos rápidos de calcular. Nela diz-se que o autor obteve uma aproximação de melhor do que a dada por Arquimedes — provavelmente o valor que conhecemos como 3,1416. Não sabemos como esse valor, que apareceu depois em Ptolomeu e na Índia, foi obtido. Na verdade há mais perguntas não respondidas sobre Apolônio e sua obra do que sobre Euclides e Arquimedes, pois a maior parte de suas obras desapareceram. Temos os títulos de muitas obras perdidas, como *Dividir em uma razão*, outra sobre *Cortar uma área*, uma *Sobre secção determinada*, outra sobre *Tangências* (ou *Contatos*), uma sobre *Inclinações* e uma sobre *Lugares planos*. Em alguns casos sabemos qual o assunto do tratado, pois Papus deu uma breve descrição de alguns. Seis das obras de Apolônio estavam incluídas junto com dois dos tratados mais avançados (hoje perdidos) de Euclides, numa coleção chamada "Tesouro da análise". Papus descreveu isso como uma coleção especial destinada aos que, depois de adquirir os elementos usuais, queriam obter a capacidade de resolver problemas envolvendo curvas. O "Tesouro", consistindo em grande parte de obras de Apolônio, conseqüentemente deve ter incluído

muito do que hoje chamamos geometria analítica; foi com razão que Apolônio, não Euclides, mereceu dos antigos o nome de "o Grande Geômetra".

2 Pelas descrições dadas por Papus e outros, é possível obter uma boa idéia do conteúdo de algumas obras gregas perdidas, e quando, no século dezessete, o esporte de reconstruir livros de geometria perdidos estava no auge, os tratados de Apolônio estavam entre os favoritos[1]. Das restaurações do *Lugares planos*, por exemplo, inferimos que dois dos lugares considerados eram os seguintes: (1) o lugar dos pontos cuja diferença de quadrados das distâncias a dois pontos fixos é constante é uma reta perpendicular à reta que une os dois pontos; (2) o lugar dos pontos cuja razão das distâncias a dois pontos fixos é constante (e diferente de um) é um círculo. Esse último lugar é chamado "círculo de Apolônio", mas é má denominação pois era conhecido por Aristóteles que o utilizou para justificar matematicamente a forma semicircular do arco-íris[2].

O *Dividir em uma razão* tratava de vários casos de um problema geral — dadas duas retas e um ponto em cada uma, traçar por um terceiro ponto dado uma reta que corte sobre as retas dadas segmentos (medidos a partir dos pontos fixados sobre elas) que estejam numa razão dada. Esse problema equivale a resolver uma equação quadrática do tipo $ax - x^2 = bc$, isto é, aplicar a um segmento um retângulo igual a um retângulo e faltando um quadrado. Em *Cortar uma área* o problema é semelhante, só que se exige que os segmentos cortados contenham um retângulo dado, em vez de estar numa razão dada. Esse problema leva a uma quadrática da forma $ax + x^2 = bc$, de modo que é preciso aplicar a um segmento a um retângulo igual a um retângulo e com excesso de um quadrado. O tratado de Apolônio *Sobre secção determinada* estuda o que se poderia chamar de geometria analítica a uma dimensão. Considerava o seguinte problema geral, usando a típica análise algébrica grega em forma geométrica: Dados quatro pontos A, B, C, D sobre uma reta, determinar um quinto ponto P sobre ela, tal que o retângulo sobre AP e CP esteja numa razão dada com o retângulo sobre BP e DP. Aqui, também, o problema se reduz facilmente à solução de uma quadrática; e, como em outros casos, Apolônio tratou a questão exaustivamente, inclusive os limites de possibilidade e o número de soluções.

3 O tratado sobre *Tangências* é de tipo diferente dos três citados acima, pois da forma pela qual Papus o descreve vemos o problema conhecido hoje como "Problema de Apolônio": dadas três coisas, cada uma das quais pode ser um ponto, uma reta ou um círculo, traçar um círculo que é tangente a cada uma das três coisas (onde tangência a um ponto significa que o círculo passa pelo ponto). Esse problema envolve dez casos, desde os dois mais fáceis (em que as três coisas são três pontos ou três retas) até o mais difícil de todos (traçar um círculo tangente a três círculos). Os dois mais fáceis aparecem em *Os elementos* de Euclides em conexão com círculos circunscrito e inscrito a um triângulo; outros seis foram tratados no Livro I de *Tangências* e o caso de duas retas e um círculo, mais o de três círculos, ocupavam todo o Livro II. Não temos as soluções de Apolônio, mas elas podem ser reconstruídas com base em informação dada por Papus. No entanto estudiosos dos séculos dezesseis e dezessete em geral pensavam que Apolônio não tinha resolvido o último caso, por isso o consideravam como um desafio às suas capacidades. Newton foi um dos que deram uma solução, usando apenas régua e compasso[3].

A trissecção do ângulo por Arquimedes, em que um comprimento dado é inserido entre uma reta e um círculo segundo uma reta que é deslocada de modo a passar por um ponto dado (o ponto P na Fig. 8.9) é um exemplo típico de uma solução por meio de uma *neusis* (inclinação). O tratado de Apolônio sobre *Inclinações* considerava a classe dos problemas de *neusis* que podem ser resolvidos por métodos "planos" — isto é, só usando régua e compasso. (A trissecção de Arquimedes, é claro, não é um tal problema, pois em tempos modernos provou-se que o ângulo geral não pode ser trissectado por

[1]Para uma exposição dessas "restaurações" ver o artigo sobre "Apollonius" por T. L. Heath na *Encyclopaedia Britannica*, 11.ª edição (1910)

[2]Veja C. B. Boyer, *The Rainbow* (New York: Yoseloff, 1959), pp. 45-46

[3]*Arithmetica universalis*, Problema XLVII

métodos "planos".) De acordo com Papus, um dos problemas tratados em *Inclinações* é o da inserção dentro de um círculo dado, de uma corda de comprimento dado inclinando-se a um ponto dado.

Fizeram-se na antiguidade alusões a outras obras de Apolônio, inclusive uma sobre *Comparação entre dodecaedro e icosaedro*. Nela o autor dava uma prova do teorema (conhecido talvez por Aristeu) que diz estarem as faces pentagonais planas de um dodecaedro à mesma distância do centro da esfera circunscrita que as faces triangulares de um icosaedro inscrito na mesma esfera. O teorema no espúrio Livro XIV de *Os elementos* — que diz que nesse caso a razão das áreas do icosaedro e do dodecaedro é igual à razão de seus volumes — decorre imediatamente da proposição de Apolônio e é possível que o autor de *Os elementos* XIV tenha usado o tratado de Apolônio.

4 Apolônio foi também um astrônomo célebre; o modelo matemático favorito da antiguidade para a representação do movimento dos planetas aparentemente deve-se a ele. Enquanto que Eudoxo tinha usado esferas concêntricas, Apolônio propôs dois sistemas alternativos, um feito de movimentos epicíclicos, outro envolvendo movimentos excêntricos. No primeiro modelo assumia-se que um planeta P se move uniformemente ao longo de um pequeno círculo (epiciclo) cujo centro C por sua vez se move uniformemente ao longo de um círculo maior (deferente) com centro na terra E (Fig. 9.1). No esquema excêntrico o planeta P se move ao longo de um círculo grande, cujo centro C' por sua vez se move, uniformemente em um círculo pequeno de centro E. Se $PC = C'E$, os dois esquemas serão equivalentes, como Apolônio evidentemente sabia[4]. Enquanto que a teoria de esferas homocêntricas tinha-se tornado, por obra de Aristóteles, o esquema astronômico favorito dos que se satisfaziam com uma aproximação grosseira dos movimentos, a teoria dos ciclos e epiciclos, por causa de Ptolomeu, veio a ser adotada pelos astrônomos matemáticos que desejavam maior refinamento de detalhe e de previsões. Durante cerca de 1 800 anos os dois modelos — um de Eudoxo e o outro de Apolônio — foram rivais cordiais disputando a preferência dos estudiosos.

5 Apesar de sua produtividade científica, só dois dos muitos tratados de Apolônio se preservaram em grande parte. Todas as versões gregas de *Dividir segundo uma razão* se perderam há muito tempo, mas não antes de ser feita uma tradução árabe. Em 1706 Halley, amigo de Newton, publicou uma tradução da obra para o latim, e depois disso apareceu em línguas atuais. Além desse tratado, só uma obra de Apolônio se preservou substancialmente, mas essa foi certamente sua obra prima — *As cônicas*. Dessa obra famosa só metade — os quatro primeiros dos oito livros de que se compunha — existe ainda em grego; felizmente, um matemático árabe, Thabit ibn Qurra, tinha traduzido os três seguintes, e essa versão se preservou. Em 1710 Edmund Halley deu uma tradução latina dos sete livros, e daí então apareceram edições em muitas línguas.

As secções cônicas eram conhecidas havia cerca de um século e meio quando Apolônio escreveu seu célebre tratado sobre essas curvas. Pelo menos duas vezes nesse intervalo tinham sido escritas exposições gerais — por Aristeu e por Euclides — mas

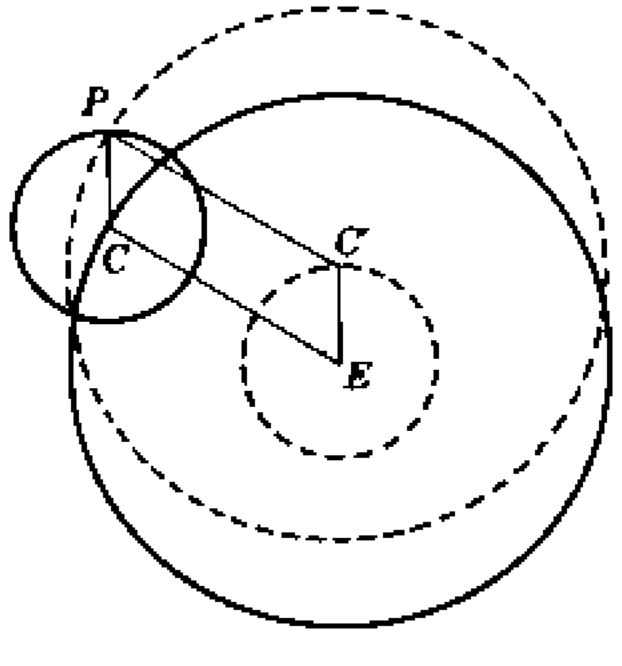


Figura 9.1

[4]Veja O. Neugebauer, "Eccentric and Epicyclic Motion According to Apollonius", *Scripta Mathematica*, **24** (1959), 5-21

assim como *Os elementos* de Euclides substituíram textos elementares anteriores, assim em nível mais avançado o tratado sobre *Cônicas* de Apolônio derrotou todos os rivais no campo das secções cônicas, inclusive *As cônicas* de Euclides, e na antiguidade nenhuma tentativa parece ter sido feita para aperfeiçoá-lo. Se a sobrevivência é uma medida de qualidade, *Os elementos* de Euclides e *As cônicas* de Apolônio foram claramente as melhores obras em seus campos.

O Livro I de *As cônicas* começa com uma exposição da motivação para escrever a obra. Quando Apolônio estava em Alexandria, foi procurado por um geômetra chamado Naucrates, e foi a pedido dele que Apolônio escreveu uma versão apressada de *As cônicas* em oito livros. Mais tarde, em Pérgamo, o autor elaborou os livros, um de cada vez, por isso os Livros IV e VII começam com saudações a Atalus, rei de Pérgamo. O autor descreve os quatro primeiros livros como se formassem uma introdução elementar e supõe-se que muito deste material já havia aparecido em tratados anteriores sobre cônicas. No entanto, Apolônio diz expressamente que alguns dos teoremas no Livro III são seus, pois Euclides não tinha completado os lugares ali considerados. Os quatro últimos livros ele descreve como extensões do assunto além do fundamental, e veremos que neles a teoria se expande em direções mais especializadas[5].

Antes do tempo de Apolônio, a elipse, a parábola e a hipérbole eram obtidas como secções de três tipos bem diferentes de cone circular reto, conforme o ângulo no vértice fosse agudo, reto ou obtuso. Apolônio, aparentemente pela primeira vez, mostrou sistematicamente que não é necessário tomar secções perpendiculares a um elemento do cone e que de um único cone podem ser obtidas todas as três espécies de secções cônicas, simplesmente variando a inclinação do plano de secção. Esse foi um passo importante para relacionar os três tipos de curvas. Uma segunda generalização importante se efetuou quando Apolônio provou que o cone não precisa ser reto — isto é, um cone cujo eixo é perpendicular à base circular — mas pode também ser um cone oblíquo ou escaleno. Se Eutócio, ao comentar *As cônicas*, estava bem informado, podemos inferir que Apolônio foi o primeiro geômetra a mostrar que as propriedades das curvas não são diferentes conforme sejam cortadas de cones oblíquos ou retos. Finalmente, Apolônio trouxe as curvas antigas mais para perto do ponto de vista moderno substituindo o cone de uma só folha (como um cone de sorvete) por um duplo (semelhante a dois cones de sorvete colocados, em sentidos opostos e indefinidamente estendidos, de modo que seus vértices coincidam e os eixos estejam sobre uma mesma reta). Apolônio, na verdade, deu a mesma definição de cone circular usada hoje:

> Se fizermos uma reta, de comprimento indefinido e passando sempre por um ponto fixo, mover-se ao longo da circunferência de um círculo que não está num mesmo plano com o ponto de modo a passar sucessivamente por cada um dos pontos dessa circunferência, a reta móvel descreverá a superfície de um cone duplo.

Essa mudança fez da hipérbole a curva de dois ramos que nos é familiar hoje. Os geômetras freqüentemente falavam das "duas hipérboles" em vez dos "dois ramos" de uma única hipérbole, mas de qualquer forma a duplicidade da curva era percebida.

6 Na história da matemática os conceitos são mais importantes que a terminologia, mas a mudança de nome das secções cônicas devida a Apolônio teve significado mais profundo do que o usual. Durante cerca de século e meio as curvas não tinham tido designações além de descrições banais do modo pelo qual tinham sido descobertas — secções de cone acutângulo (oxytome), secções de cone retângulo (orthotome) e secções de cone obtusângulo (amblytome). Arquimedes tinha continuado a usar esses nomes (embora se diga que também usou o nome parábola como sinônimo para secção de cone retângulo). Foi Apolônio (talvez seguindo sugestão de Arquimedes) quem introduziu os nomes elipse e hipérbole para essas curvas. As palavras "elipse", "parábola" e "hipérbole" não foram inventadas expressamente; foram adatadas de uso anterior, provavelmente

[5]Veja T. L. Heath, *Apollonius of Perga. Treatise on Conic Sections* (1896), pp. XXVI-XXVII. Aqui, e em todo este capítulo, nos baseamos na valiosa obra de Heath, de que tiramos passagens de tradução

pelos pitagóricos, na solução de equações quadráticas por aplicação de áreas. *Ellipsis* (significando falta) tinha sido a palavra usada quando um retângulo de área dada era aplicado a um segmento e lhe faltava um quadrado (ou outra figura especificada), e *hyperbola* (um lançamento além) tinha sido a palavra usada quando a área excedia o segmento. A palavra *parábola* (indicando colocar ao lado ou comparação) não indicava nem excesso nem deficiência. Apolônio aplicou estas palavras num contexto novo como nomes para as seções planas. A equação familiar moderna para a parábola com vértice na origem é $y^2 = lx$ (onde l é o *lactus rectum* ou parâmetro, agora freqüentemente representado por $2p$, ou ocasionalmente por $4p$). Isso é, a parábola tem a propriedade que para qualquer ponto sobre ela o quadrado sobre a ordenada é igual ao retângulo sobre a abscissa x e o parâmetro l. As equações da elipse e hipérbole, também com um vértice como origem, são $(x \pm a)^2/a^2 \pm y^2/b^2 = 1$ ou $y^2 = lx \pm b^2x^2/a^2$ (onde l é novamente o *lactus rectum* ou parâmetro $2b^2/a$). Isto é, para a elipse $y^2 < lx$ e para a hipérbole $y^2 > lx$, e são as propriedades das curvas que são representadas por essas desigualdades que sugeriram os nomes dados por Apolônio há mais de dois milênios e que ainda lhes estão firmemente associados[6].

7 Mostrando como obter todas as secções cônicas de um mesmo cone oblíquo de duas folhas e dando-lhes nomes eminentemente apropriados, Apolônio deu importante contribuição à geometria mas não foi tão longe quanto poderia ter ido na generalidade. Poderia igualmente bem ter partido de um cone elíptico — ou de qualquer cone quádrico — e ter ainda obtido as mesmas curvas. Isto é, qualquer secção plana do cone "circular" de Apolônio, poderia servir como a curva de "base" em sua definição, e a restrição "cone circular" é desnecessária. Na verdade, como o próprio Apolônio mostrou (Livro I, Proposição 5), todo cone circular oblíquo tem não só uma infinidade de secções circulares paralelas à base, mas também um outro conjunto infinito de secções circulares dadas pelo que ele chamou de secções subcontrárias. Seja BFC a base do cone circular oblíquo e seja ABC uma secção triangular do cone (Fig. 9.2). Seja P qualquer ponto de uma secção circular DPE paralela à BFC e seja HPK uma secção por um plano tal que os triângulos AHK e ABC são semelhantes mas de orientações contrárias. Apolônio chamou a secção HPK de secção subcontrária e mostrou que é um círculo. É fácil prová-lo usando a semelhança dos triângulos HMD e EMK, da qual resulta que $HM \cdot MK = DM \cdot ME = PM^2$,

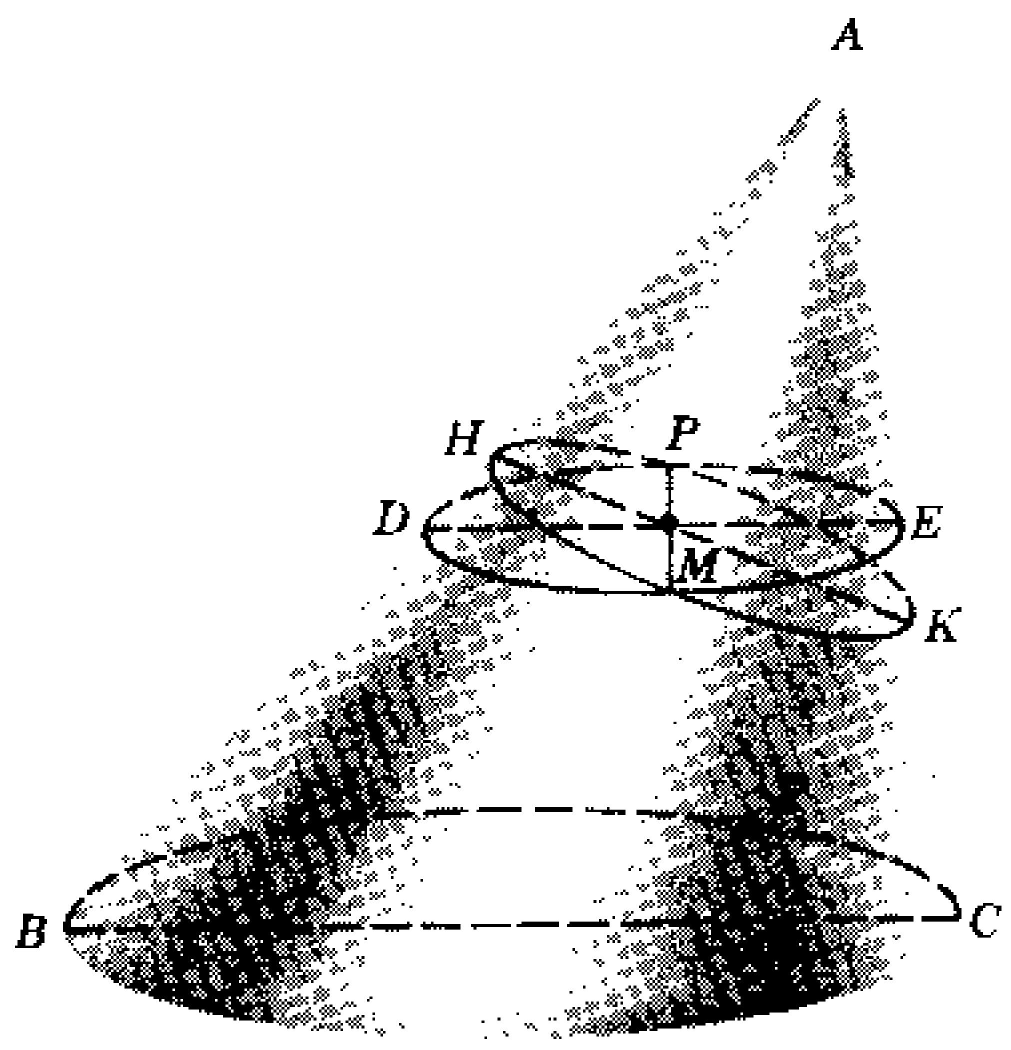


Figura 9.2

[6]O comentador Eutocius foi responsável por uma impressão errônea, ainda bastante difundida, de que as palavras elipse, parábola e hipérbole foram adotadas por Apolônio para indicar que o plano de secção não atingia, passava ao lado ou cortava a segunda folha do cone. Não é isso que Apolônio diz em *As cônicas*

a propriedade característica do círculo. (Em linguagem de geometria analítica, se pusermos $HM = x$, $HK = a$, e $PM = y$, então $y^2 = x(a - x)$ ou $x^2 + y^2 = ax$, que é a equação de um círculo.)

8 Os geômetras gregos dividiam as curvas em três categorias. A primeira, conhecida como dos "lugares planos" consistia das retas e círculos; a segunda, conhecida como dos "lugares sólidos" era formada das secções cônicas; a terceira, conhecida como dos "lugares lineares" reunia todas as restantes curvas. O nome dado à segunda categoria sem dúvida era sugerido pelo fato de as cônicas não serem definidas como lugares num plano que satisfazem a uma certa condição, como se faz hoje; eram descritas estereometricamente como secções de uma figura a três dimensões. Apolônio, como seus predecessores, obtinha as cônicas a partir de um cone no espaço tridimensional, mas dispensou o cone logo que possível. Do cone ele deduziu uma propriedade plana fundamental ou *symptome* para a secção, e daí por diante continuou com um estudo puramente planimétrico baseado nessa propriedade. Esse passo, que ilustramos para a elipse (Livro I, Proposição 13), provavelmente era quase o mesmo usado por seus predecessores, inclusive Menaecmus. Seja ABC uma secção triangular de um cone circular oblíquo (Fig. 9.3) e seja P qualquer ponto sobre uma secção HPK cortando todos os elementos do cone. Prolongue-se HK até encontrar BC em G e por P passe-se um plano horizontal que corta o cone no círculo DPE e o plano HPK na reta PM. Trace-se DME, um diâmetro do círculo perpendicular a PM. Então da semelhança dos triângulos MEK e KCG temos $ME/MK = CG/KG$. Agora, da propriedade do círculo temos $PM^2 = DM \cdot ME$; logo $PM^2 = (HM \cdot BG/HG)(MK \cdot CG)/KG$. Se $PM = y$, $HM = x$ e $HK = 2a$, a propriedade na sentença precedente equivale à equação $y^2 = kx(2a - x)$, que reconhecemos como a equação de uma elipse com H como vértice e HK como eixo maior. De modo semelhante, Apolônio obteve para a hipérbole o equivalente da equação $y^2 = kx(x + 2a)$. Essas formas são facilmente redutíveis às formas de *nome* acima, bastando tomar $k = b^2/a^2$ e $l = 2b^2/a$.

9 Depois de Apolônio ter obtido de um estudo estereométrico do cone a relação básica entre o que chamaríamos hoje as coordenadas planas de um ponto da curva — dada pelas três equações $y^2 = lx - b^2x^2/a^2$, $y^2 = lx$ e $y^2 = lx + b^2x^2/a^2$ — obteve outras propriedades a partir das equações no plano, sem mais referência ao cone. O autor de *As cônicas* diz que no Livro I ele analisou as propriedades fundamentais das curvas "mais completamente e com mais generalidade que nos escritos de outros autores". O quanto essa afirmação é verdadeira é sugerido pelo fato de aqui, já no primeiro livro, ser desenvolvida a teoria dos diâmetros conjugados. Isto é, Apolônio mostrou que os pontos médios de um conjunto de cordas paralelas a um diâmetro de uma elipse ou hipérbole formarão um segundo diâmetro, os dois sendo chamados "diâmetros conjugados". Na verdade, enquanto que hoje invariavelmente referimos uma cônica a um par de retas perpendiculares entre

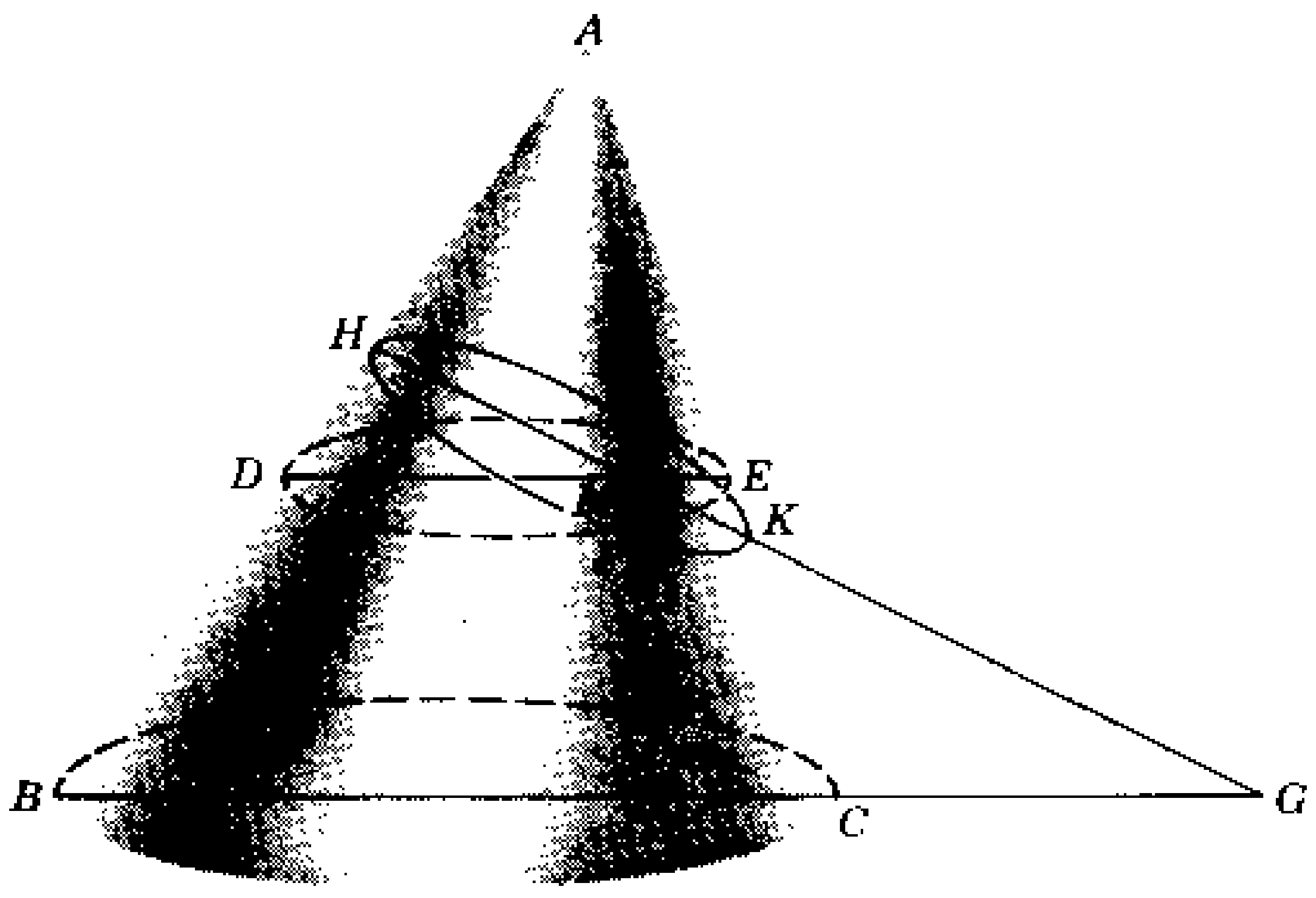


Figura 9.3

si como eixos, Apolônio em geral usava um par de diâmetros conjugados como equivalentes de eixos de coordenadas oblíquas. O sistema de diâmetros conjugados fornecia um quadro de referência excepcionalmente útil para uma cônica, pois Apolônio mostrou que se uma reta é traçada por uma extremidade de um diâmetro de uma elipse ou hipérbole paralelamente ao conjugado, a reta "tocará" a cônica e nenhuma outra reta pode cair entre ela e a cônica — isto é, a reta será tangente à cônica. Aqui vemos claramente o conceito grego estático de tangente a uma curva, em contraste com o conceito cinemático de Arquimedes. Na verdade, freqüentemente em *As cônicas* vemos um diâmetro e uma tangente em sua extremidade usados como sistema de referência de coordenadas.

Entre os teoremas no Livro I há vários (Proposição 41 a 49) que equivalem a transformações de coordenadas de um sistema baseado numa tangente e um diâmetro por um ponto P da curva para um novo sistema determinado por uma tangente e um diâmetro por um segundo ponto Q da mesma cônica, junto com a prova de que uma cônica pode ser referida a qualquer tal sistema como eixos. Em particular, Apolônio conhecia as propriedades da hipérbole referida às assíntotas como eixos, dadas, para a hipérbole equilátera, pela equação $xy = c^2$. Não podia saber é claro, que um dia essa relação, equivalente à lei de Boyle, seria fundamental no estudo dos gases, ou que seu estudo da elipse seria essencial para a moderna astronomia.

0 O Livro II continua o estudo de diâmetros conjugados e tangentes. Por exemplo, se P é qualquer ponto sobre qualquer hipérbole, com centro C, a tangente em P cortará as assíntotas em pontos L e L' (Fig. 9.4) que são equidistantes de P (Proposições 8 e 10). Além disso (Proposições 11 e 16), toda corda QQ' paralela a CP encontrará as assíntotas em pontos K e K' tais que $QK = Q'K'$ e $QK \cdot QK' = CP^2$. (Essas propriedades eram verificadas sinteticamente, mas o leitor pode convencer-se de sua validez usando métodos analíticos.) Proposições posteriores no Livro II mostram como traçar tangentes a uma cônica usando a teoria da divisão harmônica. No caso da elipse (Proposição 49), por exemplo, se Q é um ponto da curva (Fig. 9.5), Apolônio traçava uma perpendicular QN de Q ao eixo AA' e achava o conjugado harmônico T de N com relação a A e A'. (Isto é, ele achava o ponto T da reta AA' estendida tal que $AT/A'T = AN/NA'$; em outras palavras determinava o ponto T que divide o segmento AA' externamente na mesma razão em que N o divide internamente.) A reta por T e Q será então tangente à elipse. O caso em que Q não jaz sobre a curva pode ser reduzido a esse por meio de propriedades familiares da divisão harmônica. (Pode-se provar que não há curvas planas, além das cônicas, tais que dada a curva e um ponto, uma tangente pode ser traçada, só com régua e compasso, do ponto à curva; mas é claro que Apolônio não sabia disso.)

11 Apolônio aparentemente se orgulhava especialmente do Livro III, pois no prefácio geral de *As cônicas* ele escreveu:

> O terceiro livro contém muitos teoremas notáveis, úteis para a síntese de lugares sólidos e determinação de limites; a maior parte e os mais bonitos desses teoremas são novos e, quando os descobri, observei que Euclides não tinha efetuado a síntese do lugar com relação a três ou quatro retas, mas só uma parte casual dela e não bem sucedida: pois a síntese não poderia ser completada sem minhas descobertas adicionais.

O lugar de três e quatro retas, a que se refere, desempenhou um papel importante na matemática de Euclides a Newton. Dadas três retas (ou quatro retas) de um plano, achar

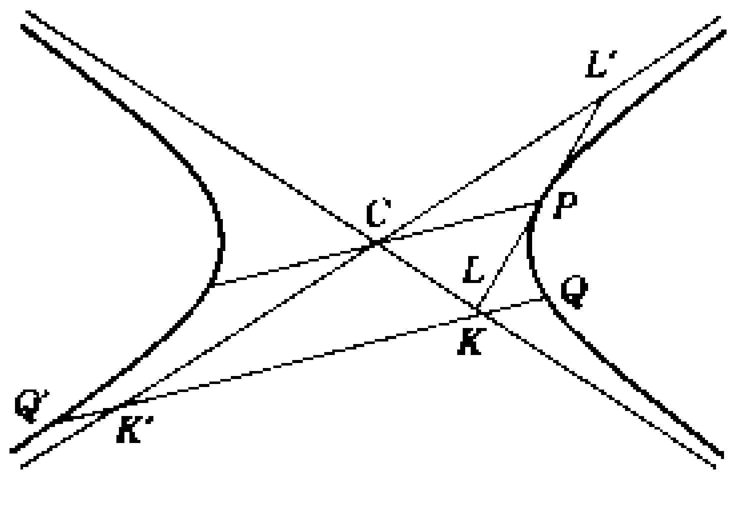


Figura 9.4

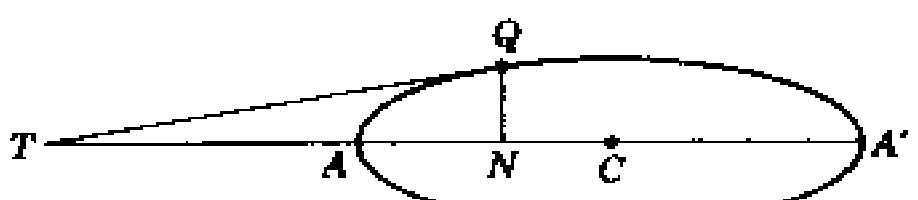


Figura 9.5

o lugar de um ponto P que se move de modo que o quadrado da distância de P a uma delas seja proporcional ao produto das distâncias às outras duas (ou, no caso de quatro retas, o produto das distâncias a duas delas é proporcional ao produto das distâncias às outras duas), as distâncias sendo medidas em ângulos dados com relação às retas. Por métodos analíticos, usando a forma normal da equação da reta, é fácil mostrar que o lugar é uma secção cônica real ou imaginária, redutível ou irredutível. Se, para o lugar de três retas, as equações das retas são $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, e $A_3x + B_3y + C_3 = 0$ e se os ângulos em que as distâncias devem ser medidas são θ_1, θ_2, θ_3, então o lugar de $P(x, y)$ é dado por

$$\frac{(A_1x + B_1y + C_1)^2}{(A_1^2 + B_1^2)\,\text{sen}^2\,\theta_1} = \frac{K(A_2x + B_2y + C_2)}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}\,\text{sen}\,\theta_2} \cdot \frac{(A_3x + B_3y + C_3)}{\sqrt{A_3^2 + B_3^2}\,\text{sen}\,\theta_3}.$$

Essa equação é, em geral, de segundo grau em x e y; logo o lugar é uma secção cônica. Nossa solução não faz justiça ao tratamento dado por Apolônio no Livro III, em que mais de cinqüenta proposições cuidadosamente enunciadas, todas provadas por métodos sintéticos, levam eventualmente ao lugar pedido. Meio milênio depois Papus sugeriu uma generalização desse teorema para n retas, onde $n > 4$, e foi contra esse problema generalizado que Descartes em 1637 pôs à prova sua geometria analítica. Assim poucos problemas tiveram papel tão importante na história da matemática quanto o do "lugar a três ou quatro retas".

12 O Livro IV de *As cônicas* é descrito pelo autor como demonstração "de quantos modos as secções de um cone se encontram", e ele se mostra particularmente orgulhoso de teoremas "nenhum dos quais foi discutido por escritores anteriores" com relação ao número de pontos em que uma secção de um cone encontra "os ramos opostos de uma hipérbole". A idéia da hipérbole como curva de dois ramos era novidade de Apolônio e ele gostava muito de descobrir e provar teoremas relativos a ela. Por exemplo, ele mostrou (IV. 42) que se um ramo de uma hipérbole encontra os dois ramos de uma outra hipérbole, o ramo oposto da primeira hipérbole não encontrará nenhum dos ramos da segunda em dois pontos; ou ainda (IV. 54), se uma hipérbole é tangente a um dos ramos de uma segunda hipérbole com sua concavidade em sentido oposto, o ramo oposto da primeira não encontrará o ramo oposto da segunda. É em relação aos teoremas desse livro que Apolônio faz uma afirmação de que se infere que, em seus dias como nos nossos, havia oponentes de espírito estreito da matemática pura que pejorativamente indagavam da utilidade desses resultados. O autor orgulhosamente afirma: "Eles merecem aceitação pelas suas próprias demonstrações, assim como aceitamos muitas coisas na matemática por esta razão e nenhuma outra"[7].

13 O prefácio do Livro V, relativo a retas máximas e mínimas traçadas a uma cônica, novamente argumenta que "o assunto é um daqueles que parecem dignos de estudo por si mesmos". Embora devamos admirar o autor por sua elevada atitude intelectual, pode ser pertinentemente observado que o que em seu tempo era bela teoria, sem perspectivas de aplicabilidade à ciência ou engenharia de seu tempo, a partir daí tornou-se fundamental em campos como a dinâmica terrestre e a mecânica celeste. Os teoremas de Apolônio sobre máximos e mínimos na verdade são teoremas sobre tangentes e normais a secções cônicas. Sem um conhecimento das propriedades das tangentes a uma parábola, uma análise de trajetórias locais seria impossível, e um estudo das órbitas dos planetas é impensável sem referência às tangentes a uma elipse. É claro, em outras palavras, que foi a matemática pura de Apolônio que permitiu cerca de 1 800 anos mais tarde, os *Principia* de Newton; esse, por sua vez, deu aos cientistas de hoje condições para que a viagem de ida e volta à lua fosse possível. Mesmo na Grécia antiga o teorema de Apolônio que diz que todo cone oblíquo tem duas famílias de secções circulares era aplicável à cartografia na transformação estereográfica, usada por Ptolomeu e possivelmente por Hiparco, de

[7]Veja Heath, *Apollonius of Perga, Treatise on Conic Sections*, p. LXXIV

uma região esférica em uma parte do plano. Freqüentemente se verificou no desenvolvimento da matemática que tópicos que originalmente podiam ser justificados apenas como "dignos de estudo por eles mesmos" mais tarde se tornaram de valor inestimável para o "homem prático".

Os matemáticos gregos não tinham uma definição satisfatória de tangente a uma curva C num ponto P, pensando nela como uma reta L tal que nenhuma outra podia ser traçada por P entre C e L. Talvez fosse insatisfação com essa definição o que levou Apolônio a evitar definir uma normal a uma curva C por um ponto Q como uma reta por Q que corta a curva C num ponto P e é perpendicular à tangente a C por P. Em vez disso, usou o fato de ser a normal de Q a C uma reta tal que a distância de Q a C é um máximo ou mínimo relativo. Em *As cônicas*, V. 8, por exemplo, Apolônio provou um teorema relativo à normal de uma parábola que hoje é parte de cursos de cálculo. Em terminologia moderna o teorema afirma que a subnormal da parábola $y^2 = 2px$ por qualquer ponto P sobre a curva é constante e igual a p; na linguagem de Apolônio essa propriedade se exprime mais ou menos assim:

> Se A é o vértice de uma parábola $y^2 = px$, e se G é um ponto no eixo tal que $AG > p$, e se N é um ponto entre A e G tal que $NG = p$, e se NP é traçado perpendicularmente ao eixo, encontrando a parábola em P (Fig. 9.6), então PG é o segmento de reta mínimo de G à curva e portanto é normal à parábola em P.

A prova de Apolônio é uma típica prova indireta — mostra-se que se P' é qualquer outro ponto da parábola, $P'G$ cresce quando P' se afasta de P de qualquer dos dois lados. Uma prova do teorema correspondente, mas mais complicado, referente à normal a uma elipse ou hipérbole de um ponto sobre o eixo é dada então; e mostra-se que se P é um ponto sobre uma cônica, só uma normal pode ser traçada por P, quer seja considerada como um mínimo ou um máximo, e essa normal é perpendicular à tangente em P. Observe-se que a perpendicularidade que tomamos como definição é aqui provada como um teorema, enquanto que a propriedade de máximo-mínimo, que tomamos como teorema, serve para Apolônio como definição. Proposições posteriores no Livro V levam o tópico das normais a uma cônica a tal ponto que o autor dá critérios que permitem decidir quantas normais podem ser tiradas de um ponto a uma secção cônica. Esses critérios equivalem ao que descreveríamos como equações das evolutas às cônicas. Para a parábola $y^2 = 2px$ Apolônio mostrou em essência que pontos, cujas coordenadas satisfazem à equação cúbica $27py^2 = 8(x-p)^3$, são posições limites do ponto de intersecção de normais à parábola em pontos P e P' quando P' se avizinha de P. Isto é, pontos sobre essa cúbica são os centros de curvatura para pontos sobre a cônica (isto é, os centros de círculos osculadores para a parábola). No caso da elipse e da hipérbole, cujas equações são respectivamente $x^2/a^2 \pm y^2/b^2 = 1$, as equações correspondentes para a evoluta são $(ax)^{2/3} \pm (by)^{2/3} =$ $= (a^2 \mp b^2)^{2/3}$.

Depois de dar as condições para a evoluta de uma cônica, Apolônio mostrou como construir uma normal a uma secção cônica de um ponto Q. No caso da parábola $y^2 = 2px$, e para Q fora da parábola e não sobre o eixo, traça-se a perpendicular QM ao eixo AK, mede-se $MH = p$, e levanta-se HR perpendicular a HA (Fig. 9.7). Então por Q traça-se a hipérbole retangular com assíntotas HA e HR, que corta a parábola num ponto P. A reta QP é a normal pedida, como se prova mostrando que $NK = HM = p$. Se o ponto Q está

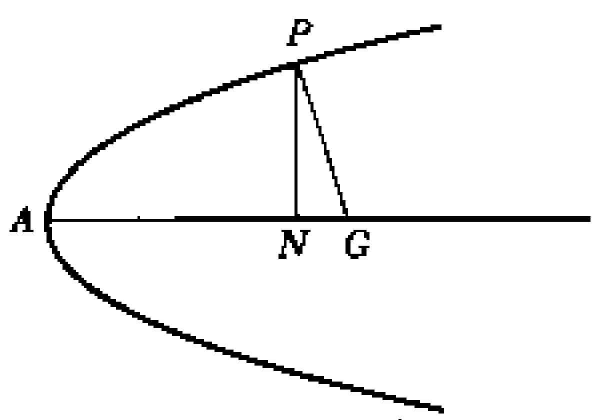


Figura 9.6

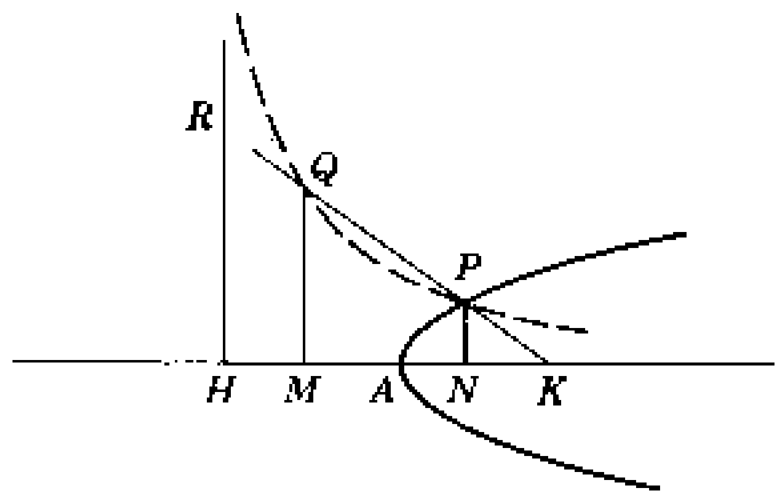


Figura 9.7

dentro da parábola, a construção é semelhante, só que P cai entre Q e R. Apolônio deu ainda construções, usando também uma hipérbole auxiliar para a normal de um ponto a uma elipse ou hipérbole dadas. Deve-se notar que a construção de normais à elipse e à hipérbole, ao contrário da construção de tangentes, exige mais do que régua e compasso. Como os antigos descreveriam os dois problemas, traçar uma *tangente* a uma cônica é um "problema plano"; pois bastam retas e círculos que se cortam; ao contrário, traçar uma *normal* de um ponto arbitrário no plano a uma cônica central dada é um "problema sólido", pois não pode ser resolvido só usando retas e círculos, mas pode ser feito usando lugares sólidos (no caso uma hipérbole). Papus mais tarde criticou severamente Apolônio por sua construção de uma normal à parábola por tê-lo tratado como problema sólido em vez de plano. Isto é, a hipérbole que Apolônio usou poderia ser substituída por um círculo. Talvez Apolônio tenha achado que a obsessão com reta e círculo deveria ceder, na sua construção de normais, a um desejo de uniformidade de métodos em relação aos três tipos de cônicas.

14 Quando Apolônio mandou ao rei Atalus o sexto livro de *As cônicas*, ele o descreveu como contendo proposições acerca de "segmentos de cônicas iguais e desiguais, semelhantes e dessemelhantes, além de outras questões não tratadas pelos que me precederam. Em particular, encontrará neste livro como num cone reto dado, se pode cortar uma secção igual a uma secção dada." Duas cônicas se dizem semelhantes se as ordenadas, quando traçadas a distâncias proporcionais do vértice, são respectivamente proporcionais às abscissas correspondentes. Entre as proposições mais fáceis do Livro VI estão as que demonstraram que todas as parábolas são semelhantes (VI. 11) e que uma parábola não pode ser semelhante a uma elipse ou hipérbole nem uma elipse a uma hipérbole (VI. 14, VI. 15). Outras proposições (VI. 26, VI. 27) provam que se um cone qualquer é cortado por dois planos paralelos em secções elíticas ou hiperbólicas, as secções serão semelhantes, mas não iguais.

O Livro VII volta ao assunto de diâmetros conjugados e "muitas proposições novas relativas a diâmetros de secções e figuras descritas sobre eles". Entre essas estão algumas encontradas em textos modernos, tais como a prova (VII. 12, VII. 13, VII. 29, VII. 30) de que

> Em toda elipse a soma, e em toda hipérbole a diferença, dos quadrados sobre dois diâmetros conjugados quaisquer é igual à soma ou diferença respectivamente dos quadrados sobre os eixos.

Há também a prova do teorema familiar que diz que se tangentes são traçadas nas extremidades de um par de eixos conjugados de uma elipse ou hipérbole, o paralelogramo formado por essas quatro tangentes será igual ao retângulo sobre os eixos. Conjeturou-se que o Livro VIII perdido de *As cônicas* continuasse problemas semelhantes, pois no prefácio do Livro VII o autor escreveu que os teoremas do Livro VII eram usados no Livro VIII para resolver certos problemas sobre cônicas, de modo que o último livro "é uma espécie de apêndice".

15 *As cônicas* de Apolônio constituem um tratado de amplitude e profundidade tão extraordinárias que ficamos surpresos de não encontrar algumas propriedades que a nós parecem tão evidentemente fundamentais. Do modo como as curvas são agora introduzidas em livros de texto, os focos desempenham papel proeminente; no entanto, Apolônio não tinha nome para esses pontos e se referia a eles apenas indiretamente. Presume-se que ele, e talvez também Aristeu e Euclides, conhecesse na verdade a propriedade foco-diretriz das curvas, mas esta não é sequer mencionada em *As cônicas*. Não há conceito numérico, no tratamento antigo das cônicas, que corresponda ao que chamamos excentricidade, e embora o foco da parábola apareça por implicação em muitos teoremas de Apolônio, não é claro que o autor conhecesse o papel agora familiar da diretriz. Parece ter sabido como determinar uma cônica dados cinco pontos, mas esse tópico, que mais tarde apareceu em destaque nos *Principia* de Newton, é omitido em *As cônicas*. É possível, é claro, que algumas ou todas essas omissões tantalizantes resultem do fato de terem sido tratados em outro lugar, em obras perdidas de Apolônio ou outros autores.

Tanto da matemática antiga se perdeu que um argumento *e silencio* é realmente precário. Além disso, as palavras de Leibniz devem servir de aviso de que não devem ser subestimadas as realizações dos antigos: "Quem entende Arquimedes e Apolônio admirará menos as realizações dos homens mais célebres de épocas posteriores."

16 Os métodos de Apolônio, em *As cônicas*, em muitos pontos são tão semelhantes aos modernos que às vezes se considera seu tratado como uma geometria analítica, antecipando a de Descartes por 1 800 anos. A aplicação de retas de referência em geral, e de um diâmetro e uma tangente em sua extremidade em particular, não difere essencialmente, é claro, do uso de sistemas de coordenadas, sejam sistemas retangulares, sejam oblíquos. As distâncias medidas ao longo do diâmetro a partir do ponto de tangência são as abscissas, e os segmentos paralelos à tangente e cortados entre o eixo e a curva são as ordenadas. As relações de Apolônio entre essas abscissas e ordenadas correspondentes são nem mais nem menos que as formas retóricas das equações das curvas. No entanto, a álgebra geométrica grega não englobava grandezas negativas; além disso, o sistema de coordenadas era sempre superposto a posteriori sobre uma curva dada a fim de estudar suas propriedades. Não parece haver exemplo na geometria antiga de ser o sistema de coordenadas estabelecido a priori para fins de representação gráfica de uma equação ou relação expressa, seja simbolicamente seja retoricamente. Da geometria grega podemos dizer que as equações são determinadas pelas curvas, mas não que curvas fossem definidas por equações. Coordenadas, variáveis e equações eram noções subsidiárias derivadas de uma situação geométrica especifica; e infere-se que do ponto de vista grego não era suficiente definir curvas abstratamente como lugares satisfazendo a condições dadas sobre as coordenadas. Para garantir que um lugar fosse realmente uma curva os antigos achavam que era necessário exibi-lo estereometricamente como uma secção de um sólido ou descrever um processo cinemático de construção.

A definição e estudo das curvas pelos gregos em comparação com a flexibilidade e extensão do tratamento moderno ficam em posição desfavorável. Na verdade, aos antigos escapou quase completamente o papel que curvas de vários tipos desempenham no mundo que os cercava. Esteticamente um dos povos mais bem dotados de todos os tempos, as únicas curvas que acharam nos céus e na terra foram combinações de retas e círculos. Nem sequer exploraram eficazmente os dois métodos de definição de curvas que admitiam. O método cinemático e o uso de secções planas de superfícies admitem generalizações de grande alcance, no entanto apenas uma dúzia de curvas era familiar aos antigos. Mesmo a ciclóide, gerada por um ponto de um círculo que rola sobre uma reta, parece não ter sido percebida por eles. Que Apolônio, o maior geômetra da antiguidade, não tenha desenvolvido a geometria analítica se deveu provavelmente à pobreza de curvas mais do que de idéias. Não são necessários métodos gerais quando os problemas se referem sempre a um caso dentre um número limitado de casos particulares. Além disso, os inventores modernos da geometria analítica tinham toda a álgebra da Renascença à sua disposição, enquanto que Apolônio trabalhava necessariamente com o instrumento mais rigoroso mas menos manejável da álgebra geométrica.

BIBLIOGRAFIA

Apollonius of Perga, *Les coniques*, traduzido por Paul Ver Eecke (Bruges: Desclée, de Brouwer, 1924)

Coolidge, J. L., *History of the Conic Sections and Quadric Surfaces* (Oxford: Clarendon, 1945)

Coolidge, J. L., *History of Geometrical Methods* (Oxford: Clarendon, 1940; edição em brochura, New York: Dover, 1963)

Coxeter, H. S. M., "The Problem of Apollonius," *American Mathematical Monthly*, **75** (1968), 5-15

Dingeldey, F., "Coniques," in *Encyclopédie des sciences mathématiques*, **3** (3), 1-256

Fladt, K., *Geschichte und Theorie der Kegelschnitte und der Flächen zweiten Grades* (Stuttgart, 1965)

Heath, T. L., "Apollonius," em *Encyclopaedia Britannica*, 11.ª edição (Cambridge, 1910), II, 186-188

Heath, T. L., ed., *Apollonius of Perga. Treatise on Conic Sections* (Cambridge: Cambridge University Press, 1896; reimpresso, New York: Barnes and Noble, 1961)

Neugebauer, O., "Apollonius-Studien," *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik*, Parte B, *Studien*, II (1932), 215-253

Neugebauer, O., "Eccentric and Epicyclic Motion According to Apollonius," *Scripta Mathematica*, **24** (1959), 5-21

Taylor, Charles, *An Introduction to the Ancient and Modern Geometry of Conics* (Cambridge, 1881)

Thomas, Ivor, *Selections Illustrating the History of Greek Mathematics* (Cambridge, Mass.: Loeb Classical Library, 1939-1941, 2 vols.)

Van der Waerden, B. L., *Science Awakening*, traduzido por Arnold Dresden (New York: Oxford, 1961, edição em brochura, New York: Wiley, 1963)

Zeuthen, H. G., *Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum* (Copenhagen, 1886 e 1902)

EXERCÍCIOS

1. Os nomes de Aristóteles, Euclides, Arquimedes e Apolônio estão associados respectivamente com os de quatro poderosos governantes — Alexandre, Ptolomeu, Hiero e Atalus. Diga onde esses governaram e em que conexão seus nomes estão associados aos dos sábios.

2. Descreva vários aspectos em que a matemática de Apolônio difere da de Euclides e vários aspectos em que suas obras se parecem.

3. Em que pontos a obra de Apolônio se assemelha à de Arquimedes e em quais modos diferem suas obras?

4. Você diria que Apolônio usou geometria analítica? Justifique sua resposta, mostrando em que aspectos seus métodos lembram o moderno e em quais diferem.

5. Escreva o número 12 345 678 987 654 321 como Apolônio o escreveria.

6. Prove o teorema de Apolônio que diz que o lugar dos pontos, cuja diferença dos quadrados das distâncias a dois pontos fixos é constante, é uma reta perpendicular à reta que une os dois pontos.

7. Prove o teorema relativo ao "círculo de Apolônio" isto é, mostre que o lugar dos pontos, cujas distâncias a dois pontos fixos são diferentes mas estão numa razão fixa, é um círculo.

8. Dados três pontos $P_1(3, 0)$, $P_2(0, 4)$ e $P_3(1, 2)$ ache a equação da reta por P_3 que corta o eixo-x num ponto P_4 e o eixo-y num ponto P_5, tais que (a) P_1P_4 é duas vezes P_2P_5 e (b) $P_1P_4 \times P_2P_5$ é 10.

9. Resolva o "problema de Apolônio" para (a) o caso de dois pontos e uma reta e (b) o caso de duas retas e um ponto.

10. Partindo das equações usuais para a elipse, a parábola e a hipérbole com um vértice na origem, complete a prova da "propriedade do nome" de Apolônio.

11. Se um diâmetro da elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ tem inclinação m, ache a inclinação do diâmetro conjugado.

12. Ache a inclinação do sistema de cordas paralelas de $y^2 = 2px$ bissectadas pelo "diâmetro" $y = a$.

13. Dado um diâmetro de uma hipérbole, mostre precisamente como, com régua e compasso, você construiria o diâmetro conjugado.

14. Ache as equações das tangentes do ponto $(-1, 2)$ à parábola $y^2 = 2px$ e mostre como construir as tangentes com régua e compasso.

15. Ache as coordenadas dos pés das quatro normais que podem ser traçadas do ponto $(1, 0)$ à elipse $x^2/25 + y^2/16 = 1$. Quantas normais podem ser traçadas de $(2, 0)$ a essa elipse?

16. Para que valores de K podem ser traçadas quatro normais do ponto $(K, 0)$ à elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$?

17. Prove que o comprimento da subnormal à parábola, num ponto P da parábola, é constante (isto é, independe da posição do ponto P sobre a curva).

18. Apolônio sabia que a tangente a uma elipse ou hipérbole num ponto P sobre a curva faz ângulos iguais com os raios focais por P. Prove esse teorema.

19. Prove o teorema de Apolônio que diz que o segmento de uma tangente à hipérbole, cortado entre as assíntotas, é bissectado pelo ponto de tangência.

*20. Ache uma equação do lugar dos pontos P tais que o produto das distâncias perpendiculares de P aos eixos coordenados é igual ao produto das distâncias perpendiculares de P às retas $y = x$ e $y = 1 - x$.

*21. Ache uma equação da polar do ponto (a, b) com relação à parábola $y^2 = 2px$.

*22. Prove, pelo modo que Apolônio usou para o cone, que uma secção oblíqua de um cilindro circular é uma elipse.

*23. Prove que se AA' é o eixo maior de uma elipse, se a tangente à elipse num ponto qualquer P corta esse eixo (prolongado) em T e se N é a projeção de P sobre AA', então (AA', TN) formam um conjunto de pontos conjugados. (Ver Fig. 9.5.)

*24. Quantas normais podem ser traçadas do ponto $(1, 2)$ à parábola $y^2 = 2x$? Justifique sua resposta.

Capítulo **10**

Trigonometria e mensuração na Grécia

> Quando eu traço a meu prazer os movimentos dos corpos celestiais, eu já não toco a terra com os meus pés: eu estou na presença do próprio Zeus e me alimento de ambrosia, o manjar dos deuses.
>
> *Ptolomeu*

1 A trigonometria, como os outros ramos da matemática, não foi obra de um só homem — ou nação. Teoremas sobre as razões entre lados de triângulos semelhantes tinham sido conhecidos e usados pelos antigos egípcios e babilônios. Dada a falta, no período pré-helênico, do conceito de medida de ângulo, um tal estudo seria melhor chamado "trilaterometria", ou medida de polígonos de três lados (triláteros), do que "trigonometria", a medida de partes de um triângulo. Com os gregos pela primeira vez encontramos um estudo sistemático de relações entre ângulos (ou arcos) num círculo e os comprimentos das cordas que os subentendem. As propriedades das cordas, como medidas de ângulos centrais ou inscritos em círculos, eram conhecidas dos gregos do tempo de Hipócrates, e é provável que Eudoxo tenha usado razões e medidas de ângulos para determinar o tamanho da Terra e as distâncias relativas do Sol e da Lua. Nas obras de Euclides não há trigonometria no sentido estrito da palavra, mas há teoremas equivalentes a leis ou fórmulas trigonométricas específicas. As Proposições II. 12 e II. 13 de *Os elementos*, por exemplo, são as leis de co-senos para ângulos obtuso e agudo respectivamente enunciadas em linguagem geométrica em vez de trigonométrica, e são provadas por método semelhante ao usado por Euclides para o teorema de Pitágoras. Os teoremas sobre comprimentos de cordas são essencialmente aplicações da lei dos senos. Vimos que o teorema de Arquimedes sobre a corda quebrada pode facilmente ser traduzido em linguagem trigonométrica a fórmulas para senos de somas e diferenças de ângulos. Cada vez mais os astrônomos da Idade Alexandrina — notadamente Eratóstenes de Cirene (por volta de 276-194 A. C.) e Aristarco de Samos (por volta de 310-230 A. C.) tratavam problemas que indicavam a necessidade de relações mais sistematizadas entre ângulos e cordas.

2 Aristarco, segundo Arquimedes e Plutarco, propôs um sistema heliocêntrico, antecipando-se a Copérnico por mais de um milênio e meio[1]; mas o que quer que ele tenha escrito sobre esse assunto se perdeu. Em vez disso temos dele um tratado, talvez escrito antes (cerca de 260 A. C.), *Sobre os tamanhos e distâncias do Sol e da Lua*, que assume um universo geocêntrico[2]. Nessa obra Aristarco observa que quando a Lua está exatamente meio cheia, o ângulo entre as linhas de vista ao Sol e à Lua difere para menos de um ângulo reto por um trintavos de um quadrante. (A introdução sistemática do círculo de 360° veio um pouco depois.) Na linguagem de hoje isso significa que a razão da distância da Lua para a distância do Sol (a razão *ME* a *SE* na Fig. 10.1) é sen 3°. Não tendo ainda sido desenvolvidas as tabelas trigonométricas, Aristarco recorreu a um bem conhecido teorema geométrico de então que agora seria expresso pelas desigualdades $\operatorname{sen}\alpha/\operatorname{sen}\beta < \alpha/\beta < \operatorname{tg}\alpha/\operatorname{tg}\beta$, onde $0° < \beta < \alpha < 90°$. Dessas ele concluiu que $1/20 < \operatorname{sen} 3° < 1/18$, e daí que o Sol está mais de dezoito vezes, mas menos de vinte, mais longe da Terra que a Lua. Isso está muito longe do valor moderno — pouco menos que 400 — mas é melhor que os valores nove e doze que Arquimedes tinha atribuído respectivamente a Eudoxo e Fídias (pai de Arquimedes). Além disso, o *método* usado

[1]O relato mais completo acerca de Aristarco e seu lugar na astronomia encontra-se em T. L. Heath, *Aristarchus of Samos* (1913)

[2]É possível que, na determinação dessas distâncias, Eudoxo se tenha antecipado a Aristarco. Veja Paul Tannery, *Mémoires scientifiques*, **1**, 371

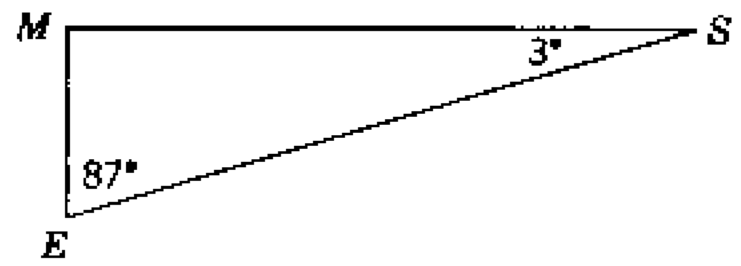


Figura 10.1

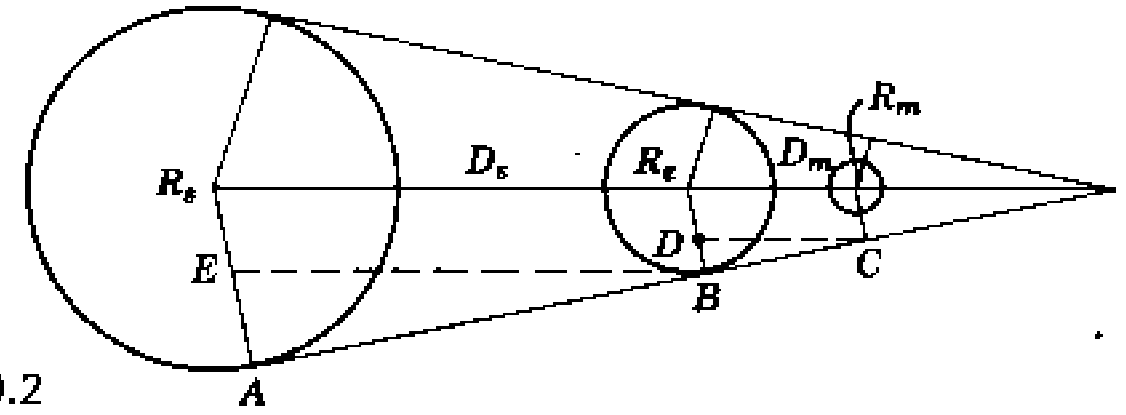


Figura 10.2

por Aristarco era inatacável, o resultado sendo prejudicado apenas pelo erro de observação ao medir o ângulo *MES* como 87° (quando de fato é aproximadamente 89° 50′).

Tendo determinado as distâncias relativas do Sol e da Lua, Aristarco sabia que seus respectivos tamanhos estavam na mesma razão. Isso decorre do fato de terem o Sol e a Lua aproximadamente o mesmo tamanho aparente — isto é, subentendem o mesmo ângulo ao olho de um observador na Terra. No tratado em questão esse ângulo é dado como 2°, mas Arquimedes atribui a Aristarco o valor muito melhor de (1/2)°. Dessa razão Aristarco pode obter uma aproximação para os tamanhos do Sol e da Lua em comparação com o da Terra. Por observação de eclipses lunares ele concluiu que a largura da sombra lançada pela Terra à distância da Lua era duas vezes a largura da Lua. Então se R_s, R_e e R_m são os raios do Sol, Terra e Lua respectivamente e se D_s e D_m são as distâncias do Sol e da Lua à Terra, resulta da semelhança dos triângulos *BCD* e *ABE* (Fig. 10.2) a proporção $(R_e - 2R_m)/(R_s - R_e) = D_m/D_s$. Se nessa equação substituirmos D_s e R_s pelos valores aproximados $19D_m$ e $19R_m$ obtém-se a equação $(R_e - 2R_m)/(19R_m - R_e) = 1/19$ ou $R_m = 20/57\ R_e$. Aqui os cálculos de Aristarco foram consideravelmente simplificados. Seu raciocínio na verdade era exposto muito mais cuidadosamente e levava às conclusões que

$$\frac{108}{43} < \frac{R_e}{R_m} < \frac{60}{19} \quad \text{e} \quad \frac{19}{3} < \frac{R_s}{R_e} < \frac{43}{6}$$

3 O que faltava para chegar a uma avaliação dos tamanhos do Sol e da Lua era só uma medida do raio da Terra. Aristóteles tinha mencionado uma estimativa de 60 000 quilômetros para a circunferência da Terra (talvez devida a Eudoxo) e Arquimedes contava que alguns de seus contemporâneos calculavam que o perímetro seria de uns 45 000 quilômetros[3]. Um cálculo muito melhor, e de longe o mais célebre, deveu-se a Eratóstenes, contemporâneo mais jovem de Arquimedes e Aristarco. Eratóstenes nascera em Cirene, e passara boa parte de sua juventude em Atenas. Tinha conseguido proeminência em vários campos — poesia, astronomia, história, matemática, atletismo — quando na meia-idade foi chamado a Alexandria por Ptolomeu III (Filopator) para ensinar a seu filho (mais tarde Ptolomeu Filadelfo) e para ser bibliotecário na universidade. Foi a Eratóstenes em Alexandria que Arquimedes enviou o tratado sobre *O método*. Hoje Eratóstenes é lembrado especialmente por sua medida da terra — não a primeira nem a última de tais avaliações na antiguidade mas em tudo a de mais sucesso. Eratóstenes observou que ao meio dia no dia do solstício de verão o Sol brilhava diretamente para dentro de um poço profundo em Siene. Ao mesmo tempo em Alexandria, tomada como estando no mesmo meridiano e 5 000 estádios ao norte de Siene verificou-se que o Sol lançava uma sombra indicando que a distância angular do Sol ao zênite era um cinqüentavo de um círculo. Da igualdade dos ângulos correspondentes *S′AZ* e *S″OZ* na Fig. 10.3 é claro que a circunferência da Terra deve ser cinqüenta vezes a distância entre Siene e Alexandria. Isso fornece um perímetro de 250 000 estádios, ou, como um estádio era cerca de um décimo de milha, de 25 000 milhas ou 37 000 quilômetros. (Textos posteriores indicavam 252 000 estádios, talvez para fornecer a cifra redonda de 700 estádios por grau.)

Tendo dado contribuições a vários domínios do conhecimento, Eratóstenes é bem conhecido dos matemáticos pelo "crivo de Eratóstenes", um método sistemático para

[3]A. Diller, "The Ancient Measurements of the Earth", *Isis*, **40**, (1949), 6-9

isolar os números primos. Com todos os números naturais dispostos em ordem, simplesmente são cancelados os números de dois em dois seguindo o dois, de três em três (na seqüência de partida) seguindo o três, de cinco em cinco seguindo o cinco, e continua-se assim a cancelar cada n-ésimo número seguindo o número n. Os números restantes, de dois em diante, serão, é claro, primos. Eratóstenes também escreveu obras sobre médias e lugares, mas essas se perderam. Mesmo seu tratado *Sobre a medida da Terra* já não existe, embora alguns detalhes dele tenham sido preservados por outros, Heron e Ptolomeu de Alexandria inclusive.

4 Durante cerca de dois séculos e meio, de Hipócrates a Eratóstenes, os matemáticos gregos estudaram as relações entre retas e círculos e as aplicaram a uma variedade de problemas de astronomia, mas disso não resultou uma trigonometria sistemática. Então, presumivelmente durante a segunda metade do segundo século A. C., foi compilada a que foi presumivelmente a primeira tabela trigonométrica pelo astrônomo Hiparco de Nicéia (por volta de 180-125 A. C.), que assim ganhou o direito de ser chamado "o pai da trigonometria". Aristarco sabia que num dado círculo a razão do arco para a corda diminui quando o arco diminui de 180° para 0°, aproximando-se do limite 1. No entanto parece que antes de Hiparco empreender a tarefa ninguém tinha tabulado valores correspondentes do arco e da corda para toda uma série de ângulos[4]. Foi sugerido, no entanto, que Apolônio pode ter-se antecipado a Hiparco quanto a isto, e que a contribuição desse último à trigonometria foi apenas a de calcular um melhor conjunto de cordas do que seus predecessores. Hiparco evidentemente calculou suas tabelas para serem usadas na sua astronomia, sobre cuja origem pouco se sabe[5]. Hiparco foi uma figura de transição entre a astronomia babilônica e a obra de Ptolomeu. A astronomia florescia na Mesopotâmia, quando em 270 A. C. aproximadamente, Berossos, quase o único astrônomo babilônio conhecido pelo nome, mudou-se para a ilha de Cos, e não é improvável que os fundamentos da teoria conhecida no Oriente Próximo tenham sido transmitidos à Grécia nessa época. As principais contribuições à astronomia atribuídas a Hiparco foram a organização de dados empíricos derivados dos babilônios, a elaboração de um catálogo estelar, melhoramentos em constantes astronômicas importantes (tais como a duração do mês e do ano, o tamanho da Lua, e o ângulo de inclinação da eclítica) e, finalmente, a descoberta da precessão dos equinócios. Supõe-se em geral que ele fosse em grande parte responsável pela construção de sistemas planetários geométricos, mas isso é incerto, pois não está claro até que ponto Apolônio, um pouco antes, possa ter aplicado métodos trigonométricos à astronomia.

Não se sabe bem quando penetrou na matemática o uso sistemático do círculo de 360°, mas parece dever-se em grande parte a Hiparco através de sua tabela de cordas. É possível que ele a tenha tomado de Hipsicles, que anteriormente tinha dividido o dia em 360 partes, subdivisão que pode ter sido sugerida pela astronomia babilônica. Como Hiparco fez sua tabela não se sabe, pois suas obras se perderam (excetuado um comentário sobre um poema astronômico popular por Aratus). É provável que seus métodos fossem semelhantes aos de Ptolomeu, descritos abaixo, pois Teon de Alexandria, comentando a

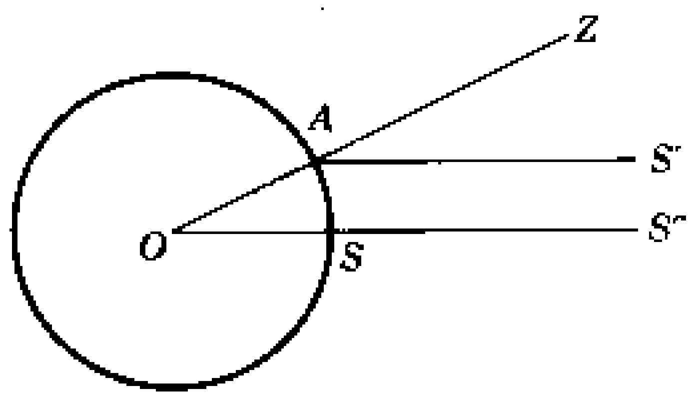


Figura 10.3

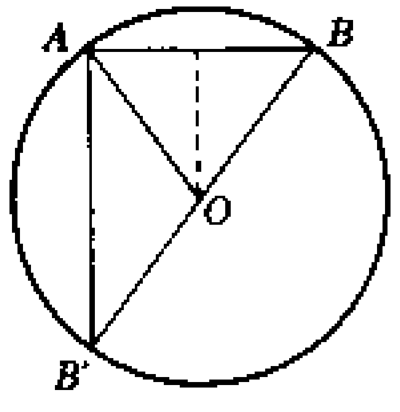


Figura 10.4

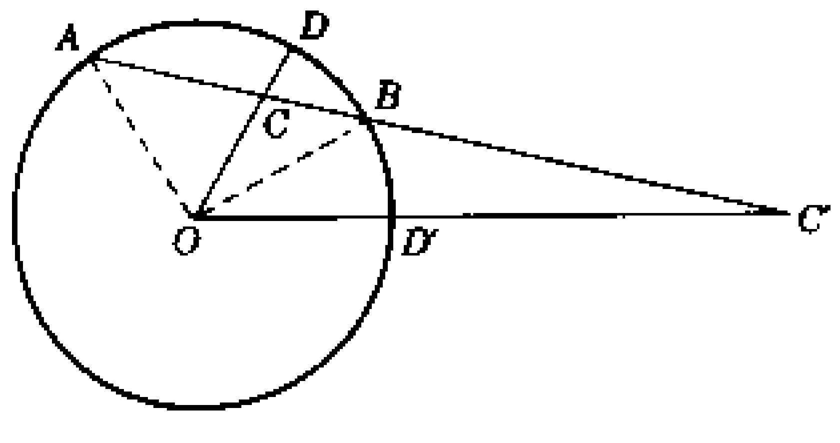


Figura 10.5

[4]Veja Paul Tannery, *Recherches sur l'histoire de l'astronomie ancienne*. (Paris, 1893), pp. 66 e seguintes

[5]Como se sabe pouco fica claro em O. Neugebauer, *The Exact Sciences in Antiquity*, 2.ª edição (Providence, R. I.: Brown University Press, 1957) especialmente pp. 167-168

tabela de cordas de Ptolomeu, referiu que Hiparco antes tinha escrito um tratado em doze livros sobre cordas em um círculo.

5 Teon menciona também outro tratado, em seis livros, por Menelau de Alexandria (cerca de 100 D. C.) tratando de *Cordas num círculo*. Outras obras de matemática e astronomia de Menelau são citadas por comentadores gregos e árabes posteriores, inclusive um *Elementos de geometria*, mas a única que se preservou — e somente em árabe — foi sua *Sphaerica*. No Livro I desse tratado Menelau estabeleceu uma base para triângulos esféricos análoga à de Euclides I para triângulos planos. Contém um teorema que não tem um análogo euclidiano — que dois triângulos esféricos são congruentes se ângulos correspondentes são iguais (Menelau não fazia distinção entre triângulos esféricos congruentes e simétricos); e o teorema $A + B + C > 180°$ é provado. O segundo livro de *Sphaerica* descreve a aplicação da geometria esférica aos fenômenos astronômicos e é de pouco interesse matemático. O Livro III, o último, contém o bem conhecido "teorema de Menelau" como parte do que é essencialmente trigonometria esférica na forma grega típica — uma geometria ou trigonometria de cordas num círculo. No círculo na Fig. 10.4 escreveríamos que a corda AB é duas vezes o seno da metade do ângulo central AOB (multiplicado pelo raio do círculo). Menelau e seus sucessores gregos em vez disso referiam-se a AB simplesmente como a corda correspondente ao arco AB. Se BOB' é um diâmetro do círculo, então a corda AB' é duas vezes o co-seno da metade do ângulo AOB (multiplicado pelo raio do círculo). Logo os teoremas de Tales e Pitágoras, que levam à equação $AB^2 + AB'^2 = 4r^2$, equivalem à identidade trigonométrica moderna $\text{sen}^2\,\theta + \cos^2\theta = 1$. Menelau, como também provavelmente Hiparco antes dele, conhecia bem outras identidades, duas das quais ele usou como lemas para provar seu teorema sobre transversais. O primeiro desses lemas pode ser enunciado em nossa terminologia como segue. Se uma corda AB num círculo de centro O (Fig. 10.5) é cortada no ponto C por um raio OD, então $AC/CB = \text{sen}\,\widehat{AD}/\text{sen}\,\widehat{DB}$. O segundo lema é semelhante: se a corda AB prolongada é cortada no ponto C' por um raio OD' prolongado, então $AC'/BC' = \text{sen}\,\widehat{AD'}/\text{sen}\,\widehat{BD'}$. Esses lemas são assumidos por Menelau sem prova, presumivelmente porque podiam ser encontrados em textos anteriores, possivelmente nos doze livros de Hiparco sobre cordas. (O leitor pode provar os lemas facilmente traçando AO e BO e perpendiculares de A e B a OD e usando semelhança de triângulos.)[6]

É provável que o "teorema de Menelau" para o caso de triângulos planos fosse conhecido por Euclides, talvez tendo aparecido no desaparecido *Porismas*. O teorema no plano diz que se os lados AB, BC, CA de um triângulo são cortados por uma transversal nos pontos D, E, F respectivamente (Fig. 10.6) então $AD \cdot BE \cdot CF = BD \cdot CE \cdot AF$. Em outras palavras, qualquer reta corta os lados de um triângulo de modo que o produto de três segmentos não adjacentes é igual ao produto dos outros três, como se prova facilmente por geometria elementar ou por aplicação de relações trigonométricas simples. Esse teorema Menelau considerou bem conhecido por seus contemporâneos, mas ele o estendeu a triângulos esféricos numa forma equivalente a $\text{sen}\,AD\ \text{sen}\,BE\ \text{sen}\,CF = \text{sen}\,BD\ \text{sen}\,CE\ \text{sen}\,AF$. Se são considerados segmentos com orientação em vez de absolutos, os dois produtos são iguais em valor absoluto mas diferem em sinal.

6 O teorema de Menelau desempenhou papel fundamental na trigonometria esférica e na astronomia, mas de longe a mais influente e significativa obra trigonométrica da antiguidade foi a *Syntaxis matemática*, obra em treze livros escrita por Ptolomeu de Alexandria cerca de meio século depois de Menelau. Essa célebre "Síntese matemática" era distinguida de outro grupo de tratados astronômicos por outros autores (Aristarco inclusive) por ser a de Ptolomeu chamada a coleção "maior" e a de Aristarco e outros a coleção "menor". Devido às freqüentes referências à primeira como *megiste* surgiu mais tarde na Arábia o costume de chamar o livro de Ptolomeu o *Almajesto* ("o maior") e é por esse nome que a obra é conhecida a partir daí então.

Da vida de seu autor sabemos tão pouco quanto da do autor de *Os elementos*. Não sabemos onde ou quando Euclides e Ptolomeu nasceram. Sabemos que Ptolomeu fez

[6]Veja T. L. Heath, *History of Greek mathematics* (1921), II, 265-267

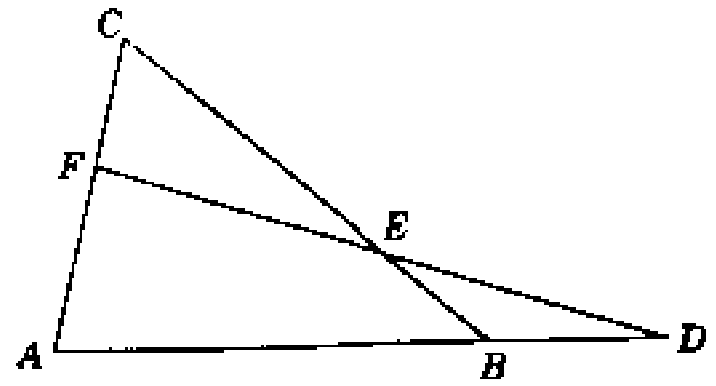


Figura 10.6

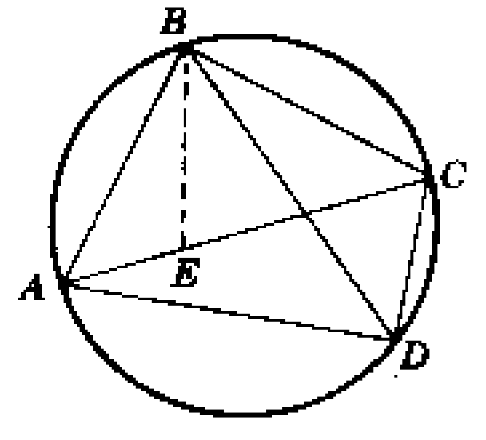


Figura 10.7

observações em Alexandria de 127 a 151 D. C. e por isso supomos que nasceu pelo fim do primeiro século. Suidas, escritor que viveu no século dez, diz que Ptolomeu vivia ainda sob Marco Aurélio (imperador de 161 a 180 D. C.).

O *Almajesto* de Ptolomeu, ao que se supõe, deve muito quanto a seus métodos ao *Cordas num círculo* de Hiparco, mas a extensão da dívida não pode ser calculada com segurança. É claro que, em astronomia, Ptolomeu fez uso do catálogo de posições estelares legado por Hiparco, mas se as tabelas trigonométricas de Ptolomeu derivavam, ou não, em grande parte, de seu reputado predecessor não se pode saber. Felizmente, o *Almajesto* sobreviveu aos estragos do tempo; por isso temos não só suas tabelas trigonométricas mas também uma exposição dos métodos usados em sua construção. De importância central para o cálculo das cordas de Ptolomeu era uma proposição geométrica ainda hoje conhecida como "teorema de Ptolomeu": se $ABCD$ é um quadrilátero (convexo) inscrito num círculo (Fig. 10.7), então $AB \cdot CD + BC \cdot DA = AC \cdot BD$; isto é, a soma dos produtos de lados opostos de um quadrilátero inscritível é igual ao produto das diagonais. A prova disto se faz facilmente traçando BE de modo que o ângulo ABE seja igual ao ângulo DBC e observando a semelhança dos triângulos ABE e BCD. Um caso especial do teorema de Ptolomeu tinha aparecido nos *Dados* de Euclides (Proposição 93): Se ABC é um triângulo inscrito num círculo, e se BD é uma corda que bissecta o ângulo ABC então $(AB + BC)/BD = AC/AD$.

Outro, e mais útil, caso especial do teorema geral de Ptolomeu é aquele em que um lado, digamos AD, é diâmetro do círculo (Fig. 10.8). Então se $AD = 2r$, temos $2r \cdot BC + AB \cdot CD = AC \cdot BD$. Se fizermos arco $BD = 2\alpha$ e arco $CD = 2\beta$, então $BC = 2r\,\mathrm{sen}(\alpha - \beta)$, $AB = 2r\,\mathrm{sen}(90° - \alpha)$, $BD = 2r\,\mathrm{sen}\,\alpha$, $CD = 2r\,\mathrm{sen}\,\beta$, e $AC = 2r\,\mathrm{sen}(90° - \beta)$. O teorema de Ptolomeu, portanto, leva ao resultado $\mathrm{sen}(\alpha - \beta) = \mathrm{sen}\,\alpha \cos\beta - \cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta$. Raciocínio semelhante leva à fórmula $\mathrm{sen}(\alpha + \beta) = \mathrm{sen}\,\alpha\cos\beta + \cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta$, e ao par análogo $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta$. Por isso essas quatro fórmulas de soma e diferença são freqüentemente chamadas fórmulas de Ptolomeu.

Foi a fórmula para seno da diferença — ou, mais precisamente, corda da diferença — que Ptolomeu achou especialmente útil ao construir suas tabelas. Outra fórmula que lhe foi muito útil foi a equivalente de nossa fórmula para metade do ângulo. Dada a corda de um arco num círculo, Ptolomeu achava a corda da metade do arco como segue. Seja D o ponto médio do arco BC num círculo com diâmetro $AC = 2r$ (Fig. 10.9), seja $AB = AE$, e tomemos DF bissectando (perpendicularmente) EC. Então não é difícil mostrar que $FC = 1/2\,(2r - AB)$. Mas da geometria elementar sabemos que $DC^2 = AC \cdot FC$, donde resulta que $DC^2 = r(2r - AB)$. Se pomos arc $BC = 2\alpha$, então $DC = 2r\,\mathrm{sen}\,\alpha/2$ e $AB = 2r\cos\alpha$, donde resulta a fórmula moderna familiar $\mathrm{sen}\,\alpha/2 = \sqrt{(1 - \cos\alpha)/2}$. Em outras palavras, se é conhecida a corda de um arco, a corda da metade do arco também é. Agora Ptolomeu

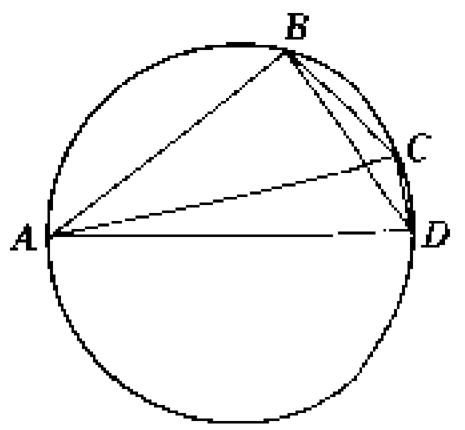


Figura 10.8

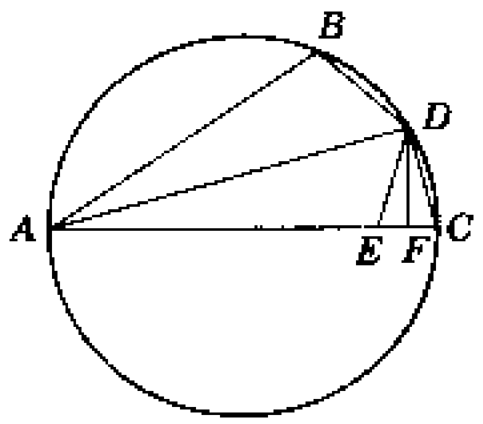


Figura 10.9

estava preparado para construir uma tabela de cordas tão precisa quanto se poderia desejar, pois tinha o equivalente de nossas fórmulas fundamentais.

7 Deve-se lembrar que desde os dias de Hiparco até os tempos modernos não havia coisas como *razões* trigonométricas. Os gregos, e depois deles os hindus e os árabes, usaram *linhas* trigonométricas. Essas a princípio tiveram a forma de cordas num círculo, como vimos, e coube a Ptolomeu associar valores numéricos (ou aproximações) às cordas. Para isso duas convenções eram necessárias: (1) algum esquema para subdividir a circunferência de um círculo e (2) alguma regra para subdividir o diâmetro. A divisão de uma circunferência em 360 graus parece ter estado em uso na Grécia desde os dias de Hiparco, embora não se saiba bem como a convenção surgiu. Não é improvável que a medida de 360 graus tenha sido tomada da astronomia, onde o zodíaco fora dividido em doze "signos" ou 36 "decanatos". Um ciclo de estações, de aproximadamente 360 dias, podia facilmente ser posto em correspondência com o sistema de signos zodiacais e decanatos subdividindo cada signo em trinta partes e cada decanato em dez partes. Nosso sistema comum de medida de ângulos pode derivar dessa correspondência. Além disso, como o sistema babilônico posicional para frações era evidentemente superior às frações unitárias egípcias e às frações comuns gregas, era natural que Ptolomeu subdividisse seus graus em sessenta *partes minutae primae*, cada uma das quais era dividida em sessenta *partes minutae secundae*, e assim por diante. É das frases latinas, que os tradutores usaram, que provêem nossas palavras "minutos" e "segundos". Sem dúvida foi o sistema sexagesimal que levou Ptolomeu a subdividir o diâmetro de seu círculo trigonométrico em 120 partes; cada uma dessas ele subdividiu de novo em sessenta minutos e cada minuto de comprimento em sessenta segundos.

Nossas identidades trigonométricas podem facilmente ser traduzidas para a linguagem de cordas de Ptolomeu por meio das relações simples

$$\mathrm{sen}\,x = \frac{\mathrm{cd}\;2x}{120} \qquad \text{e} \qquad \cos x = \frac{\mathrm{cd}\;(180° - 2x)}{120}.$$

As fórmulas $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \mathrm{sen}\,x\,\mathrm{sen}\,y$ ficam

$$\mathrm{cd}\;\overline{2x \pm 2y} = \frac{\mathrm{cd}\;\overline{2x}\;\mathrm{cd}\;\overline{2y} \mp \mathrm{cd}\;2x\;\mathrm{cd}\;2y}{120}$$

onde uma barra sobre um arco (ângulo) indica o arco suplementar. Note-se que não só ângulos e arcos mas também suas cordas eram expressas em notação sexagesimal. Na verdade, sempre que os estudiosos da antiguidade queriam um sistema preciso de aproximação eles adotavam a base sessenta para a parte fracionária; isto levou às expressões "frações de astrônomos" e "frações de físicos" para distinguir as frações sexagesimais das comuns.

8 Tendo fixado seu sistema de medidas, Ptolomeu estava pronto para calcular as cordas dos ângulos dentro do sistema. Por exemplo, como o raio do círculo de referência continha sessenta partes, a corda de um arco de sessenta graus também contava sessenta partes lineares. A corda de 120° será $60\sqrt{3}$ ou aproximadamente 103 partes e 55 minutos e 33 segundos, ou, na notação alfabética ou iônica de Ptolomeu, $\rho\gamma^{\nu}\ \nu\varepsilon'\ \lambda\gamma''$. Ptolomeu poderia agora usar sua fórmula para o ângulo metade para achar a corda de 30°, depois a de 15° e assim por diante com ângulos ainda menores. No entanto, ele preferiu adiar a aplicação dessa fórmula, e calcular em vez disso as cordas de 36° e 72°. Usou um teorema de *Os elementos* XIII. 9 que mostra que um lado de um pentágono regular, um lado de um hexágono regular, e um lado de um decágono regular, todos inscritos num mesmo círculo, constituem os lados de um triângulo retângulo. Incidentalmente, esse mesmo teorema de Euclides fornece a justificação para a elegante construção dada por Ptolomeu de um pentágono regular inscrito num círculo. Seja O o centro do círculo e AB um diâmetro (Fig. 10.10). Então se C é o ponto médio de OB e OD é perpendicular a AB, e se CE é tomado igual a CD, os lados do triângulo retângulo EDO são os lados do pentágono regular inscrito, do hexágono, e do decágono. Então se o raio OB contém 60 partes, das

propriedades do pentágono e da secção áurea resulta que *OE*, a corda de 36°, é $30(\sqrt{5}-1)$ ou cerca de 37,083 ou $37^p\,4'\,55''$ ou $\lambda\zeta^p\ \delta'\ \nu\varepsilon''$. Pelo teorema de Pitágoras a corda de 72° é $30\sqrt{10-2\sqrt{5}}$ ou aproximadamente 70,536 ou $70^p\,32'\,3''$ ou $o^p\ \lambda\beta'\ \gamma''$.

Conhecendo a corda de um arco de s graus num circulo pode-se facilmente achar a do arco $180° - s$ dos teoremas de Tales e Pitágoras, pois $\text{cd}^2\, s + \text{cd}^2\, s = 120^2$. Portanto, Ptolomeu conhecia as cordas dos suplementos de 36° e 72°. Além disso, das cordas de 72° e 60° ele achou corda 12° por meio de sua fórmula para a corda da diferença de dois arcos. Então por aplicações sucessivas de sua fórmula para metade do arco ele obteve as cordas dos arcos de 6°, 3°, 1 (1/2)° e (3/4)°, as duas últimas sendo $1^p\,34'\,15''$ e $0^p\,47'\,8''$ respectivamente. Por interpolação linear entre esses valores Ptolomeu obteve $1^p\,2'\,50''$ como corda de 1°. Usando a fórmula para metade do ângulo — ou, como o ângulo é muito pequeno, simplesmente dividindo por dois — achou o valor $0^p\,31'\,25''$ para a corda de 30'. Isso equivale a dizer que sen 15' é 0,00873, o que está correto até quase meia dúzia de casas decimais.

O valor de Ptolomeu para a corda de (1/2)° é, naturalmente, o comprimento de um lado de um polígono de 720 lados inscrito num círculo de raio 60 unidades. Enquanto que o polígono de 96 lados de Arquimedes levava a 22/7 como uma aproximação para π, o de Ptolomeu equivale a $6(0^p\,31'\,25'')$ ou 3;8,30. Essa aproximação de π usada por Ptolomeu no *Almajesto*, é o mesmo que 377/120, que leva a uma fração decimal aproximadamente igual a 3,1416, valor que pode ter sido dado antes por Apolônio.

9 Armado com suas fórmulas para cordas de somas e diferenças de arcos e corda de metade de um arco, e tendo um bom valor para a corda (1/2)°, Ptolomeu se dispôs a construir sua tabela, correta a menos de um segundo, de cordas de arcos de 1/2° a 180° para cada 1/2°. Essa é praticamente a mesma que uma tabela de senos de 1/2° a 90°, por passos de 1/4°. A tabela formava parte integral do Livro I do *Almajesto* e continuou a ser um instrumento indispensável para os astrônomos por mais de mil anos. Os doze livros restantes do célebre tratado contêm, entre outras coisas, a teoria elegantemente desenvolvida dos ciclos e epiciclos para os planetas, conhecida como sistema ptolomaico. Como Arquimedes, Hiparco, e a maior parte dos outros grandes pensadores da antiguidade, Ptolomeu postulou um universo essencialmente geocêntrico, pois uma terra móvel parecia acarretar dificuldades — tais como a aparente falta de paralaxe estelar e aparente inconsistência com os fenômenos da dinâmica terrestre. Em comparação com esses problemas, a implausibilidade da imensa velocidade necessária para a rotação diária da esfera das estrelas "fixas" parecia reduzir-se à insignificância. Além de apelar para o senso comum, o sistema ptolomaico tinha a vantagem de ser fácil de representar. Os planetários em geral são construídos como se o universo fosse geocêntrico, pois dessa forma os movimentos *aparentes* são fáceis de reproduzir.

Platão tinha proposto a Eudoxo os problemas astronômicos de "conservar os fenômenos" — isto é, produzir um esquema matemático, como por exemplo uma combinação de movimentos circulares uniformes, que servisse como modelo para os movimentos aparentes dos planetas. O sistema de Eudoxo de esferas homocêntricas tinha sido abandonado pela maioria dos matemáticos em favor do sistema de ciclos e epiciclos de Apolônio e Hiparco. Ptolomeu por sua vez fez uma modificação essencial nesse esquema. Em primeiro lugar, deslocou a terra do centro do círculo diferente, de modo que tinha órbitas excêntricas. Tais modificações tinham sido feitas antes dele, mas Ptolomeu introduziu

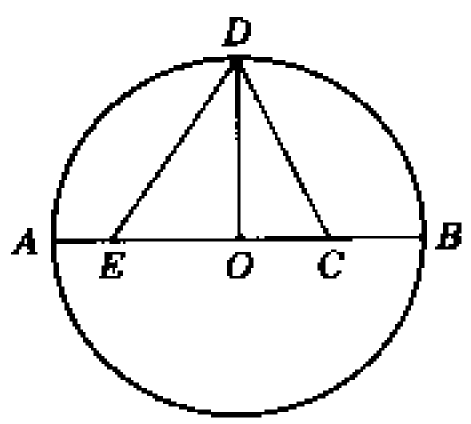


Figura 10.10

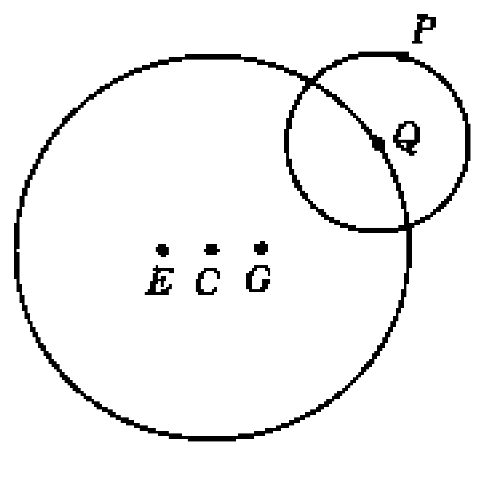


Figura 10.11

uma novidade tão drástica em implicação científica que Copérnico mais tarde não pode aceitá-la, por eficaz que fosse o artifício conhecido como equante, para reproduzir os movimentos dos planetas. Por mais que tentasse, Ptolomeu não tinha conseguido arranjar um sistema de ciclos, epiciclos e excêntricas que aproximasse bem os movimentos observados dos planetas. Sua solução foi abandonar a insistência grega na uniformidade de movimentos circulares e introduzir em vez disso um ponto geométrico, o equante *E* colinear com a terra *G* e o centro *C* do círculo diferente, de modo que o movimento angular *aparente* do centro *Q* do epiciclo, em que um planeta *P* se desloca, seja uniforme quando visto de *E* (Fig. 10.11). Dessa maneira Ptolomeu conseguiu representações precisas dos movimentos dos planetas, mas naturalmente o artifício era apenas cinemático e não contribuía em nada para resolver as questões de dinâmica levantadas por movimentos circulares não-uniformes.

10 A fama de Ptolomeu hoje está associada principalmente a um único livro, o *Almajesto*, mas há outras obras dele. Entre as mais importantes estava a *Geografia*, em oito livros, que era uma "bíblia" para os geógrafos da época tanto quanto o *Almajesto* para os astrônomos. A *Geografia* de Ptolomeu introduzia o sistema de latitudes e longitudes tal como é usado hoje, descrevia métodos de projeção cartográfica, e catalogava cerca de 8 000 cidades, rios, e outros aspectos importantes da terra. Infelizmente não havia na época meios satisfatórios de determinar longitudes, portanto, erros substanciais era inevitáveis. Ainda mais significativo era o fato de Ptolomeu aparentemente ter feito uma má escolha quando se tratava de avaliar o tamanho da Terra. Em vez de aceitar a cifra de 252 000 estádios dada por Eratóstenes, ele preferiu o valor de 180 000 estádios proposto por Posidônio, um estóico, professor de Pompeu e Cícero. Por isso Ptolomeu julgava que o mundo eurasiano conhecido era uma parte maior da circunferência do que realmente é — mais de 180° de latitude, em vez da cifra real de cerca de 130°. Esse erro grande sugeriu a navegadores posteriores, inclusive a Colombo, que uma viagem para oeste partindo da Europa para a Índia não seria nem de longe tão longa quanto se provou ser na realidade. Se Colombo soubesse de quanto a avaliação de Ptolomeu, do tamanho da terra, era inferior à realidade, talvez nunca tivesse embarcado.

Os métodos geográficos de Ptolomeu, eram melhores na teoria que na prática, pois, em monografias separadas, que se preservaram apenas em traduções latinas do árabe, Ptolomeu descreveu dois tipos de projeção cartográfica. A projeção ortográfica é explicada no *Analemma*, a mais antiga exposição desse método de que dispomos, embora possa ter sido usada por Hiparco. Nessa transformação de uma esfera para um plano, pontos na superfície da esfera são projetados ortogonalmente sobre três planos perpendiculares entre si. No *Planisphaerium* Ptolomeu descreve a projeção estereográfica em que pontos da esfera são projetados por retas por um pólo sobre um plano — no caso de Ptolomeu do pólo sul para o plano do equador. Ele sabia que sob tal transformação um círculo que não passasse pelo pólo de projeção ia num círculo do plano, e que um círculo era projetado pelo pólo numa reta. Ptolomeu percebia também o importante fato de tal transformação ser conforme — isto é, preservar ângulos. A importância de Ptolomeu para a geografia pode ser julgada pelo fato de os mais antigos mapas da Idade Média que chegaram até nós em manuscritos, nenhum anterior ao século treze, terem como protótipos os mapas feitos por Ptolomeu mais de mil anos antes[7].

11 Ptolomeu escreveu também uma *Óptica* que sobreviveu, imperfeitamente, em uma tradução latina de uma tradução árabe. Trata da física e da psicologia da visão, com a geometria dos espelhos, e contém uma tentativa de chegar a uma lei da refração. Pela tabela de Ptolomeu dos ângulos de refração do ar para a água (e também do ar para o vidro e da água para o vidro) para ângulos de incidência de 10° a 80° a intervalos de 10° vemos que assumia uma lei da forma $r = ai + bi^2$, pois as segundas diferenças em seus valores para r são constantes. Para ângulos de incidência de 10° e 80° assumia ângulos de refração de 8° e 50° respectivamente, e as segundas diferenças todas iguais a (1/2)°.

[7]Veja George Sarton, *Ancient Science and Modern Civilization* (1954), pp. 53-54

As segundas diferenças nas antigas fórmulas pitagóricas para números poligonais eram também constantes, e talvez Ptolomeu tinha sido influenciado por essas ao procurar uma lei quadrática em vez de uma lei trigonométrica para a refração. A trigonometria durante o primeiro milênio e meio de sua existência era quase exclusivamente um adjunto da astronomia e geografia, e somente no século dezessete foram descobertas aplicações da trigonometria na refração e outras partes da física.

Nenhuma exposição da obra de Ptolomeu seria completa sem alguma menção de sua *Tetrabiblos* (ou *Quadripartitum*), pois mostra-nos um aspecto da investigação antiga que estamos inclinados a esquecer. Os autores gregos não eram sempre os homens racionais, de pensamento claro, que imaginamos que fossem. O *Almajesto* é realmente um modelo de boa matemática e dados de observação precisos, postos a trabalhar para construir uma astronomia sóbria e científica; mas o *Tetrabiblos* (ou obra em quatro livros) representa uma espécie de religião sideral a que muito do mundo antigo se submetia. Com o fim da Idade Áurea, a matemática e a filosofia gregas se aliaram à aritmética e astrologia caldéias e a resultante pseudo-religião preencheu a lacuna deixada pelo repúdio da velha mitologia. Ptolomeu parece ter compartilhado dos preconceitos de sua época; no *Tetrabiblos* ele argüia que não se deve por causa da possibilidade de erro, desencorajar o astrólogo mais do que o médico. Quanto mais se lê sua obra, mais desanimado se fica ao ver que o autor não hesita em aceitar as supertições de seu tempo.

O *Tetrabiblos* difere do *Almajesto* não só como a astrologia difere da astronomia; as duas obras também usam diferentes tipos de matemática. O segundo é uma obra sólida e sofisticada que usa bem a geometria grega sintética; o primeiro é típico da pseudociência da época na adoção de primitivos artifícios aritméticos babilônicos. Das obras clássicas de Euclides, Arquimedes e Apolônio se teria a impressão de que a matemática grega se ocupava exclusivamente com os níveis mais altos do raciocínio geométrico lógico; mas o *Tetrabiblos* de Ptolomeu sugere que o povo em geral estava mais interessado em computações aritméticas que em pensamento racional. Pelo menos dos dias de Alexandre, o Grande, ao fim do mundo clássico, havia muita intercomunicação entre a Grécia e a Mesopotâmia, e parece claro que a aritmética e a geometria algébrica babilônicas continuaram a exercer considerável influência no mundo helenístico. Esse aspecto da matemática, por exemplo, aparece tão fortemente em Heron de Alexandria (viveu por volta do ano 100) que um tempo se supôs que Heron fosse egípcio ou fenício e não grego. Agora pensa-se que Heron representa um tipo de matemática que havia muito tempo existia na Grécia mas sem achar representante entre as maiores figuras, exceto, talvez, quando Ptolomeu se trai no *Tetrabiblos*. A geometria grega, de outro lado, parece não ter tido boa acolhida na Mesopotâmia até a conquista árabe.

12 Heron de Alexandria é conhecido na história da matemática sobretudo pela fórmula, que tem seu nome, para a área do triângulo:

$$K = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

onde a, b, c são os lados e s é a metade da soma destes lados, isto é, o semiperímetro. Os árabes nos contam que a "fórmula de Heron" era já conhecida por Arquimedes, que sem dúvida tinha uma prova dela, mas a demonstração de Heron em sua *A métrica* é a mais antiga que temos. Embora agora seja em geral provada trigonometricamente, a prova de Heron é convencionalmente geométrica. *A métrica*, como *O método* de Arquimedes, ficou perdida durante muito tempo, até ser redescoberta em Constantinopla em 1896 num manuscrito datando de cerca de 1100. A palavra "geometria" originalmente significava "medida de terra" mas a geometria clássica como se encontra em *Os elementos* de Euclides e em *As cônicas* de Apolônio estava muito longe de mensuração de terras. A obra de Heron, de outro lado, nos mostra que nem toda a matemática na Grécia era do tipo "clássico". Havia evidentemente dois níveis no estudo de configurações — comparáveis à distinção feita em contexto numérico entre aritmética (ou teoria dos números) e logística (ou técnica de computação) — uma era eminentemente racional, que podia ser chamada geometria e a outra, inteiramente prática, seria melhor chamada geodésia.

Os babilônios não tinham a primeira, mas eram fortes na segunda, e é essencialmente o tipo de matemática babilônica que se encontra em Heron. É verdade que em *A métrica* uma ou outra demonstração é incluída, mas a maior parte da obra diz respeito a exemplos numéricos na mensuração de comprimentos, áreas e volumes. Há fortes semelhanças entre seus resultados e os que se encontram nos antigos textos de problemas mesopotâmios. Por exemplo, Heron dá uma tabulação[8] das áreas A_n dos polígonos regulares de n lados em termos do quadrado de um lado s_n, começando com $A_3 = 13/30\, s_3^2$ e indo até $A_{12} = 45/4\, s_{12}^2$. Como na matemática pré-helênica, Heron não fazia distinção entre resultados que são exatos e os que são apenas aproximações. Para A_5, por exemplo, Heron dá duas fórmulas — $5/3\, s_5^2$ e $12/7\, s_5^2$ — a primeira concordando com o valor encontrado numa tableta babilônica [9], mas nenhuma das duas sendo precisamente correta. Para o hexágono a razão dada por Heron de A_6 para s_6^2 é 13/5, a babilônia é 2;37,30, enquanto que o valor verdadeiro está entre os dois e é irracional, é claro. Nesses cálculos esperaríamos que Heron usasse tabelas trigonométricas como as que Hiparco tinha construído uns dois séculos antes, mas aparentemente a trigonometria era então mais a serva do astrônomo do que do homem prático.

O fosso que separava a geometria clássica da mensuração de Heron é ilustrado claramente por certos problemas enunciados e resolvidos por Heron em outra de suas obras, a *Geométrica*. Um problema pede o diâmetro, perímetro e área de um círculo, dada a soma dessas grandezas. O axioma de Eudoxo excluiria tal problema de consideração teórica, pois as três grandezas não são de mesma dimensão, mas de um ponto de vista numérico não crítico o problema faz sentido. Além disso, Heron não resolveu o problema em termos gerais mas, novamente se inspirando em métodos pré-helênicos, escolheu o caso específico em que a soma é 212; sua solução é como as receitas antigas, em que só os passos, sem razões, são dados. O diâmetro 14 é facilmente achado tomando o valor de Arquimedes para π e usando o método babilônico de completar o quadrado para resolver uma equação quadrática. Heron simplesmente dá as instruções lacônicas, "Multiplique 212 por 154, some 841, extraia a raiz quadrada e subtraia 29, e divida por 11." Esse não é o melhor método para ensinar matemática, mas os livros de Heron se destinavam a servir como manuais para o praticante.

Heron dava tão pouca atenção à unicidade da resposta quanto às dimensões das grandezas. Em um problema ele pedia os lados de um triângulo retângulo se a soma da área com o perímetro é 280. Isto, é claro, é um problema indeterminado, mas Heron dá uma só solução, usando a fórmula de Arquimedes para a área do triângulo. Em notação moderna, se s é o semiperímetro do triângulo e r o raio do círculo inscrito então $rs + 2s = s(r + 2) = 280$. Usando sua própria regra tipo livro de receitas de cozinha, "Sempre procure fatores", ele escolhe $r + 2 = 8$ e $s = 35$. Então a área rs é 210. Mas o triângulo é retângulo logo a hipotenusa c é igual a $s - r$ ou $35 - 6$ ou 29; a soma dos lados a e b é igual a $r + s$ ou 41. Os valores de a e b são pois, como se acha facilmente, 20 e 21. Heron nada diz sobre outras fatorações de 280, que naturalmente levariam a outras respostas.

13 Heron se interessava por mensuração em todas as formas — na óptica e na mecânica tanto quanto na geodésia. A lei da reflexão da luz já era conhecida por Euclides e Aristóteles (possivelmente também por Platão); mas foi Heron quem mostrou, por um argumento geométrico simples, numa obra chamada *Catóptrica* (ou reflexão), que a igualdade dos ângulos de incidência e reflexão é uma conseqüência do princípio aristotélico que diz que a natureza nada faz do modo mais difícil. Isto é, se a luz deve ir de uma fonte S a um espelho MM' e, então, ao olho E de um observador (Fig. 10.12), o caminho mais curto possível SPE é aquele em que os ângulos SPM e EPM' são iguais. Que nenhum outro caminho $SP'E$ pode ser tão curto quanto SPE fica claro, traçando-se SQS' perpendicular a MM', com $SQ = QS'$, e comparando o caminho SPE com o caminho $SP'E$.

[8] Veja D. E. Smith, *History of Mathematics* (Boston: Ginn, 1923-1925, 2 volumes, II, 606

[9] Veja Neugebauer: *Exact Sciences in Antiquity*, p. 47

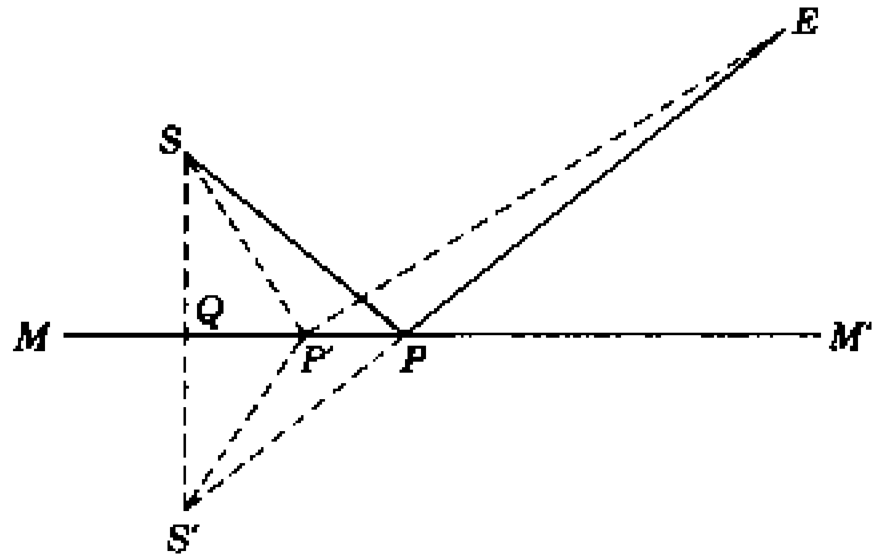


Figura 10.12

Como os caminhos *SPE* e *SP'E* são de comprimentos iguais aos caminhos *S'PE* e *S'P'E* respectivamente, e como *S'PE* é uma reta (porque o ângulo *M'PE* é igual ao ângulo *MPS*), resulta que *S'PE* é o caminho mais curto.

Heron é lembrado na história da ciência como inventor de um tipo primitivo de máquina a vapor, descrita em *Pneumática*, de um precursor do termômetro, e de vários brinquedos e engenhos mecânicos baseados nas propriedades dos fluidos e em leis das máquinas simples. Ele sugeriu em *Mecânica* uma lei (engenhosa mas incorreta) da máquina simples cujo princípio Arquimedes não conseguira explicar — o plano inclinado. Seu nome está também ligado ao "algoritmo de Heron" para achar raízes quadradas, mas esse método de iteração era na verdade devido aos babilônios de 2 000 anos antes de seu tempo. Embora Heron evidentemente aprendesse muito da matemática babilônica, parece não ter avaliado a importância do princípio posicional para frações. As frações sexagesimais tinham-se tornado o instrumento usual dos astrônomos e físicos, mas é provável que permanecessem pouco familiares para o homem comum. Frações comuns eram usadas com certa freqüência pelos gregos, a princípio com o numerador colocado abaixo do denominador, depois com as posições trocadas (e sem a barra separando os dois), mas Heron, escrevendo para o homem prático, parece ter preferido as frações unitárias. Ao dividir 25 por 13 ele escreve a resposta como $1 + 1/2 + 1/3 + 1/78$. A velha preferência egípcia por frações unitárias continuou na Europa durante pelo menos mil anos depois do tempo de Heron.

14 O período de Hiparco a Ptolomeu, cobrindo três séculos, foi uma fase em que a matemática aplicada esteve em posição proeminente, e os livros de Heron parecem notas tomadas por um estudante no equivalente de um instituto de tecnologia em Alexandria. Afirmam alguns[10] que a matemática se desenvolve melhor quando em contacto estreito com o trabalho do mundo; mas o período que estivemos considerando forneceria um argumento para a tese oposta. A perda de vigor na religião e na filosofia, que levou os gregos a buscar cultos e misticismo, foi acompanhada na matemática por um movimento voltado às aplicações que durou mais de três séculos. De Hiparco a Ptolomeu houve progressos na astronomia e geografia, óptica e mecânica, mas nenhum desenvolvimento significativo na matemática. É verdade que durante esses três séculos se desenvolveu a trigonometria, mas esse tópico era então, na melhor das hipóteses, uma aplicação à mensuração da geometria elementar que satisfazia às necessidades da astronomia, não parte da matemática pura. Além disso, não é sequer claro se houve ou não qualquer progresso significativo na trigonometria de Ptolomeu em 150 D. C. relativamente à de Hiparco, em 150 A. C. — ou mesmo talvez à de Apolônio e Arquimedes um século antes ainda. É evidente que o rápido crescimento da matemática, de Eudoxo a Apolônio, quando considerações teóricas predominavam, tinha terminado. Talvez a tendência para as aplicações fosse resultado do declínio e não causa, mas de qualquer forma os dois foram concomitantes. Alguns[11] atribuem o declínio às deficiências e dificuldades da álgebra geométrica, outros[12] ao ar frio que vinha de Roma. De qualquer forma, o período em que a trigonometria e a mensuração adquiriram relevo foi caracterizado pela falta de progresso — se não real declínio; no entanto foram precisamente esses aspectos da matemática grega que mais atraíram os hindus e os árabes que serviram de ponte para o mundo moderno. Antes de nos voltarmos a esses povos, no entanto, precisamos olhar o veranico da matemática grega, às vezes chamado a "Idade de Prata".

[10]Especialmente Lancelot Hogben em suas muitas obras sobre matemática e sua história, tais como *Mathematics for the Million* (New York: W. W. Norton, por volta de 1937)

[11]Por exemplo, B. L. van der Waerden em *Science Awakening* (1961) pp. 265-266

[12]E. T. Bell em *Development of Mathematics* (New York: McGraw-Hill, 1940)

BIBLIOGRAFIA

Aaboe, Asger, *Episodes from the Early History of Mathematics* (New York: Random House, 1964)

Braunmühl, Anton von, *Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie* (Leipzig, 1900-1903, 2 volumes)

Cohen, M. R. e I. E. Drabkin, *Source Book in Greek Science* (New York: McGraw-Hill, 1948; reimpresso Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1958)

Dantzig, Tobias, *The Bequest of the Greeks* (New York: Scribner, 1955)

Heath, T. L., *Aristarchus of Samos* (Oxford: Clarendon, 1913)

Heath, T. L., *A History of Greek Mathematics* (Oxford: Clarendon, 1921, 2 volumes)

Lammert, Friedrich, "Klaudios Ptolemaios," em Pauly-Wissowa, *Real-Encyclopädie der klassischen Altertumswissenschaft* (Stuttgart, 1959), Vol. XXIII, Parte 2, colunas 1788-1858

Manitius, Karl, *Des Ptolemäus Handbuch der Astronomie* (Leipzig, 1912-1913), 2 volumes)

Peters, C. H. F. e E. B. Knobel, *Ptolemy's Catalogue of Stars; a Revision of the Almagest* (Washington, D. C.: Carnegie Institution, 1915)

Ptolemy, Claudius, *L'optique*, editado por Albert Lejeune (Louvaina, Bélgica: Louvain University, 1956)

Ptolemy, Claudius, *Cosmographia*, editado por Skelton (Amsterdam: Meridian, 1963)

Sarton, George, *Ancient Science and Modern Civilization* (Lincoln, Nebr.: University of Nebraska Press, 1954)

Stahl, W. H., *Ptolemy's Geography; a Select Bibliography* (New York: Bulletin of the New York Public Library, 1951-1952)

Tannery, Paul, *Mémoires scientifiques* (Toulouse, 1912, etc.), especialmente Vols. I e II.

Thomas, Ivor, *Selections Illustrating the History of Greek Mathematics* (Cambridge, Mass.: Loeb Classical Library, 1939-1941, 2 volumes)

Thomson, J. O., *History of Ancient Geography* (Cambridge, 1948)

Van der Waerden, B. L., *Science Awakening*, traduzido por Arnold Dresden (New York: Oxford, 1961; edição em brochura, New York: Wiley, 1963)

EXERCÍCIOS

1. Como se pode explicar o fato de ser o período do desenvolvimento da trigonometria grega um período de declínio da geometria grega?

2. Por que os antigos preferiam um sistema astronômico geocêntrico a um heliocêntrico?

3. Que distância teria Colombo a percorrer de Gibraltar à Índia, supondo-a acessível pelo leste por água, se as idéias de Ptolomeu quanto ao tamanho da terra fossem corretas?

4. O que acontece aos círculos sobre a esfera se esta é projetada ortogonalmente num plano?

5. Usando a informação dada no texto, ache a lei de refração de Ptolomeu para raios indo do ar para a água.

6. Prove, geométrica ou trigonometricamente, a fórmula de Heron para a área de um triângulo.

7. Diz-se que Posidônio usou observações das estrelas para avaliar o tamanho da terra. Mostre como isso pode ser feito.

8. Qual das fórmulas de Heron para a razão de A_5 para s_5^2 é a melhor aproximação?

9. Heron deu a razão da área do heptágono regular para o quadrado de um lado como sendo 43/12, e os babilônios lhe davam o valor 3;41. Qual é a melhor aproximação?

10. Ache, com aproximação de um décimo de um por cento, o erro no valor de Heron 45/4 para a razão $A_{12}:s_{12}^2$.

11. Complete os passos na solução de Heron do problema de achar o diâmetro de um círculo se a soma do diâmetro e do perímetro e da área é 212.

12. Prove a desigualdade de Aristarco $1/20 < \text{sen}\, 3^\circ < 1/18$.

13. Hiparco sabia por observações de eclipses que a paralaxe lunar (isto é, o ângulo subentendido pela Terra num ponto da Lua) é aproximadamente 2°. Que distância da Lua isso implica?

14. Escreva em notação grega a corda de 45°.

15. Ache, sem tabelas, o sen 15° e usando isso escreva em notação alfabética grega o valor de Ptolomeu para corda 30°.

16. Escreva em notação grega a corda de 150°.

17. Se os valores de Arquimedes e Ptolomeu para π são expressos como frações comuns impróprias, e se uma nova fração é formada pela diferença dos dois numeradores sobre a diferença dos dois denominadores, acha-se uma aproximação melhor, dita chinesa. Quão precisa é essa nova aproximação?

18. Prove o teorema de Aristarco que diz que se $\beta < \alpha < 90°$, então sen α/sen $\beta < \alpha/\beta$.

19. Prove os dois lemas de Menelau.

20. Prove geométrica ou trigonometricamente, o teorema de Menelau para triângulos planos.

21. Complete a prova do teorema de Ptolomeu.

22. Usando o teorema de Ptolomeu (com um diâmetro do círculo como um lado do quadrilátero) obtenha as fórmulas para sen$(x + y)$ e cos$(x \pm y)$.

23. Usando o método de Ptolomeu para ângulo metade, obtenha uma fórmula para cos $x/2$.

*24. Ache exatamente, em termos de radicais, a razão da área do decágono regular para o quadrado de um lado. Seu valor é maior ou menor que o valor 15/2 dado por Heron?

Capítulo **11**

Ressurgimento e declínio da matemática grega

As abelhas . . . em virtude de uma certa intuição geométrica . . . sabem que o hexágono é maior que o quadrado e o triângulo, e conterá mais mel com o mesmo gasto de material.

Papus de Alexandria

1 Hoje usamos a frase "matemática grega" como se indicasse um corpo de doutrina homogêneo e bem definido. Uma tal visão pode ser muito enganadora no entanto, pois significaria que a geometria sofisticada do tipo Arquimedes-Apolônio era a única espécie que os gregos conheciam. Devemos lembrar que a matemática no mundo grego cobriu um intervalo de tempo indo pelo menos de 600 A. C. a 600 D. C. e que viajou da Jônia à ponta da Itália, e Atenas, a Alexandria, e a outras partes do mundo civilizado. Bastam os intervalos de tempo e espaço para produzir modificações na profundidade e extensão da atividade matemática, pois a ciência grega não tinha a uniformidade, século após século que se encontra no pensamento pré-helênico. Além disso, mesmo num dado tempo e lugar do mundo grego (como em nossa civilização hoje) havia marcadas diferenças no nível de interesse e realização matemática. Vimos como até na obra de um único indivíduo, como Ptolomeu, pode haver dois tipos de estudos — o *Almajesto* para os racionalistas e o *Tetrabiblos* para os místicos. É provável que sempre houvesse pelo menos dois níveis de percepção matemática, mas que a escassez de obras preservadas, especialmente do nível inferior, tenda a obscurecer esse fato. A frase usada como título, neste capítulo, deve ser aceita com alguma hesitação, pois embora seja justificada à luz do que sabemos sobre o mundo grego, nosso conhecimento está longe de ser completo. O período que consideramos neste capítulo, de Ptolomeu a Proclus, cobre quase quatro séculos (do segundo ao sexto), mas nossa exposição se baseia em grande parte em dois tratados importantes apenas, de que só partes existem, e em uma variedade de obras de menor significado.

Heron e Ptolomeu eram gregos, mas viviam num mundo dominado politicamente por Roma. A morte de Arquimedes pela mão de um soldado romano pode ter sido acidental, mas foi verdadeiramente premonitória. Durante toda a sua longa história, a Roma antiga pouco contribuiu para a ciência e a filosofia e menos ainda para a matemática. Tanto durante a república como durante o império, os romanos mostraram pouca inclinação para a investigação especulativa ou lógica. As artes práticas como a medicina e a agricultura eram cultivadas com algum interesse, e a geografia descritiva era olhada favoravelmente. Projetos notáveis de engenharia e monumentos arquitetônicos se relacionavam com os aspectos mais simples da ciência, mas os construtores romanos se satisfaziam com técnicas práticas elementares que requeriam muito pouco conhecimento da grande massa de pensamento grego. Quão pouco os romanos conheciam a ciência pode ser avaliado pelo *De architectura* de Vitruvius, escrito durante o período médio da Idade de Augusto e dedicada ao imperador. Num certo ponto o autor descreve o que lhe parecem ser as três maiores descobertas matemáticas: a incomensurabilidade do lado e diagonal do cubo; o triângulo retângulo de lados 3, 4 e 5; e o cálculo feito por Arquimedes da composição da coroa do rei. O autor, Marcus Vitruvius Pollio, se interessava especialmente por instrumentos de agrimensura e problemas envolvendo medidas aproximadas. O perímetro de uma roda de diâmetro 4 pés é dado por Vitruvius como sendo 12 1/2 pés, o que dá a π o valor 3 1/8. Essa aproximação não é tão boa quanto a de Arquimedes, cuja obra Vitruvius provavelmente pouco conhecia, mas é de um grau de precisão aceitável para as aplicações romanas. Afirma-se às vezes que obras notáveis de engenharia, como as pirâmides do Egito, e os aquedutos romanos, implicam um alto grau de realização matemática, mas a evidência histórica não apóia essa idéia. Assim como a matemática egípcia antiga era de nível inferior à babilônica do mesmo período, também a matemática romana era de nível muito inferior à da Grécia durante os mesmos anos. Faltava quase completamente aos romanos o interesse pela matemática, de modo que seus melhores esforços, como o de Vitruvius por exemplo, não se comparavam aos mais fracos resultados surgidos na Grécia, exemplificados pela obra de Heron[1].

2 Vimos que a matemática grega não era toda de alto nível, pois ao período glorioso do terceiro século A. C. seguiu-se um declínio, talvez interrompido até certo ponto nos dias de Ptolomeu, mas não realmente cancelado até o século da "Idade de Prata", de 250 a 350 D. C. aproximadamente. No começo desse período, também chamado Segunda Idade Alexandrina, encontramos o maior algebrista grego, Diofante de Alexandria, e pelo fim desse período apareceu o último geômetra grego importante, Papus de Alexandria. Nenhuma outra cidade foi o centro da atividade matemática por tanto tempo quanto Alexandria, dos dias de Euclides (morreu por volta de 300 A.C.) aos de Hipatia (morreu em 415). Era um centro muito cosmopolita, e a matemática que se originou dali não era toda de mesmo tipo. Os resultados de Heron eram bem diferentes dos de Euclides ou Apolônio ou Arquimedes, e na obra de Diofante novamente há uma quebra abrupta da tradição clássica grega. Pouco se sabe da vida de Diofante, além de uma tradição referida numa coleção de problemas datando do quinto ou sexto século, chamada "Antologia Grega" (descrita abaixo).

> Deus lhe concedeu ser um menino pela sexta parte de sua vida, e somando uma duodécima parte a isto cobriu-lhe as faces de penugem; Ele lhe acendeu a lâmpada nupcial após uma sétima parte, e cinco anos após seu casamento concedeu-lhe um filho. Ai! infeliz criança tardia; depois de chegar à medida de metade da vida de seu pai, o Destino frio o levou. Depois de se consolar de sua dor durante quatro anos com a ciência dos números ele terminou sua vida[2].

Se esse enigma é historicamente exato, Diofante viveu oitenta e quatro anos. Positivamente não deve ser tomado como problema típico dos que interessavam a Diofante, pois este pouca atenção deu a equações de primeiro grau.

3 Diofante é freqüentemente chamado o pai da álgebra, mas veremos que tal designação não deve ser tomada literalmente. Sua obra não é de modo algum o tipo de material que forma a base da álgebra elementar moderna; nem se assemelha à álgebra geométrica de Euclides. A principal obra de Diofante que conhecemos é a *Arithmetica*, tratado que era originalmente em treze livros, dos quais só os seis primeiros se preservaram[3]. Deve-se lembrar que na Grécia antiga a palavra aritmética significava teoria dos números, não computação. Freqüentemente a aritmética grega tinha mais em comum com a filosofia que com o que consideramos como matemática; por isso teve um papel importante no neoplatonismo durante a Segunda Idade Alexandrina. Isso era particularmente verdadeiro quanto à *Introductio arithmeticae* de Nicômaco de Gerasa, um neopitagórico que viveu não longe de Jerusalém no ano 100 aproximadamente. Afirma-se às vezes que o autor é de origem síria, mas certamente as tendências filosóficas gregas predominam em sua obra. A *Introductio* de Nicômaco, como a temos, contém só dois livros, e é possível que isso seja apenas uma versão abreviada de uma obra originalmente mais extensa. De qualquer forma, a possível perda nesse caso é muito menos de lamentar que a perda de sete livros da *Arithmetica* de Diofante, pois há um mundo de diferença entre os dois autores. Nicômaco, tanto quanto se pode julgar, tinha pouca competência matemática e se ocupava apenas com as propriedades mais elementares dos números. O nível da obra pode ser

[1]Uma devastadora comparação entre a ciência romana e a da Grécia é apresentada por W. H. Stahl, *Roman Science* (1962)

[2]Citado de Cohen e Drabkin, *Source Book in Greek Science* (1958), p. 27. A incerteza quanto à vida de Diofante é tal que não sabemos com segurança em que século viveu. Em geral supõe-se que viveu por volta de 250, mas têm sido sugeridas datas diferindo de um século, antes ou depois

[3]Para uma exposição completa veja T. L. Heath, *Diophantus of Alexandria* (1910)

Quatro matemáticos antigos que contribuíram também para a música: Boécio, Pitágoras, Platão e Nicômaco; de um manuscrito de Boécio, Cambridge.

avaliado pelo fato do autor achar conveniente juntar uma taboada de multiplicação indo até ι vezes ι (isto é, 10 vezes 10). Se isto é genuíno e não apenas uma interpolação posterior, é o mais antigo exemplo grego preservado de tal tabela, embora existam muitas tabelas de multiplicação babilônias mais antigas.

A *Introductio* de Nicômaco começa como era de se esperar com a classificação pitagórica dos números em pares e ímpares, depois em parmente pares (potências de dois) e parmente ímpares ($2^n \cdot p$ onde p é ímpar e $p > 1$ e $n > 1$) e imparmente pares ($2 \cdot p$ onde p é ímpar e $p > 1$). São definidos os números primos, compostos, e perfeitos, e é dada uma descrição do crivo de Eratóstenes e uma lista dos quatro primeiros números perfeitos (6 e 28 e 496 e 8 128). A obra inclui também uma classificação das razões e combinações de razões (porque razões de inteiros são essenciais na teoria pitagórica dos intervalos musicais), um tratamento extenso dos números figurativos (que tinham tido tanto relevo na aritmética pitagórica) em duas e três dimensões, e uma exposição bem completa sobre as várias médias (também um tópico favorito na filosofia pitagórica). Como alguns outros escritores, Nicômaco considerava o número três como o primeiro número no sentido estrito da palavra, pois um e dois eram realmente apenas os geradores do sistema numérico. Para Nicômaco os números tinham certas qualidades, eram melhores ou piores, mais jovens ou mais velhos; e podiam transmitir esses traços, como os pais aos filhos. Apesar desse antropomorfismo aritmético como pano de fundo, a *Introductio* contém um teorema moderadamente sofisticado. Nicômaco observou que se os inteiros ímpares são agrupados segundo o esquema $1; 3 + 5; 7 + 9 + 11; 13 + 15 + 17 + 19; \ldots$ as somas sucessivas são os cubos dos inteiros. Essa observação, junto com a antiga observação pitagórica de ser a soma dos n primeiros números ímpares igual a n^2, leva à conclusão que a soma dos n primeiros cubos perfeitos é igual ao quadrado da soma dos n primeiros inteiros.

A *Introductio* de Nicômaco[4] não era nem um tratado sobre computações nem sobre álgebra, mas um manual dos elementos de matemática essenciais à compreensão da filosofia pitagórica e platônica; como tal, serviu de modelo para imitadores e comentadores. Entre esses os mais conhecidos foram Teon de Smirna (viveu por volta de 125), que escreveu sua *Expositio* em grego, e Boécio (morreu em 524), que escreveu sua *Arithmetica* muito depois, em latim. Esses homens, como Nicômaco, se preocupavam muito mais com a aplicação da aritmética à música e à filosofia platônica que com o progresso do próprio assunto. O título completo da *Expositio* indica, de fato, que se trata de uma exposição de questões matemáticas úteis à compreensão de Platão[5]. Explica, por exemplo, que o *tetractys* consistindo dos números 1, 2, 3 e 4 contém todas as consonâncias musicais, pois fornece as razões 4:3, 3:2, 2:1, 3:1 e 4:1. A *Arithmetica* de Boécio nada tem de original, é quase uma tradução da obra mais antiga de Nicômaco[6].

4 A *Arithmetica* de Diofante era algo muito diferente das obras de Nicômaco, Teon, e Boécio; era um tratado caracterizado por um alto grau de habilidade matemática e de engenho: quanto a isto, o livro pode ser comparado aos grandes clássicos da Idade Alexandrina anterior; no entanto quase nada tem em comum com esses ou, na verdade, com qualquer matemática grega tradicional. Representa essencialmente um novo ramo e usa um método diferente. Desvinculado dos métodos algébricos, assemelha-se à álgebra babilônica em muitos aspectos; mas enquanto que os matemáticos babilônios se ocupavam principalmente com soluções *aproximadas* de equações *determinadas* de até terceiro grau, a *Arithmetica* de Diofante (tal como a temos) é quase toda dedicada à resolução *exata* de equações, tanto *determinadas* quanto *indeterminadas*. Devido à ênfase dada na *Arithmetica* à solução de problemas indeterminados, o assunto, às vezes chamado análise indeterminada, tornou-se conhecido como análise diofantina. Como esse tipo de trabalho hoje é em geral parte de cursos de teoria dos números e não de álgebra elementar, não é uma base adequada para considerar Diofante como pai da álgebra. Mas há outro aspecto em que tal paternidade se justifica. A álgebra hoje se baseia quase exclusivamente em formas simbólicas de enunciados, em lugar da linguagem escrita usual da comunicação ordinária em que a matemática grega anterior, bem como a literatura grega, se expressavam. Considera-se em geral que podem ser reconhecidos três estágios no desenvolvimento histórico da álgebra: (1) o primitivo, ou retórico, em que tudo é completamente escrito em palavras; (2) um estágio intermediário, sincopado, em que são adotadas algumas abreviações; e (3) um estágio simbólico ou final. Uma tal divisão arbitrária do desenvolvimento da álgebra em três estágios é naturalmente uma simplificação excessiva; mas

[4]Para uma tradução para o inglês veja Nicômaco de Gerasa, *Introduction to Arithmetic*, traduzido por M. L. D'Ooge (1926). Essa edição muito útil contém também uma longa introdução que situa a obra de Nicômaco numa clara perspectiva histórica. D'Ooge conclui da evidência disponível que Nicômaco era grego e não sírio.

[5]Há um excerto, traduzido para o inglês, em Cohen e Drabkin, *Source Book in Greek Science*, pp. 294-298

[6]Marshall Clagett, *Greek Science in Antiquity*, pp. 185-186

serve como primeira aproximação ao que aconteceu, e nesse esquema a *Arithmetica* de Diofante deve ser colocada na segunda categoria.

Nos seis livros preservados da *Arithmetica* há um uso sistemático de abreviações para potências de números e para relações e operações. Um número desconhecido é representado por um símbolo parecido com a letra grega ς (talvez como última letra de *arithmos*); o quadrado disto aparece como Δ^Y, o cubo como K^Y, a quarta potência dita quadrado-quadrado, como $\Delta^Y\Delta$, a quinta potência como ou quadrado-cubo, como ΔK^Y, e a sexta potência ou cubo-cubo como K^YK. Diofante naturalmente conhecia as regras de combinação equivalentes a nossas leis sobre expoentes, e tinha nomes especiais para os recíprocos das seis primeiras potências das incógnitas, quantidades equivalentes às nossas potências negativas. Coeficientes numéricos eram escritos depois dos símbolos para as potências a que estavam associados; a adição de termos era indicada por justaposição adequada dos símbolos para os termos, e a subtração representada por uma abreviação de uma só letra colocada antes dos termos a serem subtraídos. Com tal notação Diofante podia escrever polinômios numa incógnita quase tão concisamente quanto nós hoje. A expressão $2x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 5x - 6$, por exemplo, poderia aparecer numa forma equivalente a *SS2 C3 x5 M S4 u6*, onde as nossas letras, *S*, *C*, *x*, *M* e *u* foram usadas para "quadrado", "cubo", a "incógnita", "menos" e "unidade" e nossos numerais em lugar de notação grega alfabética que se usava no tempo de Diofante. A álgebra grega já não estava mais restrita ao uso das três primeiras potências ou dimensões e as identidades $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2 = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$, que desempenharam papel importante na álgebra medieval e na trigonometria moderna, aparecem na obra de Diofante. A diferença principal entre a sincopação de Diofante e a notação algébrica moderna está na falta de símbolos especiais para operações e relações, bem como de notação exponencial. Esses elementos de notação que faltavam foram em grande parte contribuição do período do fim do século quinze ao começo do século dezessete, na Europa.

5 Se pensarmos primariamente em termos de notação, Diofante tem boas razões para pretender o título de pai da álgebra, mas em termos de motivação e conceitos a pretensão é menos justificada. A *Arithmetica* não é uma exposição sistemática sobre as operações algébricas ou as funções algébricas ou a resolução de equações algébricas. Em vez disso é uma coleção de cerca de 150 problemas, todos estudados em termos de exemplos numéricos específicos, embora talvez pretendendo conseguir generalidade de método. Não há desenvolvimento postulacional, nem se faz um esforço para achar todas as soluções possíveis. No caso de equações quadráticas, com duas raízes positivas, só a maior é dada, e raízes negativas não são consideradas. Não é feita uma distinção clara entre problemas determinados e indeterminados, e mesmo para os últimos, para os quais o número de soluções em geral é infinito, uma só resposta é dada. Diofante resolvia problemas envolvendo vários números desconhecidos expressando engenhosamente todas as quantidades desconhecidas, quando possível, em termos de uma apenas. Dois problemas da *Arithmetica* servirão para ilustrar o método diofantino. Ao achar dois números tais que sua soma seja 20 e a soma dos quadrados 208, os números são designados não por x e y, mas como $10 + x$ e $10 - x$ (em termos de nossa notação). Então $(10 + x)^2 + (10 - x)^2 = 208$, logo $x = 2$; portanto os números procurados são 8 e 12. Diofante tratou também o problema análogo em que a soma dos dois números e a soma dos cubos são dadas como sendo 10 e 370 respectivamente.

Nesses problemas ele está lidando com uma equação determinada, mas Diofante usou essencialmente o mesmo esquema na análise indeterminada. Um problema pede que sejam encontrados dois números tais que cada um somado com o quadrado do outro forneça um quadrado perfeito. Esse é um exemplo típico de análise diofantina em que somente números racionais são admissíveis como resposta. Ao resolver o problema Diofante não chamou os números de x e y, mas de x e $2x + 1$. Aqui o segundo quando somado ao quadrado do primeiro fornecerá um quadrado perfeito qualquer que seja o valor de x escolhido. Agora, exige-se que $(2x + 1)^2 + x$ seja um quadrado perfeito. Aqui Diofante não menciona a existência de uma infinidade de respostas. Ele se contenta com escolher um caso particular de quadrado perfeito, aqui o número $(2x-2)^2$, tal que quando igualado a $(2x+1)^2+x$ resulte uma equação linear em x. Aqui o resultado é $x = 3/13$, de modo que o outro número, $2x+1$, é 19/13. Poderíamos, é claro, usar $(2x-3)^2$ ou $(2x-4)^2$ ou expressões semelhantes, em vez de $(2x-2)^2$, e chegar a outros pares de números tendo a propriedade desejada. Aqui vemos um esquema que chega perto de ser um "método" na obra de Diofante; quando duas condições devem ser satisfeitas por dois números, eles são escolhidos de modo a satisfazer a uma das duas condições; e então se ataca o problema de satisfazer à segunda. Isto é, em vez de tratar equações *simultâneas* sobre duas incógnitas, Diofante opera com condições *sucessivas* de modo que apareça um só número desconhecido no trabalho.

6 Entre os problemas indeterminados na *Arithmetica* há alguns envolvendo equações como $x^2 = 1 + 30y^2$ e $x^2 = 1 + 26y^2$, que são exemplos da chamada "equação de Pell" $x^2 = 1 + py^2$; novamente, considera-se ali que uma só solução basta[7]. Num certo sentido é injusto criticar Diofante por se satisfazer com uma única resposta, pois ele estava resolvendo problemas, não *equações*. Num certo sentido a *Arithmetica* é uma coleção de problemas de aplicação de álgebra, não um texto de álgebra. Nisso Diofante se assemelha aos algebristas babilônios; e sua obra é considerada "o mais belo florescimento da álgebra babilônica"[8]. Até certo ponto tal caracterização é injusta para com Diofante, pois seus números são inteiramente abstratos e não se referem a medidas de grãos ou dimensões de campos ou unidades monetárias, como no caso da álgebra egípcia e mesopotâmica. Além disso, ele se interessava apenas por soluções racionais *exatas*, enquanto que os babilônios tinham gostos computacionais e aceitavam aproximações de soluções irracionais das equações. Por isso equações cúbicas raramente aparecem na obra de Diofante, enquanto que entre os babilônios tinha sido dada atenção à redução de cúbicas à forma padrão $n^3 + n^2 = a$, a fim de resolver aproximadamente, usando interpolação numa tabela de valores de $n^3 + n^2$.

Não sabemos quantos problemas na *Arithmetica* eram originais ou se Diofante tinha emprestado de outras coleções. Possivelmente de alguns dos problemas ou métodos é possível seguir a trilha até as origens babilônicas, pois enigmas e exercícios costumam reaparecer geração após geração. Para nós hoje a *Arithmetica* de Diofante parece notavelmente original, mas talvez essa impressão resulte da perda de coleções de problemas rivais. Nossa visão da matemática grega deriva de um número relativamente pequeno de obras preservadas, e conclusões tiradas deles são necessariamente precárias. Indicações de que Diofante possa ter sido uma figura menos isolada do que se supôs se encontram numa coleção de problemas talvez do começo do segundo século de nossa era (portanto presumivelmente anterior à *Arithmetica*) em que aparecem alguns símbolos diofantinos[9]. No entanto, Diofante teve uma influência maior sobre a teoria moderna dos números do que qualquer outro algebrista grego não geométrico. Em particular, Fermat foi levado ao seu célebre "grande" ou "último" teorema (ver abaixo) quando procurou generalizar um problema que tinha lido na *Arithmetica* de Diofante (II. 8): dividir um dado quadrado em dois quadrados[10].

7 A *Arithmetica* de Diofante é uma obra brilhante, digna do período de renascimento em que foi escrita, mas, em motivação e conteúdo, está muito distante dos tratados mag-

[7]Veja D. J. Struik, *A Concise History of Mathematics*, 3.ª edição (New York: Dover, 1967), p. 62. Para uma completa exposição da obra de Diofante ver T. L. Heath, *Diophantus of Alexandria*. Cf. também J. A. Sánchez Pérez: *La arithmética en Grecia* (1947) e o artigo sobre Diofante por F. O. Hultsch em Pauly-Wissowa, *Real-Enzyclopädie der klassischen Altertumswissenschaft*, Vol. V (Stuttgart: Metzler, 1905), colunas 1 051-1 073

[8]Veja J. D. Swift, "Diophantus of Alexandria", *American Mathematical Monthly*, **43** (1956), 163-170

[9]Veja F. E. Robbins, "P. Mich. 620: A Series of Arithmetical Problems", *Classical Philology*, **24** (1929), 321-329, e Kurt Vogel, "Die algebraischen Probleme des P. Mich. 620", *Classical Philology*, **25** (1930), 373-375

[10]Veja Heath, *Diophantus of Alexandria*, pp. 144-145

nificamente lógicos do grande triunvirato de geômetras da primeira Idade Alexandrina. A álgebra parece mais adequada à resolução de problemas do que à exposição dedutiva, e a grande obra de Diofante ficou fora da corrente principal da matemática grega. Uma obra menor sobre números poligonais de Diofante está mais perto dos antigos interesses gregos, mas mesmo dessa não se pode dizer que se aproxime do ideal lógico grego. A geometria clássica não tinha achado um defensor ardente, com a possível exceção de Menelau, desde a morte de Apolônio mais de quatrocentos anos antes. Mas durante o reino de Diocleciano (284-305) viveu novamente em Alexandria um matemático que era movido pelo mesmo espírito que animara Euclides, Arquimedes e Apolônio. Papus de Alexandria em 320 aproximadamente compôs uma obra com o título *Coleção* (Synagoge) que é importante por várias razões. Em primeiro lugar fornece um registro histórico muito valioso de partes da matemática grega que de outro modo não conheceríamos. Por exemplo, é pelo Livro V da *Coleção* que ficamos sabendo da descoberta por Arquimedes dos treze poliedros semi-regulares ou "sólidos arquimedianos". Além disso, a *Coleção* contém novas provas e lemas suplementares para proposições das obras de Euclides, Arquimedes, Apolônio e Ptolomeu. Finalmente, o tratado contém descobertas e generalizações novas, não encontradas em nenhuma obra anterior. A *Coleção*, o mais importante tratado de Papus, continha oito livros, mas o primeiro livro e a primeira parte do segundo livro se perderam. Nesse caso a perda é menos lamentável que a dos últimos livros da *Arithmetica* de Diofante, pois ao que parece os dois primeiros livros da *Coleção* tratavam principalmente dos princípios do sistema de tetradas de Apolônio na numeração grega. Como temos, no *Computador de areia*, o correspondente sistema de octadas de Arquimedes, podemos fazer uma boa idéia do material que se perdeu da exposição de Papus.

8 O Livro III da *Coleção* mostra que Papus compartilhava totalmente da clássica apreciação grega pelas sutilezas da precisão lógica em geometria. Aqui ele faz distinção clara entre problemas "planos", "sólidos" e "lineares" — os primeiros sendo construtíveis com retas e círculos apenas, os segundos resolúveis por uso de secções cônicas e os terceiros exigindo outras curvas que não retas, círculos e cônicas. Depois Papus descreve algumas soluções dos três famosos problemas da antiguidade, a duplicação e trissecção sendo problemas da segunda categoria, isto é, sólidos, e a quadratura do círculo um problema linear. Papus virtualmente afirma aqui o fato de ser impossível resolver os problemas clássicos sob as condições platônicas, pois não estão entre os problemas planos; mas provas rigorosas só foram dadas no século dezenove.

No Livro IV Papus novamente insiste em que se deve dar a cada problema uma construção adequada a ele. Isto é, não devem ser usados lugares lineares para resolver problemas sólidos, nem lugares sólidos ou lineares na solução de um problema plano. Afirmando que a trissecção de um ângulo é um problema sólido, ele sugere portanto que empreguem secções cônicas, ao passo que, Arquimedes num caso tinha usado uma *neusis* ou seja, uma construção usando régua móvel, e em outro uma espiral, que é um lugar linear. Uma das trissecções de Papus é como segue. Seja o ângulo dado AOB colocado num círculo com centro O (Fig. 11.1) e seja OC a bissetriz. Traçar a hipérbole tendo A como um foco, OC como a diretriz correspondente, e com excentricidade igual a 2. Então um ramo dessa hipérbole cortará a circunferência do círculo num ponto T tal que o $\angle AOT$ é um terço do $\angle AOB$.

Uma segunda construção da trissecção proposta por Papus usa uma hipérbole equilátera como segue. Seja o lado OB do ângulo dado AOB uma diagonal de um retângulo $ABCO$ e por A trace-se a hipérbole equilátera tendo BC e OC (prolongados) como assíntotas (Fig. 11.2). Com A como centro e com raio duas vezes OB trace-se um círculo, que corta a hipérbole em P e de P baixe-se a perpendicular PT a CB prolongado. Então prova-se facilmente, usando as propriedades da hipérbole, que a reta que passa por O e T é paralela a AP e que o $\angle AOT$ é um terço do $\angle AOB$. Papus não menciona nenhuma fonte para suas trissecções, e não podemos deixar de nos perguntar se Arquimedes conhecia esta trissecção. Se traçarmos o semicírculo passando por B, tendo OT como

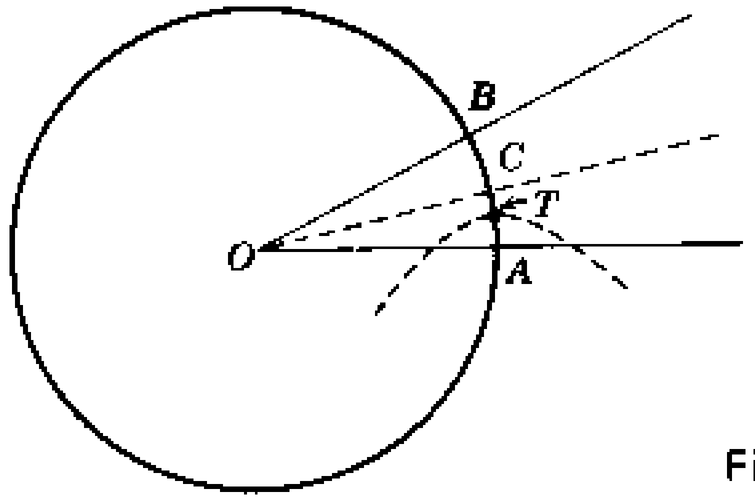


Figura 11.1

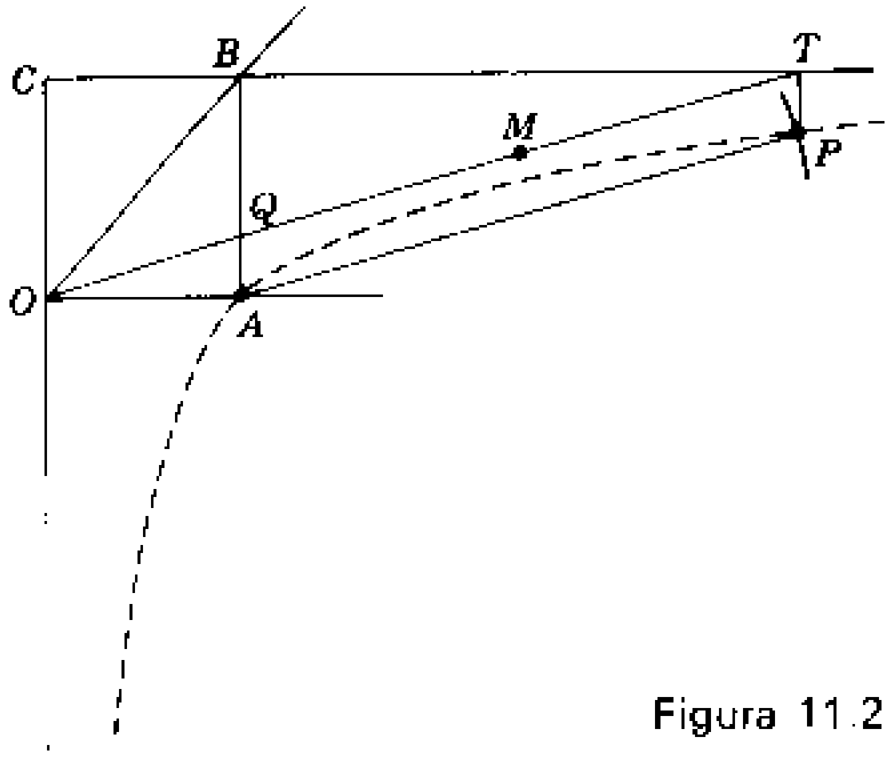


Figura 11.2

diâmetro e M como centro, teremos essencialmente a construção de Arquimedes por *neusis*, pois $OB = QM = MT = MB$.

No Livro III Papus descreve também a teoria das médias e dá uma atraente construção que põe a média aritmética, a geométrica e a harmônica no mesmo semicírculo. Papus mostra que se no semicírculo ADC com centro O (Fig. 11.3) tivermos $DB \perp AC$ e $BF \perp OD$, então DO é a média aritmética, DB é a média geométrica e DF a média harmônica das grandezas AB e BC. Aqui Papus diz que é o autor da prova apenas, atribuindo o diagrama a um geômetra cujo nome não é citado. Mesmo quando Papus menciona nomes de autores às vezes nós não os conhecemos, o que indica que nossa informação sobre os matemáticos de seu tempo é muito incompleta.

9 A *Coleção* de Papus está repleta de interessantes informações e de significativos resultados novos. Em muitos casos as novidades têm a forma de generalizações de teoremas anteriores, e exemplos disso aparecem no Livro IV. Aqui achamos uma generalização elementar do teorema de Pitágoras. Se ABC é *qualquer* triângulo (Fig. 11.4) e se $ABDE$ e $CBGF$ são quaisquer paralelogramos construídos sobre dois dos lados, então Papus constrói sobre o lado AC um terceiro paralelogramo $ACKL$ igual à soma dos dois outros. Isso se faz facilmente, prolongando os lados FG e ED até se encontrarem em H, depois traçando HB e prolongando até encontrar o lado AC em J, e finalmente traçando AL e CK paralelos a HBJ. Não se sabe se essa generalização, que leva usualmente o nome de Papus, era original dele, pois sugere-se que Heron já a conhecia.

Outro exemplo de generalização no Livro IV, também levando o nome de Papus, estende teoremas de Arquimedes sobre a faca do sapateiro. Afirma que se círculos C_1, C_2, C_3, C_4, ..., C_n, ... são inscritos sucessivamente como na Fig. 11.5, todos sendo tangentes a semicírculos sobre AB e sobre AC e sucessivamente cada um ao anterior, a distância perpendicular do centro do n-ésimo círculo à reta de base ABC é n vezes o diâmetro do n-ésimo círculo[11].

10 O Livro V da *Coleção* foi um favorito dos comentadores, porque levantava a questão da sagacidade das abelhas. Tendo Papus mostrado que, de dois polígonos regulares de mesmo perímetro, o que tem maior número de lados tem maior área, ele concluiu que as abelhas provavam algum entendimento matemático ao construir suas células como

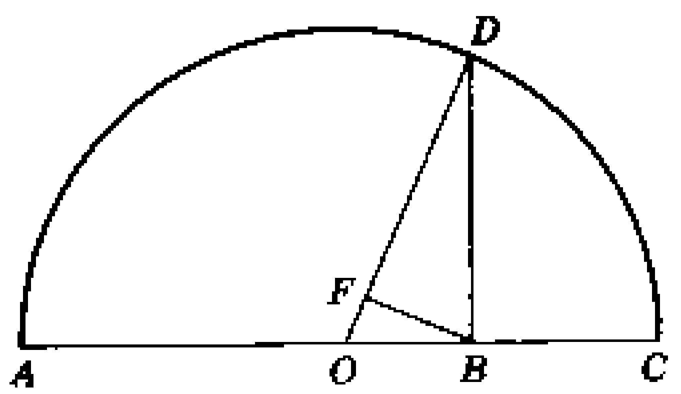


Figura 11.3

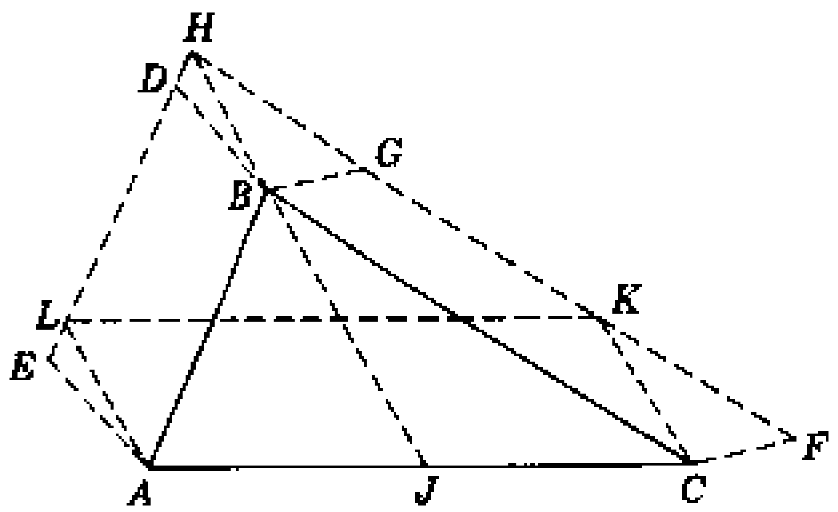


Figura 11.4

[11]Uma indicação da prova do teorema se encontra em R. A. Johnson, *Modern Geometry* (New York: Houghton Mifflin, 1929), p. 117

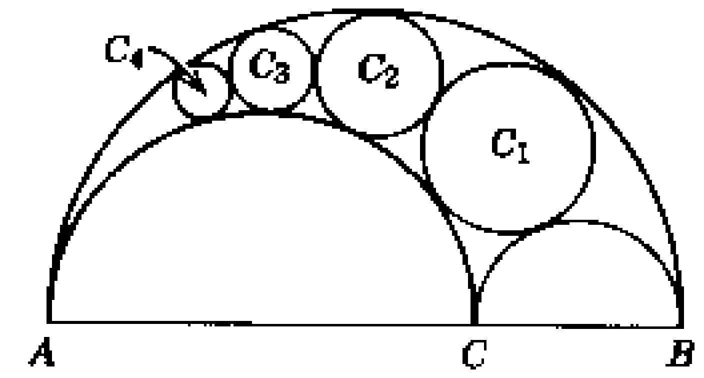


Figura 11.5

prismas hexagonais, em vez de quadrados ou triangulares. O livro examina outros problemas de isoperimetria, inclusive uma prova de que o círculo tem maior área, para um perímetro dado, que qualquer polígono regular. Aqui Papus parece estar seguindo de perto uma obra, *Sobre figuras isométricas*, escrita quase meio milênio antes por Zenodoro (cerca de 180 A. C.), da qual alguns fragmentos foram preservados por comentadores posteriores. Entre as proposições no tratado de Zenodoro havia uma afirmando que de todas as figuras sólidas de igual superfície a esfera tem o volume máximo, mas só é dada uma justificação incompleta[12].

Os Livros VI e VIII da *Coleção* tratam principalmente de aplicações da matemática à astronomia, à óptica e à mecânica (inclusive uma tentativa infrutífera de achar a lei do plano inclinado). De muito maior significado na história da matemática é o Livro VII, em que, graças à sua propensão para generalizar, Papus chega perto do princípio fundamental da geometria analítica. Os únicos métodos reconhecidos pelos antigos para definir curvas planas eram (1) definições cinemáticas em que o ponto se move sujeito a dois movimentos superpostos e (2) secção por um plano de uma superfície geométrica, tal como um cone ou esfera ou cilindro. Entre essas últimas curvas estavam certas quárticas chamadas secções espíricas, descritas por Perseu (cerca de 150 A. C.), obtidas cortando-se um anel de âncora, ou toro, por um plano. Ocasionalmente uma curva reversa chamava a atenção dos gregos, por exemplo a hélice cilíndrica e uma curva análoga à espiral de Arquimedes descrita sobre uma superfície esférica, ambas conhecidas por Papus; mas a geometria grega se restringia principalmente ao estudo de curvas planas, na verdade, a um número muito limitado de curvas planas. É interessante notar, portanto, que no Livro VII da *Coleção* Papus propôs um problema generalizado que levava a uma infinidade de novos tipos de curvas. Esse problema, mesmo em sua forma mais simples, é conhecido usualmente como "problema de Papus", mas o enunciado original, envolvendo três ou quatro retas, parece vir dos dias de Euclides. Em sua primeira forma o problema é chamado "o lugar a três ou quatro retas", descrito acima em conexão com a obra de Apolônio. Euclides evidentemente tinha determinado o lugar para certos casos especiais, mas parece que Apolônio, numa obra agora perdida, tinha dado uma solução completa. No entanto Papus dá a impressão de que os geômetras tinham fracassado nas tentativas de chegar a uma solução geral e de que ele teria sido o primeiro a provar que o lugar é sempre uma secção cônica.

Mas, o que é mais importante, Papus então foi adiante, considerando o problema análogo para mais de quatro retas. Para seis retas num plano ele percebeu que uma curva é determinada pela condição de o produto das distâncias a três das retas estar numa razão fixada para o produto das distâncias às outras três. Nesse caso, uma curva é definida pelo fato de um sólido estar numa razão fixada para outro sólido. Papus hesitou em passar a casos envolvendo mais do que seis retas porque "não há nada contido por mais do que três dimensões". Mas, ele continuou, "homens que viveram um pouco antes de nós se permitiram interpretar tais coisas, que nada significam que seja compreensível, falando do produto do conteúdo de tais e tais retas pelo quadrado disso ou conteúdo daquelas. Tais coisas porém poderiam ser enunciadas e provadas de modo geral usando proporções compostas". Os predecessores não citados por nome evidentemente estavam dispostos a dar um passo muito importante na direção de uma geometria analítica que incluiria

[12]Veja Heath: *History of Greek Mathematics* (1921), II, 207 e seguintes. Uma exposição fascinante de tais questões encontra-se em D'Arcy Wentworth Thompson: *On Growth and Form*, 2.ª edição (Cambridge University Press, 1942)

curvas de grau superior a três, assim como Diofante tinha usado as expressões quadrado--quadrado e cubo-cubo para potências superiores de números. Se Papus tivesse seguido a sugestão até mais longe, poderia ter-se antecipado a Descartes com uma classificação geral e teoria das curvas indo muito além da distinção clássica entre lugares planos, sólidos e lineares. Que ele tenha percebido que, para qualquer número de retas no problema de Papus, uma curva específica fica determinada, constitui a observação mais geral sobre lugares em toda a geometria antiga, e as sincopações algébricas que Diofante desenvolveria teriam sido suficientes para revelar algumas das propriedades das curvas. Mas Papus, no fundo, era unicamente um geômetra, como Diofante tinha sido unicamente um algebrista; por isso Papus apenas comentou com surpresa que ninguém tinha feito uma síntese desse problema para algum caso que envolvesse mais do que quatro retas. O próprio Papus não fez um estudo mais profundo desses lugares, "dos quais nada mais se sabe e que são simplesmente chamados curvas"[13]. Para o passo seguinte, nessa questão, era necessário que aparecesse um matemático que se ocupasse ao mesmo tempo com álgebra e geometria; é significativo que quando tal figura apareceu na pessoa de Descartes, foi esse mesmo problema de Papus que serviu como ponto de partida para a invenção da geometria analítica.

11 Há outros tópicos importantes no Livro VII da *Coleção*, além do problema de Papus. Assim, há uma descrição completa do que se chamava o método de análise e de uma coleção de obras conhecida como *Tesouro da análise*. Papus descreve a análise como sendo "um método de tomar como aceito o que se busca e daí passar por suas conseqüências até alguma coisa que seja aceita como resultado de síntese". Isto é, ele via na análise uma "solução ao contrário", cujos passos devem ser percorridos de novo em sentido inverso para fornecer uma demonstração válida. Se a análise leva a alguma coisa impossível, o problema também será impossível, pois uma conclusão falsa implica uma premissa falsa. Papus explica que o método de análise e síntese é usado pelos autores cujas obras constituem o *Tesouro da análise*: "É isto um corpo de doutrina fornecido para o uso daqueles que, depois de estudados os elementos usuais, querem se tornar capazes de resolver problemas, envolvendo curvas, que lhes sejam propostos"; e Papus menciona entre as obras do *Tesouro da análise* os tratados sobre cônicas de Aristeu, Euclides e Apolônio. É pela descrição de Papus que ficamos sabendo que *As cônicas* de Apolônio continha 487 teoremas. Como os sete livros preservados compreendem 382 proposições, concluímos que o oitavo livro continha 105. Cerca de metade das obras mencionadas por Papus como parte do *Tesouro da análise* está perdida, inclusive *Dividir numa razão* de Apolônio, *Sobre médias* de Eratóstenes e *Porismas* de Euclides. Sugeriu-se que um porisma era um equivalente antigo de uma equação para uma curva ou lugar, o que indica que Euclides e Papus podem não ter estado tão longe do que chamamos "geometria analítica", quanto se supõe em geral.

12 O Livro VII da *Coleção* contém o primeiro enunciado conhecido da propriedade foco-diretriz das três secções cônicas. Parece que Apolônio conhecia as propriedades focais para as cônicas centrais, mas é possível que a propriedade foco-diretriz para a parábola não fosse conhecida antes de Papus. Outro teorema no Livro VII que aparece pela primeira vez é um que em geral tem o nome de Paul Guldin, matemático do século dezessete: Se uma curva plana fechada gira em torno de uma reta que não a corta, o volume do sólido gerado é obtido tomando o produto da área limitada pela distância percorrida durante a revolução pelo centro de gravidade da área. Papus justificadamente se orgulhava desse teorema muito geral, pois inclui "um grande número de teoremas de todos os tipos sobre curvas, superfícies e sólidos, todos provados simultaneamente com uma demonstração". É de fato o teorema mais geral envolvendo o cálculo que se encontra na antiguidade. Papus deu também o teorema análogo que diz que a área da superfície gerada pela re-

[13]Não há tradução para o inglês da *Coleção* de Papus, mas amplas exposições sobre ela se encontram em Heath, *History of Greek Mathematics*, e em I. Thomas, *Selections Illustrating the History of Greek Mathematics*. Há uma útil tradução para o francês da *Coleção*, feita por Paul Ver Eeke, (Paris: Desclée de Brouwer, 1933, 2 volumes)

volução de uma curva em torno de uma reta que não a corta é igual ao produto do comprimento da curva pela distância percorrida pelo centróide da curva durante a revolução[14].

A *Coleção* de Papus é o último tratado matemático antigo realmente significativo, pois a tentativa do autor de ressuscitar a geometria não teve sucesso. Obras matemáticas continuaram a ser escritas em grego por mais mil anos, continuando uma influência com início quase um milênio antes, mas os autores que vieram depois de Papus nunca mais chegaram ao seu nível. Suas obras têm quase exclusivamente a forma de comentários sobre tratados anteriores. O próprio Papus é em parte responsável pelos comentários que surgiram em seguida de todos os lados, pois ele escreveu comentários sobre *Os elementos* de Euclides e o *Almajesto* de Ptolomeu, entre outros, dos quais só restam fragmentos. Comentários posteriores, como os de Teon de Alexandria (viveu em 365) são mais úteis para informação histórica do que por resultados matemáticos. Teon também é responsável por uma importante edição de *Os elementos* que se preservou; é lembrado também como o pai de Hipatia, uma jovem culta que escreveu comentários sobre Diofante, Ptolomeu e Apolônio. Devota ardente da cultura pagã, Hipatia atraiu a inimizade de uma fanática multidão cristã em cujas mãos sofreu uma morte cruel em 415. O impacto dramático de sua morte em Alexandria fez com que esse ano fosse tomado por alguns como marco do fim da matemática antiga, mas um fecho mais adequado se acha um século depois.

13 Em Proclus (410-485) Alexandria produziu um jovem estudioso de matemática que foi para Atenas onde se tornou chefe da escola neoplatônica. Proclus era mais filósofo que matemático, mas suas observações são freqüentemente cruciais para a história da geometria grega mais antiga. De grande importância é seu *Comentário sobre o Livro I de Os elementos de Euclides*, pois, enquanto o escrevia, Proclus certamente tinha à mão um exemplar da *História da geometria* de Eudemus, agora perdida, assim como os *Comentários sobre Os elementos* de Papus, em grande parte perdido. Devemos muito da informação de que dispomos sobre a história da geometria antes de Euclides a Proclus, que incluiu em seu *Comentário* um sumário ou extrato substancial da *História* de Eudemus. Essa passagem, que se tornou conhecida como *Sumário eudemiano*, pode ser considerada a principal contribuição de Proclus à matemática, embora lhe seja atribuído o teorema que diz que se um segmento de reta de comprimento fixo se move com as extremidades sobre duas retas que se cortam, um ponto do segmento descreverá uma parte de uma elipse.

14 Durante os anos que Proclus passou em Atenas, o Império Romano no Ocidente estava desmoronando gradualmente. O fim do império é geralmente situado em 476, pois nesse ano o então imperador foi destituído por Odoacre, um Godo. Restava algo do antigo senado romano, mas o partido senatorial tinha perdido o controle político. Nessa situação Boécio (cerca de 480-524) achou sua posição difícil, pois provinha de antiga e importante família patrícia. Ele não era apenas um filósofo e matemático, mas também um homem de estado, e provavelmente encarou com desgosto o emergente poder ostrogodo. Embora possa ter sido o principal matemático produzido pela Roma antiga, o nível de sua obra está muito abaixo do nível característico dos autores gregos. Escreveu livros de texto para cada um dos quatro ramos matemáticos das artes liberais, mas esses livros eram abreviações insignificantes e extremamente elementares de clássicos mais antigos — uma *Arithmetica* que era apenas uma forma abreviada da *Introductio* de Nicômaco; uma *Geometria* baseada em Euclides e contendo apenas enunciados, sem prova, de algumas das partes mais simples dos quatro primeiros livros de *Os elementos*; uma *Astronomia* derivada do *Almajesto* de Ptolomeu; e uma *Música* em dívida com obras de Euclides, Nicômaco e Ptolomeu. Em alguns casos esses livros elementares, muito usados em escolas monásticas medievais, podem ter sofrido interpolações posteriores, por isso é difícil determinar precisamente o que se deve de fato ao próprio Boécio. No entanto é claro que o autor se preocupava principalmente com dois aspectos da matemática: sua relação

[14]Há uma possibilidade de que o "teorema de Guldin" represente uma interpolação no manuscrito da *Coleção*. (Veja a tradução de Ver Eecke citada na nota de rodapé 12.) De qualquer forma, o teorema representa um notável progresso por alguém durante ou em seguida ao longo período de declínio

com a filosofia e sua aplicabilidade a problemas simples de mensuração. Da matemática como estrutura lógica há poucos traços.

Boécio parece ter sido um homem de estado de elevadas motivações e indiscutível integridade; ele e seus filhos serviram como cônsules. Boécio foi um dos principais conselheiros de Teodorico, mas por alguma razão política ou religiosa, o filósofo caiu no desagrado do imperador. Insinuou-se que Boécio era cristão (como talvez também Papus) e ter ele adotado idéias trinitárias que desagradavam ao imperador ariano. É possível também que Boécio estivesse associado muito de perto com elementos políticos, que buscavam no Império do Oriente ajuda para restaurar a antiga ordem romana no Ocidente[15]. De qualquer forma, Boécio foi executado em 524 ou 525, após longo encarceramento. (Incidentalmente, Teodorico morreu cerca de um ano depois, em 526.) Foi na prisão que ele escreveu sua obra mais célebre, *De consolatione philosophiae*. Esse ensaio, escrito em prosa e verso enquanto esperava a morte, discute a responsabilidade moral à luz da filosofia aristotélica e platônica.

15 A morte de Boécio pode ser considerada como marco do fim da matemática antiga no Império Romano do Ocidente, como a morte de Hipatia tinha marcado o fim de Alexandria como centro matemático; mas em Atenas ainda se trabalhou por mais algum tempo. Não surgiu nenhum grande matemático original aí, mas o comentador peripatético Simplicius (viveu em 520) se preocupava suficientemente com a gemetria grega para preservar para nós o que pode ser o mais antigo fragmento existente. Aristóteles na *Physica* tinha mencionado a quadratura do círculo ou de um segmento e Simplicius aproveitou esta oportunidade para citar "palavra por palavra" o que Eudemus escrevera sobre a quadratura de lunas por Hipócrates. A exposição, contendo várias páginas, dá detalhes completos sobre a quadratura de lunas, citados por Simplicius de Eudemus, que por sua vez se presume ter dado, ao menos, parte das provas nas próprias palavras de Hipócrates, especialmente onde eram usadas certas formas de expressão arcaicas. Essa fonte é onde chegamos a contato mais direto com a matemática grega antes dos dias de Platão.

16 Simplicius era primariamente um filósofo, mas em seus dias circulava uma obra usualmente descrita como a *Antologia grega*, cujas partes matemáticas lembram fortemente os problemas no Papiro Ahmes de mais de dois milênios antes. A *Antologia* continha cerca de seis mil epigramas; desses, mais de quarenta são problemas matemáticos, presumivelmente reunidos por Metrodorus, um gramático talvez do século quinto ou sexto. A maior parte deles, inclusive o epigrama acima sobre a idade de Diofante, leva a equações lineares simples. Por exemplo, pergunta-se quantas maçãs há numa coleção, se devem ser distribuídas entre seis pessoas de modo que a primeira receba um terço das maçãs, a segunda receba um quarto, a terceira pessoa receba um quinto, a quarta receba um oitavo, a quinta receba dez maçãs, e reste uma maça para a última pessoa. Outro problema é típico de textos de álgebra elementar de nossos dias: Se um cano pode encher uma cisterna em um dia, um segundo em dois dias, um terceiro em três dias e um quarto em quatro dias, quantos dias levam os quatro vertendo juntos para enchê-la? Os problemas não devem ser originais de Metrodorus, mas reunidos de várias fontes. Alguns provavelmente vêm dos dias de Platão, lembrando-nos que nem toda a matemática grega era do tipo que consideramos clássico.

17 Simplicius e Metrodorus não eram os maiores matemáticos de seu tempo, pois havia comentadores contemporâneos com preparo suficiente para permitir-lhes entender as obras de Arquimedes e Apolônio. Entre esses havia Eutocius (nascido por volta de 480) que comentou vários tratados de Arquimedes e *As cônicas* de Apolônio. É a Eutocius que devemos a solução de Arquimedes de uma cúbica por cônicas que se cortam, mencionada em *A esfera e o cilindr* , mas que fora isso só existe no comentário de Eutocius. O comentário de Eutocius sc re *As cônicas* era dedicado a Antemius de Trales (morreu em 534), um matemático coı ıpetente e arquiteto de Sta. Sofia de Constantinopla, que

[15]Veja Helen M. Barrett, *Boethius, Some Aspects of His Times and Work* (Cambridge University Press, 1940). Breves extratos de ob as de Boécio estão incluidas em Cohen e Drabkin, *Source Book in Greek Science*, pp. 291-294, 298-299

descreveu a construção da elipse com cordel e escreveu uma obra *Sobre espelhos que queimam*, em que são descritas as propriedades focais da parábola. Seu colega e sucessor na construção de Sta. Sofia, Isidoro de Mileto (viveu em 520) era também matemático capaz. Foi Isidoro quem tornou conhecidos os comentários de Eutocius e promoveu um ressurgimento do interesse pelas obras de Arquimedes e Apolônio. A ele talvez devamos a familiar construção com cordel e régua T da parábola e talvez também o apocrifo Livro XV de *Os elementos* de Euclides. Talvez se deva em grande parte às atividades do grupo de Constantinopla — Eutocius, Isidoro e Antemius — que tenham sido preservadas versões gregas de obras de Arquimedes e dos quatro primeiros livros de *As cônicas* de Apolônio.

Isidoro de Mileto foi um dos últimos dirigentes da Academia Platônica de Atenas. A escola, é claro, sofrera muitas mudanças em sua existência de mais de 900 anos, e durante os dias de Proclus tinha-se tornado um centro de estudos neoplatônicos. Quando em 527 Justiniano se tornou imperador do Oriente, evidentemente julgou que a cultura pagã, da Academia e de outras escolas filosóficas em Atenas, era uma ameaça ao cristianismo ortodoxo; por isso em 529 as escolas filosóficas foram fechadas e os seus membros dispersados. Roma então não era um abrigo hospitaleiro para sábios, e Simplicius e alguns outros filósofos procuraram asilo no Oriente. Encontraram-no na Pérsia, onde sob o rei Chosroes eles estabeleceram o que se poderia chamar a "Academia Ateniense no Exílio"[16]. A data 529, portanto, pode ser considerada o marco do fim do desenvolvimento da matemática na Europa na antiguidade. Daí por diante as sementes da ciência grega se desenvolveriam nos países do Oriente Próximo e do Extremo Oriente até que, cerca de 600 anos depois, o mundo latino estivesse mais receptivo. A data 529 tem outro significado que pode ser considerado sintomático da mudança de valores — nesse ano foi fundado o venerável monastério de Monte Cassino. A matemática, é claro, não desapareceu de vez da Europa em 529, pois, comentários sem importância continuaram a ser escritos em grego no Império Bizantino e versões dos medíocres textos latinos de Boécio continuaram em uso nas escolas do Ocidente. Mas o espírito matemático se apagou, enquanto os homens discutiam menos a geometria e mais o caminho para a salvação. Por isso, para os próximos passos no desenvolvimento matemático devemos voltar as costas à Europa e olhar para o Oriente.

BIBLIOGRAFIA

Clagett, Marshall, *Greek Science in Antiquity* (New York: Abelard Schuman, 1955; edição em brochura, Collier Books. 1963)

Cohen. M. R., e I. E. Drabkin. *Source Book in Greek Science* (New York: McGraw-Hill. 1948; reimpresso. Cambridge. Mass.: Harvard University Press, 1958)

Chasles, Michel, *Les trois livres de porismes d'Euclide, rétablis . . . d'après la notice . . . de Pappus* (Paris: Mallet-Bachelier, 1860)

Heath, T. L., *Diophantus of Alexandria: A Study in the History of Greek Algebra*, 2.ª edição (New York: Cambridge University Press, 1910; edição em brochura, New York: Dover, 1964)

Heath, T. L., *History of Greek Mathematics* (Oxford: Clarendon, 1921, 2 volumes)

Nesselmann, G. H. F., *Die Algebra der Griechen* (Berlin, 1842)

Nicomachus of Gerasa, *Introduction to Arithmetic*, traduzido por M. L. D'Ooge, com estudos sobre aritmética grega por F. E. Robbins e L. C. Karpinski (New York: Macmillan, 1926)

Pappus of Alexandria, *Collectionis quae supersunt*, editado por F. Hultsch (Berlin, 1876-1878, 3 volumes)

Pappus of Alexandria, *La collection mathématique*, traduzido por Paul Ver Eecke (Paris, 1933, 2 volumes)

Proclus Diadochus, *Les commentaires sur le premier livre des Éléments d'Euclide*, traduzido por Paul Ver Eecke (Bruges: Desclee de Brouwer, 1948)

Sánchez Pérez, José Augusto, *La aritmética en Grecia* (Madrid: Instituto Jorge Juan, 1947)

Sánchez Pérez, José Augusto, *La aritmética em Roma, en India y en Arabia* (Madrid: Instituto Miguel Asin, 1949)

Stahl, W. H., *Roman Science* (Madison, Wis.: University of Wisconsin Press, 1962)

Swift, J. D., "Diophantus of Alexandria", *American Mathematical Monthly*, 43 (1956), 163-170

[16]Veja George Sarton, *The History of Science* (Cambridge, Mass. Harvard University Press, 1952-1959, 2 volumes), I, 400

Thomas, Ivor, ed., *Selections Illustrating the History of Greek Mathematics* (Cambridge, Mass.: Loeb Classical Library, 1939-1941, 2 volumes)
Van der Waerden, B. L., *Science Awakening*, traduzido por Arnold Dresden (New York: Oxford, 1961: edição em brochura, New York: Wiley, 1963)
Ziegler, Konrat, "Pappos", in Pauly-Wissowa, *Real-Enzyclopädie der klassischen Wissenschaft* (Stuttgart, 1949), Vol. XVIII, Parte 3, colunas 1084-1106

EXERCÍCIOS

1. Você acha que as condições em Alexandria eram mais ou menos favoráveis ao desenvolvimento matemático nos dias de Papus que nos de Ptolomeu? Explique.
2. Como se comparavam as condições intelectuais em Alexandria com as de Roma nos dias de Diofante e Papus?
3. O desenvolvimento matemático teria sido essencialmente modificado se Roma não tivesse caído em 476? Dê razões para sua resposta.
4. Se você fosse um matemático vivendo em 500, escolheria Alexandria, Roma, Atenas ou Constantinopla para viver? Dê razões para sua resposta.
5. Mostre que o epigrama relativo à idade de Diofante leva à conclusão que ele morreu com oitenta e quatro anos.
6. Verifique que os quatro números, dados por Nicômaco como perfeitos, são, de fato, números perfeitos.
7. Resolva o problema de Diofante em que se pede achar dois números cuja soma seja 10 e a soma de seus cubos seja 370.
8. Ache duas frações racionais, além de 3/13 e 9/13, que satisfaçam a condição de Diofante de que cada uma quando somada ao quadrado da outra irá produzir um quadrado perfeito.
9. Prove que as retas *OC*, *BD* e *DF* na Fig. 11.3 são de fato respectivamente as médias aritmética, geométrica e harmônica, de *AB* e *BC*, como afirmou Papus.
10. Prove a generalização de Papus do teorema de Pitágoras ilustrada na Fig. 11.4.
11. Desenhe cuidadosamente um diagrama semelhante à Fig. 11.5 em que *AB* tenha 9 cm e *BC* 6 cm e ache aproximadamente, por medidas, o diâmetro do círculo C_3 e a distância de seu centro à reta *AC*, verificando assim por aproximação a asserção de Papus.
12. Resolva o problema da distribuição de maçãs descrito no texto.
13. Resolva o problema dos três canos descritos no texto.
14. Mostre analiticamente que o problema de Papus para seis retas leva a um lugar cuja equação é de grau superior a três.

*15. Prove a primeira trissecção de Papus dada no texto.
*16. Prove que *OT* é paralela a *AP* na Fig. 11.2.
*17. Use o resultado do Exc. 16 para completar a prova da segunda trissecção de Papus dada no texto.
*18. Justifique o teorema de Papus sobre sólidos de revolução.
*19. Prove o teorema de Proclus sobre a geração de uma elipse no caso em que as retas são perpendiculares entre si.

Capítulo **12**

China e Índia

Uma mistura de conchas de pérolas e frutas amargas... ou de valioso cristal e pedregulho.

Índia, de *Al-Biruni*

1 As civilizações da China e da Índia são muito mais antigas que as da Grécia e Roma, porém não mais que as dos vales do Nilo e Mesopotâmia. Remontam à Idade Potâmica, enquanto que as culturas da Grécia e de Roma eram da Idade Talássica. As civilizações das margens dos rios Iang-tse e Amarelo são de época comparável à do Nilo ou de entre os rios Tigre e Eufrates; mas testemunhos de cronologia referentes à China são menos merecedores de fé do que os relativos ao Egito e Babilônia. Afirmações quanto a terem os chineses feito observações astronômicas importantes, ou descrito os doze signos do zodíaco, pelo décimo quinto milênio A. C. são certamente infundadas, mas uma tradição que coloca o primeiro império chinês em 2 750 A. C. aproximadamente não é absurda. Outras avaliações mais modestas colocam as civilizações primitivas da China por volta do ano 1 000 A. C. Datar os documentos matemáticos da China não é nada fácil, e estimativas quanto ao *Chou Pei Suang Ching*, geralmente considerado o mais antigo dos clássicos matemáticos, diferem por quase mil anos. O problema de sua data é dificultado pelo fato de poder ser obra de vários homens em períodos diferentes. Alguns consideram o *Chou Pei* como uma boa exposição da matemática chinesa de cerca de 1 200 A. C., mas outros colocam a obra no primeiro século de nossa era. Uma data de 300 A. C. parece razoável, o que colocaria a obra em competição com outro tratado, o *Chiu Chang Suan-Shu*, composto por volta de 250 A. C.[1], isto é, pouco antes da dinastia Huan (202 A. C.). As palavras *chou pei* parecem referir-se ao uso do gnomon no estudo das trajetórias circulares no céu, e o livro com esse título trata de cálculos astronômicos, embora contenha uma introdução relativa às propriedades do triângulo retângulo e alguma coisa sobre o uso de frações. A obra tem a forma de um diálogo entre um príncipe e seu ministro sobre o calendário; o ministro diz ao governante que a arte dos números deriva do círculo e do quadrado, o quadrado pertencendo à terra e o círculo aos céus. O *Chou Pei* indica que na China, como Heródoto dizia do Egito, a geometria derivou da mensuração; e, como na Babilônia, a geometria chinesa era essencialmente um exercício de aritmética ou álgebra. Há, aparentemente, indicações no *Chou Pei* do teorema de Pitágoras, um teorema que os chineses tratavam algebricamente.

2 Quase tão, antigo quanto o *Chou Pei*, e talvez o mais influente livro de matemática chinês,[2] foi o *Chui-Chang Suan-Shu* ou *Nove capítulos sobre a arte matemática*. Esse livro contém 246 problemas sobre mensuração de terras, agricultura, sociedades, engenharia, impostos, cálculos, solução de equações, e propriedades dos triângulos retângulos. Ao passo que os gregos da mesma época estavam compondo tratados logicamente ordenados e sistematicamente expositórios, os chineses repetiam o velho hábito dos babilônios e egípcios de compilar coleções de problemas específicos. *Nove capitulos*

[1]As histórias da matemática em geral dedicam pouco espaço às contribuições chinesas. Uma exceção nisso é D. E. Smith, *History of Mathematics* (1923-1925), e também J. E. Hofmann, *Geschichte der Mathematik*, 2.ª ed. (Berlim, 1963), Vol. I. Uma exposição excepcionalmente completa e atual sobre os Próximo e Extremo Orientes é dada em A. P. Juschkewitsch, *Geschichte der Mathematik im Mittelalter* (1964)

[2]Ver Joseph Needham, *Science and Civilization in China* (1959) Vol. II, pp. 24-25. Para obras de matemática recentes ver Tung-Li Yuan, *Bibliography of Chinese Mathematics* 1918-1960 (Washington, D. C., publicado pelo autor, 1963)

também se assemelha à matemática egípcia pelo uso da "falsa posição", mas a invenção desse processo, assim como a origem da matemática chinesa em geral, parece ter sido independente de influência ocidental.

Nas obras chinesas, como nas egípcias, chama a atenção a justaposição de resultados precisos e imprecisos, primitivos e elaborados. São usadas regras corretas para as áreas de triângulos, retângulos e trapézios. A área do círculo era calculada tomando três quartos do quadrado sobre o diâmetro ou um dozeavos do quadrado da circunferência — resultado correto se se adota o valor três para π — mas para a área do segmento o *Nove capítulos* usa o resultado aproximado $s(s + c)/2$, onde s é a seta (isto é, o raio menos o apótema) e c a corda ou base do segmento. Há problemas resolvidos pela regra de três; noutros são encontradas raízes quadradas e cúbicas. O Cap. 8 do *Nove capitulos* é significativo por conter a solução de problemas sobre equações lineares, usando tanto números positivos quanto negativos. O último problema no capítulo envolve quatro equações em cinco incógnitas, e o tópico das equações indeterminadas continuaria a ser um dos preferidos entre povos orientais. O nono e último capítulo contêm problemas sobre triângulos retângulos, alguns dos quais mais tarde reapareceram na Índia e na Europa. Um deles pergunta qual a profundidade de uma lagoa de 10 pés quadrados se um caniço que cresce no centro e se estende 1 pé para fora da água atinge exatamente a superfície, se puxado para a margem da lagoa. Outro desses problemas bem conhecidos é o do bambu quebrado: há um bambu de 10 pés de altura, cuja extremidade superior, ao ser quebrada, atinge o chão a 3 pés da haste. Achar a altura da quebra.[3]

3 Os chineses gostavam especialmente de diagramas; portanto não é surpreendente que o primeiro registro (de origem antiga mas desconhecida) de um quadrado mágico tenha aparecido lá. O quadrado

4	9	2
3	5	7
8	1	6

foi supostamente trazido para os homens por uma tartaruga do Rio Lo nos dias do lendário Imperador Yii, considerado um engenheiro hidráulico.[4] A preocupação com tais diagramas levou o autor dos *Nove capítulos* a resolver o sistema de equações lineares simultâneas

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 39, \\ 2x + 3y + z &= 34, \\ x + 2y + 3z &= 26, \end{aligned}$$

efetuando operações sobre colunas na matriz

$$\begin{array}{|ccc|} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 34 & 39 \end{array} \quad \text{para reduzi-la a} \quad \begin{array}{|ccc|} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 36 & 1 & 1 \\ 99 & 24 & 39 \end{array}$$

A segunda forma representava as equações $36z = 99$, $5y + z = 24$ e $3x + 2y + z = 39$, das quais facilmente são calculados sucessivamente os valores de z, y e x.

4 Se a matemática chinesa tivesse tido ininterrupta continuidade de tradição, algumas das notáveis antecipações dos métodos modernos poderiam ter modificado substancialmente o desenvolvimento da matemática, mas a cultura chinesa foi seriamente prejudicada por quebras abruptas. Em 213 A. C., por exemplo, o imperador da China mandou queimar livros. Algumas obras evidentemente escaparam, seja pela persistência de cópias

[3]Ver Yoshio Mikami, *The Development of Mathematics in China and Japan* (1913), p. 23

[4]Ver D. J. Struik, "On Ancient Chinese Mathematics", *The Mathematics Teacher*, 56 (1963), 424-432

seja por transmissão oral; e o aprendizado de fato continuou com ênfase, quanto à matemática, em problemas de comércio e calendário.

Parece ter havido algum contato entre a Índia e a China, bem como entre a China e o Ocidente, mas os entendidos não estão de acordo quanto à extensão e sentido dos empréstimos. A tentação de ver influência babilônica ou grega na China por exemplo, se depara com o problema de não terem os chineses usado frações sexagesimais. A numeração chinesa permaneceu essencialmente decimal, com notações marcadamente diferentes das de outros países. Na China, desde os tempos primitivos, dois sistemas de notação estiveram em uso. Num predominava o princípio multiplicativo, no outro era usada uma forma de notação posicional. No primeiro havia símbolos diferentes para os dígitos de um a dez e símbolos adicionais para as potências de dez, e nas formas escritas os dígitos em posições ímpares (da esquerda para a direita ou de baixo para cima) eram multiplicados pelo seu sucessor. Assim o número 678 seria escrito como um seis seguido do símbolo para cem, depois um sete seguido do símbolo para dez, e finalmente o símbolo para oito.

No sistema de "numerais em barras" os dígitos de um a nove apareciam como | || ||| |||| ||||| ⊤ ⊤| ⊤|| ⊤||| e os nove primeiros múltiplos de dez como — = ≡ ≣ ≣ ⊥ ⊥ ⊥ ⊥. Usando esses dezoito símbolos alternadamente em posições contadas da direita para a esquerda, podiam ser escritos números tão grandes quanto se desejasse. Por exemplo, representaria-se 56 789 por ||||| ⊥ ⊤| ⊥ ⊤|||. Como na Babilônia, só relativamente tarde é que apareceu um símbolo para uma posição vazia. Numa obra de 1247 o número 1 405 536 é escrito, com um símbolo redondo para o zero, como | ≣ O ≣ ||||| ≡ ⊤. (Ocasionalmente, como na forma do triângulo aritmético do século quatorze, eram permutadas as barras verticais e horizontais.)

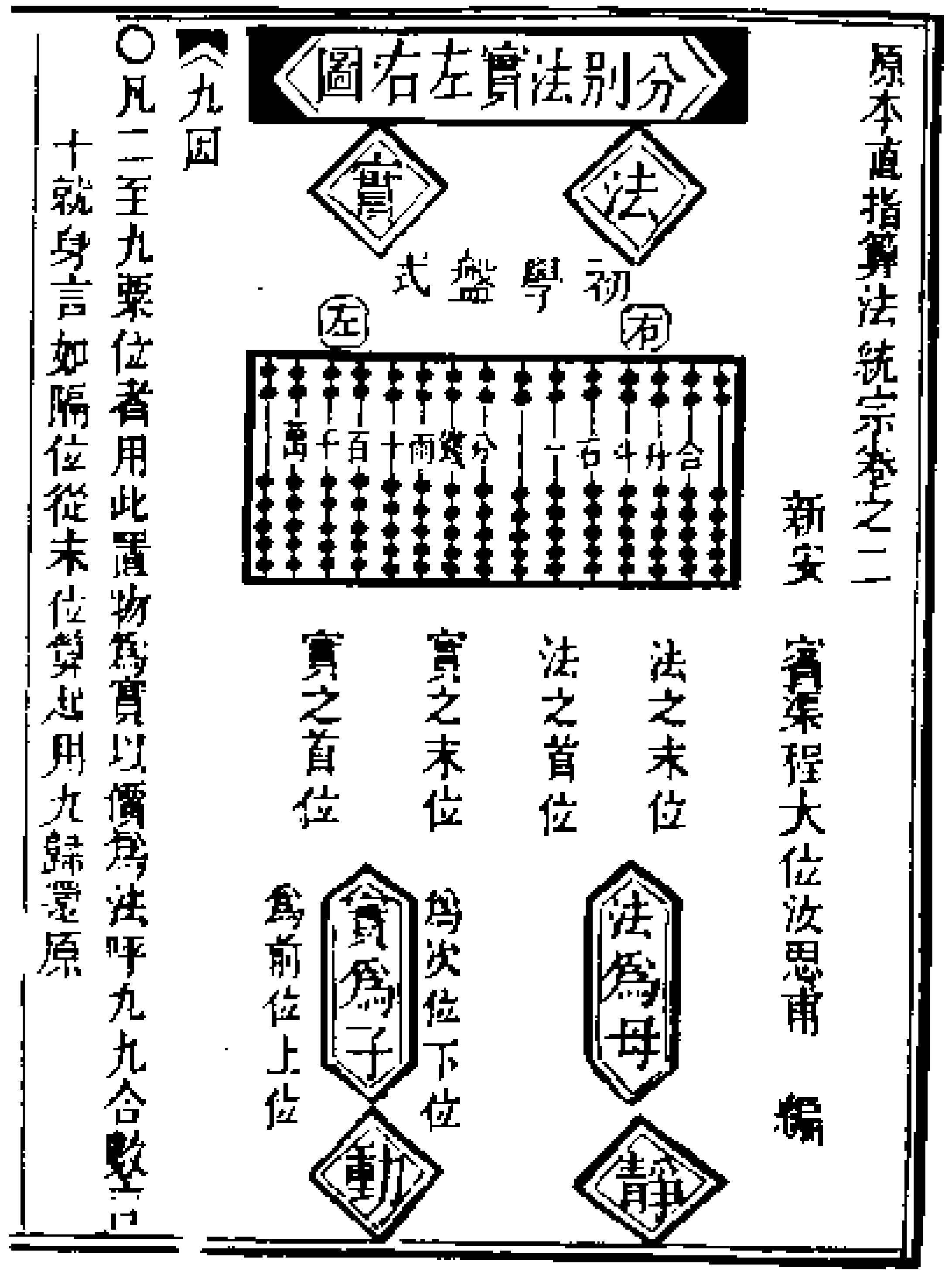
A idade precisa dos numerais em barras originais não pode ser determinada, mas certamente estavam em uso vários séculos antes de nossa era, isto é, muito antes de ser adotada na Índia a notação posicional. O uso de um sistema posicional centesimal em vez de decimal na China era conveniente para a adaptação aos cálculos na placa de calcular. Notações diferentes para potências de dez vizinhas permitiam aos chineses usar, sem confusão, um ábaco com colunas verticais não marcadas. Antes do século oito o lugar em que um zero deveria aparecer era simplesmente deixado vazio. Embora em textos anteriores a 300 D. C. os números e tabelas de multiplicação fossem escritos em palavras, os cálculos na verdade eram feitos com numerais em barras numa placa de calcular.

5 Os numerais em barras de 300 A. C. não eram apenas uma notação para escrever o resultado de um cálculo. Barras verdadeiras, de bambu, marfim ou ferro, eram carregadas numa sacola pelos administradores e usadas para cálculos. As barras eram manipuladas com tal destreza que um escritor do século onze descreveu-as como "voando tão depressa que o olhar não podia acompanhar seu movimento". Provavelmente era mais rápido efetuar cancelamentos com barras sobre uma tábua de contar do que em cálculos escritos. Na verdade, o uso das barras sobre uma tábua era tão eficiente que o ábaco ou moldura rígida com fichas móveis sobre arames não foi usado tão cedo quanto se tem suposto em geral. As primeiras descrições claras das formas modernas, conhecidas na China como *suan phan* e no Japão como o *soroban*, são do século dezesseis; mas formas precursoras parecem ter sido usadas talvez mil anos antes. A palavra *abacus* provavelmente deriva da palavra semítica *abq* ou pó, indicando que em outras regiões, como na China, o instrumento proveio de uma bandeja de areia usada como tábua de contar. É possível, mas nada certo, que o uso da tábua de contar na China preceda o europeu, mas não se dispõe de datas definidas e dignas de fé. No Museu Nacional em Atenas há uma placa de mármore, datando provavelmente do quarto século A. C. que parece ser uma placa de contar; e quando um século antes Heródoto escreveu "Os egípcios movem a mão da direita para a esquerda para calcular, enquanto que os gregos a movem da esquerda para a direita", provavelmente ele se referia ao uso de algum tipo de placa de calcular. Quando exatamente tais instrumentos cederam lugar ao ábaco propriamente

dito é difícil determinar; nem podemos saber se os aparecimentos do ábaco na China, Arábia e Europa foram ou não acontecimentos independentes. O ábaco árabe tinha dez bolas em cada arame, sem barra central, enquanto que o chinês tinha cinco fichas superiores e cinco inferiores em cada arame, separadas por uma barra. Cada ficha superior num ábaco chinês equivale a cinco inferiores; um número é marcado fazendo deslisar as fichas adequadas até encostar na barra. (Ver a ilustração de um ábaco adiante.)

Nenhuma descrição da numeração chinesa seria completa sem uma referência ao uso de frações. Os chineses conheciam as operações sobre frações comuns, para as quais achavam o mínimo denominador comum. Como em outros contextos, viam ana-

Placa de calcular de mármore, provavelmente do século quatro A. C., encontrada na ilha de Salamis e agora no Museu Nacional de Atenas



Uma representação primitiva do abaco, do *Suan Fa Thung Tsung*, 1593. (Reproduzido de Joseph Needham, *Science and Civilization in China*, III, 76)

logias com as diferenças entre os sexos, referindo-se ao numerador como "filho" e ao denominador como "mãe". A ênfase sobre *yin* e *yang* (opostos, especialmente em sexo) tornava mais fácil seguir as regras para manipular frações. Mais importante do que essas; no entanto, era a tendência à decimalização de frações na China. Como na Mesopotâmia uma metrologia sexagesimal levou à numeração sexagesimal, também na China a adesão à idéia decimal em pesos e medidas teve como resultado um hábito decimal no tratamento de frações que, ao que se diz, pode ser encontrado já no século quatorze A. C.[5] Artifícios decimais na computação eram às vezes adotados para facilitar a manipulação de frações. Num comentário do primeiro século aos *Nove capítulos*, por exemplo, vemos o uso das regras agora familiares para raízes quadradas e cúbicas, equivalentes a $\sqrt{a} = \sqrt{100a}/10$ e $\sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{1\,000a}/10$, que facilitam a decimalização das extrações de raiz.

A idéia de números negativos parece não ter causado muitas dificuldades aos chineses pois estavam acostumados a calcular com duas coleções de barras — uma vermelha para os coeficientes positivos ou números e uma preta para os negativos. No entanto, não aceitavam a idéia de um número negativo poder ser solução de uma equação.

6 A matemática chinesa primitiva é tão diferente da de períodos comparáveis em outras partes do mundo que a hipótese de desenvolvimento independente parece justificada. De qualquer forma, parece seguro dizer que se houve alguma intercomunicação antes de 400, então mais matemática saiu da China do que entrou. Para épocas posteriores a questão torna-se mais difícil. O uso do valor três para π na matemática chinesa antiga não chega a ser um argumento para afirmar dependência com relação à Mesopotâmia, especialmente porque a busca de valores mais precisos, desde os primeiros

[5]Ver Needham, obra citada, III, 89

séculos da era cristã, era mais persistente na China que nos demais lugares. Valores como 3,1547, $\sqrt{10}$, 92/29, e 142/45 são encontrados; e no terceiro século Liu Hui, um importante comentador do *Nove capítulos*, obteve 3,14 usando um polígono regular de 96 lados e a aproximação 3,14159 considerando um polígono de 3 072 lados. Na reelaboração do *Nove capítulos*, por Liu Hui, há muitos problemas de mensuração, inclusive a determinação correta do volume de um tronco de pirâmide quadrada. Para um tronco de cone circular uma fórmula semelhante era aplicada, mas com valor três para π. Pouco comum é a regra que diz que o volume de um tetraedro com duas arestas opostas perpendiculares entre si é um sexto do produto dessas duas arestas e de sua perpendicular comum. O método da falsa posição é usado para resolver equações lineares, mas há também resultados mais sofisticados, tais como a solução, por um método matricial, de um problema diofantino envolvendo quatro equações em cinco incógnitas. A resolução aproximada de equações de grau superior parece ter sido efetuada por um processo semelhante ao que chamamos "método de Horner". Liu Hui também inclui, em sua obra sobre *Nove capítulos*, numerosos problemas envolvendo torres inacessíveis e árvores em encostas de colinas.[6]

A fascinação dos chineses com o valor de π atingiu o ápice na obra de Tsu Ch'ung-chih (430-501). Um de seus valores era o familiar valor arquimediano 22/7, descrito por Tsu Ch'ung como "inexato", seu valor "preciso" era 355/113. Se se persistir em procurar possíveis influências ocidentais, pode-se explicar essa aproximação notavelmente boa, sem igual em qualquer outro lugar até o século quinze, subtraindo o numerador e o denominador, respectivamente, do valor de Arquimedes do numerador e denominador do valor ptolomaico 377/120. No entanto, Tsu Ch'ung-chih foi ainda mais longe em seus cálculos, pois deu 3,1415927 como valor "em excesso" e 3,1415926 como "em falta"[7]. Os cálculos pelos quais ele chegou a essas limitações, aparentemente ajudado por seu filho Tsu Cheng-chih, provavelmente estavam contidos em algum de seus livros, agora perdido. De qualquer modo, seus resultados eram notáveis para a época, e é justo que hoje um ponto assinalado na superfície da lua tenha seu nome.

Devemos ter em mente que a precisão no valor de π é mais uma questão de resistência computacional do que de visão teórica. O teorema de Pitágoras por si só basta para dar uma aproximação tão boa quanto se queira. Partindo do perímetro conhecido de um polígono regular de n lados inscrito num círculo, o perímetro do polígono regular inscrito de $2n$ lados pode ser calculado com duas aplicações do teorema de Pitágoras. Seja C um círculo de centro O e raio r (Fig. 12.1) e seja $PQ = s$ um lado do polígono regular inscrito de n lados, de perímetro conhecido. Então o apótema $OM = u$ é dado por $u = \sqrt{r^2 - (s/2)^2}$; logo a flecha $MR = v = r - u$ é conhecida. Então o lado $RQ = w$ do polígono regular inscrito de $2n$ lados é dado por $w = v^2 + (s/2)^2$; logo o perímetro desse polígono é conhecido. O cálculo, como Liu Hui observou, pode ser simplificado notando que $w^2 = 2rv$. Uma iteração do processo fornecerá aproximações cada vez melhores do perímetro do círculo, em termos do qual π é definido.

7 Os problemas matemáticos chineses muitas vezes parecem mais pitorescos do que práticos, e no entanto a civilização chinesa foi responsável por um número surpreendente

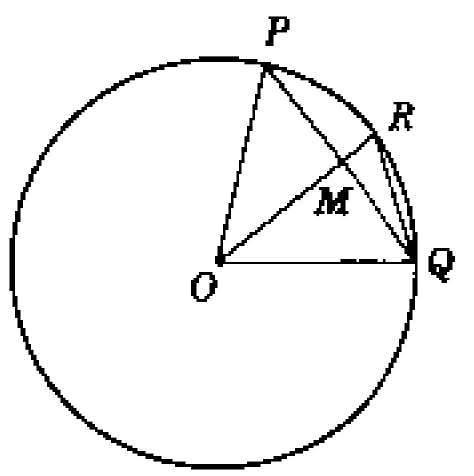


Figura 12.1

[6]Ver o excelente artigo sobre Liu Hui, escrito por Ho Peng-Yoke, a aparecer nos próximos volumes do *Dictionary of Scientific Biography*

[7]Ver o artigo citado na nota de rodapé 6. Parece haver alguma confusão na citação desse valor por Mikami, obra citada p. 50, por Smith, obra citada II, 309 e Hofmann, obra citada I, 76

de inovações tecnológicas. O uso da impressão e da pólvora (oitavo século) do papel e da bússola (século onze) surgiu mais cedo na China que nos outros lugares, e antes, também, do ponto mais alto da matemática chinesa, que ocorreu no século treze, durante o fim do período Sung. Havia então matemáticos trabalhando em várias partes da China; mas as relações entre eles parecem ter sido remotas, e como no caso da matemática grega, evidentemente possuímos relativamente poucos dos tratados outrora existentes. O último e maior matemático chinês foi Chu Shih-chieh (viveu de 1280-1303), no entanto pouco sabemos dele — nem mesmo quando nasceu ou morreu. Residia em Yen-shan, perto da moderna Pequim, mas parece ter passado cerca de vinte anos como sábio errante, ganhando sua vida com o ensino da matemática, embora tivesse oportunidade de escrever dois tratados. O primeiro deles, escrito em 1299, foi o *Suan-hsüeh ch'i-meng* (Introdução aos estudos matemáticos), obra relativamente elementar que influenciou fortemente a Coréia e o Japão, embora na China se perdesse até reaparecer no século dezenove[8]. De maior interesse histórico e matemático é o *Ssu-yüan yü-chien* (Precioso espelho dos quatro elementos) de 1303. No século dezoito esse também desapareceu na China, sendo redescoberto somente no século seguinte. Os quatro elementos, chamados, céu, terra, homem, e matéria, são as representações de quatro incógnitas na mesma equação. O livro representa o ápice do desenvolvimento da álgebra chinesa, pois trata de equações simultâneas e de equações de graus até quatorze. Nele o autor descreve um método de transformação que ele chama *fan-fa*, cujos elementos parecem ter surgido muito antes na China, mas que tem geralmente o nome de Horner, que viveu meio milênio depois. Para resolver a equação $x^2 + 252x - 5292 = 0$, por exemplo, Chu Shihchieh primeiro obteve $x = 19$ como aproximação (uma raiz cai entre $x = 19$ e $x = 20$) depois usou o *fan-fa*, nesse caso a transformação $y = x - 19$, para obter a equação $y^2 + 290y - 143 = 0$ (com uma raiz entre $y = 0$ e $y = 1$). Deu então a raiz dessa como (aproximadamente) $y = 143/(1 + 290)$; daí o valor correspondente de x é $19\,143/291$. Para a equação $x^3 - 574 = 0$ ele usou $y = x - 8$ para obter $y^3 + 24y^2 + 192y - 62 = 0$, e deu a raiz como sendo $x = 8 + 62/(1 + 24 + 192)$ ou $x = 8\,2/7$. Em alguns casos ele usou aproximações decimais.

8 O fato de pelo menos três outros matemáticos do fim do período Sung usarem processos semelhantes revela que o chamado método de Horner era de conhecimento comum na China. Um desses foi Li Chih (ou Li Yeh, 1192-1279), um matemático de Pequim a quem Khublai Khan ofereceu um posto no governo em 1260, mas que achou uma desculpa polida para recusá-lo. Seu *Ts'e-yuan hai-ching* ("Espelho marinho das medidas do círculo") inclui 170 problemas tratando de círculos inscritos em ou excritos fora de um triângulo retângulo, e da determinação das relações entre os lados e os raios, alguns desses problemas levando a equações de quarto grau. Embora não descrevesse seu método de resolução de equações, inclusive de algumas de grau seis, parece que não era muito diferente do usado por Chu Shih-chieh e Horner[9]. Outros que usaram o método de Horner foram Ch'in Chiu-shao (por volta de 1202-1261) e Yang Hui (viveu por volta de 1261-1275). O primeiro foi um governador sem princípios, que adquiriu riquezas imensas num período de cem dias após assumir seu posto. Seu *Shu-shu chiu-chang* (Tratado matemático em nove partes) marca o ápice da análise indeterminada na China, com a invenção de regras de rotina para resolver congruências simultâneas. Nessa obra ele também achou a raiz quadrada de 71 824 por passos semelhantes aos do método de Horner. Com 200 como primeira aproximação de uma raiz de $x^2 - 71\,824 = 0$, ele diminuiu as raízes dessa equação de 200, obtendo $y^2 + 400y - 31\,824 = 0$. Para essa equação ele achou 60 como aproximação, e subtraiu 60 das raízes, chegando a uma terceira equação, $z^2 + 520z - 4\,224 = 0$, de que 8 é raiz. Logo o valor de x é 268. De modo semelhante ele resolveu equações cúbicas e quárticas. O mesmo "método de Horner" foi usado por Yang Hui, sobre cuja vida quase nada se sabe e cuja obra só em

[8]Ver o extenso artigo a aparecer sobre Chu Shih-chieh por Ho Peng-Yoke, a ser publicado no *Dictionary of Scientific Biography*. Ver também Needham, obra citada, III, 38-53

[9]Ver o artigo sobre Li Chih por Ho Peng-Yoke a aparecer no *Dictionary of Scientific Biography*

parte se preservou. Entre suas contribuições preservadas estão os mais antigos quadrados mágicos chineses de ordem maior que três, inclusive dois de cada ordem de quatro a oito, um de ordem nove e um de ordem dez[10].

9 A obra de Yang Hui inclui também resultados quanto à soma de séries e o chamado triângulo de Pascal, coisas publicadas e melhor conhecidas através do *Espelho precioso* de Chu Shih-chieh, com o qual a idade áurea da matemática chinesa teve fim. Algumas das muitas somas de séries encontradas no *Espelho* são as seguintes:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = n(n+1)(2n+1)/3!$$

$$1 + 8 + 30 + 80 + \ldots + n^2(n+1)(n+2)/3! = n(n+1)(n+2)(n+3) \times \times (4n+1)/5!$$

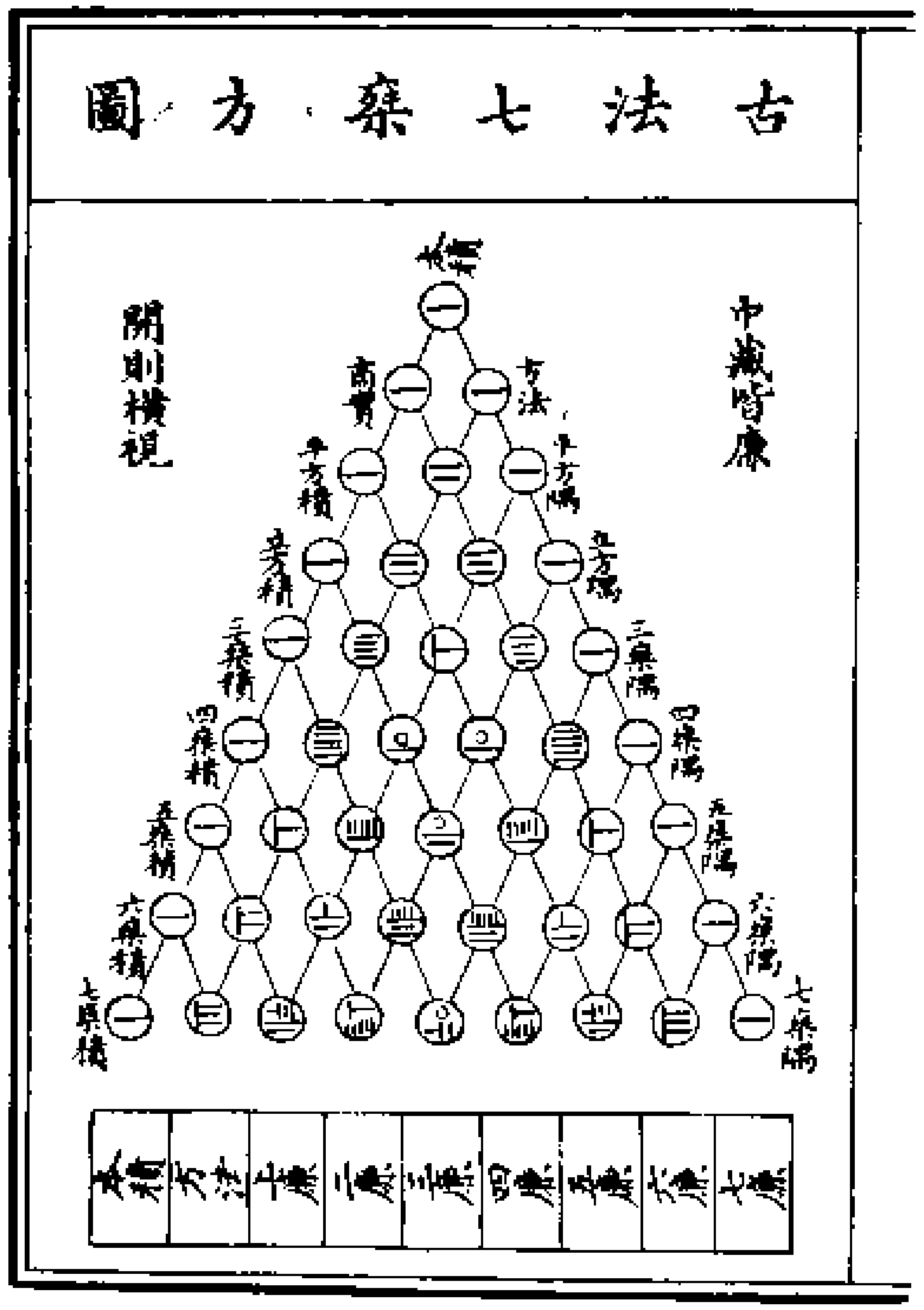
No entanto não são dadas provas, nem o tópico parece ter continuado na China outra vez senão no século dezenove. Chu Shih-chieh parece ter tratado suas somas pelo método de diferenças finitas, elementos do qual parecem remontar na China ao século sete; mas logo depois de sua obra o método desapareceu por muitos séculos.

O *Espelho precioso* começa com um diagrama do triângulo aritmético inapropriamente conhecido no Ocidente como "triângulo de Pascal". No arranjo de Chu temos os coeficientes das expansões binomiais até a oitava potência, claramente dadas em numerais em barra e um símbolo redondo para o zero. Chu não reivindicava crédito pelo triângulo, referindo-se a ele como um "diagrama do velho método para achar potências oitavas e menores". Um arranjo semelhante de coeficientes até a sexta potência tinha aparecido na obra de Yang Hui, mas sem o símbolo redondo para o zero. Nas obras chinesas há cerca de 1 100 referências a sistemas de tabulação para coeficientes binomiais, e é provável que o triângulo aritmético tenha se originado na China, aproximadamente nessa data. É interessante observar que a descoberta chinesa do teorema binomial para potências inteiras estava associada, em sua origem, à extração de raízes e não a potenciações. O equivalente do teorema aparentemente era conhecido por Omar Khayyam mais ou menos na mesma época em que estava sendo usado na China, mas a mais antiga obra árabe existente que o contém é de Al-Kashi no século quinze. Por essa época a matemática chinesa não tinha realizações comparáveis às da Europa e Oriente Próximo, e provavelmente mais matemática entrava na China do que saía. Ainda não está resolvido o problema espinhoso de determinar as influências mútuas da China e da Índia durante o primeiro milênio de nossa era.

10 Escavações arqueológicas em Mohenjo Daro fornecem provas de uma civilização antiga e de alta cultura na Índia durante a era das construções de pirâmides egípcias, mas não temos documentos matemáticos indianos dessa época. Mais tarde o país foi ocupado pelos invasores arianos que introduziram o sistema de castas e desenvolveram a literatura sânscrita. O grande mestre religioso, Buda, agia na Índia mais ou menos quando Pitágoras, ao que se diz, esteve lá, e às vezes se tem sugerido que Pitágoras aprendeu seu teorema com os Hindus. Estudos recentes mostram ser isso altamente improvável dada a familiaridade dos babilônios com o teorema pelo menos mil anos antes.

A queda do Império Romano do Ocidente tradicionalmente é situada no ano 476; foi nesse ano que nasceu Aryabhata, autor de um dos mais antigos textos matemáticos indianos. É claro, entretanto, que tinha havido atividade matemática na Índia muito antes disto — provavelmente antes mesmo da mística fundação de Roma em 753 A. C. A Índia, como o Egito, tinha seus "estiradores de corda", e as primitivas noções geométricas adquiridas em conexão com o traçado de templos e medida e construção de altares tomou a forma de um corpo de conhecimentos conhecido como os *Sulvasūtras* ou "regras de corda". *Sulva* (ou *sulba*) refere-se às cordas usadas para medidas, e *sūtra* significa um livro de regras ou aforismos relativos a um ritual ou ciência. O estirar de cordas é notavelmente reminiscente da origem da geometria egípcia, e sua associação com funções

[10]Artigos excelentes, incluindo muito mais sobre a obra de Ch'in Chiu-shao e Yang Hui, escritos por Ho Peng-Yoke, aparecerão no *Dictionary of Scientific Biography*



O Triângulo "de Pascal" representado em 1303 no frontispício do *Ssu Yuan Yü Chien* de Chu Shih-Chieh. Chama-se "Figura do velho método dos sete quadrados multiplicadores" e tabula os coeficientes binomiais até a oitava potência. (Reproduzido de Joseph Needham, *Science and Civilization in China*, III, 135)

nos templos nos faz lembrar a possível origem ritual da matemática. Mas a dificuldade em datar as regras se liga ainda a dúvidas quanto à influência que tiveram sobre matemáticos hindus posteriores. Mais ainda do que na China há uma notável falta de continuidade na tradição matemática na Índia; contribuições significativas são acontecimentos isolados separados por intervalos sem realizações[11].

11 Existem três versões, todas em verso, da obra chamada os *Sulvasūtras*, a mais conhecida sendo a que tem o nome de Apastamba. Nessa primeira exposição, que data talvez do tempo de Pitágoras, encontramos regras para a construção de ângulos retos por meio de ternas de cordas cujos comprimentos formem tríadas pitagóricas, como 3, 4 e 5, ou 5, 12 e 13, ou 8, 15 e 17, ou 12, 35 e 37. No entanto todas essas tríadas são facilmente obtidas da antiga regra babilônica; portanto não é improvável que houvesse influência mesopotâmica nos *Sulvasūtras*. Apastamba sabia que o quadrado sobre a diagonal de um retângulo é igual à soma dos quadrados sobre os dois lados adjacentes, mas essa forma do teorema de Pitágoras também pode ter sido obtida da Mesopotâmia. Menos fácil de explicar é outra regra dada por Apastamba — uma que se assemelha muito à álgebra geométrica no livro II de *Os elementos* de Euclides. Para construir um quadrado de área igual à do retângulo *ABCD* (Fig. 12.2) marca-se os lados menores sobre os maiores de modo que $AF = AB = BE = CD$, e traça-se HG bissectando os seg-

[11]O leitor deve ser prevenido do fato de existirem numerosos livros em que as contribuições da Índia são muito exageradas. Um exemplo disto é B. K. Sarkar, *Hindu Achievements in Exact Science* (New York, 1918). A *History of Hindu Mathematics*, em dois volumes, de B. Datta e A. N. Singh (1935-1938) merece muito mais confiança, mas mesmo isso deve sofrer reservas, como indica Solomon Gandz ao comentar o Volume I em *Isis*, 25 (1936), 478-488

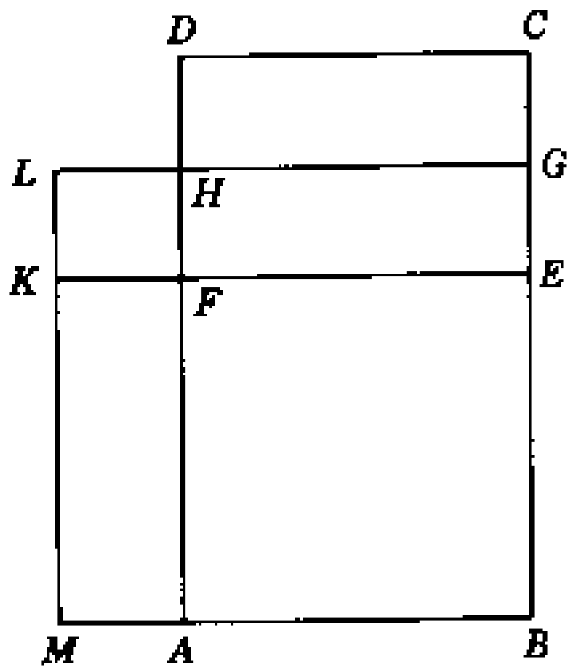


Figura 12.2

mentos CE e DF; prolonga-se EF até K, GH, até L, e AB até M, tal que $FK = HL = FH = AM$, e traça-se LKM. Agora constrói-se um retângulo com diagonal igual a LG e lado menor HF. Então o lado maior do retângulo é o lado do quadrado pedido.

A origem e data dos *Sulvasūtras* são tão incertos que não podemos dizer se tais regras são ou não relacionadas com a primitiva agrimensura egípcia ou com o problema grego mais tardio de duplicar um altar. Têm sido atribuídas a eles datas que variam num intervalo de mil anos, do século oitavo A. C. ao segundo século de nossa era. Não se pode confiar na cronologia das culturas antigas do Extremo Oriente quando a tradição hindu ortodoxa se gaba de obras astronômicas importantes de mais de 2 000 000 de anos[12] e quando os cálculos levam a bilhões de dias desde o começo da vida de Brahman até 400 D. C. aproximadamente[13]. Referências a séries geométricas e aritméticas na literatura védica que datariam de há 2 000 anos[14] são mais plausíveis, mas não há documentos contemporrâneos da Índia para confirmá-las. Afirmou-se também que a primeira constatação dos incomensuráveis se acha na Índia no período *Sulvasūtra*[15], mas tais asserções não estão bem fundamentadas. Que os hindus antigos tenham percebido a existência de grandezas incomensuráveis parece muito improvável, pois os matemáticos indianos absolutamente não investigaram conceitos fundamentais.

12 Ao período dos *Sulvasūtras*, que se encerrou pelo segundo século, seguiu-se a idade dos *Siddhāntas*, ou sistemas (de astronomia). O estabelecimento da dinastia do Rei Gupta (290) assinalou o começo de um renascimento da cultura sânscrita, e os *Siddhāntas* parecem ter sido um produto desse renascimento. São conhecidas nominalmente cinco versões diferentes dos *Siddhāntas*, *Paulisha Siddhānta*, *Sūrya Siddhānta*, *Vasisishta Siddhānta*, *Paitamaha Siddhānta*, e *Romanka Siddhānta*. Dessas, o *Sūrya Siddhānta* (Sistema do Sol), escrito por volta de 400, é o único que parece ter-se preservado completamente. De acordo com o texto, escrito em versões épicas, ele é obra de Sūrya, o Deus do Sol[16]. As principais doutrinas astronômicas são evidentemente gregas, mas conservando grande quantidade de tradição popular hindu. O *Paulisha Siddhānta*, que data de 380 aproximadamente, foi resumido pelo matemático hindu Varahamihira (viveu em 505) e foi citado freqüentemente pelo estudioso árabe Al-Biruni, que sugeriu uma origem ou influência grega. Escritores posteriores dizem que os *Siddhāntas* concordavam bastante em substância, variando apenas a fraseologia; por isso podemos supor que os outros, como o *Sūrya Siddhānta*, eram compêndios de astronomia contendo regras enigmáticas em verso sânscrito, com pouca explicação e sem prova.

[12]G. R. Kaye, "Indian Mathematics", *Isis*, 2 (1914), 326-356

[13]*Alberuni's India*, ed. por E. C. Sachan (Londres, 1960, 2 vols.), II, pp. 32 e seguintes

[14]A. N. Singh, "On the use of Series in Hindu Mathematics", *Osiris*, 1 (1036), 606-628

[15]A. N. Singh, "A Review of Hindu Mathematics up to XIIth Century", *Archeion* 18 (1936), 43-62, Saradakanta Ganguli, "On the Indian Discovery of the Irrational at the Time of the Sulvasutras", *Scripta Mathematica*, 1 (1932), 135-141

[16]Uma tradução para o inglês por Burgess e Whitney, juntamente com notas copiosas, foi publicada no *Journal of the American Oriental Society*, 6 (1860), 141-498. Ver também George Sarton, *An Introduction to the History of Science* (1927), pp. 386-388

Concorda-se em geral em que os *Siddhāntas* provêm do fim do quarto século ou começo do quinto, mas há muito desacordo quanto à origem do conhecimento que contêm. Estudiosos hindus insistem em afirmar a originalidade e independência dos autores, ao passo que autores ocidentais se inclinam a ver sinais claros de influência grega. Não é improvável, por exemplo que o *Paulisha Siddhānta* derive em grande parte da obra do astrólogo Paulo que viveu em Alexandria pouco antes da data em que se presume terem sido compostos os *Siddhāntas* (Al-Biruni de fato atribui explicitamente esse *Siddhānta* a Paulo de Alexandria). Isso daria uma explicação simples para as evidentes semelhanças entre partes dos *Siddhāntas* e a trigonometria e astronomia de Ptolomeu. O *Paulisha Siddhānta*, por exemplo, usa o valor 3 177/1 250 para π, o que concorda bem o valor sexagesimal 3; 8, 30 de Ptolomeu.

Mesmo que os hindus tenham adquirido seu conhecimento de trigonometria do helenismo cosmopolita de Alexandria, o material em suas mãos tomou uma forma nova. Ao passo que a trigonometria de Ptolomeu se baseava na relação funcional entre as cordas de um círculo e os arcos centrais que subentendem, os autores dos *Siddhāntas* converteram isso num estudo da correspondência entre *metade* de uma corda de um círculo e *metade* do ângulo subentendido no centro pela corda toda. Assim, aparentemente nasceu na Índia a precursora da função trigonométrica moderna que chamamos seno de um ângulo, e a introdução da função seno representa a contribuição mais importante dos *Siddhāntas* à história da matemática. Embora se suponha em geral que a mudança da corda toda para a metade teve lugar na Índia, Paul Tannery, o mais importante historiador da ciência do fim do século passado e início deste, sugeriu que essa transformação na trigonometria teve lugar em Alexandria durante o período pós-ptolomaico. Quer essa sugestão seja ou não válida, não há dúvida que é dos hindus, não dos gregos, que deriva nosso uso da metade da corda; e nosso termo "seno", por acidente de tradução (ver Cap. 14), provém da palavra hindu *jiva*.

13 Durante o sexto século, logo depois da composição dos *Siddhāntas*, viveram dois matemáticos hindus dos quais se sabe terem escrito livros sobre o mesmo tipo de material. O mais antigo e importante dos dois foi Aryabhata, cuja obra mais conhecida, escrita em 499 e entitulada *Aryabhatiya*, é um pequeno volume, escrito em verso, sobre astronomia e matemática. Os nomes de vários matemáticos hindus anteriores são conhecidos, mas nada de sua obra, além de uns poucos fragmentos, se preservou. Quanto a isso, portanto, a posição do *Aryabhatiya* de Aryabhata na Índia é semelhante à de *Os elementos* de Euclides na Grécia, cerca de oito séculos antes. Ambos são sumários de resultados anteriores, compilados por um único autor. Há porém mais diferenças significativas que analogias entre as obras. *Os elementos* é uma síntese bem ordenada de matemática pura, com alto grau de abstração, uma estrutura lógica clara e uma evidente intenção pedagógica; o *Aryabhatiya* é uma curta obra descritiva, em 123 estrofes metrificadas, destinadas a fornecer regras de cálculo usadas na astronomia e na matemática de mensuração, sem nenhum espírito lógico ou de metodologia dedutiva. Cerca de um terço da obra é sobre *ganitapada* ou matemática. Essa parte se inicia com os nomes das potências de dez até a décima e em seguida dá instruções quanto a raízes quadradas e cúbicas de inteiros. Seguem-se as regras de mensuração, cerca de metade delas erradas. A área de um triângulo é dada corretamente, como a metade do produto da base pela altura, mas também o volume da pirâmide é tomada como a metade do produto da base pela altura[17]. A área do círculo é achada corretamente como produto da circunferência pela metade do raio, mas o volume da esfera é incorretamente dado como produto da área de um círculo máximo pela raiz quadrada dessa área. Também no cálculo de áreas de quadriláteros aparecem lado a lado regras corretas e incorretas. A área de um trapézio é expressa como metade da soma dos lados paralelos multiplicada pela perpendicular

[17]*The Aryabhatiya of Aryabhata*, traduzido para o inglês por W. E. Clarck (1930), p. 26

entre eles; mas depois vem a afirmação incompreensível de que a área de qualquer figura plana é obtida determinando dois lados e multiplicando-os. Uma afirmação no *Aryabhatiya* que os estudiosos hindus assinalam com orgulho é a seguinte[18].

Some-se 4 a 100, multiplique-se por 8, e some-se 62 000. O resultado é aproximadamente a circunferência de um círculo cujo diâmetro é 20 000.

Aqui vemos o equivalente de 3,1416 para π, mas deve-se lembrar que esse é essencialmente o valor usado por Ptolomeu. A probabilidade de Aryabhata aqui ser influenciado por predecessores gregos é reforçada pela adoção da miríade, 10 000, como número de unidades do raio.

Uma parte típica do *Aryabhatiya* é a que trata de progressões aritméticas, e contém regras arbitrárias para achar a soma dos termos numa progressão e determinar o número de termos de uma progressão, dados o primeiro termo, a razão e a soma dos termos. A primeira regra há muito era conhecida por autores anteriores. A segunda constitui uma explanação curiosamente complicada:

Multiplique-se a soma da progressão por oito vezes a razão, some-se o quadrado da diferença entre duas vezes o primeiro termo e a razão, extraia-se a raiz quadrada disso, subtraia-se duas vezes o primeiro termo, divida-se pela razão, some-se um, divida-se por dois. O resultado será o número de termos.

Aqui, como no resto do *Aryabhatiya*, não se dá motivação ou justificação para a regra. Provavelmente chegou-se a ela resolvendo uma equação quadrática, o que poderia ter sido aprendido da Mesopotâmia ou da Grécia. Após alguns problemas complicados sobre juros compostos (isto é, progressões geométricas), o autor se volta, em linguagem floreada, para o problema muito elementar de achar o quarto termo de uma proporção simples:

Na regra de três multiplique-se o fruto pelo desejo e divida-se pela medida. O resultado será o fruto do desejo.

Isto, é claro, é a regra familiar que diz que se $a/b = c/x$, então $x = bc/a$, onde a é a "medida", b o "fruto", c o "desejo", e x o "fruto do desejo". A obra de Aryabhata é na verdade uma miscelânia de coisas simples e complexas, corretas e incorretas. O estudioso árabe Al-Biruni, meio milênio mais tarde, caracterizou a matemática hindu como uma mistura de pedregulho e cristal valioso, uma descrição muito adequada para o *Aryabhatiya*.

14 A segunda metade do *Aryabhatiya* trata da medida do tempo e de trigonometria esférica; aqui observamos um elemento que iria deixar marca permanente na matemática de gerações posteriores — a numeração decimal posicional. Não se sabe exatamente como Aryabhata efetuava seus cálculos, mas sua frase "de lugar para lugar cada um vale dez vezes o precedente" é uma indicação de que tinha em mente a aplicação do princípio de posição. "Valor local" tinha sido uma parte essencial da numeração babilônica, e talvez os hindus percebessem sua aplicabilidade à notação decimal para inteiros em uso na Índia. O desenvolvimento de notações numéricas na Índia parece ter seguido a mesma linha que se encontra na Grécia. As inscrições mais antigas em Mohenjo Daro mostram a princípio simples traços verticais, dispostos em grupos, mas pela época de Asoka (terceiro século A. C.) estava em uso um sistema semelhante ao herodiânico. No novo sistema continuava vigorando o princípio de repetição, mas foram adotados novos símbolos de ordem superior para quatro, dez, vinte e cem. Essa escrita, dita karosthi, aos poucos cedeu lugar a uma outra notação, dos caracteres ditos brahmi, que se assemelhava à alfabética do sistema grego jônico; é de se perguntar se foi coincidência que a mudança na Índia se desse pouco depois do período em que na Grécia os numerais herodiânicos foram substituídos pelos jônicos.

[18] *Aryabhatiya*, p. 28. As traduções, aqui e abaixo, provêm da edição de Clark citada na nota de rodapé 17.

Para passar dos numerais cifrados brahmi à notação usual para inteiros são necessários dois passos. O primeiro é uma percepção de que, pelo uso do princípio posicional, os símbolos para as primeiras nove unidades podem servir também para os múltiplos correspondentes de dez, ou igualmente bem para os múltiplos correspondentes de qualquer potência de dez. Essa percepção tornaria supérfluos todos os símbolos brahmi além dos nove primeiros. Não se sabe quando ocorreu essa redução a nove símbolos, e é provável que a transição para a notação mais econômica se tenha processado gradualmente. Parece, pela evidência existente, que a mudança se deu na Índia, mas a fonte de inspiração para isso não é conhecida. Possivelmente os chamados numerais hindus foram resultado de desenvolvimento interno apenas; talvez se desenvolvessem primeiro ao longo dos limites ocidentais entre Índia e Pérsia, onde a lembrança da notação posicional babilônica pode ter levado à modificação do sistema brahmi. É possível que o novo sistema tenha surgido ao longo dos limites orientais entre Índia e China, onde os numerais em barras pseudo-posicionais podiam sugerir a redução a nove símbolos. Há ainda uma teoria que diz que essa redução pode ter sido feita primeiro em Alexandria, dentro do sistema alfabético grego, e daí se propagado para a Índia[19]. Durante o segundo período alexandrino o hábito grego antigo de escrever frações comuns com o numerador embaixo do denominador foi invertido, e foi nessa forma que os hindus o adotaram, sem a barra entre eles. Infelizmente, os hindus não aplicaram a nova numeração para inteiros ao domínio das frações decimais; assim perdeu-se a principal vantagem potencial da mudança de notação.

A primeira referência específica aos numerais hindus se encontra em 662 nos escritos de Severus Sebokt, um bispo sírio. Depois que Justiniano fechou as escolas filosóficas de Atenas alguns de seus membros se mudaram para a Síria, onde fundaram centros de cultura grega. Sebokt evidentemente se sentia irritado com o desdém para com a cultura não-grega expresso por alguns desses membros; por isso achou conveniente lembrar aos que falavam grego que "também há outros que sabem alguma coisa". Para ilustrar esse ponto ele chamou a atenção para os hindus e suas "sutis descobertas em astronomia", especialmente "seus valiosos métodos de cálculo, e sua computação que ultrapassa descrições. Quero só dizer que essa computação é feita por meio de nove sinais."[20] Que os numerais estavam em uso já havia algum tempo é indicado pelo fato de que a primeira ocorrência na Índia é sobre um objeto do ano 595, onde a data 346 está escrita em notação decimal posicional[21].

15 Deve-se notar que a referência a *nove* símbolos, em vez de *dez*, significa que os hindus ainda não tinham dado o segundo passo na transição para o moderno sistema de numeração — a introdução de uma notação para uma posição vazia, isto é, um símbolo zero. A história da matemática contém muitas anomalias, e a não menor dessas é que "a mais antiga ocorrência indubitável de um zero na Índia se acha numa inscrição de 876"[22] isto é, mais de dois séculos depois da primeira referência aos nove outros numerais. Não se sabe sequer se o número zero (diferente do símbolo para posição vazia) surgiu em conjunção com os outros nove numerais hindus. É bem possível que o zero seja originário do mundo grego, talvez de Alexandria, e que tivesse sido transmitido à Índia depois que o sistema decimal posicional já estava estabelecido lá[23].

A história do zero para ocupar um lugar na notação posicional fica mais complicada ainda quando se observa que o conceito apareceu independentemente, bem antes dos dias de Colombo, no hemisfério ocidental como no oriental. Os maias do Yucatan, em sua representação de intervalos de tempo entre datas do calendário, usavam numeração posicional, em geral com vinte como base primária e com cinco como base au-

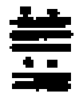
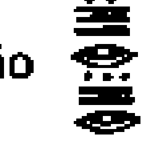
[19] Ver Harriet P. Lattin, "The Origin of Our Present System of Notation According to the Theories of Nicholas Bubnov", *Isis*, 19 (1933), 181-194

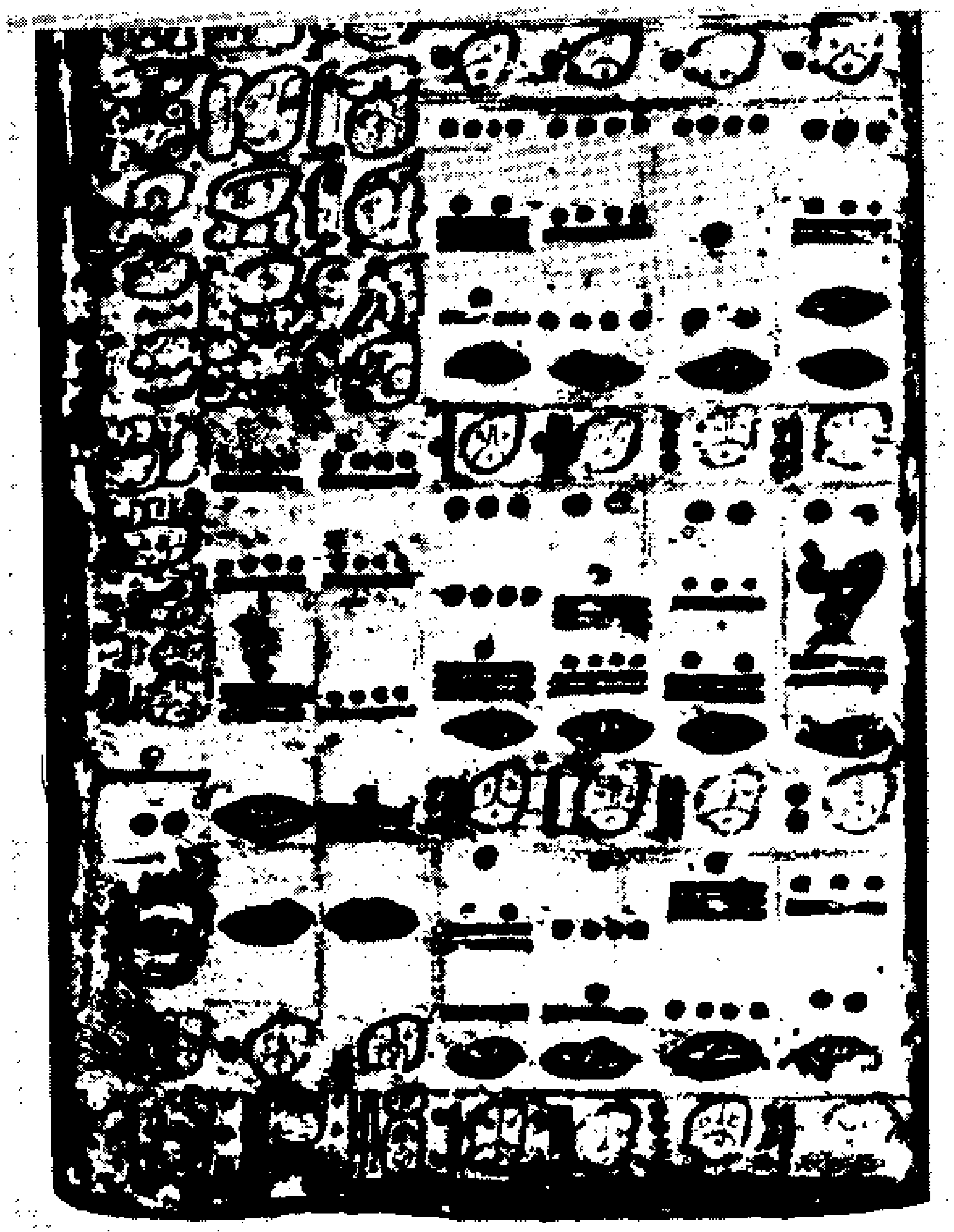
[20] Citado de D. E. Smith, *History of Mathematics*, I, 167

[21] Ver D. J. Struik, *A Concise History of Mathematics*, 3.ª ed. (New York: Dover, 1967), p. 71

[22] Smith, *History of Mathematics*, II, 69

[23] Ver, por exemplo, B. L. van der Waerden, *Science Awakening* (1961), pp. 56-58

xiliar (correspondendo ao uso babilônico de sessenta e dez respectivamente). Unidades eram representadas por pontos e cincos por barras horizontais, de modo que o número dezessete, por exemplo, apareceria como  [isto é, como 3(5) + 2]. Um arranjo posicional vertical era usado, com as unidades maiores de tempo acima; portanto a notação  denotava 352 [isto é, 17(20) + 12]. Como o sistema se destinava primariamente a contar dias num calendário de 360 dias num ano, a terceira posição usualmente não representava múltiplos de (20) (20), como num sistema vigesimal puro, mas (18) (20). No entanto, para além desse ponto a base vinte novamente prevalecia. Com essa notação posicional os maias indicavam posições vazias por meio de um símbolo, que aparecia em formas variadas, semelhante a um olho meio-aberto. Em seu sistema, portanto, a notação  indicava 17(20 · 18 · 20) + 0(18 · 20) + 13(20) + 0.



Do Códex de Dresde, dos maias, exibindo números. A segunda coluna da esquerda, de cima para baixo, contém os números 9, 9, 16, 0, 0, que indicam 9 × 144 000 + 9 × 7 200 + 16 × 360 + 0 + 0 = = 1 366 560. Na terceira coluna estão os numerais 9, 9, 9, 16, 0, representando 1 364 360. O original é nas cores preta e vermelha. (Tirado de Morley, *An Introduction to the Study of the Maya Hieroglyphys*, p. 266)

Com a introdução, na notação hindu, do décimo numeral, um ovo de ganso redondo para o zero, o moderno sistema de numeração para os inteiros estava completo. Embora as formas hindus medievais dos dez numerais sejam bastante diferentes das em uso hoje, os princípios do sistema estavam firmados. A nova numeração, que chamamos em geral o sistema hindu, é apenas uma nova combinação dos três princípios básicos, todos de origem antiga: (1) base decimal; (2) uma notação posicional; e (3) uma forma cifrada para cada um dos dez numerais. Nenhum desses se deveu originalmente aos hindus, mas presumivelmente foi devido a eles que os três foram ligados pela primeira vez para formar o moderno sistema de numeração.

Talvez convenha dizer uma palavra sobre a forma do símbolo hindu para o zero — que também é a do nosso. Supôs-se anteriormente que a forma redonda vinha da letra grega ômicron letra inicial da palavra *ouden* ou vazio, mas investigações recentes parecem desmentir tal origem. Embora o símbolo para uma posição vazia, em algumas versões existentes das tabelas de cordas de Ptolomeu, se assemelhe de fato a um ômicron, os antigos símbolos para o zero nas frações sexagesimais gregas são formas redondas com ornatos variados e diferindo bastante de um simples ovo de ganso. Além disso, quando no século quinze, no Império Bizantino, foi elaborado um sistema decimal posicional a partir dos antigos numerais alfabéticos abandonando as últimas dezoito letras e ajuntando um símbolo para o zero às primeiras nove letras, o sinal zero tomou formas muito diferentes do ômicron[24]. Às vezes ele parecia uma forma invertida de nossa letra h minúscula, às vezes aparecia como um ponto.

16 O desenvolvimento de nosso sistema de notação para os inteiros foi uma das duas contribuições da Índia de maior influência na história da matemática. A outra foi a introdução de um equivalente da função seno na trigonometria para substituir a tabela grega de cordas. As mais antigas tabelas da função seno que se preservaram são as do *Siddhāntas* e do *Aryabhatiya*. Aqui são dados os senos dos ângulos até 90°, para vinte e quatro intervalos iguais de 3 3/4° cada um. Para exprimir o comprimento de arco e o comprimento do seno em termos da mesma unidade, o raio era tomado como 3 438 e a circunferência como 360 × 60 = 21 600. Isso significa um valor para π concordando com o de Ptolomeu até quatro algarismos significativos. Em outra situação Aryabhata usou o valor $\sqrt{10}$ para π, valor que apareceu tão freqüentemente na Índia que às vezes é chamado o valor hindu.

Para o seno de 3 3/4° o *Siddhāntas* e o *Aryabhatiya* tomaram o número de unidades no arco — isto é, 60 × 3 3/4 ou 225. Em linguagem moderna, o seno de um ângulo pequeno é quase igual à medida em radianos do ângulo (que é virtualmente o que os hindus estavam usando). Para os demais valores na tabela os hindus usaram uma fórmula de recorrência que pode ser expressa como segue. Se o n-ésimo seno na seqüência de $n = 1$ a $n = 24$ é denotado por s_n, e se a soma dos n primeiros senos é S_n, então $s_{n+1} = s_n + s_1 - S_n/s_1$. Dessa regra se deduz facilmente que sen 7 1/2° = 449, sen 11 1/4° = 671, sen 15° = 890, e assim por diante até sen 90° = 3 438 — os valores dados nas tabelas nos *Siddhāntas* e no *Aryabhatiya*. Além disso, a tabela contém também os valores do que denotamos por seno versor ou $1 - \cos\theta$ em trigonometria moderna ou $3\,438(1 - \cos\theta)$ em trigonometria hindu — desde vers 3 3/4° = 7 a vers 90° = 3 438. Se dividirmos os valores da tabela por 3 438 verificamos que estão bem próximos dos valores correspondentes em tabelas atuais[25].

17 A trigonometria hindu era evidentemente um instrumento útil e preciso para a astronomia. Como os hindus obtiveram resultados como a fórmula de recorrência acima não se sabe bem, mas sugeriu-se[26] que uma investigação intuitiva de equações de diferenças e interpolação pode ter levado a elas. A matemática indiana é freqüentemente

[24]Ver O. Neugebauer, *The Exact Sciences in Antiquity*, 2.ª ed. (Providence, R. I.: Brown University Press, 1957), p. 14

[25]A tabela da *Surya Siddhānta* está reproduzida em Smith, *History of Mathematics*, II

[26]E. S. Kennedy no artigo "Trigonometry", *Yearbook on History of Mathematics* do National Council of Teachers of Mathematics

descrita como "intuitiva", em contraste com o severo racionalismo da geometria grega. Embora na trigonometria hindu haja traços de influência grega, os indianos não parecem ter tido ocasião de tomar emprestada a geometria grega, preocupados como estavam com simples regras de mensuração. Dos problemas geométricos clássicos, ou do estudo das curvas além do círculo, há poucos sinais na Índia, e mesmo as secções cônicas não parecem ter sido consideradas pelos hindus, como também não pelos chineses. Os matemáticos hindus se sentiam fascinados, de outro lado, pelo trabalho com números, que envolvesse as operações aritméticas ordinárias ou a solução de equações determinadas ou indeterminadas. A adição e a multiplicação eram efetuadas na Índia de modo muito semelhante ao que usamos hoje, só que parecem a princípio ter preferido escrever os números com as unidades menores à esquerda, portanto trabalhar da esquerda para a direita, usando pequenas lousas com tinta removível branca ou uma tábua coberta de areia ou farinha. Entre os esquemas usados para a multiplicação havia um que é conhecido sob vários nomes: multiplicação em reticulado, multiplicação em *gelosia*, ou em célula ou em grade ou quadrilateral. A idéia atrás disso é fácil de perceber em dois exemplos. No primeiro (Fig. 12.3) o número 456 é multiplicado por 34. O multiplicando foi escrito

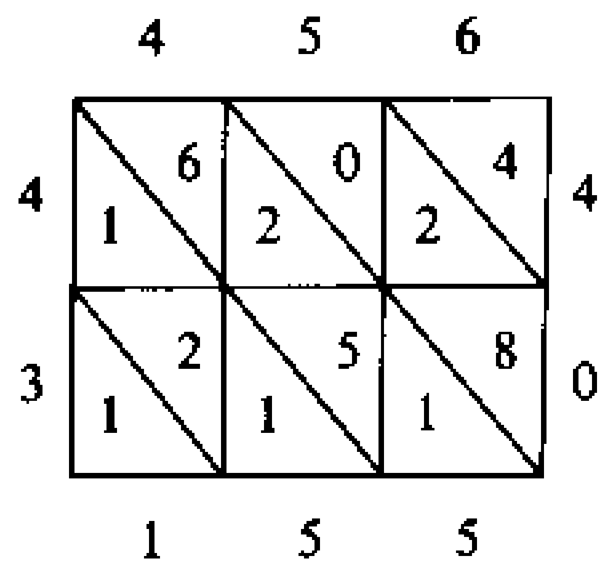


Figura 12.3

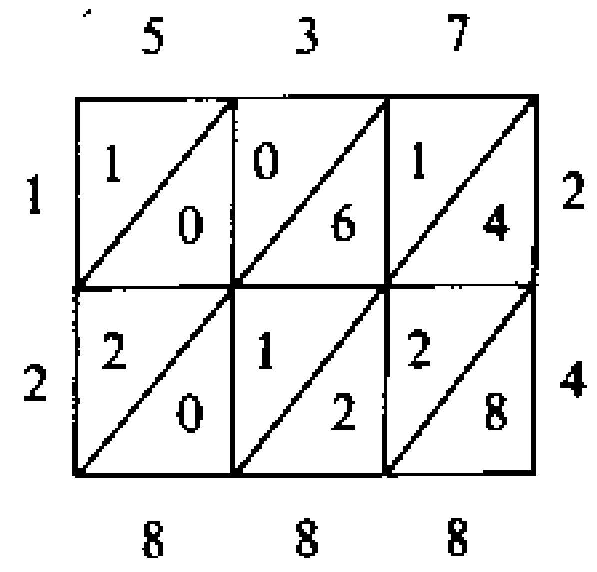
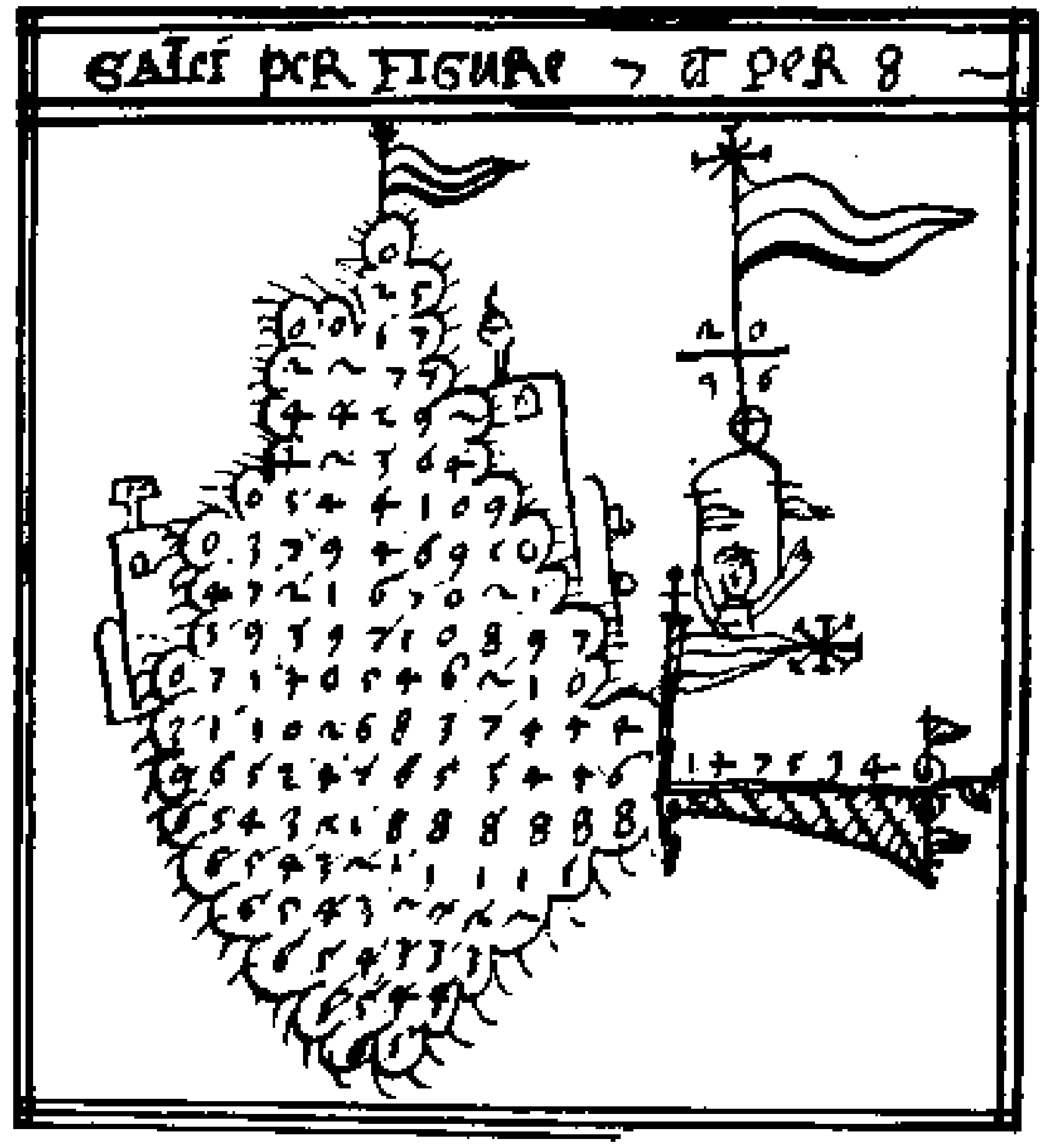


Figura 12.4

acima do reticulado e o multiplicador aparece à esquerda, com os produtos parciais ocupando as células quadradas. Os dígitos nas fileiras diagonais são somados e o produto 15 504 aparece em baixo e à direita. Para indicar que outros arranjos são possíveis, damos um segundo exemplo na Fig. 12.4, em que o multiplicando 537 é colocado no alto e o multiplicador 24 à direita, o produto 12 888 aparecendo à esquerda e em baixo. Ainda outras variantes são facilmente construídas. O princípio fundamental da multiplicação em *gelosia* evidentemente é o mesmo da nossa, o arranjo em células sendo apenas um estratagema conveniente para aliviar a concentração mental necessária ao "transportar" de lugar para lugar as dezenas que aparecem nos produtos parciais. O único "transporte" necessário na multiplicação em reticulado aparece nas adições finais ao longo das diagonais.

18 Não se sabe quando ou onde a multiplicação em gelosia apareceu, mas a Índia parece ser a fonte mais provável; foi usada lá pelo menos desde o século doze, e onde parece ter sido levada à China e à Arábia. Dos árabes passou para a Itália nos séculos quatorze e quinze e lá o nome gelosia lhe foi associado por causa da semelhança com os gradeados colocados em frente às janelas em Veneza e outros lugares. (A palavra atual *jalousie* parece provir da gelosia italiana, e significa veneziana na França, Alemanha, Holanda e Rússia.) Os árabes (e através deles os europeus mais tarde) parecem ter adotado a maior parte de seus métodos aritméticos da Índia, e por isso é provável que o esquema de divisão conhecido como o "método de riscar" ou "método do galeão" (por sua semelhança com um navio) também venha da Índia. Para ilustrar o método, suponhamos que se queira dividir 44 977 por 382. Na Fig. 12.5 damos o método moderno, na Fig. 12.6 o do galeão[27]. Esse último se assemelha muito ao primeiro, apenas o dividendo aparece no meio, porque as subtrações são executadas cancelando dígitos e colocando as diferenças *acima* em vez de *abaixo* dos minuendos. Por isso o resto, 283,

[27]Para mais descrições dos inúmeros esquemas computacionais que têm sido usados, ver F. A. Yeldham, *The Story of Reckoning in the Middle Ages* (1926)



Divisão em galeão, século dezesseis. De um manuscrito não publicado de um monge veneziano. O título da obra é *Opus Arithmetica D. Honorati veneti monachj coenobiy S. Lauretig*. Da biblioteca Plimpton

```
      117
382)44977
    382
    677
    382
    2957
    2674
     283
```
Figura 12.5

```
            2
            2 3
            3 9 8
      | 1 6 7 5 3 |
  382 | 4 4 9 7 7 | 117
      | 3 8 2 2 4 |
          3 8 7
          2 6
```
Figura 12.6

aparece acima e à direita, em vez de embaixo. O processo na Fig. 12.6 é fácil de acompanhar se observarmos que os dígitos num dado subtraendo, como 2 674, ou numa dada diferença, como 2 957, não estão todos necessariamente na mesma linha e que subtraendos são escritos abaixo do meio e diferenças acima. A posição numa coluna é significativa, mas não a posição numa linha. A determinação de raízes de números provavelmente seguia um esquema "em galeão" semelhante, associado em anos posteriores com o teorema binomial em forma de "triângulo de Pascal"; mas os autores hindus não forneceram explicações de seus cálculos ou provas de suas afirmações. É possível que influências babilônicas e chinesas desempenhassem um papel no problema da evolução ou extração de raiz. Diz-se freqüentemente que a "prova por noves fora" é invenção hindu, mas parece que os gregos conheciam já antes essa propriedade, sem usá-la muito, e o método se tornou de uso comum somente com os árabes do século onze.

19 Os últimos parágrafos acima podem ter dado a impressão injustificada de que havia uniformidade na matemática hindu, pois freqüentemente localizamos desenvolvimentos simplesmente como sendo de "origem indiana", sem especificar o período. Porém a dificuldade é que há um alto grau de incerteza na cronologia hindu. O material no importante manuscrito Bakshali, contendo uma aritmética anônima, data, ao que alguns supõem, do terceiro ou quarto século, mas outros crêem que é do oitavo ou nono século ou ainda de mais tarde; e há uma sugestão de que pode não ser sequer de origem hindu[28]. Co-

[28]Ver Florian Cajori, *A History of Mathematics* (1919), pp. 84-85; Smith, *History of Mathematics*, I, 164; Hofman, *Geschichte der Mathematik*, I, 59

locamos a obra de Aryabhata em 500 aproximadamente, mas a data é duvidosa porque houve dois matemáticos chamados Aryabhata e não podemos com certeza atribuir resultados ao nosso Aryabhata, o mais antigo. A matemática hindu apresenta mais problemas históricos do que a grega, pois os matemáticos indianos raramente se referiam a seus predecessores e exibiam surpreendente independência em seu trabalho matemático. Assim é que Brahmagupta (viveu em 628), que viveu na Índia Central um pouco mais de cem anos depois de Aryabhata, tem pouco em comum com seu predecessor, que tinha vivido no leste da Índia. Brahmagupta menciona dois valores de π — o "valor prático" 3 e o "valor bom" $\sqrt{10}$ — mas não o valor mais preciso de Aryabhata; na trigonometria de sua obra mais conhecida, o *Brahmasphuta Siddhānta*, ele usou um raio de 3 270 em vez de 3 438 como Aryabhata. Num aspecto ele se assemelha a seu predecessor — na justaposição de resultados bons e ruins. Achou a área "bruta" de um triângulo isósceles multiplicando a metade da base por um dos lados iguais; para o triângulo escaleno com base quatorze e lados treze e quinze ele achou a área "bruta" multiplicando a metade da base pela média aritmética dos outros lados. Ao achar a área "exata" ele utilizou a fórmula arquimediana-heroniana. Para o raio do círculo circunscrito a um triângulo ele deu o equivalente do resultado trigonométrico correto $2R = a/\text{sen } A = b/\text{sen } B = c/\text{sen } C$, mas isto, é claro, é apenas uma reformulação de um resultado que Ptolomeu já conhecia na linguagem de cordas. Talvez o resultado mais belo na obra de Brahmagupta seja a generalização da "fórmula de Heron" para achar a área do quadrilátero. Essa fórmula — $K = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$, onde a, b, c, d são os lados e s é o semiperímetro — ainda leva seu nome; mas a glória de seu sucesso é obscurecida pelo fato de ele não observar que a fórmula só é correta no caso de um quadrilátero *cíclico*[29]. (A fórmula correta para um quadrilátero arbitrário é $\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)-abcd\cos^2\alpha}$, onde α é metade da soma de dois ângulos opostos.) Como regra para a área "bruta" de um quadrilátero Brahmagupta deu a fórmula pré-helênica, o produto das médias aritméticas dos lados opostos. Para o quadrilátero de lados $a = 25$, $b = 25$, $c = 25$, $d = 39$, por exemplo, ele achou uma área "bruta" de 800.

20 As contribuições de Brahmagupta à álgebra são de ordem mais alta que suas regras de mensuração, pois aqui achamos soluções gerais de equações quadráticas, inclusive duas raízes mesmo quando uma delas é negativa. A aritmética sistematizada dos números negativos e do zero, na verdade, encontra-se pela primeira vez em sua obra. Equivalentes das regras sobre grandezas negativas eram já conhecidas através dos teoremas geométricos dos gregos sobre subtração, como por exemplo $(a-b)(c-d) = ac + bd - ad - bc$, mas os hindus as converteram em regras numéricas sobre números negativos e positivos. Ainda mais, embora os gregos tivessem um conceito do nada, eles nunca o interpretaram como um número, como fizeram os hindus. No entanto também aqui Brahmagupta estragou um pouco as coisas afirmando que $0 \div 0 = 0$, e na delicada questão de $a \div 0$ para $a \neq 0$ ele não se comprometeu:

> Positivo dividido por positivo, ou negativo por negativo, é afirmativo. Cifra dividida por cifra é nada. Positivo dividido por negativo é negativo. Negativo dividido por afirmativo é negativo. Positivo ou negativo dividido por cifra é uma fração com esse denominador[30].

Deve-se mencionar aqui que os hindus, diferentemente dos gregos, consideravam as raízes irracionais dos números como números. Isso era de enorme utilidade na álgebra, e os matemáticos indianos têm sido muito elogiados por terem dado esse passo; mas é preciso lembrar que a contribuição hindu nesse caso foi resultado de inocência lógica mais do que de visão matemática. Vemos a ausência de distinção cuidadosa, da parte dos matemáticos hindus, entre resultados exatos e inexatos, e era natural que não levassem

[29]Uma prova da fórmula pode ser encontrada em R. A. Johnson, *Modern Geometry* (New York: Houghton Mifflin, 1929), pp. 81-82

[30]Ver H. T. Colebrooke, *Algebra, with Arithmetic and Mensuration, from the Sanscrit of Brahmagupta and Bhaskara* (1817)

a sério a diferença entre grandezas comensuráveis e incomensuráveis. Para eles não havia dificuldade em aceitar números irracionais, e gerações posteriores seguiram seu exemplo sem análise crítica até que os matemáticos do século dezenove estabeleceram o sistema dos números reais sobre base sólida.

A matemática indiana era, como dissemos, uma mistura de bom e ruim. Mas parte do bom era magnificamente bom, e aqui Brahmagupta merece grande louvor. A álgebra hindu é especialmente notável em seu desenvolvimento da análise indeterminada, à qual Brahmagupta fez várias contribuições. Por exemplo em sua obra achamos uma regra para a formação de tríadas pitagóricas expressas na forma m, $1/2\,(m^2/n - n)$, $1/2\,(m^2/n + n)$; mas isso é apenas uma forma modificada da antiga regra babilônica, que ele pode ter conhecido. A fórmula de Brahmagupta para a área do quadrilátero, mencionada acima, foi usada por ele em conjunção com as fórmulas

$$\sqrt{(ab+cd)(ac+bd)/(ad+bc)} \quad \text{e} \quad \sqrt{(ac+bd)(ad+bc)/(ab+cd)}$$

para as diagonais[31], para achar quadrados cujos lados, diagonais, e áreas sejam todos racionais. Entre esses estava o quadrilátero de lados $a = 52$, $b = 25$, $c = 39$, $d = 60$, e diagonais 63 e 56. Brahmagupta deu a área "bruta" como sendo 1 933 3/4, apesar de sua fórmula fornecer a área exata, 1 764, nesse caso.

21 Como muitos de seus conterrâneos, Brahmagupta evidentemente amava a matemática por ela mesma, pois nenhum engenheiro de espírito prático proporia questões como as que Brahmagupta fazia sobre quadriláteros. Admiramos ainda mais sua atitude quanto à matemática quando percebemos que aparentemente ele foi o primeiro a dar uma solução *geral* da equação linear diofantina $ax + by = c$, onde a, b e c são inteiros. Para que essa equação tenha soluções inteiras, o máximo divisor comum de a e b deve dividir c; e Brahmagupta sabia que se a e b são primos entre si, todas as soluções da equação são dadas por $x = p + mb$, $y = q - ma$, onde m é um inteiro arbitrário. Ele sugeriu também a equação diofantina quadrática $x^2 = 1 + py^2$, que erradamente tira seu nome de John Pell (1611-1685) mas que aparece pela primeira vez no problema do gado de Arquimedes. A equação de Pell foi resolvida para alguns casos pelo conterrâneo de Brahmagupta, Bhaskara (1114 a cerca de 1185).

Brahmagupta merece muito louvor por ter dado *todas* as soluções inteiras da equação linear diofantina, enquanto que o próprio Diofante tinha se contentado em dar uma solução particular de uma equação indeterminada. Como Brahmagupta usou alguns dos exemplos de Diofante, vemos de novo a probabilidade de ter havido influência grega na Índia — ou a possibilidade de terem usado uma fonte comum, talvez babilônica. É interessante notar também que a álgebra de Brahmagupta, como a de Diofante, era abreviada. A adição era indicada por justaposição, a subtração colocando um ponto sobre o subtraendo, e a divisão colocando o divisor sob o dividendo, como em nossa notação para frações mas sem a barra. As operações de multiplicação e evolução (extração de raízes) bem como quantidades desconhecidas, eram representadas por abreviações de palavras adequadas.

22 A Índia produziu muitos matemáticos na segunda metade da Idade Média, mas descreveremos apenas a obra de um deles Bhaskara (1114 a cerca de 1185), o mais importante matemático do século doze. Foi ele quem preencheu algumas lacunas na obra de Brahmagupta, por exemplo dando uma solução geral da equação de Pell e considerando o problema da divisão por zero. Aristóteles observara que não existe uma razão pela qual um número como quatro excede o número zero[32]; mas a aritmética do zero não entrava na matemática grega, e Brahmagupta não se comprometera quanto à divisão de um número diferente de zero por zero. É pois na *Vija-Ganita* de Bhaskara que achamos pela primeira vez a afirmação de que um tal quociente é infinito.

[31]Para indicações de prova dessas fórmulas ver Howard Eves, *An Introduction to the History of Mathematics* (1964), pp. 202-203

[32]Ver C. B. Boyer, "An Early Reference to Division by Zero", *American Mathematical Monthly*, **50** (1943), 487-491

Afirmação: Dividendo 3. Divisor 0. Quociente a fração 3/0. Essa fração cujo denominador é cifra, chama-se uma quantidade infinita. Nessa quantidade, que consiste no que tem cifra como divisor, não há alteração mesmo que muito seja acrescentado ou retirado; como nenhuma alteração se dá no Deus infinito e imutável.

Essa afirmação parece prometedora, mas a falta de compreensão clara da situação é sugerida pela asserção seguinte de Bhaskara de que $a/0 \cdot 0 = a$.

Bhaskara foi o último matemático medieval importante da Índia, e sua obra representa a culminação de contribuições hindus anteriores. Em seu tratado mais conhecido, o *Lilavati*, ele compilou problemas de Brahmagupta e outros, acrescentando observações próprias novas. O próprio título dessa obra pode ser tomado como indicação da qualidade desigual do pensamento hindu, pois o nome no título é o da filha de Bhaskara que, segundo a lenda, perdeu a oportunidade de se casar por causa da confiança de seu pai em suas predições astrológicas. Bhaskara tinha calculado que sua filha só poderia se casar de modo propício numa hora determinada de um dia dado. No dia que deveria ser o de seu casamento a jovem ansiosa estava debruçada sobre um relógio de água quando se aproximava a hora do casamento, quando uma pérola em seu cabelo caiu, sem ser observada, e deteve o fluxo de água. Antes que o acidente fosse notado, a hora propícia passava. Para consolar a infeliz moça, o pai deu seu nome ao livro que estamos descrevendo.

23 O *Lilavati* como o *Vija-Ganita*, contém numerosos problemas sobre os tópicos favoritos dos hindus: equações lineares e quadráticas, tanto determinadas quanto indeterminadas, simples mensuração, progressões aritméticas e geométricas, radicais, tríadas pitagóricas e outros. O problema do "bambu quebrado", popular na China (e considerado também por Brahmagupta), aparece na forma seguinte: se um bambu de 32 cúbitos de altura é quebrado pelo vento de modo que a ponta encontra o chão a 16 cúbitos da base, a que altura a partir do chão ele foi quebrado? Também usando o teorema de Pitágoras temos o problema seguinte: um pavão está sobre o topo de uma coluna em cuja base há um buraco de cobra. Vendo a cobra a uma distância da coluna igual a três vezes a altura da coluna, o pavão avançou para a cobra em linha reta alcançando-a antes que chegasse a sua cova. Se o pavão e a cobra percorreram distâncias iguais a quantos cúbitos da cova eles se encontraram?

Esses dois problemas ilustram bem a natureza heterogênea do *Lilavati*, pois apesar de sua semelhança aparente e do fato de se pedir uma única resposta, um dos problemas é determinado e o outro não. Ao tratar do círculo e da esfera o *Lilavati* não distingue também afirmações exatas das aproximadas. A área do círculo é corretamente dada como igual a um quarto da circunferência vezes o diâmetro e o volume da esfera como um sexto do produto da área da superfície pelo diâmetro, mas para a razão da circunferência para o diâmetro de um círculo Bhaskara sugere ou 3 927 para 1 250 ou o valor "bruto" 22/7. O primeiro valor equivale à razão mencionada, mas não usada, por Aryabhata. Não há indicação em Bhaskara ou em outros escritores hindus de que soubessem que todas as razões propostas eram apenas aproximações. No entanto, Bhaskara condena severamente seus predecessores por usarem as fórmulas de Brahmagupta para a área e as diagonais do quadrilátero geral, porque percebeu que um quadrilátero não é univocamente determinado por seus lados. Evidentemente ele não percebeu que as fórmulas são realmente corretas para todos os quadriláteros cíclicos.

Muitos dos problemas de Bhaskara no *Lilavati* e no *Vija-Ganita* evidentemente provinham de fontes hindus anteriores, por isso não é surpreendente que o autor tenha seus melhores momentos ao tratar a análise indeterminada. Com relação à equação de Pell $x^2 = 1 + py^2$, proposta antes por Brahmagupta, Bhaskara deu soluções particulares para os cinco casos $p = 8$, 11, 32, 61 e 67. Para $x^2 = 1 + 61y^2$, por exemplo, ele deu a solução $x = 1\,776\,319\,049$ e $y = 22\,615\,390$. Esse é um notável feito de cálculo, e sua verificação só por si dará trabalho ao leitor se ele não dispuser de um computador moderno. Os livros de Bhaskara estão cheios de outros exemplos de problemas diofantinos[33].

24 Bhaskara morreu pelo fim do século doze, e por vários séculos houve poucos matemáticos na Índia de importância comparável. É interessante notar, no entanto, que Srinivasa Ramanujan (1887-1920), o gênio hindu do século vinte, tinha a mesma incrível habilidade manipulativa em aritmética e álgebra que se encontra em Bhaskara. O matemático inglês G. H. Hardy uma vez visitou Ramanujan num hospital em Putney e mencionou a seu amigo que viera num taxi com o número desinteressante 1 729, e Ramanujan imediatamente observa que esse número ao contrário é interessante, pois é o menor inteiro que pode ser representado de dois modos diferentes como soma de dois cubos $1^3 + 12^3 = 1\,729 = 9^3 + 10^3$. Na obra de Ramanujan também observamos o caráter desorganizado, a força do raciocínio intuitivo, e o pouco caso pela geometria que eram tão evidentes em seus predecessores. Embora em Ramanujan tais características se tivessem desenvolvido em grande parte por ele ser autodidata, não podemos deixar de ver a diferença notável entre o desenvolvimento da matemática na Índia e na Grécia. Mesmo quando os hindus emprestavam dos gregos, eles adaptavam o material ao seu estilo peculiar. Embora em atitude e interesses tivessem mais em comum com os chineses, não compartilhavam da fascinação que esses tinham por boas aproximações, como as que levaram ao método de Horner. E embora compartilhassem com os mesopotâmicos sua visão preponderantemente algébrica, tendiam a evitar a numeração sexagesimal. Em resumo, os ecléticos matemáticos hindus adotaram e desenvolveram só os aspectos que lhes agradaram. De um certo ponto de vista foi uma infelicidade que seu primeiro amor fosse a teoria dos números em geral, e a análise indeterminada em particular, pois não foi desses temas que veio o posterior desenvolvimento da matemática. A geometria analítica e o cálculo tiveram raízes gregas, não hindus, e a álgebra européia não veio da Índia mas dos países islâmicos. No entanto, na matemática moderna há pelo menos duas coisas a lembrar que a matemática deve seu desenvolvimento à Índia como a muitos outros países. A trigonometria da função seno presumivelmente veio da Índia; nosso sistema de numeração para os inteiros é apropriadamente chamado indo-arábico, para indicar sua origem provável na Índia e sua transmissão através dos árabes.

BIBLIOGRAFIA

Boyer, C. B., "Fundamental Steps in the Development of Numeration," *Isis*, 35 (1944), 153-168
Cajori, Florian, *A History of Mathematics*, 2.ª ed. (New York: Macmillan, 1919)
Clark, W. E., ed., *The Aryabhatiya of Aryabhata* (Chicago: Open Court, 1930)
Colebrooke, H. T., *Algebra, with Arithmetic and Mensuration, from the Sanscrit of Brahmagupta and Bhaskara* (Londres, 1817)
Datta, B., e A. N. Singh, *History of Hindu Mathematics* (Lahore, 1935-1938, 2 volumes; Bombaim: Ásia Publishing House, 1962)
Eves, Howard, *An Introduction to the History of Mathematics*, 2.ª ed. (New York: Holt, 1964)
Goldschmidt, Victor, *Die Entstehung unserer Ziffern* (Heidelberg: C. Winter, 1932)
Hill, G. F., *The Development of Arabic Numerals in Europe* (Oxford, 1915)
Ho Peng-Yoke, articles on Liu Hui, Chu Shih-chieh, Ch'in Chiu-shao, Li Chih, e Yang Hui, em *Dictionary of Scientific Biography* (New York: Scribner's)
Juschkewitsch, A. P., *Geschichte der Mathematik im Mittelalter* (Leipzig: Teubner, 1964)
Kaye, G. R., "Indian Mathematics," *Isis*, 2 (1914), 326-356
Lattin, Harriet P., "The Origin of Our Present System of Notation According to the Theories of Nicholas Bubnov," *Isis*, 19 (1933), 181-194
Loeffler, Eugen, *Ziffern und Ziffernsysteme* (Leipzig e Berlin: Teubner, 1912)
Menninger, Karl, *Zahlwort und Ziffer* (2.ª ed., Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht, 1957-1958, 2 vols.)
Mikami, Yoshio, *The Development of Mathematics in China and Japan* (1913; reimpresso, New York: Chelsea, n.d.)

[33]Uma exposição excepcionalmente completa da obra de Bhaskara se encontra em J. F. Scott, *A History of Mathematics* (1958). Ver também Colebrooke, obra citada

Morley, S. G., *An Introduction to the Study of Maya Hieroglyphics* (Washington: Carnegie Institution, 1915)
Needham, Joseph, *Science and Civilization in China* (Cambridge: Cambridge University Press, 1959), Vol. III
Rajagopal, C. T., e T. V. Vedamurthi Aiyar, "On the Hindu Proof of Gregory's Series," *Scripta Mathematica*, XVII (1951) 65-74. Ver também XV (1949) 201-209 e XVIII (1952) 25-30
Sarton, George, *An Introduction to the History of Science* (Baltimore: Carnegie Institution of Washington, 1927-1948, 3 vols. in 5)
Scott, J. F., *A History of Mathematics* (Londres: Taylor & Francis, 1958)
Smith, D. E., *History of Mathematics* (Boston: Ginn, 1923-1925, 2 vols., reimpressão em brochura, New York: Dover, 1958)
Smith, D. E. e L. C. Karpinski: *The Hindu-Arabic Numerals* (Boston: Ginn, 1911)
Struik, D. J., "On Ancient Chinese Mathematics," *The Mathematics Teacher*, 56 (1963), 424-432
Winter, H. J. J., *Eastern Science* (Londres: John Murray, 1952)
Yeldham, F. A., *The Story of Reckoning in the Middle Ages* (Londres: G. G. Harrap, 1926)

EXERCÍCIOS

1. Compare as matemáticas hindu e chinesa quanto a tópicos favoritos e nível de realização.
2. Qual delas teve maior influência no pensamento moderno, a matemática chinesa ou a hindu? Explique.
3. Que evidência há de influência grega na matemática hindu? Há evidência de influência hindu na Grécia?
4. É provável que matemáticos chineses e hindus tenham feito um intercâmbio de conhecimentos? Explique.
5. Como se explica a indiferença chinesa e hindu quanto às secções cônicas?
6. Descreva alguns pontos em que a álgebra hindu diferia marcadamente da grega.
7. Resolva o sistema

$$\begin{aligned} 4x + y + z &= 40, \\ 2x + 3y + z &= 30, \\ x + y + 2z &= 20, \end{aligned}$$

pelo método chinês de matrizes.

8. Escreva o número 7 834 679 em numerais chineses em barra e na notação posicional maia.
9. Usando o método de Ch'in Chiu-shao, ache a raiz quadrada de 29 584.
10. Escreva na notação de Chu Shih-chieh os coeficientes da expansão da nona potência de um binômio.
11. Justifique que a regra de Aryabhata para achar o número de termos numa progressão aritmética, dados o primeiro termo, a razão e a soma dos termos.
12. Ache sen 15° pela fórmula de recorrência no *Siddhānta* e compare isso com o valor encontrado nas tabelas atuais.
13. Use um esquema em gelosia para achar o produto de 345 e 256.
14. Divida 56 789 por 273 usando o método do "galeão".
15. Verifique a multiplicação no Exerc. 13 tirando noves fora no multiplicando, multiplicador e produto.
16. Da fórmula de Brahmagupta para a área deduza a de Heron como caso especial.
17. Mostre que $21x + 14y = 3$ não tem solução em inteiros.
18. Das fórmulas de Brahmagupta para as diagonais de um quadrilátero (cíclico) deduza o teorema de Ptolomeu.
19. Resolva o problema do bambu quebrado de Bhaskara.
20. Resolva o problema do pavão e a cobra de Bhaskara.

*21. Verifique que o quadrilátero de Brahmagupta de lados $a = 52$, $b = 25$, $c = 39$, $d = 60$ e diagonais $e = 56$ e $f = 63$ é cíclico.

*22. O quadrilátero de Brahmagupta de lados $a = 25$, $b = 25$, $c = 25$, $d = 39$ pode ser cíclico? Explique.

*23. Mostre que a fórmula de Liu Hui vale para o volume do tetraedro $(0, 0, 0)$, $(0, 0, a)$, $(b, 0, 0)$, $(c, d, 0)$. Vale para todos os tetraedros com um par de arestas opostas ortogonais? Explique.

Capítulo **13**

A hegemonia árabe

> Ah, mas meus cálculos, dizem as pessoas, trouxeram o Ano à Medida humana? Então, foi por cortar do Calendário o Amanhã que ainda não nasceu e o morto Ontem.
>
> *Omar Khayyam* (Rubayat, *segundo Fitz Gerald*)

1 Pela época em que Brahmagupta escrevia, o Império Sabeano da Arábia Felix tinha caído e a península passava por uma crise séria. Era habitada principalmente por nômades do deserto, chamados beduínos, que não sabiam ler nem escrever; entre eles estava o profeta Maomé, nascido em Meca em cerca de 570. Durante suas viagens Maomé entrou em contato com judeus e cristãos, e o amálgama dos sentimentos religiosos que surgiram em sua mente levou-o a considerar-se como o apóstolo de Deus enviado para conduzir seu povo. Por cerca de dez anos ele pregou em Meca, mas em 622, perante uma conspiração para matá-lo aceitou um convite para ir a Medina. Essa "fuga", conhecida como Hégira, marcou o início da era maometana — era que exerceria forte influência sobre o desenvolvimento da matemática. Maomé tornou-se um líder militar além de religioso. Dez anos depois ele estabeleceu um estado maometano, com centro em Meca no qual os judeus e cristãos, sendo também monoteístas, recebiam proteção e liberdade de culto. Em 632, enquanto planejava atacar o Império Bizantino, Maomé morreu em Medina. Sua morte súbita não impediu a expansão do domínio islâmico, pois seus seguidores invadiram territórios vizinhos com espantosa rapidez. Dentro de poucos anos Damasco e Jerusalém e grande parte do vale mesopotâmico caíram perante os conquistadores; em 641 Alexandria, que por muitos anos fora o centro matemático do mundo, foi capturada. Há uma lenda que diz que quando o chefe das tropas vitoriosas perguntou o que devia ser feito com os livros na biblioteca, foi-lhe dito que os queimasse; pois se estivessem de acordo com o Corão, eram supérfluos, se estivessem em desacordo eram pior que supérfluos. No entanto, as estórias de que os banhos por muito tempo foram aquecidos com fogueiras de livros queimados são sem dúvida exagerados. Após as depredações de fanáticos militares e religiosos anteriores, e longos períodos de abandono, provavelmente havia relativamente poucos livros na biblioteca que antes fora a maior do mundo.

Por mais de um século os conquistadores árabes lutaram entre si e com seus inimigos, até que por volta de 750 o espírito guerreiro se abrandou. Nessa época surgira um cisma entre os árabes ocidentais de Marrocos e os árabes orientais que, sob o califa al-Mansur, tinham estabelecido uma nova capital em Bagdá, cidade que logo se transformaria no novo centro da matemática. No entanto, o califa de Bagdá não podia sequer conseguir a obediência de todos os muçulmanos da metade oriental de seu império, embora seu nome aparecesse nas moedas e fosse incluído nas orações de seus "súditos". A unidade do mundo árabe, em outras palavras, era mais econômica e religiosa do que política. A língua árabe não era necessariamente usada por todos, embora fosse a língua franca dos intelectuais. Por isso é mais apropriado falar de cultura islâmica, em vez de árabe, embora usemos ambos os termos mais ou menos indiferentemente.

Durante o primeiro século das conquistas árabes houvera confusão política e cultural, e possivelmente isto explica a dificuldade de localizar a origem do moderno sistema de numeração. Os árabes no início não tinham interesses intelectuais, e tinham pouca cultura, além da língua, a impor aos povos que venciam. Nisso vemos uma repetição da situação de quando Roma conquistou a Grécia, da qual se disse que, num sentido cultural, a Grécia cativa capturou Roma. Por volta de 750 os árabes estavam prontos a deixar que a história se repetisse, pois os vencedores se mostraram ansiosos por absorver a cultura das civilizações que tinham sobrepujado. Por 766 sabemos que uma obra astronômico-matemática, conhecida pelos árabes como *Sindhind* foi trazida a Bagdá da Índia. Pensa-se em geral que se tratasse do *Brahmasphuta Siddhānta*, embora possa ter sido o *Sūrya Siddhānta*. Poucos anos depois, talvez em 775 mais ou menos, esse *Siddhānta* foi traduzido para o árabe e não muito tempo depois (cerca de 780) o *Tetrabiblos* astrológico de Ptolomeu foi traduzido do grego para o árabe. A alquimia e a astrologia estiveram entre os primeiros estudos a estimular o interesse dos conquistadores. O "milagre árabe" não está tanto na rapidez com que surgiu o império político como no entusiasmo com que, uma vez despertado seu gosto, os árabes absorveram a cultura de seus vizinhos.

2 O primeiro século do império muçulmano fora destituído de realizações científicas. Esse período (de cerca de 650 a 750) foi na verdade, talvez, o nadir no desenvolvimento da matemática, pois os árabes ainda não tinham entusiasmo intelectual, e o interesse pela cultura tinha quase desaparecido no resto do mundo. Não fosse o súbito despertar cultural do Islam na segunda metade do oitavo século, certamente muito mais se teria perdido da ciência e da matemática antigas. A Bagdá, nesse tempo, foram chamados estudiosos da Síria e Mesopotâmia inclusive judeus e cristãos nestorianos; sob três grandes patronos da cultura abássida — al-Mansur, Harum al-Rachid e al-Mamum — a cidade se tornou uma nova Alexandria. Durante o reino do segundo desses califas, familiar hoje através das *Mil e uma noites*, parte de Euclides foi traduzida. Foi durante o califado de al-Mamum (809-833), no entanto, que os árabes se entregaram totalmente à sua paixão por tradução. Diz-se que o califa teve um sonho em que apareceu Aristóteles, e em conseqüência al-Mamum decidiu mandar fazer versões árabes de todas as obras gregas em que conseguisse deitar as mãos, inclusive o *Almajesto* de Ptolomeu e uma versão completa de *Os elementos* de Euclides. Do Império Bizantino, com o qual os árabes mantinham uma paz inquieta, foram obtidos, mediante tratados, manuscritos gregos.

Al-Mamum estabeleceu em Bagdá uma "Casa da Sabedoria" (Bait al-hikma) comparável ao antigo Museu de Alexandria. Entre os mestres havia um matemático e astrônomo Mohammed ibu-Musa al-Khowarizmi, cujo nome, como o de Euclides, iria tornar-se familiar na Europa Ocidental[1]. Esse sábio, que morreu algum tempo antes de 850, escreveu mais de meia dúzia de obras de astronomia e matemática, das quais as mais antigas provavelmente se baseavam nos *Sindhind* derivados da Índia. Além de tabelas astronômicas, e tratados sobre o astrolábio e relógio do sol, al-Khowarizmi escreveu dois livros sobre aritmética e álgebra que tiveram papéis muito importantes na história da matemática. Um deles sobrevive apenas numa única cópia de uma tradução latina com o título *De numero hindorum* (Sobre a arte hindu de calcular), a versão árabe original tendo sido perdida. Nessa obra, baseada provavelmente numa tradução árabe de Brahmagupta, al-Khowarizmi deu uma exposição tão completa dos numerais hindus que provavelmente foi o responsável pela impressão muito difundida mas falsa de que nosso sistema de numeração é de origem árabe. Al-Khowarizmi não manifesta nenhuma pretensão de originalidade quanto ao sistema, cuja origem hindu ele assume como fato; mas quando mais traduções latinas de sua obra apareceram na Europa, leitores descuidados começaram a atribuir não só o livro, mas a numeração, ao autor. A nova notação veio a ser conhecida como a de al-Khowarizmi, ou mais descuidadamente, algorismi; finalmente o esquema de numeração usando numerais hindus veio a ser chamado simplesmente algorismo ou algoritmo, palavra que, originalmente derivada do nome de al-Khowarizmi, agora significa, mais geralmente, qualquer regra especial de processo ou operação — como o método de Euclides para encontrar o máximo divisor comum, por exemplo.

3 Através de sua aritmética, o nome de al-Khowarizmi tornou-se uma palavra vernácula; através do título de seu livro mais importante, *Al-jabr wa'l muqābalah* ele nos

[1]Para dois estudos recentes sobre a ciência de al-Khowarizmi, ver *Isis*, 54 (1963), 97-119

deu uma palavra ainda mais familiar. Desse título veio o termo *álgebra* pois foi por esse livro que mais tarde a Europa aprendeu o ramo da matemática que tem esse nome. Diofante é às vezes chamado o "pai da álgebra", mas esse título pertence mais a al-Khowarizmi. É verdade que em dois aspectos a obra de al-Khowarizmi representa um retrocesso com relação à de Diofante. Primeiro é de nível muito mais elementar que o que se encontra nos problemas de Diofante e, segundo, a álgebra de al-Khowarizmi é inteiramente expressa em palavras, sem nada da sincopação que se encontra na *Aritmética* do grego ou na obra de Brahmagupta. Mesmo os números são escritos em palavras em vez de símbolos! É muito improvável que al-Khowarizmi conhecesse a obra de Diofante, mas deve ter conhecido ao menos as partes de astronomia e computação de Brahmagupta; no entanto, nem al-Khowarizmi nem outros estudiosos árabes usaram sincopação ou números negativos. Mesmo assim, o *Al-jabr* está mais próximo da álgebra elementar de hoje que as obras de Diofante e de Brahmagupta, pois o livro não se ocupa de problemas difíceis de análise indeterminada mas contém uma exposição direta e elementar da resolução de equações, especialmente de segundo grau. Os árabes em geral gostavam de uma boa e clara apresentação indo da premissa à conclusão, e também de organização sistemática — pontos em que nem Diofante nem os hindus se destacavam. Os hindus eram fortes em associação e analogias, em intuição e faro artístico e imaginativo, ao passo que os árabes tinham mente mais prática e terra a terra na sua abordagem matemática.

O *Al-jabr* chegou a nós em duas versões, latina e árabe, mas na tradução latina, *Liber algebrae et almucabola*, falta uma parte considerável do texto árabe. Na tradução latina, por exemplo, não há prefácio, talvez porque o prefácio do autor em árabe elogiasse profusamente o profeta Maomé, e al-Mamum, "o Comendador dos Crentes". Al-Khowarizmi escreve que esse último o tinha encorajado a "compor uma breve obra sobre cálculos por (regras de) complementação e redução, restringindo-a ao que é mais fácil e útil na aritmética, tal como os homens constantemente necessitam em casos de heranças, legados, partições, processos legais e comércio, e em todas as suas transações uns com os outros, ou onde se trata de medir terras, escavar canais, computação geométrica e de outras coisas de vários tipos e espécies"[2].

Não se sabe bem o que significam os termos *al-jabr* e *muqābalah*, mas a interpretação usual é semelhante à que a tradução acima implica. A palavra *al-jabr* presumivelmente significa algo como "restauração" ou "completação" e parece referir-se à transposição de termos subtraídos para o outro lado da equação, a palavra *muqābalah*, ao que se diz, refere-se à "redução" ou "equilíbrio" — isto é, ao cancelamento de termos semelhantes em lados opostos da equação[3]. A influência árabe na Espanha muito depois do tempo de al-Khowarizmi pode ser vista no *Don Quixote*, onde a palavra *algebrista* é usada para indicar um "restaurador" de ossos.

4 A tradução latina da *Álgebra* de al-Khowarizmi se inicia com uma breve explanação introdutória do princípio posicional para números e daí passa à resolução, em seis capítulos curtos, dos seis tipos de equações formadas com as três espécies de quantidades: raízes, quadrados, e números (isto é, x, x^2, e números). Um autor de textos um pouco posterior, abu-Kamil Shoja ben Aslam, assim descreveu a situação:

> A primeira coisa necessária para os estudantes dessa ciência (álgebra) é entender as três espécies que são assinaladas por Mohammed ibn Musa al-Khowarizmi em seu livro. São elas *raízes*, *quadrados* e *números*[4].

[2]Ver *Robert of Chester's Latin Translation of the Algebra of al-Khowarizmi*, ed. por L. C. Karpinski (1915), p. 46. As traduções aqui provêm dessa edição

[3]Deve-se notar, no entanto, que essa interpretação foi questionada por Solomon Gandz, "The Origin of the Term 'Algebra'", *American Mathematical Monthly*, 33 (1926), 437-440. Gandz acha que "jabr" era uma palavra assíria para equação e que *al-muqābalah* é simplesmente a tradução árabe de *al-jabr*

[4]L. C. Karpinski, "The Algebra of Abu Kamil", *American Mathematical Monthly*, 21 (1914), 37-48

O Cap. 1, em três parágrafos curtos, abrange o caso de quadrados iguais a raízes, expresso em notação moderna como $x^2 = 5x$, $x^2/3 = 4x$ e $5x^2 = 10x$, dando as respostas $x = 5$, $x = 12$ e $x = 2$ respectivamente. (A raiz $x = 0$ não era reconhecida.) O Cap. II abrange o caso de quadrados iguais a números, e o Cap. III resolve o caso de raízes iguais a números, sempre com três ilustrações por capítulo para cobrir os casos em que o coeficiente do termo variável é igual a, maior que ou menor que um. Os Caps. IV, V e VI são mais interessantes pois abrangem sucessivamente os três casos clássicos de equações quadráticas com três termos: (1) quadrados e raízes iguais a números, (2) quadrados e números iguais a raízes, e (3) raízes e números iguais a quadrados. As soluções são dadas por regras "culinárias" para "completar o quadrado" aplicadas a exemplos específicos. O Cap. IV, por exemplo, contém as três ilustrações $x^2 + 10x = 39$, $2x^2 + 10x = 48$, e $(1/2)x^2 + 5x = 28$. Em cada caso só é dada a resposta positiva. No Cap. V só é usado um exemplo — $x^2 + 21 = 10x$ — mas ambas as raízes, 3 e 7, são dadas, correspondendo à regra $x = 5 \mp \sqrt{25 - 21}$. Aqui al-Khowarizmi chama a atenção para o fato de que o que chamamos de discriminante deve ser positivo:

É preciso que vocês entendam também que quando tomam a metade das raízes nessa forma da equação e então multiplicam a metade por ela mesma; se o que resulta da multiplicação for menor que as unidades mencionadas acima como acompanhando o quadrado, então vocês têm uma equação.

No Cap. VI novamente o autor usa um só exemplo — $3x + 4 = x^2$ — pois quando o coeficiente de x^2 não for a unidade, o autor nos lembra de dividir primeiro por esse coeficiente (como no Cap. IV). Mais uma vez os passos para completar o quadrado são meticulosamente indicados, sem justificação, o processo sendo equivalente à solução $x = 1\,1/2 + \sqrt{(1\,1/2)^2 + 4}$. Também aqui só uma raiz é dada, porque a outra é negativa.

5 Os seis casos de equações dados acima esgotam as possibilidades quanto a equações lineares e quadráticas que têm uma raiz positiva. A exposição de al-Khowarizmi era tão sistemática e completa que seus leitores não devem ter tido dificuldade para aprender as soluções. Nesse sentido, pois, al-Khowarizmi merece ser chamado "o pai da álgebra". No entanto, nenhum ramo da matemática aparece já maduro, e não podemos deixar de perguntar de onde veio a inspiração para a álgebra árabe. A essa pergunta não se pode dar resposta categórica; mas a arbitrariedade das regras e a forma estritamente numérica dos seis capítulos nos lembram a matemática da Babilônia antiga e da Índia medieval. A exclusão da análise indeterminada, um tópico favorito dos hindus, e a ausência de qualquer sincopação, como a que se encontra em Brahmagupta, podem sugerir a Mesopotâmia como fonte mais provável que a Índia. Quando lemos além do sexto capítulo, no entanto, uma luz inteiramente nova é lançada sobre a questão. Al-Khowarizmi continua:

Já dissemos o bastante, no que se refere a números, sobre os seis tipos de equações. Agora, porém, é necessário que demonstremos geometricamente a verdade dos mesmos problemas que explicamos com números.

O tom dessa passagem é obviamente grego, não babilônio ou indiano. Há, pois, três diferentes teorias quanto à origem da álgebra árabe; uma dá ênfase a influências hindus, outra ressalta a tradição mesopotâmica, ou sírio-persa, e a terceira aponta inspiração grega[5]. Provavelmente chegaremos perto da verdade combinando as três teorias. Os filósofos do Islam admiravam Aristóteles a ponto de imitá-lo servilmente, mas os ecléticos matemáticos maometanos parecem ter escolhidos os elementos adequados de várias fontes.

6 A *Álgebra* de al-Khowarizmi revela inconfundíveis elementos gregos, mas as primeiras demonstrações geométricas têm pouco em comum com a matemática grega clássica. Para a equação $x^2 + 10x = 39$ al-Khowarizmi traça um quadrado ab para representar x^2, e sobre os quatro lados desse quadrado coloca retângulos c, d, e e f cada um

[5] Ver Solomon Gandz, "The Sources of al-Khowarizmi's Algebra" *Osiris*, **1**, (1936), 263-277; também H. J. J. Winter, "Formative Influences in Islamic Science", *Archives Internationales d'Histoire des Sciences*, **6** (1953), 171-192

com largura 2 1/2. Para completar o quadrado maior é preciso acrescentar os quatro pequenos quadrados nos cantos (pontilhados na Fig. 13.1), cada um dos quais tem uma área de 6 1/4 unidades. Portanto para "completar o quadrado" somamos 4 vezes 6 1/4 unidades ou 25 unidades, obtendo pois um quadrado de área total 39 + 25 = 64 unidades (como fica claro do segundo membro da equação). O lado do quadrado grande deve pois ser de 8 unidades, de que subtraímos 2 vezes 2 1/2 ou 5 unidades, achando $x = 3$, e provando assim que a resposta encontrada no Cap. IV está correta.

As demonstrações geométricas para os Caps. V e VI são um pouco mais complicadas. Para a equação $x^2 + 21 = 10x$ o autor traça o quadrado ab para representar x^2 e o retângulo bg para representar 21 unidades. Então o retângulo grande formado com o quadrado e o retângulo bg deve ter uma área igual a $10x$, de modo que o lado ag ou hd deve ser de 10 unidades. Se, então, bissectamos hd em e, traçamos et perpendicular a hd, estendemos te até c tal que $tc = tg$, e completamos os quadrados $tclg$ e $cmne$ (Fig. 13.2), a área tb será igual à área md. Mas o quadrado te é 25 e o gnômon $tenmlg$ é 21 (pois o gnômon é igual ao retângulo bg). Portanto o quadrado nc é 4 e seu lado ec é 2. Como $ec = be$ e como $he = 5$, vemos que $s = hb = 5 - 2$ ou 3, o que prova que a solução aritmética dada no Cap. V está correta. Um diagrama modificado é dado para a raiz $x = 5 + 2 = 7$, e um tipo análogo de figura é usado para justificar geometricamente o resultado achado algebricamente no Cap. VI.

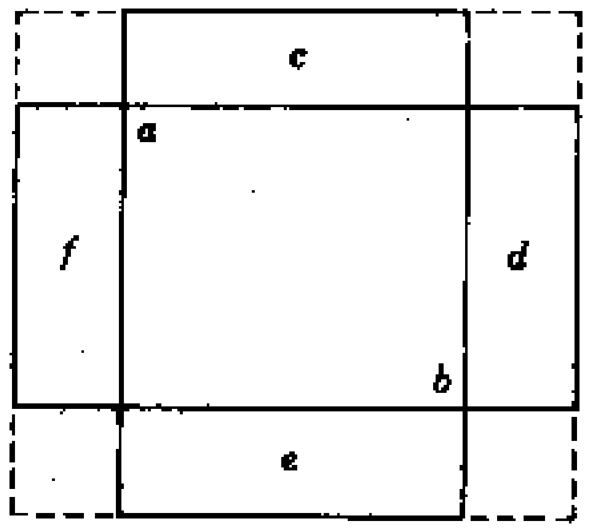


Figura 13.1

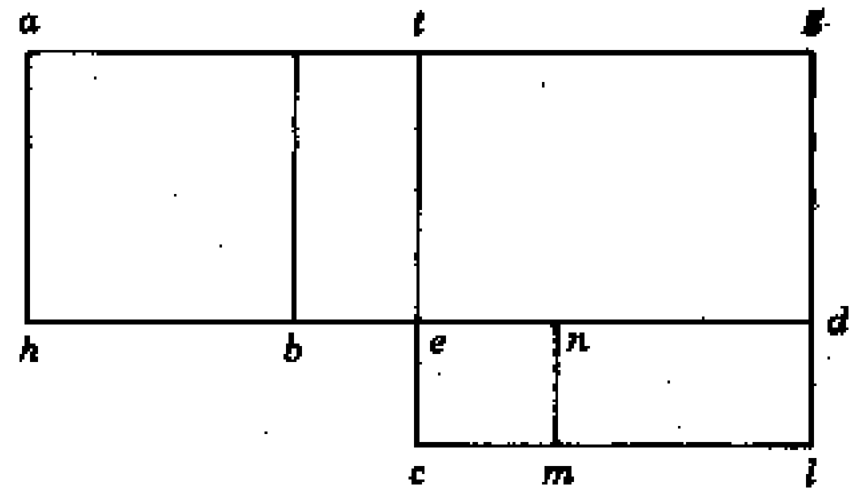


Figura 13.2

7 Uma comparação entre a Fig. 13.2, tirada da *Álgebra* de al-Khowarizmi, com diagramas encontrados em *Os elementos* de Euclides em conexão com a álgebra geométrica grega (como nossa Fig. 7.7), leva inevitavelmente à conclusão de que a álgebra árabe tinha muito em comum com a geometria grega; no entanto, a primeira parte, aritmética, da *Álgebra* de al-Khowarizmi evidentemente é estranha ao pensamento grego. O que aparentemente aconteceu em Bagdá foi exatamente o que seria de se esperar num centro intelectual cosmopolita. Os sábios árabes tinham grande admiração pela astronomia, matemática, medicina e filosofia gregas, assuntos que dominaram o melhor que podiam. No entanto, não podiam deixar de observar que, como tinha dito o Bispo nestoriano Sebokt quando em 662 ele pela primeira vez chamou a atenção para os nove maravilhosos dígitos hindus, "há também outros que sabem alguma coisa". É provável que al-Khowarizmi fosse um exemplo típico do ecletismo árabe que será tão freqüentemente observado em outros casos. Seu sistema de numeração muito provavelmente vinha da Índia, sua sistemática resolução de equações pode ter sido desenvolvida na Mesopotâmia, e o quadro geométrico lógico para suas soluções evidentemente vinha da Grécia.

A *Álgebra* de al-Khowarizmi contém mais que a resolução de equações, material que ocupa a primeira metade. Há, por exemplo, regras para operações com expressões binomiais, inclusive produtos como $(10 + 2)(10 - 1)$ e $(10 + x)(10 - x)$. Embora os árabes rejeitassem as raízes negativas e grandezas negativas, conheciam as regras que governam o que chamamos números com sinal. Há também provas geométricas alternativas de alguns dos seis casos de equações do autor. Finalmente, a *Álgebra* contém uma ampla variedade de problemas ilustrando os seis capítulos ou casos. Como ilustração para o quinto capítulo, por exemplo, al-Khowarizmi pede a divisão de dez em duas partes de modo que "a soma dos produtos obtidos multiplicando cada parte por si mesma seja igual a cinqüenta e oito". A versão árabe existente, ao contrário da latina, contém também uma extensa discussão de problemas de herança, como o seguinte:

Um homem morre deixando dois filhos e legando um terço de seu capital a um estranho. Deixa dez dirhems de propriedade e uma dívida de dez dirhems sobre um filho.

A resposta não é o que se espera, pois o estranho só recebe 5 dirhems. Segundo a lei árabe, um filho que deve à herança de seu pai uma quantia maior que a sua parte, conserva toda a soma que deve, uma sendo considerada como sua parcela na propriedade e o resto como doação de seu pai. Até certo ponto parecem ter sido as complicadas leis que regiam a herança a encorajar o estudo da álgebra na Arábia.

8 Alguns dos problemas de al-Khowarizmi constituem prova bastante clara da dependência dos árabes com relação à matemática babilônico-herodiana. Um deles presumivelmente foi tirado diretamente de Heron, pois a figura e as dimensões são iguais. Dentro de um triângulo isósceles tendo lados de 10 m e base de 12 m (Fig. 13.3) deve-se inscrever um quadrado, e o lado deste quadrado é pedido. O autor da *Álgebra* primeiro mostra pelo teorema de Pitágoras que a altura do triângulo é 8 m, de modo que a área do triângulo é 48 m^2. Chamando o lado do quadrado a "coisa", ele observa que o quadrado da "coisa" será encontrado tirando da área do triângulo grande as áreas de três triângulos pequenos que jazem fora do quadrado, mas dentro do triângulo grande. A soma das áreas dos pequenos triângulos embaixo ele sabe ser igual ao produto da "coisa" por seis menos metade da "coisa"; e a área do triângulo pequeno de cima é o produto de oito menos a "coisa" por metade da "coisa". Então ele é levado à conclusão óbvia de que a "coisa" é 4 4/5 m — o lado do quadrado. A diferença principal entre a forma desse problema em Heron e em al-Khowarizmi é que Heron exprimiu a resposta em termos de frações unitárias como 4 1/2 1/5 1/10. As semelhanças são tão mais acentuadas que as diferenças que podemos tomar esse caso como confirmação do axioma geral de que a continuidade na história da matemática é a regra e não a exceção. Quando parece haver uma descontinuidade, devemos primeiro considerar a possibilidade de que o salto aparente possa ser explicado pela perda de documentação.

9 A *Álgebra* de al-Khowarizmi é em geral considerada como a primeira obra sobre o assunto, mas uma publicação recente na Turquia põe algumas dúvidas quanto a isso. Um manuscrito de uma obra por abd-al-Hamid ibn-Turk, chamada "Necessidades Lógicas em Equações Mistas" era parte de um livro sobre *Al-jabr wa'l muqābalah* que era evidentemente muito semelhante ao de al-Khowarizmi e publicado mais ou menos ao mesmo tempo, talvez até antes. Os capítulos preservados sobre "Necessidades Lógicas" dão exatamente o mesmo tipo de demonstração geométrica que a *Álgebra* de al-Khowarizmi e num caso o mesmo exemplo ilustrativo $x^2 + 21 = 10x$. Num ponto a exposição de abd-al-Hamid é mais completa que a de al-Khowarizmi, pois, ele fornece figuras geométricas para provar que se o discriminante é negativo uma equação quadrática não tem solução. Semelhanças nas obras dos dois homens e na organização sistemática que nelas se encontra parecem indicar que a álgebra em seus dias não era um desenvolvimento tão recente quanto se supunha[6]. Quando aparecem simultaneamente textos com uma exposição convencional e bem ordenada é provável que o assunto esteja bem adiante do estágio formativo. Os sucessores de al-Khowarizmi podiam dizer, depois que um problema fora posto em forma de equação, "Operem segundo as regras da álgebra e almucabala". De qualquer forma, a preservação da *Álgebra* de al-Khowarizmi pode ser tomada como indício de que era um dos melhores textos típicos da álgebra da época. Foi para a álgebra o que *Os elementos* de Euclides foi para a geometria — a melhor exposição elementar disponível até os tempos modernos — mas a obra de al-Khowarizmi tinha uma deficiência séria que precisava ser removida antes de poder servir eficazmente aos seus fins nos tempos modernos: uma notação simbólica tinha que ser desenvolvida

[6]Ver Aydin Sayili, *Logical Necessities in Mixed Equations by Abd al Hamid ibn Turk and the Algebra of His Time* (1962)

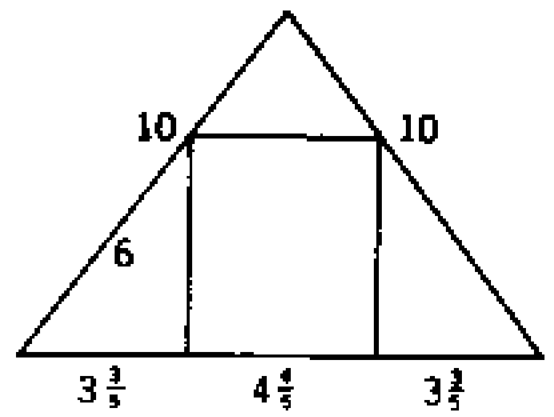


Figura 13.3

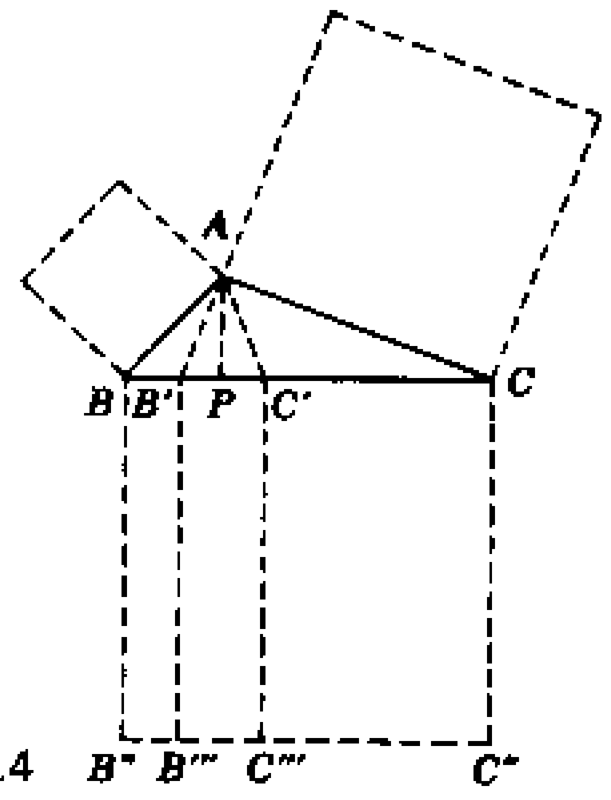


Figura 13.4

para substituir a forma retórica. Esse passo os árabes nunca deram, exceto quanto a substituir as palavras — número por sinais — número.

10 O século nove foi glorioso para a matemática árabe, pois produziu não só al-Khowarizmi na primeira metade do século, como também Thabit ibn-Qurra (826-901) na segunda metade. Se o al-Khowarizmi se assemelhava a Euclides como "elementador" então Thabit é o equivalente árabe de Papus, o comentador da matemática superior. Thabit fundou uma escola de tradutores, especialmente do grego e sírio, e com ele temos uma dívida imensa, por traduções para o árabe de obras de Euclides, Arquimedes, Apolônio, Ptolomeu e Eutócio. (Observe-se a omissão de Diofante e Papus, autores que evidentemente não foram a princípio conhecidos na Arábia, embora a *Arithmetica* diofantina se tornasse familiar pelo fim do décimo século.) Não fossem seus esforços, o número de obras gregas existentes hoje seria menor. Por exemplo, teríamos apenas os quatro primeiros livros, em vez dos sete primeiros, de *As cônicas* de Apolônio. Além disso, Thabit dominava tão completamente o conteúdo dos clássicos que traduziu que sugeriu modificações e generalizações. Deve-se a ele uma fórmula notável para números amigáveis: Se p, q e r são primos, e se são da forma $p = 3 \cdot 2^n - 1$, $q = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$ e $r = 9 \cdot 2^{2n-1} - 1$, então $2^n pq$ e $2^n r$ são números amigáveis, pois cada um é igual à soma dos divisores próprios do outro. Como Papus, ele também deu uma generalização do teorema de Pitágoras que se aplica a todos os triângulos, sejam retângulos, sejam escalenos. Se do vértice A de um triângulo qualquer ABC traçamos retas que cortam BC em pontos B' e C' tais que os ângulos $AB'B$ e $AC'C$ são cada um igual ao ângulo A (Fig. 13.4) então $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}(\overline{BB'} + \overline{CC'})$. Thabit não forneceu prova do teorema, mas é fácil dá-la por teorema sobre triângulos semelhantes. Na verdade, o teorema fornece uma bela generalização do diagrama usado por Euclides para a prova do teorema de Pitágoras. Se, por exemplo, o ângulo A é obtuso, então o quadrado sobre o lado AB é igual ao retângulo $BB'B''B'''$, e o quadrado sobre AC é igual ao retângulo $CC'C''C'''$, onde $BB'' = CC'' = BC = B''C''$. Isto é, a soma dos quadrados sobre AB e AC é o quadrado sobre BC menos o retângulo $B'C'B'''C'''$. Se o ângulo A for agudo, então as posições de B' e C' são trocadas com relação a AP, onde P é a projeção de A sobre BC, e nesse caso a soma dos quadrados sobre AB e AC é igual ao quadrado sobre BC *aumentado* do retângulo $B'C'B'''C'''$. Se A for um ângulo reto então B' e C' coincidem com P, e nesse caso o teorema de Thabit se reduz ao de Pitágoras. (Thabit[7] não traçou as linhas pontilhadas mostradas na Fig. 13.4, mas ele efetivamente considerou os diferentes casos.)

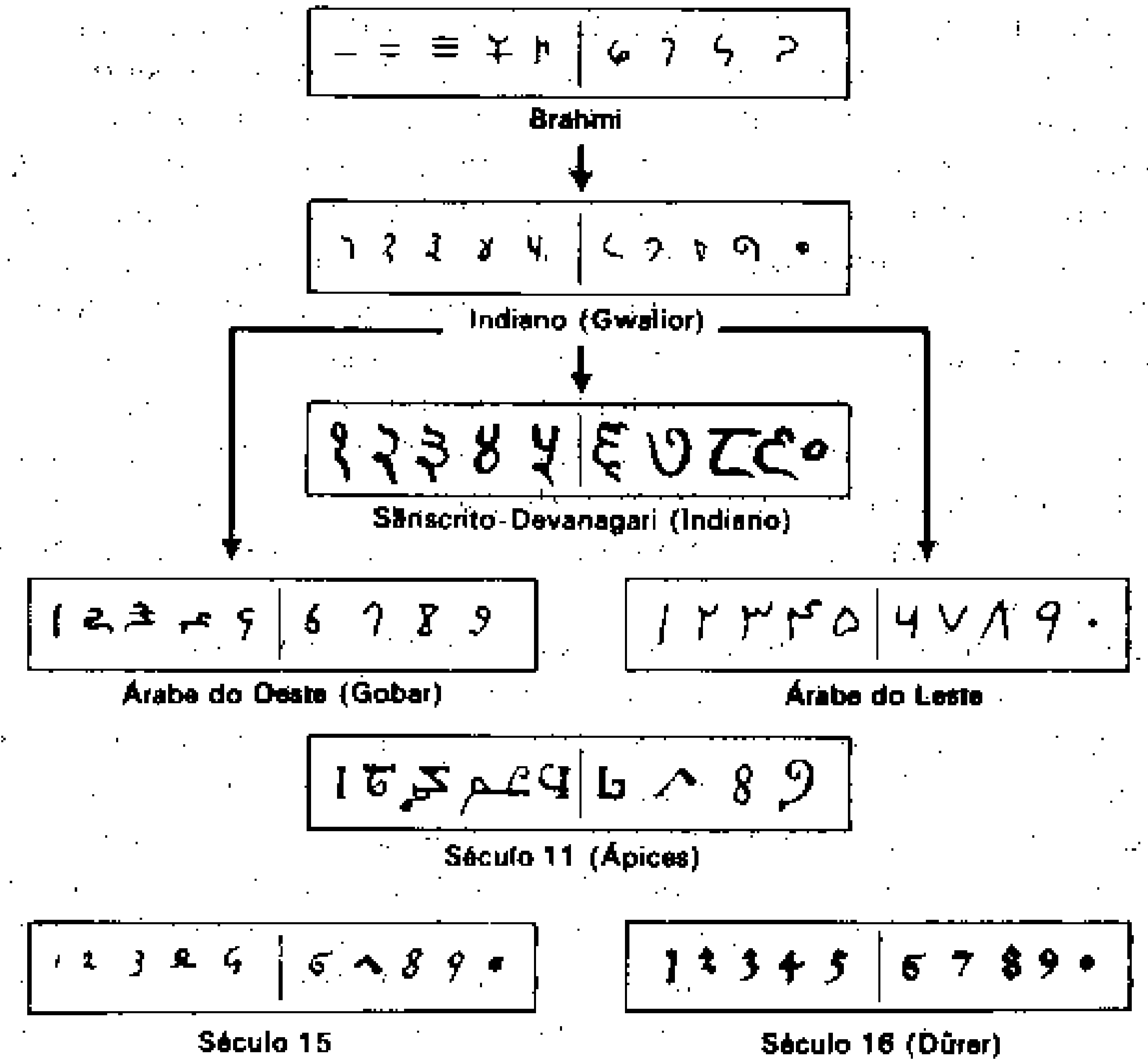
Provas alternativas do teorema de Pitágoras, trabalhos sobre segmentos parabólicos e paraboloidais, uma discussão de quadrados mágicos, trissecções de ângulos e novas teorias astronômicas estão entre as outras contribuições de Thabit à cultura matemática. Às vezes os árabes são descritos como imitadores servis dos gregos na ciência e na filosofia, mas tais acusações são exageradas. Thabit, por exemplo, audaciosamente

[7]Ver Aydin Sayili, "Thabit ibn Qurra's Generalization of the Pythagorean Theorem", *Isis*, 51 (1960), 35-37. Ver também *Isis*, 55 (1964), 68-70 e 57 (1966), 56-66

acrescentou uma nona esfera às oito previamente assumidas em versões simplificadas da astronomia Aristotélico-Ptolomaica; e em vez da precessão dos equinócios de Hiparco, só num sentido, Thabit propôs uma "trepidação dos equinócios" num tipo de movimento reciprocante. Tal discussão de pontos da astronomia grega pode bem ter sido um fator a abrir caminho para a revolução na astronomia iniciada por Copérnico.

11 Mencionamos já várias vezes que os árabes eram rápidos na absorção da cultura dos vizinhos que conquistavam; deve-se notar também que dentro das fronteiras do império árabe viviam povos de origens étnicas muito variadas: sírios, gregos, egípcios, persas, turcos e muitos outros. A maior parte deles tinha uma língua comum, o árabe, embora fossem usadas às vezes o grego e o hebraico. No entanto não devemos esperar grande uniformidade cultural. Havia considerável dose de facciosismo sempre, e às vezes esse explodia em conflitos. O próprio Thabit vivia numa comunidade pró-grega, que se opunha a ele por causa de suas simpatias pró-árabes. Na matemática árabe tais diferenças culturais ocasionalmente se tornavam evidentes, como nas obras de Abu'l Wefa (940-988) e al-Karkhi (ou al-Karagi, cerca de 1029). Em algumas de suas obras eles usavam numerais hindus, que tinham chegado à Arábia através do *Sindhind* astronômico; em outras eles adotavam o tipo grego de numeração alfabética (naturalmente com equivalentes árabes para as letras gregas). No fim, os numerais hindus, por serem superiores, predominaram, mas mesmo no círculo dos que usavam a numeração da Índia as formas dos numerais variavam consideravelmente. Obviamente tinha havido variação na Índia, mas na Arábia as variantes eram tão marcadas que há teorias sugerindo origens inteiramente diferentes para as formas usadas nas metades oriental e ocidental do mundo árabe. Talvez os numerais dos sarracenos do leste tenham vindo diretamente da Índia, enquanto que os dos mouros do oeste derivavam de formas gregas ou romanas. É mais provável que as variantes resultassem de mudanças graduais, que se verificam no espaço e no tempo, pois os numerais arábicos de hoje são muito diferentes dos numerais Devanagari (ou "divinos") ainda em uso na Índia. Afinal, são os princípios que regem o sistema de numeração que importam, não as formas específicas dos numerais. Nossos numerais são freqüentemente conhecidos como arábicos, apesar de pouco se parecerem com os em uso agora no Egito, Iraq, Síria, Arábia, Iran e outros países de cultura islâmica — isto é, as formas ١٢٣٤٥٦٧٨٩٠. Chamamos de arábicos os nossos numerais porque os princípios nos dois sistemas são os mesmos e porque nossas formas derivam das arábicas. No entanto, os princípios governando os numerais arábicos presumivelmente vieram da Índia; por isso é melhor chamar nosso sistema de hindu ou indo-arábico.

12 Assim como na numeração havia competição entre os sistemas de origens grega e indiana, também nos cálculos astronômicos houve a princípio na Arábia dois tipos de trigonometria — a geometria grega das cordas, como é encontrada no *Almajesto*, e as tabelas hindus de senos, derivadas através dos *Sindhind*. Aqui, também o conflito terminou com o triunfo do sistema hindu, e quase toda a trigonometria árabe finalmente se baseou na função seno. Na verdade, foi também através dos árabes, não diretamente dos hindus, que essa trigonometria do seno chegou à Europa. A astronomia de al-Battani (cerca de 850-929), conhecido na Europa como Albategnius, serviu como o veículo primário de transmissão, embora Thabit ibn Qurra pareça ter usado senos um pouco antes. Num livro chamado *Sobre o movimento das estrelas* Albategnius deu fórmulas, tais como $b = [a \text{ sen } (90° - A)]/\text{sen } A$ (ver Fig. 13.5) em que aparecem as funções seno e seno versor. Pelo tempo de Abu'l-Wefa, um século depois, a função tangente era bastante conhecida, de modo que a relação acima podia ser expressa mais simplesmente como $a = b \tan A$. Aqui estamos em contato mais imediato com a trigonometria moderna, pois a função tangente dos árabes ao contrário da função seno hindu, em geral era dada para um círculo unitário. Ainda mais com Abu'l-Wefa a trigonometria assume uma forma mais sistemática em que são provados teoremas tais como as fórmulas para ângulo duplo ou metade. Embora a função seno hindu tivesse sobrepujado a corda grega, foi no entanto o *Almajesto* de Ptolomeu que motivou o arranjo lógico de resultados trigonométricos. A lei dos senos em sua essência era conhecida por Ptolomeu e está contida por



Genealogia de nossos dígitos. Segundo Karl Menninger, *Zahlwort und Ziffer* (Göttingen, RFA: Vandenhoeck & Ruprecht, 1957-1958, 2 vols.) II, 233

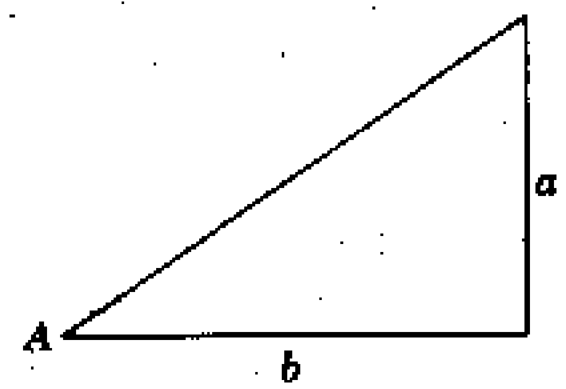


Figura 13.5

implicação na obra de Brahmagupta, mas é freqüentemente atribuída a Abu'l-Wefa por causa de sua formulação clara da lei para triângulos esféricos. Abu'l-Wefa também fez uma nova tabela para senos para ângulos diferentes, diferindo por (1/4)°, usando o equivalente de oito casas decimais. Forneceu também uma tabela de tangentes e usou todas as seis funções trigonométricas comuns, bem como relações entre elas, mas seu uso das novas funções não parece ter tido muitos seguidores no período medieval.

Tenta-se às vezes atribuir às funções tangente, co-tangente, secante e co-secante datas específicas e mesmo autorias específicas, mas isto não pode ser feito com nenhuma segurança. Na Índia e na Arábia houve uma teoria geral dos comprimentos das sombras, relativas a uma unidade de comprimento, ou gnômon, para altitudes solares variáveis. Não havia uma unidade de comprimento padrão para a barra ou gnômon usado, embora um palmo ou a altura de um homem fossem freqüentemente adotados. A sombra horizontal, para um gnômon vertical de comprimento dado, era o que chamamos a co-tangente do ângulo de elevação do Sol. A "sombra reversa" — isto é, a sombra lançada numa parede vertical por uma barra ou gnômon que se projeta da parede horizontalmente — era o que chamamos tangente da elevação do Sol. A "hipotenusa da sombra" — isto é, a distância da ponta do gnômon à ponta da sombra — era o equivalente de nossa função co-secante; e a "hipotenusa da sombra reversa" desempenhava o papel da nossa secante. Essa tradição quanto a sombras parece ter estado bem estabelecida na Ásia pelo tempo de Thabit ibn Qurra[8], mas raramente eram tabulados valores da hipotenusa (secante ou co-secante).

[8] Ver E. S. Kennedy, "Overview on Trigonometry", a aparecer no *Yearbook on History of Mathematics* of the National Council of Teachers of Mathematics

13 Abu'l-Wefa era um algebrista competente além de trigonômetra. Comentou a *Álgebra* de al-Khowarizmi e traduziu do grego um dos últimos grandes clássicos — a *Arithmetica* de Diofante. Seu sucessor al-Karkhi evidentemente usou essa tradução para se tornar um discípulo árabe de Diofante — mas sem análise diofantina! Isto é, al-Karkhi se interessava pela álgebra de al-Khowarizmi, não pela análise indeterminada dos hindus; mas como Diofante (e diferentemente de al-Khowarizmi) ele não se limitou a equações quadráticas — apesar de seguir o costume árabe de dar provas geométricas para quadráticas. Em particular, a al-Karkhi são atribuídas as primeiras soluções numéricas de equações da forma $ax^{2n} + bx^n = c$ (só eram consideradas equações com raízes positivas), onde a restrição diofantina a números racionais foi abandonada. Foi exatamente nessa direção, busca de solução algébrica (em termos de radicais) das equações de grau superior a dois, que estavam destinados a se verificar os primeiros desenvolvimentos da matemática na Renascença.

14 O tempo de al-Karkhi — começo do século onze — foi uma era brilhante na história da cultura árabe, e muitos de seus contemporâneos merecem uma breve menção — breve não porque fossem menos capazes, mas porque não eram primariamente matemáticos. Ibn-Sina (980-1037), mais conhecido no ocidente como Avicena, foi o mais importante sábio e cientista do Islam mas em seus interesses enciclopédicos a matemática tinha papel menos importante que a medicina e a filosofia. Fez uma tradução de Euclides e explicou a regra de noves fora (que por isso é às vezes injustificadamente atribuída a ele), mas é mais lembrado por sua aplicação da matemática à astronomia e à física. Assim como Avicena conciliava a cultura grega com o pensamento muçulmano, também seu contemporâneo al-Biruni (973-1048) através de seu conhecido livro chamado *Índia* fez com que a matemática e a cultura hindus se tornassem familiares aos árabes, e, portanto, a nós. Infatigável viajante e pensador crítico, deu uma exposição simpática mas candida, com descrições completas dos *Siddhāntas* e do princípio posicional para a numeração. Foi ele quem controu que Arquimedes conhecia a fórmula de Heron, e deu uma prova desta e da fórmula de Brahmagupta, insistindo corretamente que a última se aplica apenas a quadriláteros cíclicos. Ao inscrever um nonágono num círculo al-Biruni reduziu o problema, através da fórmula trigonométrica para $\cos 3\theta$, a resolver a equação $x^3 = 1 + 3x$, e para esta deu a solução aproximada em frações sexagesimais como 1;52,15,17,13 — equivalente a precisão a mais de seis casas[9]. Al-Biruni também nos deu, num capítulo sobre comprimentos de gnômon, uma exposição do cálculo de sombras hindu. A audácia de seu pensamento é ilustrada por sua discussão sobre se a terra roda ou não em torno de seu eixo, pergunta a que não deu resposta. (Aryabhata parece ter sugerido uma terra que gira no centro do espaço.) Al-Biruni contribuiu também para a física, especialmente por seus estudos sobre a gravidade específica, e as causas dos poços artesianos; mas como físico e matemático foi superado por ibn-al-Haitham (cerca de 965-1039), conhecido no Ocidente como Alhazen. O tratado mais importante escrito por Alhazen é o *Tesouro da óptica*, livro inspirado na obra de Ptolomeu sobre reflexão e refração e que por sua vez inspirou os cientistas da Europa medieval e do começo do período moderno. Entre as questões que Alhazen considerou estão a estrutura do olho, o aumento aparente do tamanho da Lua quando está próxima do horizonte, e uma avaliação, partindo de que o crepúsculo dura até o Sol atingir 19° abaixo do horizonte, da altura da atmosfera. O problema de achar o ponto num espelho esférico em que a luz de uma fonte será refletida para o olho de um observador é conhecido até hoje como "problema de Alhazen". É um "problema sólido" no sentido grego, resolúvel por secções cônicas, assunto que Alhazen conhecia bem. Estendeu os resultados de Arquimedes sobre conóides achando o volume gerado girando em torno da tangente no vértice a área limitada por um arco parabólico, o eixo e uma ordenada da parábola.

15 A matemática árabe pode, bastante razoavelmente, ser dividida em quatro partes: (1) uma aritmética, derivada presumivelmente da Índia e baseada no princípio posicional; (2) uma álgebra que, embora viesse de fontes gregas, hindus e babilônicas, tomou nas mãos dos muçulmanos uma forma caracteristicamente nova e sistemática; (3) uma trigonometria cuja substância vinha principalmente da Grécia mas à qual os árabes aplicaram a forma hindu e acrescentaram novas funções e fórmulas; (4) uma geometria que vinha da Grécia, mas para a qual os árabes contribuíram com generalizações aqui e ali. Com relação a (3) deve-se notar que ibn-Yunus (morreu em 1008), contemporâneo de Alhazen, e seu conterrâneo (ambos viveram no Egito) introduziu a fórmula $2 \cos x \cos y = \cos(x + y) + \cos(x - y)$. Essa é uma das quatro fórmulas de "produto para soma" que na Europa do século dezesseis serviram, antes da invenção dos logaritmos, para converter produtos em somas pelo método dito de *prosthaphaeresis* (adição e subtração em grego). Em conexão com (4) houve uma contribuição significativa cerca de um século depois de Alhazen por um homem que no Oriente é conhecido como cientista mas que o Ocidente olha como um dos maiores poetas persas. Omar Khayyam (cerca de 1050-1122), o "fabricante de tendas", escreveu uma *Álgebra*[10] que ia além da de al-Khowarizmi, incluindo equações de terceiro grau. Como seus predecessores árabes, Omar Khayyam dava para equações de segundo grau tanto soluções aritméticas quanto geométricas; para as equações cúbicas gerais, ele acreditava (erradamente, como se demonstrou mais tarde no século dezesseis) que soluções aritméticas eram impossíveis; por isso, deu apenas soluções geométricas. A idéia de usar cônicas que se cortam para resolver cúbicas tinha sido usada antes por Menaecmus, Arquimedes e Alhazen, mas Omar Khayyam deu o passo importante de generalizar o método para cobrir todas as equações de terceiro grau (que tinham raízes positivas). Quando numa obra anterior ele encontrou uma equação cúbica, ele observou especificamente: "Isso não pode ser resolvido por geometria plana — isto é, usando apenas régua e compasso — pois contém um cubo. Para a solução precisamos de secções cônicas"[11].

Para equações de grau superior a três Omar Khayyam evidentemente não imaginava métodos geométricos semelhantes, pois o espaço não contém mais do que três dimensões, "o que os algebristas chamam quadrado-quadrado em grandeza contínua é um fato teórico. Não existe de modo nenhum na realidade". O processo que Omar Khayyam aplicou tão tortuosamente — e orgulhosamente — às equações cúbicas pode ser enunciado com brevidade muito maior em notação e conceitos modernos como segue. Seja a cúbica $x^3 + ax^2 + b^2x + c^3 = 0$. Então se nessa equação substituirmos x^2 por $2py$ obtemos (lembrando que $x^3 = x^2 \cdot x$) o resultado $2pxy + 2apy + b^2x + c^3 = 0$. Como a equação resultante representa uma hipérbole, e a igualdade $x^2 = 2py$ representa uma parábola, é claro que se traçarmos a parábola e a hipérbole sobre o mesmo conjunto de eixos de coordenadas, então as abscissas dos pontos de intersecção das duas curvas serão as raízes da equação cúbica. Evidentemente muitos outros pares de secções cônicas podem ser usados de modo semelhante para resolver a cúbica.

Nossa exposição da obra de Omar Khayyam não faz justiça ao seu gênio, pois, não tendo o conceito de coeficientes negativos, ele tinha que decompor o problema em muitos casos distintos conforme os parâmetros a, b, c fossem positivos, negativos ou zero. Além disso, ele tinha de identificar especificamente suas secções cônicas para cada caso, pois o conceito de parâmetro geral não existia. Nem todas as raízes de uma cúbica dada eram fornecidas, pois ele não aceitava as raízes negativas e não considerava todas as intersecções das secções cônicas. Deve-se observar também que nas antigas soluções geométricas gregas das equações cúbicas os coeficientes eram segmentos de retas, enquanto que na obra de Omar Khayyam eram números específicos. Uma das mais frutíferas contribuições do ecletismo árabe foi a tendência a fechar a separação entre a álgebra numérica e a geométrica. O passo decisivo nesta direção veio muito mais tarde, com Descartes, mas Omar Khayyam estava avançado nesta direção quando escreveu, "Quem

[9]Ver Pierre Dedron e Jean Itard, *Mathématiques et mathématiciens* (1959), p. 126

[10]Ver *The Algebra of Omar Khayyam*, ed. por D. S. Kasir (1931); também D. J. Struik, "Omar Khayyam, Mathematician", *The Mathematics Teacher*, **51** (1958), 280-285

[11]A. R. Amir-Moez, "A Paper of Omar Khayyam", *Scripta Mathematica*, **26** (1963), 323-337, p. 328

quer que imagine que a álgebra é um artifício para achar quantidades desconhecidas pensou em vão. Não se deve dar atenção ao fato de a álgebra e a geometria serem diferentes na aparência. As álgebras são fatos geométricos que são provados."[12] Ao substituir a teoria das proporções de Euclides por um método numérico, ele chegou perto da definição de números irracionais e lutou com o conceito de número real em geral[13].

6 Em sua *Álgebra* Omar Khayyam escreveu que tinha exposto em outra obra uma regra que tinha descoberto para encontrar as potências quarta, quinta, sexta e mais altas de um binômio, mas essa obra se perdeu. Presume-se que ele se refere ao arranjo do triângulo de Pascal, que parece ter aparecido ao mesmo tempo na China. Não é fácil explicar tal coincidência, mas enquanto não for encontrada nova evidência deve-se presumir a independência das descobertas. A intercomunicação entre a Arábia e a China não era grande na época; mas havia uma rota da seda ligando a China à Pérsia, e alguma informação poderia ter-se filtrado por ela.

Os árabes claramente se sentiam mais atraídos pela álgebra e pela trigonometria que pela geometria, mas um aspecto da geometria tinha um fascínio especial para eles — a prova do quinto postulado de Euclides. Mesmo entre os gregos a tentativa de provar o postulado tinha-se transformado virtualmente num "quarto famoso problema de geometria", e vários matemáticos muçulmanos continuaram o esforço. Alhazen tinha começado por um quadrilátero tri-retângulo (às vezes conhecido como "quadrângulo de Lambert" em homenagem aos esforços deste no século dezoito) e julgava ter provado que o quarto ângulo também tinha que ser reto. Desse "teorema" sobre o quadrilátero resulta facilmente o quinto postulado. Em sua "prova" Alhazen assumia que o lugar de um ponto que se move de modo a permanecer equidistante de uma reta dada é necessariamente uma reta paralela à reta dada — mas isso, como se provou no período moderno é equivalente ao quinto postulado de Euclides. Omar Khayyam criticou a prova de Alhazen com o argumento de que Aristóteles tinha condenado o uso do movimento em geometria. Omar Khayyam partiu então de um quadrilátero com dois lados iguais, ambos perpendiculares à base (usualmente chamado "quadrilátero de Saccheri", novamente em reconhecimento de esforços no século dezoito) e perguntou como seriam os outros ângulos (os superiores) do quadrilátero, que são necessariamente iguais um ao outro. Há, é claro, três possibilidades. Os ângulos podem ser (1) agudos, (2) retos, ou (3) obtusos. Omar Khayyam excluiu a primeira e a terceira possibilidades baseando-se em um princípio, que atribuiu a Aristóteles, que diz que duas retas convergentes devem cortar-se — novamente um enunciado equivalente ao postulado das paralelas de Euclides.

7 Quando Omar Khayyam morreu em 1123 a ciência árabe declinava. Excessos de faccionismo político e religioso — situação bem exemplificada pela origem de nossa palavra "assassino" — parecem ter sido parte das causas do declínio. Nunca mais o Islam alcançaria de novo o nível de cultura da era gloriosa de Avicenna e al-Karkhi, mas as contribuições muçulmanas não cessaram subitamente após Omar Khayyam. Tanto no século treze, quanto de novo no século quinze, achamos um matemático árabe merecedor de atenção. Em Maragha, por exemplo, Nasir Eddin al-Tusi (ou at-Tusi, 1201--1274), astrônomo de Hulagu Khan, neto do conquistador Gengis Khan e irmão de Kublai Khan continuou os esforços para provar o postulado das paralelas, partindo das três hipóteses usuais sobre um quadrilátero de Saccheri. Sua "prova" depende da seguinte hipótese, também equivalente à de Euclides:

Se uma reta u é perpendicular a uma reta w em A e se a reta v é oblíqua a w em B, então as perpendiculares traçadas de u sobre v são menores que AB do lado em que v faz um ângulo agudo com w e maiores do lado em que v faz um ângulo obtuso com w[14].

[12]Amir-Moez, obra citada, p. 329

[13]Ver D. J. Struik, "Omar Khayyam, Mathematician", *The Mathematics Teacher*, **51** (1958), 280-285

[14]Ver Roberto Bonola, *Non-Euclidean Geometry* (New York: Dover reprint, 1955), p. 10. Ver também D. E. Smith, "Euclid, Omar Khayyam, and Saccheri", *Scripta Mathematica*, **3** (1935), 5-10

Os escritos de Nasir Eddin, o último da seqüência de três precursores árabes da geometria não-euclidiana, foram traduzidos e publicados por Wallis no século dezessete; parece que essa obra foi o ponto de partida para os desenvolvimentos de Saccheri no primeiro terço do século dezoito.

Nasir Eddin tinha os interesses característicos dos árabes; por isso deu contribuições também à trigonometria e à astronomia. Continuando a obra de Abu'l-Wefa, foi responsável pelo primeiro tratado sistemático sobre trigonometria plana e esférica, tratando o material como assunto independente e não apenas como servidor da astronomia, como se fazia na Grécia e na Índia. São usadas as seis funções trigonométricas usuais, e são dadas regras para resolver os vários casos de triângulos planos e esféricos. Infelizmente a obra de Nasir Eddin teve influência limitada por não ter sido bem conhecida na Europa. Na astronomia, no entanto, Nasir Eddin deu uma contribuição que pode bem ter chegado ao conhecimento de Copérnico. Os árabes tinham adotado teorias tanto de Aristóteles quanto de Ptolomeu para os céus; observando elementos de conflito entre as cosmologias, tentaram conciliá-las e refiná-las. Quanto a isso, Nasir Eddin observou que uma combinação de dois movimentos circulares uniformes na construção epicíclica usual pode produzir um movimento retilíneo. Isto é, se um ponto se move com movimento circular uniforme em sentido horário ao longo do epiciclo, enquanto o centro deste se move em sentido anti-horário com metade da velocidade ao longo de um círculo diferente igual, o ponto descreverá um segmento de reta. (Em outras palavras, se um círculo rola sem deslizar ao longo do interior de um círculo cujo diâmetro é duas vezes maior, o lugar de um ponto sobre a circunferência do círculo menor será um diâmetro do círculo maior.) Esse "teorema de Nasir Eddin" foi conhecido, ou redescoberto, por Copérnico e Cardan no século dezesseis[15].

18 A matemática árabe continuou a declinar, após Nasir Eddin, mas nossa exposição sobre a matemática árabe seria insatisfatória sem uma referência à obra de uma figura do começo do século quinze. Al-Kashi (morreu em 1436) achou um patrono no príncipe Ulugh Beg, neto do conquistador mongol Tamerlão. Em Samarkand, onde tinha sua corte, Ulugh Beg construíra um observatório, e al-Kashi se uniu ao grupo de cientistas reunidos lá. Em numerosas obras, escritas em persa e árabe al-Kashi contribuiu para a matemática e a astronomia. Merece nota a precisão de seus cálculos, especialmente no que se refere à resolução de equações pelo método de Horner, proveniente talvez da China. Também da China al-Kashi pode ter tomado o hábito de usar frações decimais. Al-Kashi é uma figura importante na história das frações decimais, e ele percebeu a importância de sua contribuição a esse assunto, considerando-se o inventor das frações decimais[16]. Embora até certo ponto ele tivesse precursores, ele foi talvez, dentre os que usavam frações sexagesimais, o primeiro a sugerir que as decimais são igualmente convenientes para problemas que exigem muitas casas exatas. No entanto em seu cálculo sistemático de raízes ele continuou a usar as sexagesimais. Ao ilustrar seu método para achar a raiz n-ésima, de um número, ele extraiu a raiz sexta da sexagesimal

$$34,59,1,7,14,54,23,3,47,37;40.$$

Esse foi um prodigioso sucesso de computação, usando os passos que seguimos no método de Horner — localização da raiz, subtração, e aumento ou multiplicação das raízes — e usando um esquema semelhante ao nosso para divisão.

Al-Kashi obviamente se deliciava com cálculos longos, e se orgulhava com razão de sua aproximação para π, que era melhor que qualquer das aproximações fornecidas por

[15]Veja C. B. Boyer, "Note on Epicycles and the Ellipse from Copernicus to Lahire", *Isis*, **38** (1947)

[16]Ver Abdul-Kader Kakhel, *Al-Kashi on Root Extraction* (1960), p. 2. Uma exposição inusitadamente extensa de parte da obra de al-Kashi se encontra em P. Luckey, "Die Ausziehung der *n*-ten Wurzel und der binomische Lehrsatz in der islamischen Mathematik", *Mathematische Annalen*, **120** (1948), 217--274. Muito recentemente foi observado que o uso de frações decimais na Arábia se encontra numa obra de abu-al-Hasan, Ahmad ibn-Ibrahim al-Uqlidisi datando de 952-953. Ver A. S. Saidan, "The Earliest Extant Arabic Arithmetic", *Isis*, **57** (1966), 475-490

seus predecessores. Fiel ao gosto dos árabes por notações variadas, ele exprimiu seu valor para 2π em *ambas* as formas, sexagesimal e decimal. Uma — 6;16,59,28,34,51,46,15,50 é mais reminiscente do passado e a outra — 6,2831853071795865 num certo sentido pressagiava o uso de frações decimais. Nenhum matemático até o fim do século dezesseis se aproximou da precisão desse *tour de force* computacional. Em al-Kashi o teorema binomial sob a forma do "triângulo de Pascal" aparece de novo, quase exatamente um século depois de sua publicação na China e cerca de um século antes de ser impresso em livros europeus.

Com a morte de al-Kashi em 1436 aproximadamente podemos encerrar a exposição da matemática árabe, pois o colapso cultural do mundo muçulmano foi mais completo que a desintegração política do império. O número de árabes que deram contribuições significativas à matemática antes de al-Kashi foi consideravelmente maior do que nossa exposição sugere, pois nos concentramos nas figuras principais[17]; mas depois dele o número é insignificante. Foi realmente uma sorte que quando a cultura árabe começou a declinar a ciência na Europa estivesse em ascenção e preparada para aceitar a herança intelectual legada por eras anteriores. Diz-se às vezes que os árabes fizeram pouco mais que pôr a ciência grega em "conservação a frio" à espera de que a Europa estivesse preparada para aceitá-la. Mas a exposição neste capítulo mostrou que, pelo menos no caso da matemática, a tradição transmitida ao mundo latino nos séculos doze e treze era mais rica do que a que os iletrados conquistadores árabes encontraram no século sete.

BIBLIOGRAFIA

Amir-Moez, A. R., "A Paper of Omar Khayyam", *Scripta Mathematica*, **26** (1963), 323-337

Cajori, Florian, *History of Mathematics*, 2.ª edição (New York: Macmillan, 1919)

Dedron, Pierre, e Jean Itard, *Mathématiques et mathématiciens* (Paris: Magnard, 1959)

Gandz, Solomon, "The Sources of al-Khowarizmi's Algebra". *Osiris*, **1** (1936), 263-277

Hill, G. F., *The Development of Arabic Numerals in Europe* (Oxford: Clarendon, 1915)

Kakhel, Abdul-Kader, *Al-Kashi on Root Extraction* (Libano, 1960)

Kasir, D. S., ed., *The Algebra of Omar Khayyam* (New York: Columbia Teachers College, 1931)

Karpinski, L. C., "The Algebra of Abu Kamil", *American Mathematical Monthly*, **21** (1914, 37-48

Karpinski, L. C., ed., *Robert of Chester's Latin Translation of the Algebra of al-Khowarizmi* (New York: Macmillan, 1915)

Kennedy, E. S., "Overview on Trigonometry", *Yearbook on History of Mathematics*, The National Council of Teachers of Mathematics (Washington, D. C.)

Levey, Martin, ed., *The Algebra of Abu Kamil* (Madison, Wis.: University of Wisconsin Press, 1966)

Luckey, P., "Die Ausziehung der *n*-ten Wurzel und der binomische Lehrsatz in der islamischen Mathematik", *Mathematische Annalen*, **120** (1948), 217-274

Rosenfeld, B. A., e A. P. Youschkevitch, *Omar Khayyam* (Moscou: Izdatelestvo "Nauka", 1965)

Saidan, A. S., "The Earliest Extant Arabic Arithmetic", *Isis*, 57 (1966), 475-490

Sánchez Pérez, José, *La arithmética en Roma, en India y en Arabia* (Madrid: Instituto Miguel Asín, 1949)

Sarton, George, *Introduction to the History of Science* (Baltimore: Carnegie Institution of Washington, 1927-1948, 3 volumes em 5)

Sayili, Aydin, *Logical Necessities in Mixed Equations by ' Abd al Hamid ibn Turk and the Algebra of His Time* (Ankara, 1962)

Sayili, Aydin, "Thabit ibn Qurra's Generalization of the Pythagorean Theorem", *Isis*, **51** (1960), 35-37

Smith, D. E., *History of Mathematics* (Boston: Ginn, 1923-1925, 2 volumes; reimpresso em brochura, New York: Dover, 1958)

Smith, D. E., e L. C. Karpinski, *The Hindu-Arabic Numerals* (Boston, 1911)

Struik, D. J., "Omar Khayyam, Mathematician", *The Mathematics Teacher*, **51** (1958), 280-285

Suter. Heinrich, *Die Mathematiker und Astronomer der Araber und ihre Werke* (Leipzig, 1900)

Vogel, Kurt, ed., *Mohammed ibn Musa Alchwarizmis Algorismus* (Aalen: O. Zeller, 1963)

Winter, H. J. J., "Formative Influences in Islamic Science", *Archives Internationales d'Histoire des Sciences*, **6** (1953), 171-192

[17]Ver Heinrich Suter, *Die Mathematiker und Astronomer der Araber und ihre Werke* (1900), para uma menção de mais de 500 estudiosos

EXERCÍCIOS

1. Comparar, quanto ao seu efeito sobre a cultura, a conquista árabe das terras vizinhas com as conquistas anteriores de Alexandre, o Grande, e com as conquistas dos romanos.
2. Explique por que a *Álgebra* de al-Khowarizmi não contém equação quadrática do caso em que quadrados e raízes e números sejam iguais a zero.
3. Quais dos numerais usados na Arábia moderna se parecem com os nossos? Há alguma vantagem ou desvantagem nas formas árabes?
4. Foi uma sorte ou um azar para o futuro da matemática que Charles Martel repelisse os árabes em Tours, em 732? Dê razões para sua resposta.
5. Como explica o fato de após 1500 os árabes não terem feito praticamente nenhuma contribuição à matemática?
6. Mencione algumas partes da matemática grega que se teriam perdido sem a ajuda árabe.
7. Compare a matemática árabe e a hindu quanto a forma, conteúdo, nível e influência.
8. Compare os papéis da lógica e da filosofia na matemática grega e na árabe.
9. Usando um diagrama geométrico como o de al-Khowarizmi, resolva $x^2 + 12x = 64$.
10. Verifique a resposta dada por al-Khowarizmi e Heron para as dimensões de um quadrado inscrito num triângulo de lados 10, 10 e 12.
11. Verifique o teorema de Thabit ibn-Qurra sobre números amigáveis.
12. Prove a generalização de Thabit ibn-Qurra do teorema de Pitágoras.
13. Resolva a cúbica de al-Biruni, $x^3 = 1 + 3x$ para a raiz positiva, correta até os centésimos, e verifique que até aí sua resposta coincide com a dele.
14. Prove a fórmula de ibn-Yunus $2 \cos x \cos y = \cos(x + y) + \cos(x - y)$.
15. Use essa fórmula para transformar o produto de 0,4567 e 0,5678 em soma.
16. Resolva a equação $x^3 = x^2 + 20$ geometricamente, à maneira de Omar Khayyam.
17. Resolva a equação $x^3 + x = 20$ geometricamente à maneira de Omar Khayyam.
18. Usando a avaliação de Alhazen quanto à duração do crepúsculo e tomando o raio da terra como 4 000 milhas, ache aproximadamente a altura da atmosfera. (O crepúsculo é ocasionado pela reflexão dos raios solares em partículas da atmosfera.)
19. Ache o volume obtido girando em torno do eixo dos y a área limitada por $y^2 = 2px$ e pela reta $x = a$. Dentre gregos e árabes, quais podiam resolver esse problema?
20. Mostre que as primeiras três casas sexagesimais do valor de al-Kashi para 2π concordam com as cinco primeiras da sua forma decimal.
21. Nasir Eddin mostrou que a soma de dois quadrados ímpares não pode ser um quadrado. Prove esse teorema, usando as propriedades de quadrados de números ímpares e pares.

*22. Como caso especial do problema de Alhazen, considere um espelho esférico com secção circular dada pela equação $x^2 + y^2 = 1$, seja uma fonte de luz colocada no ponto (0, 3), e seja o olho colocado no ponto (4, 0). Mostre que o ponto em que a luz será refletida pelo espelho pode ser encontrado por intersecção do círculo com uma hipérbole.

Capítulo **14**

A Europa na Idade Média

> O abandono da matemática traz dano a todo o conhecimento, pois aquele que a ignora não pode conhecer as outras ciências ou as coisas deste mundo.
>
> *Roger Bacon*

1 O tempo e a história são, é claro, sem emendas, como o contínuo da matemática, e qualquer subdivisão em períodos é obra do homem; mas assim como um sistema de coordenadas é útil na geometria, também a subdivisão dos acontecimentos em períodos ou eras é conveniente para a história. No que se refere à história política é costume designar a queda de Roma em 476 como o começo da Idade Média, e a queda de Constantinopla perante os turcos em 1453 como o fim. Deixando de lado a política, seria melhor encerrar o período antigo com o ano de 524, que é ao mesmo tempo o ano da morte de Boécio e aproximadamente a época em que o abade romano Dionísio Exiguus propôs a cronologia baseada na era cristã que a partir daí então vem sendo usada. Para a história da matemática, dissemos, no Cap. XI, preferir o ano de 529 como marco para o começo do período medieval, e designaremos como fim, um tanto arbitrariamente, o ano de 1436.

A data 1436 é provavelmente a da morte de al-Kashi, um matemático muito capaz que já descrevemos como tendo duas faces como Janus — olhando para o passado mas em certos pontos antecipando o futuro. O ano 1436 marca também o nascimento de outro eminente matemático — Johann Müller (1436-1476), mais conhecido pelo nome de Regiomontanus, forma latinizada de sua cidade natal, Königsberg. O ano de 1436, em outras palavras, simboliza o fato de que durante a Idade Média os que se destacavam em matemática escreviam em árabe e viviam na Ásia e na África islâmicas, ao passo que durante a nova era que surgia os principais matemáticos escreviam em latim e viviam na Europa cristã.

Uma visão demasiado simplificada da Idade Média resulta freqüentemente de uma exposição centrada em demasia na Europa; por isso lembramos aos leitores que cinco grandes civilizações, escrevendo em cinco línguas diferentes, fornecem a maior parte da história da matemática medieval. Nos dois capítulos precedentes descrevemos as contribuições da China, Índia e Arábia, três das cinco principais culturas medievais. Neste capítulo examinamos a matemática das outras duas: (1) o Império do Oriente ou Bizantino, com centro em Constantinopla (ou Bizâncio), em que a língua oficial era o grego; e (2) o Império do Ocidente, ou Romano, que não tinha um centro único nem uma única língua falada, mas onde o latim era a língua franca dos estudiosos.

2 Quando Justiniano em 529 fechou as escolas filosóficas pagãs de Atenas, seus sábios se dispersaram e alguns se estabeleceram permanentemente na Síria, Pérsia e outros lugares. No entanto, alguns permaneceram e outros voltaram alguns anos depois, e em conseqüência não houve hiato grande na cultura grega do mundo bizantino. Mencionamos já brevemente a obra de vários gregos do sexto século: Eutócio, Simplício, Isidoro de Mileto, e Antêmio de Trales. Foi o próprio Justiniano quem encarregou os dois últimos da construção de Hágia Sophia. À lista de sábios bizantinos devemos acrescentar também o nome de Filoponus, que viveu em Alexandria no começo do sexto século e foi o mais importante físico de sua época no mundo todo. Filoponus questionava as leis aristotélicas do movimento e a impossibilidade do vácuo, e sugeriu a operação de uma espécie de princípio de inércia, sob o qual corpos em movimento continuavam

a mover-se. Como Galileu mais tarde, negava que a velocidade adquirida por um corpo em queda livre seja proporcional a seu peso:

> Se deixarmos cair da mesma altura dois pesos, dos quais um é várias vezes mais pesado do que o outro, verão que a razão dos tempos necessários para o movimento não depende da razão dos pesos, mas que a diferença no tempo é muito pequena[1].

Filoponus era um cientista cristão (como talvez também Eutócio e Antêmio) que usava antigas fontes pagãs e cujas idéias influenciaram os pensadores islâmicos posteriores, indicando assim a continuidade da tradição científica apesar das diferenças religiosas e políticas.

Filoponus não era primariamente um matemático, mas parte de sua obra, como seu tratado sobre o astrolábio, pode ser considerada como referente a matemática aplicada. A maior parte das contribuições bizantinas à matemática era de nível elementar e consistia principalmente de comentários sobre os clássicos. A matemática bizantina, muito mais do que a árabe, era uma espécie de ação de conservação, destinada a preservar ao máximo o legado da antiguidade, até que o Ocidente estivesse preparado para ir adiante. Filoponus ajudou nessa obra por seu comentário sobre a *Introdução à aritmética* de Nicômaco. O pensamento neoplatônico continuou a exercer forte influência no Império do Oriente, o que explica a popularidade do tratado de Nicômaco. De novo, no século onze, ele foi tema de um comentário, dessa vez de Miguel Constantino Psellus, (1018-1080?), um filósofo de Atenas e Constantinopla que contava entre seus discípulos o Imperador Miguel VII. Outra obra de Psellus, um compêndio muito elementar sobre o *quadrivium*, teve grande popularidade no Ocidente durante o século dezesseis. Dois séculos mais tarde assinalamos outro resumo grego sobre o *quadrivium* matemático, dessa vez de Georgios Pachymeres (1242-1316). Tais compêndios eram significativos apenas por mostrar que um filete de tradição grega antiga se manteve no Império do Oriente até o fim do período medieval.

Pachymeres escreveu também um comentário sobre a *Aritmética* de Diofante, como também seu contemporrâneo, Maximos Planudes (1255?-1310), um monge grego, embaixador do Imperador Andronicus II em Veneza, o que indica ter havido algum contato cultural entre o Oriente e o Ocidente. Planudes escreveu também uma obra sobre o sistema hindu de numeração, que finalmente chegara ao mundo grego. Em Bizâncio, como se poderia prever, os numerais alfabéticos não foram totalmente abandonados, pois até hoje estão em uso na Grécia em documentos legais, administrativos e eclesiásticos. A secção LXXVIII de um documento, por exemplo, é designada por $o\eta$ (isto é, ômicron eta) como nos dias de Alexandria. Ainda mais, mesmo dentro do novo sistema hindu, os bizantinos do século quatorze conservaram as primeiras nove letras do sistema alfabético, acrescentando-lhes um símbolo para o zero, semelhante a um h invertido. O número 7 890, por exemplo, seria escrito $\zeta\eta\theta$Ч, uma forma tão conveniente quanto a nossa. Manuel Moschopoulos (viveu em 1300), um discípulo de Planudes, escreveu sobre quadrados mágicos, e a exposição de Planudes sobre a numeração foi comentada pelo aritmético e geômetra Nicolau Rhabdas (morreu em 1350). Este escreveu também uma obra sobre computação nos dedos; mas a matemática bizantina, que nunca fora muito forte, tinha então ficado quase nula. Pelo século quatorze o mundo grego tinha sido claramente superado pelo latino no Ocidente, e para este nos voltamos agora.

3 O Cap. II contém referências aos tratados latinos de Boécio no fim do período antigo, com uma menção de seu nível muito elementar. Mesmo a partir desse nível era possível deteriorar-se ainda mais a matemática, como vemos pelo compêndio trivial sobre as artes liberais, escrito por Cassiodoro (cerca de 480 a cerca de 575), um discípulo de Boécio que passou seus últimos anos num mosteiro que fundara. As obras primitivas de Cassiodoro serviram de texto nas escolas eclesiásticas no começo da Idade Média e às vezes também como fonte para livros de nível ainda inferior, tais como o *Origens* ou

[1]Citado de Marshall Clagett, *The Science of Mechanics in the Middle Ages* (1959), p. 546

Etimologias de Isidoro de Sevilha (570-636), sendo um dos vinte livros desse um resumo breve da aritmética de Boécio. Quando observamos que seus contemporâneos consideravam Isidoro como o homem mais culto de seu tempo, podemos entender bem o lamento de seu tempo, que "o estudo das letras está morto entre nós". Essa foi de fato a "idade das trevas" da ciência, mas não deveríamos cometer o erro de supor que isso fosse verdade para a Idade Média como um todo. Pelos dois séculos seguintes as sombras se mantiveram a tal ponto que se tem dito que nada de erudito podia ser ouvido na Europa, a não ser o arranhar da pena do venerável Beda (cerca de 673-735) escrevendo na Inglaterra sobre a matemática necessária para o calendário eclesiástico, ou sobre a representação dos números por meio dos dedos.

4 Alcuin de York (cerca de 735-804) nasceu no ano em que Beda morreu; foi chamado por Carlos Magno para revitalizar a instrução na França, e houve uma melhoria suficiente para levar alguns historiadores a falar num Renascimento carolingiano. Alcuin explicou que o ato de criação levara seis dias, porque seis era um número perfeito; mas além de alguma aritmética, geometria e astronomia, que se diz que Alcuin escreveu para principiantes, pouca matemática houve na França ou na Inglaterra, por mais dois séculos. Na Alemanha Hrabanus Maurus (784-856) continuou os débeis esforços matemáticos e astronômicos de Beda, especialmente para o cálculo da data da Páscoa. Mas passou-se ainda século e meio antes de haver alguma modificação do clima matemático da Europa Ocidental, e então ela se deu através daquele que viria a tornar-se o Papa Silvestre II.

Gerbert (cerca de 940-1003) nasceu na França e estudou na Espanha e Itália, depois serviu na Alemanha como tutor e mais tarde conselheiro do Imperador do Santo Império Romano, Otto III. Tendo sido arcebispo, primeiro em Reims e depois em Ravenna, Gerbert em 999 foi elevado ao papado, tomando o nome de Silvestre — talvez em memória de um papa anterior que fora conhecido pela erudição, mas mais provavelmente porque Silvestre I, papa durante os dias de Constantino, simbolizava a união do papado e do império. Gerbert se ocupava ativamente de política, tanto leiga quanto eclesiástica, mas tinha tempo também para questões educacionais. Escreveu sobre aritmética e geometria, dependendo provavelmente da tradição de Boécio, que dominara o ensino nas escolas eclesiásticas do Ocidente e não se aperfeiçoara! Mais interessante que essas obras expositórias, no entanto, é o fato de Gerbert ser talvez o primeiro a ter ensinado na Europa os numerais indo-arábicos. Não se sabe bem como ele os conheceu. Uma possível explicação é que quando ele foi à Espanha em 967 tenha tido conhecimento, talvez em Barcelona, da cultura moura, inclusive da numeração arábica com a forma ocidental ou Gobar (pó) dos numerais, embora exista pouca evidência de influência árabe nos documentos preservados. Uma cópia espanhola do *Origens* de Isidoro, datando de 992, contém os numerais, sem o zero, e Gerbert talvez nunca tenha sabido dessa última parte do sistema indo-arábico. Em certos manuscritos de Boécio, no entanto, aparecem formas numerais, ou ápices, semelhantes, para uso no ábaco; e talvez seja por essas que Gerbert primeiro aprendeu o novo sistema. Os ápices de Boécio, de outro lado, podem ter sido interpolações posteriores. A situação quanto à introdução dos numerais na Europa é mais ou menos tão confusa quanto a da invenção do sistema talvez meio milênio antes. Além disso, não se sabe se houve um uso continuado dos novos numerais na Europa durante os dois séculos seguintes a Gerbert. Somente no século treze é que o sistema indo-arábico ficou definitivamente estabelecido na Europa, e isto não foi realização de um homem mas de vários[2].

5 A Europa, antes e durante o tempo de Gerbert, ainda não estava preparada para o desenvolvimento da matemática. A atitude cristã, expressa por Tertuliano, a princípio fora a mesma do antigo Islam, citada com referência à Biblioteca de Alexandria. A pesquisa científica, escreveu Tertuliano, se tornara supérflua desde que fora recebido o Evangelho de Jesus Cristo. A época de Gerbert fora o ponto alto da cultura muçulmana, mas os estudiosos latinos contemporâneos mal poderiam apreciar os tratados árabes

[2]Ver G. F. Hill, *The Development of Arabic Numerals in Europe* (1915) e D. E. Smith e L. C. Karpinski, *The Hindu-Arabic Numerals* (1911)

se viessem a conhecê-los. Pelo começo do século doze a situação começou a mudar num sentido que lembrava o século nove na Árabia. Não se pode absorver a ciência do vizinho sem lhe conhecer a língua. Os muçulmanos tinham quebrado a barreira de linguagem que os separava da cultura grega no século nove, e os europeus latinos superaram a barreira com a cultura árabe no século doze. No começo do século doze nenhum europeu poderia pretender ser um matemático ou astrônomo verdadeiro sem um bom conhecimento da língua árabe; e a Europa, durante a primeira parte do século doze, não podia orgulhar-se de qualquer matemático que não fosse mouro, judeu ou grego. Pelo fim do século surgiu na Itália cristã o mais importante e original matemático do mundo todo. A época foi tão evidentemente de transição de um ponto de vista antigo para um mais novo que C. H. Haskins denominou sua obra *The Renaissance of the Twelfth Century*[3]. O ressurgimento que ele descreveu começou, inevitavelmente, com uma série de traduções. A princípio essas foram quase exclusivamente do árabe para o latim, mas pelo século treze havia muitas variantes — do árabe para o espanhol, do árabe para o hebraico, do grego para o latim, ou combinações como do árabe para o hebraico para o latim. *Os elementos* de Euclides foi uma das primeiras obras matemáticas clássicas a aparecer em tradução latina do árabe, a versão tendo sido feita em 1142 por Adelard de Bath (cerca de 1075-1160). Não se sabe como o inglês travara conhecimento com a cultura árabe. Havia na época três pontes principais entre o mundo islâmico e o cristão — Espanha, Sicília e o Império do Oriente — e dessas a primeira era a mais importante. Adelard, no entanto, parece não ter sido um dos muitos que utilizaram a ponte intelectual espanhola. Não é fácil dizer se as cruzadas religiosas tiveram uma influência positiva sobre a transmissão da cultura, mas é provável que mais tenham interrompido que facilitado a comunicação. De qualquer modo, as vias pela Espanha e pela Sicília eram as mais importantes no século doze, e essas quase *não* foram perturbadas pelos exércitos predadores dos cruzados entre 1096 e 1272. O renascimento da cultura na Europa latina teve lugar *durante* as cruzadas, mas provavelmente *apesar* delas.

A tradução de *Os elementos* de Adelard não teve grande influência antes de haver passado mais um século, mas não foi de modo algum um acontecimento isolado. Antes disso (1126) Adelard tinha traduzido as tabelas astronômicas de al-Khowarizmi do árabe para o latim, e mais tarde (por volta de 1155) o *Almajesto* de Ptolomeu do grego para o latim. Entre os primeiros tradutores, no entanto, Adelard foi excepcional no sentido de não pertencer ao grande grupo que trabalhava na Espanha. Lá, especialmente em Toledo, onde o arcebispo encorajava tal trabalho, uma verdadeira escola de tradução se desenvolvia. A cidade, outrora uma capital visigoda, mais tarde esteve nas mãos dos mouros por vários séculos, antes de ser conquistada pelos cristãos, e era um lugar ideal para a transmissão da cultura. Nas bibliotecas de Toledo havia uma quantidade de manuscritos muçulmanos; e grande parte da população, composta de cristãos, maometanos e judeus, falava o árabe, o que facilitava o fluxo interlíngüe de informação. O cosmopolitismo dos tradutores na Espanha é evidente pelos nomes: Robert de Chester, Hermann o Dálmata, Platão de Tivoli, Rudolph de Bruges, Gerardo de Cremona, e John de Sevilha, esse um judeu convertido. Esses são apenas uns poucos dentre os homens ocupados com traduções na Espanha[4].

Dos tradutores na Espanha talvez o maior tenha sido Gerardo de Cremona (1114-1187). Tinha ido à Espanha para aprender o árabe, a fim de entender Ptolomeu, mas dedicou o resto de sua vida a traduções do árabe. Entre essas estava a tradução para o latim de uma edição revista da versão árabe de Thabit ibn Qurra de *Os elementos* de Euclides, trabalho superior ao de Adelard. Em 1175 Gerardo traduziu o *Almajesto*, e foi principalmente através dessa obra que Ptolomeu veio a ser conhecido no Ocidente. São atribuídas a Gerardo de Cremona traduções de mais de oitenta e cinco obras, mas so-

[3]Existe edição cartonada (New York: Meridian Books, 1957)

[4]Quanto a outros, ver George Sarton, *Introduction to the History of Science*, II (1), 113 e seguintes, 338 e seguintes

mente a tradução de Ptolomeu tem data. Entre as obras de Gerardo encontra-se uma adaptação em latim da *Álgebra* de al-Khowarizmi, mas em 1145 tinha sido feita uma tradução mais popular da *Álgebra* por Robert de Chester. Essa, a primeira tradução do tratado de al-Khowarizmi (como também a tradução do Corão feita por Robert alguns anos antes fora uma "primeira") pode ser tomada como marcando o início da álgebra na Europa.

Robert de Chester voltou à Inglaterra em 1150, mas a obra de tradução continuou na Espanha sem esmorecimento através de Gerardo e outros. As obras de al-Khowarizmi evidentemente estavam entre as mais traduzidas na época, e os nomes de Platão de Tivoli e John de Sevilha estão ligadas a ainda outras adaptações da *Álgebra*. Subitamente a Europa Ocidental mostrou inclinação muito maior pela matemática árabe do que jamais mostrara pela geometria grega. Parte do motivo para isso talvez fosse que a aritmética e a álgebra árabes fossem de nível muito mais elementar do que fora a geometria grega durante os dias da república e império romanos. No entanto, os romanos nunca mostraram grande interesse pela trigonometria grega, relativamente útil e elementar como era; mas os estudiosos latinos do século doze devoraram a trigonometria árabe tal como aparecia nas obras de astronomia. Foi da tradução de Robert de Chester do árabe que proveio nossa palavra "seno". Os hindus tinham dado o nome de *jiva* à metade da corda, e os árabes tinham transformado isso em *jiba*. Na língua árabe há também a palavra *jaib* que significa "baía" ou "enseada". Quando Robert de Chester veio a traduzir a palavra técnica *jiba* aparentemente confundiu-a com a palavra *jaib* (talvez devido à omissão das vogais); daí usou a palavra *sinus*, que em latim significa "baía" ou "enseada". Ás vezes era usada a frase mais específica *sinus rectus* ou "seno vertical"; daí a frase *sinus versus*, ou "seno reverso" que designava a "flecha" ou o "seno virado de lado".

Foi durante o período de traduções do século doze e no século seguinte que surgiu a confusão quanto ao nome de al-Khowarizmi que levou à palavra "algoritmo", como se explicou no capítulo precedente. Os numerais hindus tinham sido explicados aos leitores latinos por Adelard de Bath e John de Sevilha mais ou menos na mesma ocasião em que um sistema semelhante foi apresentado aos judeus por Abraham ibn Ezra (cerca de 1090-1167), autor de livros sobre astrologia, filosofia, e matemática. Assim como na cultura bizantina os numerais alfabéticos gregos, acrescidos de um símbolo especial para o zero, substituíram os numerais hindus, também Ibn Ezra usou os nove primeiros numerais alfabéticos hebraicos, e um círculo para o zero, no sistema decimal posicional para os inteiros. Apesar de surgirem numerosas exposições dos numerais indo-arábicos, a transição do sistema numérico romano para o novo foi surpreendentemente lenta. Talvez isso se devesse a que a computação com o ábaco fosse bastante comum, e nesse caso as vantagens do novo sistema não seriam tão claras quanto nos cálculos com pena e papel apenas. Durante vários séculos houve acirrada rivalidade entre os "abacistas" e os "algoristas" e somente no século dezesseis esses triunfaram definitivamente.

6 Diz-se às vezes que pelo fim da Idade Média havia duas espécies de matemáticos — os das escolas religiosas ou de universidades e os que se ocupavam de negócios e comércio — e que entre as duas havia rivalidade. Parece haver pouco fundamento para essa tese; certamente ambos os grupos participaram na difusão dos numerais indo-arábicos. No século treze autores de várias classes sociais ajudaram a popularizar o "algorismo", mas mencionaremos somente três deles: Alexandre de Villedieu (viveu por volta de 1225), era um franciscano francês; John de Halifax (cerca de 1200-1256), também conhecido como Sacrobosco, era um mestre inglês; e o terceiro era Leonardo de Pisa (cerca de 1180-1250), mais conhecido como Fibonacci ou "filho de Bonaccio", um comerciante italiano. *Carmen de algorismo* de Alexandre é um poema em que são completamente descritas as quatro operações fundamentais sobre os inteiros, usando numerais indo-arábicos e tratando o zero como um número. O *Algorismus vulgaris* de Sacrobosco era uma exposição prática da computação que rivalizava em popularidade com seu *Sphaera*, uma obra elementar sobre astronomia usada para ensino nas escolas durante todo o fim da Idade Média. O livro em que Fibonacci descreve o novo algorismo é um clássico

Gravura sobre madeira de Gregor Reisch, *Margarita Philosophica* (Freiburg, 1503). A aritmética ensina ao algorista e ao abacista, aqui impropriamente representados por Boécio e Pitágoras

célebre, completado em 1202, mas tem um título enganador — *Liber abaci* (ou livro do ábaco). *Não* é sobre o ábaco; é um tratado muito completo sobre métodos e problemas algébricos em que o uso de numerais indo-arábicos é fortemente recomendado.

O pai de Leonardo, natural de Pisa, tinha negócios no norte da África e o filho estudou com um professor muçulmano e viajou pelo Egito, Síria e Grécia. Era pois natural que Fibonacci conhecesse a fundo os métodos algébricos árabes, inclusive, felizmente, os numerais indo-arábicos e, infelizmente, a forma retórica de expressão. O *Liber abaci* se inicia com uma idéia que parece quase moderna, mas que era característica da forma de pensar medieval tanto islâmica quanto cristã — que a aritmética e a geometria são interligadas e se auxiliam mutuamente. Isso, é claro, faz lembrar a *Álgebra* de al-Khowarizmi, mas era aceito igualmente na tradição latina oriunda de Boécio. No entanto o *Liber abaci* trata muito mais de números que de geometria. Descreve primeiro "as nove cifras indianas", juntamente com o símbolo 0, "chamado zephirum em árabe". Incidentalmente é de *zephirum* e suas variantes que derivam nossas palavras "cifra" e "zero". A exposição de Fibonacci da numeração indo-arábica foi importante no processo de transmissão; mas, como vimos, não foi a primeira dessas exposições, nem alcançou a popularidade das descrições posteriores mas mais elementares, de Sacrobosco e Villedieu. A barra horizontal para frações, por exemplo, era usada regularmente por Fibonacci (e já era conhecida antes na Arábia), mas somente no século dezesseis seu uso tornou-se comum. (A barra inclinada foi sugerida em 1845 por De Morgan.)

7 O *Liber abaci*[5] não é uma leitura interessante para o leitor moderno, pois, depois de expor os processos usuais algorítmicos ou aritméticos, inclusive a extração de raízes, demora-se em problemas sobre transações comerciais, usando um complicado sistema de frações para calcular câmbios de moedas. É uma das ironias da história que a vantagem principal da notação posicional — sua aplicabilidade a frações — escapasse quase com-

[5]Não há tradução para o inglês dessa importante obra, nem mesmo uma versão latina facilmente encontrável. Está incluída no *Bulletino di Bibliografia e di Storia delle Scienze Mathematiche e Fisiche* de Baldassare Boncompagni (Roma, 1868-1887, 2 volumes). Quanto às notações usadas por Fibonacci e outros veja Florian Cajori, *A History of Mathematical Notations* (Chicago, 1928-1929, 2 volumes)

pletamente aos que usavam os numerais indo-arábicos durante os primeiros mil anos de sua existência. Quanto a isso Fibonacci tem tanta responsabilidade quanto qualquer outro, pois usou três tipos de frações — comuns, sexagesimais, e unitárias — mas não frações decimais. Na verdade, no *Liber abaci*, os dois piores dentre esses sistemas — as frações unitárias e as comuns — são muito usados. Além disso, há numerosos problemas do seguinte tipo desinteressante: Se 1 solidus imperial, que vale 12 deniers imperiais, é vendido por 31 deniers pisanos, quantos deniers pisanos se deve obter em troca de 11 deniers imperiais? Numa exposição do tipo receita acha-se com muito esforço a resposta $\frac{5}{12}28$ (ou, como escreveríamos, $28\frac{5}{12}$). Fibonacci costumava colocar a parte fracionária de um número misto antes da parte inteira. Em vez de escrever $11\frac{5}{6}$, por exemplo, ele escrevia $\frac{1}{3}\frac{1}{2}11$, a justaposição de frações unitárias e inteiros implicando adição.

Fibonacci evidentemente gostava das frações unitárias — ou julgava que seus leitores gostassem — pois o *Liber abaci* contém tabelas de conversão de frações comuns a unitárias. A fração $\frac{98}{100}$ por exemplo é decomposta em $\frac{1}{100}\frac{1}{50}\frac{1}{5}\frac{1}{4}\frac{1}{2}$ e $\frac{99}{100}$ aparece como $\frac{1}{25}\frac{1}{5}\frac{1}{4}\frac{1}{2}$. Um estranho capricho de sua notação levou-o a exprimir a soma de $\frac{1}{5}\frac{3}{4}$ e $\frac{1}{10}\frac{2}{9}$ como $\frac{1}{2}\frac{6}{9}\frac{2}{10}1$, a notação $\frac{1}{2}\frac{6}{9}\frac{2}{10}$ significando nesse caso

$$\frac{1}{2\cdot 9\cdot 10}+\frac{6}{9\cdot 10}+\frac{2}{10}$$

Assim também em outro dos muitos problemas sobre conversão de moedas no *Liber abaci* lemos que se $\frac{1}{4}\frac{2}{3}$ de um rótulo vale $\frac{1}{7}\frac{1}{6}\frac{2}{5}$ de um bizâncio, então $\frac{1\ \ 4\ \ 7}{8\ \ 9\ \ 10}$ de um bizâncio vale $\frac{3}{4}\frac{8}{10}\frac{83}{149}\frac{11}{12}$ de um rótulo. Pobre do homem de negócios medieval que devia operar com tal sistema!

8 Muito do *Liber abaci* é desinteressante, mas alguns dos problemas são tão estimulantes que foram usados por autores posteriores. Entre esses acha-se um perene, que pode ter sido sugerido por um problema semelhante no papiro Ahmes. Fibonacci propõe:

> Sete velhas foram a Roma; cada uma tinha sete mulas; cada mula carregava sete sacos, cada saco continha sete pães; e com cada pão havia sete facas; cada faca estava dentro de sete bainhas.

Sem dúvida o problema no *Liber abaci* que mais inspirou aos futuros matemáticos foi o seguinte:

> Quantos pares de coelhos serão produzidos num ano, começando com um só par, se em cada mês cada par gera um novo par que se torna produtivo a partir do segundo mês?

Esse problema célebre dá origem à "seqüência de Fibonacci" 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, . . . , u_n, . . . , onde $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$, isto é, em que cada termo após os dois primeiros é a soma dos dois imediatamente precedentes. Verificou-se que essa seqüência tem muitas propriedades belas e significativas. Por exemplo, pode-se provar que dois termos sucessivos quaisquer são primos entre si e que $\lim_{n\to\infty} u_{n-1}/u_n$ é a razão da secção áurea $(\sqrt{5}-1)/2$. A seqüência se aplica também a questões de filotaxia e crescimento orgânico[6].

9 O *Liber abaci* é o livro mais conhecido de Fibonacci, e apareceu em nova edição em 1228, mas evidentemente não foi muito amplamente apreciado nas escolas, e não foi impresso senão no século dezenove. Leonardo de Pisa foi sem dúvida o matemático mais original e capaz do mundo cristão medieval, mas muito de sua obra era demasiado

[6]Para outras propriedades matemáticas veja N. N. Vorob'ev, *Fibonacci Numbers*, traduzido por H. Mors (New York: Blaisdell, 1961); S. M. Plotnick, "The Sum of Terms of the Fibonacci Series", *Scripta Mathematica*, **9** (1943), 197. Quanto à importância da seqüência na biologia, veja D. W. Thompson, *On Growth and Form*, 2.ª edição (Cambridge University Press, 1952). Veja também números do *The Fibonacci Quartely*. Aplicações interessantes, e mais referências, são dadas em H. S. M. Coxeter, "The Golden Section, Phyllotaxis and Wythoff's Game", *Scripta Mathematica*, **19** (1953), 135-143

avançado para ser entendido por seus contemporâneos. Seus outros tratados também contêm muita coisa interessante. No *Flos*, que data de 1225, há problemas indeterminados que lembram Diofante, e problemas determinados que lembram Euclides, os árabes e os chineses.

Fibonacci evidentemente usou muitas e variadas fontes. Especialmente interessante pela combinação de algoritmo e lógica é o tratamento que deu à equação cúbica $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$. O autor exibe uma atitude quase moderna ao provar primeiro a impossibilidade da existência de raiz no sentido euclidiano, como razão de inteiros, ou da forma $a + \sqrt{b}$, onde a e b são racionais. Naquela época isso significava que não se podia achar solução exata por meios algébricos. Fibonacci então tratou de exprimir a raiz positiva aproximadamente como uma fração sexagesimal com meia dúzia de casas — 1;22,7,42,33,4,40. Esse foi um notável sucesso, mas não sabemos como o conseguiu. Talvez dos árabes tivesse aprendido o que chamamos o "método de Horner", processo conhecido já antes na China. Essa é a aproximação européia mais precisa de uma raiz irracional de uma equação algébrica conseguida até então — ou em qualquer parte da Europa pelos 300 anos seguintes e mais. É característico da época que usasse frações sexagesimais em obra matemática teórica, mas não em questões mercantis. Talvez isso explique por que os numerais indo-arábicos não foram logo usados em tabelas astronômicas como as tabelas Alfonsinas do século treze. Onde eram usadas as frações "dos físicos" (sexagesimais) havia menos urgência em substituí-las do que em relação às frações comuns e unitárias do comércio.

10 Em 1225 Leonardo de Pisa publicou não só o *Flos*, mas também o *Liber quadratorum*, uma obra brilhante sobre análise indeterminada. Essa obra, como o *Flos*, contém uma variedade de problemas, alguns dos quais provenientes das competições matemáticas realizadas na corte do imperador Frederick II, às quais Fibonacci fora convidado. Um dos problemas propostos se assemelha notavelmente aos do tipo com que Diofante se deliciava — achar um número racional tal que se se somar, ou subtrair, cinco do quadrado do número, o resultado seja o quadrado de um número racional. Tanto o problema como a solução $3\frac{5}{12}$, são dados no *Liber quadratorum*. O livro usa freqüentemente as identidades

$$\begin{aligned}(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) &= (ac + bd)^2 + (bc - ad)^2 \\ &= (ad + bc)^2 + (ac - bd)^2\end{aligned}$$

que aparecem em Diofante e foram muito usadas pelos árabes. Em alguns de seus problemas Fibonacci parece seguir de perto os árabes[7].

Fibonacci era antes de tudo um algebrista, mas escreveu também, em 1220, um livro intitulado *Practica geometriae*. Esse parece ser baseado numa versão árabe da *Divisão de figuras* de Euclides (hoje perdida) e nas obras de Heron sobre mensuração. Contém, entre outras coisas, uma prova de que as medianas de um triângulo se dividem na razão de 2 para 1, e um análogo tridimensional do teorema de Pitágoras. Continuando uma tendência babilônia e árabe, ele usava álgebra para resolver problemas geométricos.

11 Pelos poucos exemplos que demos já fica claro que Leonardo de Pisa era um matemático excepcionalmente capaz. É verdade que não teve rival à sua altura nos 900 anos de cultura européia medieval, mas não é uma figura tão isolada quanto às vezes se diz. Em Jordanus Nemorarius (data incerta) teve um contemporâneo mais jovem, competente embora menos dotado. Alguns[8] identificam esse homem com Jordanus Teutonicus ou Jordanus de Saxônia, um líder da Ordem Dominicana, que morreu em 1237. De qualquer modo, nosso Jordanus Nemorarius, ou Jordanus de Nemore, representa um lado da ciência mais aristotélico do que os outros que encontramos no século treze, e tornou-se o fundador do que às vezes se chama de escola medieval da mecânica. A ele

[7]Ver L. C. Karpinski, "The Algebra of Abu Kamil", *American Mathematical Monthly*, **21** (1914), 37-48

[8]Ver, por exemplo, D. E. Smith, *History of Mathematics*, I, 226, e George Sarton, *Introduction to the History of Science*, II (2), 613 e seguintes. A identificação é negada por Joseph Hoffman, *Geschichte der Mathematik*, 2.ª ed. (Berlim, 1963), I, 96

devemos a primeira formulação correta da lei do plano inclinado, lei que os antigos tinham buscado em vão: a força ao longo de uma trajetória inclinada é inversamente proporcional à obliqüidade, sendo a obliqüidade medida pela razão de um segmento dado da trajetória pela porção da vertical interceptada por ele[9]. Na linguagem trigonométrica isso significa que $F:P = 1/\text{cossec}\ \theta$, o que equivale à formulação moderna $F = P$ sen θ, onde P é o peso, F é a força, e θ é o ângulo de inclinação.

Jordanus escreveu livros de aritmética, geometria e astronomia, além de mecânica. Sua *Arithmetica* em particular serviu de base a comentários muito difundidos na Universidade de Paris até o século dezesseis; não era um livro sobre computação, mas uma obra quase filosófica na tradição de Nicômaco e Boécio. Contém resultados teóricos tais como o teorema que diz que todo múltiplo de um número perfeito ou abundante é abundante e que o divisor de um número perfeito é deficiente. A *Arithmetica* é significativa especialmente por usar letras em vez de numerais para denotar números, o que torna possível enunciar teoremas algébricos gerais. Nos teoremas aritméticos de *Os elementos* VII-IX de Euclides os números eram representados por segmentos de retas a que eram associadas letras, e as provas geométricas na *Álgebra* de al-Khowarizmi usavam diagramas com letras; mas todos os coeficientes nas equações usadas na *Álgebra* são números específicos, sejam representados em numerais, sejam escritos em palavras. A idéia de generalidade está contida na exposição de al-Khowarizmi, mas ele não tinha um método para exprimir algebricamente as proposições gerais que aparecem tão claramente na geometria. Na *Arithmetica* o uso de letras sugere o conceito de "parâmetro"; mas os sucessores de Jordanus em geral abandonaram o uso de letras. Parecem ter estado mais interessados nos aspectos arábicos da álgebra que se encontram em outra obra de Jordanus, *De numeris datis*, uma coleção de regras algébricas para encontrar, a partir de um número dado, outros números a ele relacionados segundo certas condições, ou para mostrar que um número satisfazendo a certas restrições especificas está determinado. Um exemplo típico é o seguinte: Se um número dado é dividido em duas partes, tais que o produto de uma parte pela outra seja dado, então cada uma das duas partes está necessariamente determinada. A regra é deselegantemente expressa por Jordanus como segue:

> Seja o número dado *abc*, e seja ele dividido em duas partes *ab* e *c*, e seja *d* o produto dado das partes *ab* e *c*. Seja *e* o quadrado de *ab* e quatro vezes *d* seja *f*, e seja *g* o resultado de subtrair *f* de *e*. Então *g* é o quadrado da diferença entre *ab* e *c*. Seja *h* a raiz quadrada de *g*. Então *h* é a diferença entre *ab* e *c*. Como *h* é conhecido, *c* e *ab* estão determinados[10].

Observe-se que o modo de Jordanus de usar letras é um tanto confuso, pois, como Euclides, às vezes ele usa duas letras para indicar um número e às vezes só uma letra. Evidentemente ele seguia Euclides ao considerar o número dado como um segmento de reta *ac* e as duas partes em que era subdividido como *ab* e *bc*; mas usa as duas letras de extremidades para designar a primeira parte do número, e somente a letra isolada *c* para representar o número do segmento de reta *bc*. Porém merece grandes elogios por ter sido o primeiro a enunciar completamente, em forma geral, a regra equivalente à resolução de uma equação quadrática. Só depois é que ele dá um exemplo específico da regra, expresso em numerais romanos: para dividir o número X em duas partes cujo produto é XXI, Jordanus efetua os passos indicados acima para achar as partes III e VII.

12 A Jordanus é também atribuído um *Algorismus* (ou *Algorithmus*) *demonstratus*, uma exposição de regras aritméticas que foi popular durante três séculos. O *Algorismus demonstratus* novamente exibe inspiração em Boécio e Euclides, bem como características algébricas arábicas. Uma preponderância ainda maior de influência de Euclides aparece na obra de Johannes Campanus de Novara (viveu por volta de 1260), capelão

[9]Ver Clagett, *The Science of Mechanics in the Middle Ages*, p. 74

[10]Para uma exposição extensa de muitos aspectos da obra de Jordanus ver Moritz Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* (1880-1908), II, 49-79

do Papa Urbano IV. A ele o fim do período medieval deve uma tradução boa de Euclides do árabe para o latim, aquela que foi a primeira a aparecer em forma impressa em 1482. Ao fazer a tradução Campanus usou várias fontes árabes, bem como a versão latina feita antes por Adelard. Tanto Jordanus como Campanus discutiram o ângulo de contato, ou em chifre, tópico que suscitou animada discussão no fim do período medieval quando a matemática tomou uma forma mais filosófica e especulativa. Campanus observou que se se compara o ângulo de contato — isto é, o ângulo formado por um arco de círculo e a tangente numa extremidade — com o ângulo entre duas retas, parece haver uma inconsistência com *Os elementos* X, 1 (Euclides), a proposição fundamental do método de exaustão. O ângulo retilíneo é evidentemente maior que o ângulo em chifre. Então, se do ângulo maior tiramos mais que a metade, e do resto tiramos mais que a metade, e se continuamos assim, de cada vez tirando mais que a metade, deveríamos chegar a um ângulo retilíneo menor que o de contato; mas isto evidentemente não é verdade. Campanus concluiu corretamente que a proposição se aplica a grandezas de mesma espécie, e que os ângulos de contato são diferentes dos ângulos retilíneos.

A semelhança de interesses entre Jordanus e Campanus transparece no fato de Campanus, no fim do Livro IV de sua tradução de *Os elementos* descrever uma trissecção do ângulo que é exatamente a mesma que tinha aparecido no *De triangulis* de Jordanus. A única diferença é que no diagrama de Campanus as letras são latinas, enquanto que no de Jordanus são grego-arábicas. A trissecção, diferente das da antiguidade, é essencialmente como segue. Seja o ângulo AOB a ser trissectado colocado com o vértice no centro de um círculo de raio qualquer $OA = OB$ (Fig. 14.1). De O traçar um raio $OC \perp OB$, e por A passar uma reta AED de tal modo que $DE = OA$. Finalmente, por O traçar a reta OF paralela a AED. Então $\angle\ FOB$ é um terço do $\angle\ AOB$, como se queria.[11]

13 O século treze apresenta um progresso tão grande com relação ao que o precede na Idade Média que ocasionalmente, e não imparcialmente, tem sido considerado como "o maior dos séculos"[12]. Vimos como, na obra de Leonardo de Pisa, a Europa Ocidental veio a rivalizar com as outras civilizações no nível de suas realizações matemáticas; mas isto era apenas uma pequena parte do que estava acontecendo com a cultura latina em seu todo. Muitas das universidades famosas — Bologna, Paris, Oxford e Cambridge — foram fundadas no fim do século doze ou início do século treze, e esse foi também o período em que as grandes catedrais góticas — Chartres, Notre Dame, Westminster, Reims — foram construídas. A filosofia e a ciência aristotélicas tinham sido recuperadas e eram ensinadas nas universidades e nas escolas religiosas. O século treze é o período dos grandes eruditos e homens da igreja como Alberto Magno, Robert Grosseteste, Tomás de Aquino e Roger Bacon. Incidentalmente, dois particularmente, Grosseteste e Bacon, sustentaram fortemente a importância da matemática no currículo escolar, embora nenhum dos dois fosse matemático. Foi durante o século treze que muitas invenções

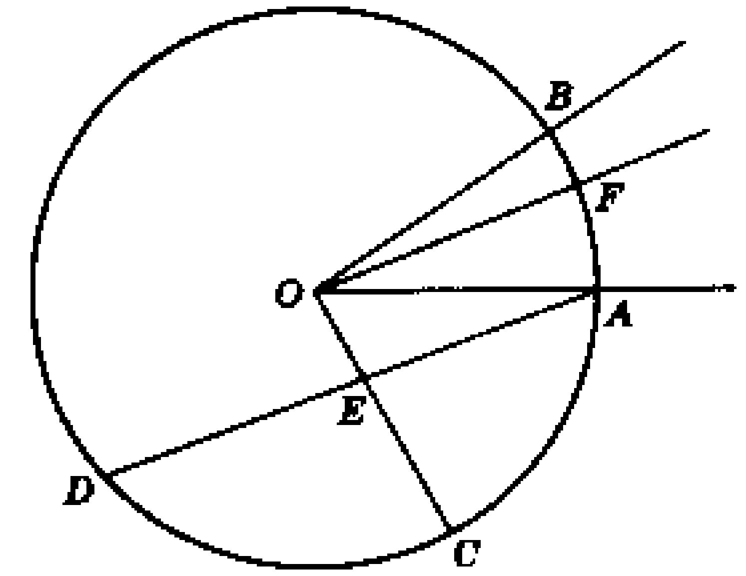


Figura 14.1

[11]Marshall Clagett, *Archimedes in the Middle Ages* (1964), I, 681. Ver também Moritz Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathenatik*, II, 75 e seguintes, 94. Uma trissecção mais sofisticada, usando o limaçon, é atribuída a Jordanus (ver Clagett, *The Science of Mechanics in the Middle Ages*, pp. 666-677)

[12]J. J. Walsh, *The Thirteenth, Greatest of Centuries* (New York, 1909)

práticas vieram a ser conhecidas na Europa — a pólvora e a bússola, ambas talvez vindas da China, e os óculos da Itália, os relógios mecânicos vindos um pouco depois.

O século doze tinha visto a grande maré de traduções do árabe para o latim, mas agora havia outras correntes de traduções. Por exemplo, a maior parte das obras de Arquimedes era virtualmente desconhecida no ocidente medieval; mas em 1269 William de Moerbeke (cerca de 1215-1286) publicou uma tradução (de que o manuscrito original foi descoberto em 1884 no Vaticano) do grego para o latim dos principais tratados científicos e matemáticos de Arquimedes. Moerbeke, que era originário de Flandres e foi feito bispo de Corinto, conhecia pouco de matemática; daí ser sua tradução excessivamente literal (o que agora é útil para reconstruir o texto grego original) e por isso de utilidade limitada, mas a partir de então a maior parte das obras de Arquimedes se tornou ao menos acessível. Na verdade, a tradução de Moerbeke incluía partes da obra de Arquimedes que evidentemente não eram familiares aos árabes, tais como o tratado *Sobre espirais*, a *Quadratura da parábola*, e *Conóides e esferóides*. No entanto, os muçulmanos puderam progredir mais na compreensão da matemática de Arquimedes do que os europeus durante o período medieval.

Durante o século doze a obra de Arquimedes não escapara totalmente à atenção do infatigável Gerardo de Cremona, que tinha vertido para o latim uma versão árabe da curta obra sobre *Medida do Círculo*, que foi usada na Europa durante vários séculos. Tinha também circulado, antes de 1269, uma parte de *Esfera e cilindro* de Arquimedes. Esses dois exemplos, no entanto, só podiam dar uma idéia muito inadequada do que Arquimedes tinha feito, e por isso a tradução de Moerbeke teve enorme importância, já que continha uma boa parte dos principais tratados. É verdade que durante os dois séculos seguintes essa versão só ocasionalmente foi usada, mas ao menos permaneceu. Foi essa tradução que Leonardo da Vinci e outros sábios da Renascença vieram a conhecer, e foi ela a primeira a ser impressa no século dezesseis[13].

14 A história da matemática não relata um desenvolvimento contínuo e de ritmo uniforme; por isso não deve causar surpresa o fato de o progresso durante o século treze perder parte de seu impulso. Não houve um equivalente latino de Papus para estimular um renovado interesse pela geometria clássica mais avançada. As obras de Papus não existiam em árabe ou latim. Mesmo o *As cônicas* de Apolônio era pouco conhecido, exceto algumas propriedades simples da parábola que apareciam nos múltiplos tratados sobre óptica, um ramo da ciência que fascinava os filósofos escolásticos. Também a mecânica atraía os estudiosos dos séculos treze e quatorze, pois agora dispunham tanto da estática de Arquimedes como da cinemática de Aristóteles.

Já observamos antes que as conclusões de Aristóteles sobre o movimento tinham sido questionadas e modificações tinham sido sugeridas, especialmente por Filoponus. Durante o século quatorze o estudo das mudanças em geral, e do movimento em particular, foi um tópico favorito nas universidades, especialmente em Oxford e Paris. Em Merton College, Oxford, os filósofos escolásticos tinham deduzido uma formulação para o movimento de velocidade com variação uniforme, que tem o nome de regra de Merton. Expressa em termos de distância e tempo, a regra diz essencialmente que se um corpo se move com movimento uniformemente acelerado, então a distância coberta será igual à que seria percorrida por outro corpo que se deslocasse com movimento uniforme durante o mesmo intervalo de tempo com velocidade igual à do primeiro no ponto médio do intervalo de tempo. Como nós o formularíamos, a regra diz que a velocidade média é a média aritmética entre as velocidades inicial e final. Na mesma época, na Universidade de Paris foi desenvolvida uma teoria do *impetus*, em que podemos reconhecer um conceito semelhante ao de inércia, mais específica e clara do que a proposta por Filoponus.

15 Os físicos do fim do período medieval constituíam um grupo numeroso, de professores de universidades e homens de igreja, mas chamamos a atenção somente sobre dois, pois esses foram também matemáticos importantes. O primeiro é Thomas Bradwardine

[13]Para mais detalhes ver Marshall Clagett, "The Impact of Archimedes on Medieval Science", *Isis*, **50** (1959), 419-429. Ver também a obra definitiva de Clagett, *Archimedes in the Middle Ages*

(1290?-1349), um filósofo, teólogo e matemático que subiu à posição de Arcebispo de Canterbury; o segundo é Nicole Oresme (1323?-1382), sábio parisiense que se tornou Bispo de Lisieux. A esses dois homens deve-se uma visão mais ampla da proporcionalidade[14]. *Os elementos* de Euclides continham uma teoria da proporção, ou igualdade de razões, logicamente firme, e essa fora aplicada pelos estudiosos antigos e medievais a questões científicas. Para um tempo dado, a distância coberta num movimento uniforme é proporcional à velocidade; e para uma distância dada, o tempo é inversamente proporcional à velocidade. Aristóteles julgara, nada corretamente, que a velocidade de um objeto sujeito a uma força propulsora atuando num meio resistente é proporcional à força e inversamente proporcional à resistência. Em certos aspectos parecia aos estudiosos posteriores que essa formulação ia contra o senso comum. Quando a força F é igual ou superior à resistência, uma velocidade V será imposta de acordo com a lei $V = KF/R$, onde K é uma constante de proporcionalidade não nula; mas, quando a resistência equilibra ou excede a força, seria de se esperar que nenhuma velocidade fosse adquirida. Para evitar esse absurdo Bradwardine usou uma teoria generalizada de proporções. Em seu *Tractatus de proportionibus* de 1328, Bradwardine desenvolveu a teoria de Boécio da proporção dupla ou tripla ou, mais geralmente, o que chamaríamos proporção "n-upla". Seus argumentos são expressos em palavras, mas em notação moderna diríamos que nesses casos quantidades variam como a segunda ou terceira ou n-ésima potência. Do mesmo modo a teoria de proporção incluía proporção subdupla ou subtripla ou sub-n-upla, em que quantidades variam como a segunda ou terceira ou n-ésima raiz. Agora Bradwardine estava em condições de propor uma alternativa para a lei de movimento de Aristóteles. Para dobrar uma velocidade que resulta de uma dada razão ou proporção F/R, ele dizia, é necessário elevar ao quadrado a razão F/R; para triplicar a velocidade deve-se elevar ao cubo a *proportio* ou razão F/R; para multiplicar por n a velocidade deve-se tomar a n-ésima potência da razão F/R. Isso equivale a afirmar que a velocidade é dada, em nossa notação, pela fórmula $V = K \log F/R$, pois $\log(F/R)^n = n \log F/R$. Isso é, se $V_0 = \log F_0/R_0$, então $V_n = \log(F_0/R_0)^n = n \log F_0/R_0 = nV_0$. Bradwardine evidentemente nunca procurou confirmação experimental de sua lei, que parece não ter sido muito aceita.

Bradwardine escreveu também várias outras obras matemáticas, todas bem dentro do espírito do seu tempo. Sua *Arithmetica* e sua *Geometria* mostram a influência de Boécio, Aristóteles, Euclides e Campanus. Bradwardine, conhecido em seu tempo como *Doctor profundus* também foi atraído por tópicos como o ângulo de contato e polígonos estrelados, ambos os quais aparecem em Campanus e em obras anteriores. Os polígonos estrelados, que incluem como caso particular os polígonos regulares, remontam à antiguidade. Um polígono estrelado é formado ligando com retas cada m-ésimo ponto, a partir de um dado ponto, dentre os n pontos que dividem um círculo em n partes iguais, onde $n > 2$ e m é primo com n. Há na *Geometria* até mesmo um toque do *Medida do círculo* de Arquimedes. O espírito filosófico de toda a obra de Bradwardine aparece mais claramente na *Geometrica speculativa* e no *Tractatus de continuo*, em que ele dizia[15] que as grandezas contínuas, embora contendo um número infinito de indivisíveis, não são formadas desses átomos matemáticos, mas são compostas de um número infinito de contínuos de mesma espécie. Diz-se, às vezes, que suas idéias se assemelham às dos modernos intuicionistas; seja como for, as especulações medievais sobre o *continuum*, populares entre os pensadores escolásticos como S. Tomás de Aquino, mais tarde influenciaram o infinito cantoriano do século dezenove.

16 Nicole Oresme viveu depois de Bradwardine, e na obra do primeiro vemos extensões das idéias do segundo. Em *De proportionibus proportionum*, escrito por volta de 1360,

[14]Ver especialmente Nicole Oresme, *De proportionibus proportionum* e *Ad pauca respicientes*, editados e traduzidos por Edward Grant (Madison, Wis.: University of Wisconsin Press, 1966). Cf. Edward Grant, "Part I of Nicole Oresme's Algorismus proportionum", *Isis*, **56** (1965), 327-341

[15]Ver Edward Stamm, "Tractatus de continuo von Thomas Bradwardina. Eine Handschrift aus dem XIV. Jahrhundert", *Isis*, **26** (1936), 13-32

Oresme generalizou a teoria da proporção de Bradwardine de modo a incluir qualquer potência de expoente racional e deu regras para combinar proporções que são equivalentes às nossas leis sobre expoentes, agora expressas como $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$ e $(x^m)^n = x^{mn}$. Para cada regra são dados exemplos específicos; e a parte final de outra obra, o *Algorismus proportionum*, aplica as regras em problemas geométricos e físicos. Oresme sugeriu também o uso de notações especiais para potências fracionárias, pois em seu *Algorismus proportionum* há expressões como

p	1
1	2

para denotar a "proporção um e um meio" — isto é, o cubo da raiz quadrada principal — e formas como

$$\frac{1 \cdot p \cdot 1}{4 \cdot 2 \cdot 2}$$

para $\sqrt[4]{2\,1/2}$. Usamos agora nossas notações simbólicas para potências e raizes sem mais pensar na lentidão com que se desenvolveram ao longo da história da matemática. Ainda mais imaginativa do que suas notações foi a sugestão de Oresme de que eram possíveis proporções irracionais. Aqui ele se esforçava por exprimir por exemplo o que escreveríamos como $x^{\sqrt{2}}$, e isso pode ser a primeira sugestão na história da matemática de uma função transcendente; mas a falta de uma terminologia e uma notação adequadas impediu-o de desenvolver efetivamente seu conceito de potências irracionais[16].

17 A noção de potência irracional pode ter sido a idéia mais brilhante de Oresme, mas não foi nesse sentido que sua influência foi maior. Por quase um século antes de seu tempo os filósofos escolásticos vinham discutindo a quantificação das "formas" variáveis, um conceito de Aristóteles aproximadamente equivalente a qualidades. Entre tais formas havia coisas como a velocidade de um objeto móvel e a variação de temperatura, de ponto para ponto, num objeto com temperatura não-uniforme. As discussões eram interminavelmente prolixas, pois os instrumentos de análise disponíveis eram inadequados. Apesar dessa falta, os lógicos em Merton College tinham obtido, como vimos, um importante teorema quanto ao valor médio de uma forma "uniformemente diforme" — isto é, uma em que a taxa de variação da taxa de variação é constante. Oresme conhecia bem esse resultado, e ocorreu-lhe em algum momento antes de 1361 um pensamento brilhante — por que não traçar uma figura ou gráfico da maneira pela qual variam as coisas[17]? Vemos aqui, é claro, uma sugestão antiga daquilo que agora chamamos representação gráfica de funções. Tudo o que é mensurável, escreveu Oresme, é imaginável na forma de quantidade contínua; por isso ele traçou um gráfico velocidade-tempo para um corpo que se move com aceleração constante. Ao longo de uma reta horizontal ele marcou pontos representando instantes de tempo (ou longitudes), e para cada instante ele traçou perpendicularmente à reta de longitudes um segmento de reta (latitude) cujo comprimento representava a velocidade. As extremidades desses segmentos, ele percebeu, jazem ao longo de uma reta; e se o movimento uniformemente acelerado parte do repouso, a totalidade dos segmentos velocidade (que chamamos ordenadas) pre-

[16]Para uma admirável exposição dessa obra ver Edward Grant, "Nichole Oresme and his *De proportionibus proportionum*", *Isis*, 51 (1960), 293-314. Cf. Edward Grant, "Bradwardine and Galileo: Equality of Velocities in the Void", *Archive for History of Exact Sciences*, 2 (1965), 344-364. Veja também as referências na nota de rodapé [14] deste capítulo

[17]Aqui, para simplicidade de exposição, sugerimos que Oresme foi o primeiro a ter essa idéia, mas isto não é necessariamente verdade. Marshall Clagett encontrou o que parece ser um gráfico mais antigo, traçado por Giovanni di Cosali, em que a reta de longitude é colocada em posição vertical. Veja Marshall Clagett, *Science of Mechanics in the Middle Ages*, pp. 332-333, 414. De qualquer modo, a exposição de Oresme é superior à de Cosali em clareza e influência, e por isso nossa exposição não falseia realmente a história

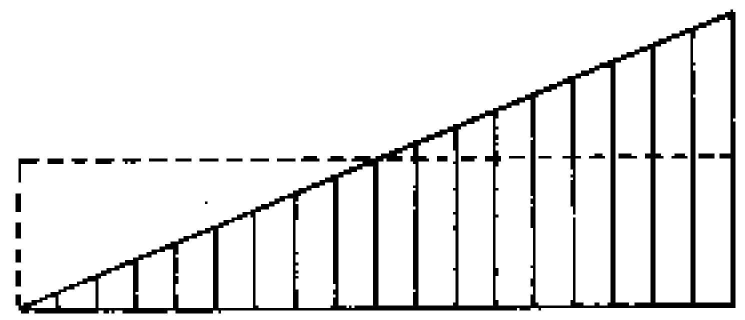


Figura 14.2

encherá um triângulo retângulo (ver Fig. 14.2). Como a área desse triângulo representa a distância percorrida, Oresme forneceu assim uma verificação geométrica da regra de Merton, pois a velocidade no ponto médio do intervalo de tempo é a metade da velocidade final. Além disso, o diagrama leva obviamente à lei de movimento usualmente atribuída a Galileu no século dezessete. Do diagrama geométrico resulta claramente que a área na primeira metade do intervalo de tempo está para a área na segunda metade na razão de 1 para 3. Se subdividirmos o tempo em três partes iguais as distâncias cobertas (dadas pelas áreas) estão na razão 1 : 3 : 5. Para quatro partes iguais, as distâncias estão na razão 1 : 3 : 5 : 7. De modo geral, como Galileu mais tarde observou, as distâncias estão entre si como os números ímpares; e como a soma dos n primeiros números ímpares consecutivos é o quadrado de n, a distância total percorrida varia como o quadrado do tempo, a familiar lei de Galileu para corpos que caem.

Os termos latitude e longitude, que Oresme usou, são equivalentes, num sentido amplo, às nossas ordenada e abscissa, e sua representação gráfica assemelha-se com nossa geometria analítica. Seu uso de coordenadas, é claro, não era novo, pois Apolônio, e outros antes dele, tinham usado sistemas de coordenadas, mas sua representação gráfica de uma quantidade variável era novidade. Parece que ele percebeu o princípio fundamental de se poder representar uma função de uma variável como uma curva, mas não soube usar eficazmente essa observação a não ser no caso de função linear. Além disso, Oresme se interessava principalmente pela área sob a curva; por isso não é muito provável que tenha visto a outra metade do princípio fundamental da geometria analítica — que uma curva plana possa ser representada, com relação a um sistema de coordenadas, como uma função de uma variável. Ao passo que dizemos que o gráfico da velocidade num movimento uniformemente acelerado é uma reta, Oresme escrevia, "Toda qualidade uniformemente diforme terminando em intensidade zero é imaginada como um triângulo retângulo". Isto é, Oresme se interessava mais pelos aspectos de cálculo da situação: (1) o modo pelo qual a função varia (isto é, a equação diferencial da curva), e (2) o modo pelo qual a área sob a curva varia (isto é, a integral da função). Ele assinalou a propriedade de inclinação constante para seu gráfico do movimento uniformemente acelerado — uma observação equivalente à equação por dois pontos de uma reta em geometria analítica e que leva ao conceito de triângulo diferencial. Além disso, ao achar a função distância, a área, Oresme evidentemente estava realizando geometricamente uma simples integração que resulta na regra de Merton. Ele não explicou por que a área sob a curva velocidade-tempo representa a distância coberta, mas é provável que pensasse na área como sendo formada de muitos segmentos verticais ou indivisíveis cada um dos quais representava uma velocidade que se mantinha por um tempo muito curto.

A representação gráfica de funções, conhecida então como a latitude de formas, continuou a ser um tópico popular desde o tempo de Oresme até o de Galileu. O *Tractatus de latitudinibus formarum*, escrito talvez por um estudante de Oresme, senão pelo próprio Oresme, apareceu em numerosas formas manuscritas e foi impresso pelo menos quatro vezes entre 1482 e 1515; mas constituía apenas um resumo de uma obra maior de Oresme intitulada *Tractatus de figuratione potentiarum et mensurarum*[18]. Aqui Oresme chegou a sugerir uma extensão a três dimensões de sua "latitude de formas" em que uma função de duas variáveis independentes era representada como um volume formado

[18]Ver especialmente dois artigos por Heinrich Wieleitner, "Der 'Tractatus de latitudinibus formarum' des Oresme", *Bibliotheca Mathematica* (3), 13 (1913), 113-145, e "Ueber den Funktionsbegriff und die graphische Darstellung bei Oresme", *Bibliotheca Mathematica* (3), 14 (1914), 193-243. Ver também Marshall Clagett, *Science of Mechanics in the Middle Ages*

de todas as ordenadas erigidas segundo uma regra, dada em pontos numa parte do plano de referência. Encontramos até uma insinuação de uma geometria de quatro dimensões quando Oresme fala em representar a intensidade de uma forma para cada ponto de um corpo ou volume de referência. O que ele realmente precisava ter era, naturalmente, uma geometria *algébrica* em vez da representação pictorial que tinha em mente; mas a fraqueza técnica prejudicou a Europa durante todo o período medieval.

8 Os matemáticos do Ocidente durante o século quatorze tinham imaginação e precisão de pensamento porém faltava-lhes técnica algébrica e geométrica; por isso suas contribuições não foram no sentido de estender a obra clássica mas no de sugerir novos pontos de vista, entre os quais um interesse por séries infinitas, um tópico essencialmente novo, antecipado apenas por alguns antigos algoritmos iterativos e pelo cálculo da soma de uma progressão geométrica infinita por Arquimedes. Ao passo que os gregos tinham um *horror infiniti*, os filósofos escolásticos do fim da Idade Média se referiam freqüentemente ao infinito, tanto como potencialidade, quanto como uma realidade (ou algo "completado"). Na Inglaterra no século quatorze um lógico, chamado Richard Suiseth (viveu por volta de 1350), mas mais conhecido como Calculator, resolveu o seguinte problema sobre latitude de formas:

> Se durante a primeira metade de um tempo dado, uma variação continua com uma certa intensidade, durante a quarta parte seguinte do intervalo continua com o dobro da intensidade, durante a oitava parte seguinte com o triplo da intensidade e assim *ad infinitum*; então a intensidade média para o intervalo todo será a intensidade de variação durante o segundo subintervalo (ou o dobro da intensidade inicial).

Isso equivale a dizer que a soma da série infinita

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\ldots+n/2^n+\ldots$$

é 2. Calculator deu uma longa e tediosa prova verbal, pois não conhecia representação gráfica, mas Oresme usou seu processo gráfico para provar mais facilmente o teorema. Oresme tratou também de outros casos, tais como

$$\frac{1\cdot 3}{4}+\frac{2\cdot 3}{16}+\frac{3\cdot 3}{64}+\cdots+\frac{n\cdot 3}{4^n}+\cdots,$$

em que a soma é 4/3. Problemas semelhantes a esses continuaram a ocupar os estudiosos durante o século e meio seguintes[19].

Entre outras contribuições de Oresme às séries infinitas encontra-se sua demonstração, evidentemente a primeira na história da matemática, de que a série harmônica é divergente. Ele agrupou os termos sucessivos da série

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots,$$

colocando primeiro termo no primeiro grupo, os dois termos seguintes no segundo grupo, os quatro termos seguintes no terceiro grupo, e assim por diante, o m-ésimo grupo contendo 2^{m-1} termos. Então é evidente que temos uma infinidade de grupos e que a soma dos termos em cada grupo é pelo menos 1/2. Logo somando um número suficiente de termos em ordem podemos superar qualquer número dado[20].

9 Acompanhamos a história da matemática na Europa através da Idade das Trevas desde os primeiros séculos medievais ao ponto alto no tempo dos escolásticos. Desde o nadir no sétimo século até a obra de Fibonacci e Oresme no século treze e no quatorze o progresso foi notável; mas os esforços somados de todas as civilizações medievais não foram em nenhum sentido comparáveis às realizações matemáticas da Grécia antiga.

[19]Para mais detalhes ver C. B. Boyer, *History of the Calculus* (1959), pp. 86-87, e H. Busard, "Über unendliche Reihen im Mittelalter", *L'Enseignement Mathématique*, **8**, N.os 3-4 (1962)

[20]Ver John Murdoch, "Oresme's Commentary on Euclid", *Scripta Mathematica*, **27** (1964), 67-91

O progresso da matemática não foi continuamente ascendente em nenhuma parte do mundo — Babilônia, Grécia, China, Arábia ou o mundo romano — e não deve constituir surpresa que na Europa ocidental um declínio se inicie após a obra de Bradwardine e Oresme. Em 1349 Thomas Bradwardine tinha sucumbido perante a peste negra, a pior peste que jamais assolou a Europa. As avaliações do número dos que morreram da epidemia no curto espaço de um ou dois anos variam entre um terço e metade da população. A catástrofe inevitavelmente causou severas perturbações e quebra de espírito. Se observarmos que a Inglaterra e a França, as nações que tinham assumido a liderança na matemática do século quatorze, foram além disso devastadas pela Guerra dos Cem Anos e pela Guerra das Rosas, o declínio da cultura será compreensível. As universidades italianas, alemãs e polonesas durante o século quinze tomaram a frente na matemática ao escolasticismo decadente de Oxford e Paris, e é principalmente aos representantes desses países que agora nos voltamos.

BIBLIOGRAFIA

Boncompagni, Baldassare, ed., *Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze mathematische e fisiche* (Rome, 1868-1887, 20 volumes; reimpressão, New York: Johnson Reprint)

Boyer, C. B., *History of the Calculus* (edição em brochura, New York: Dover, 1959)

Busard, H., "Über unendliche Reihen im Mittelalter", *L'Enseignement Mathématique*, **8**, N.os 3-4 (1962)

Cantor, Moritz, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* (Leipzig: Teubner, 1900-1908, 4 volumes)

Clagett, Marshall, *The Science of Mechanics in the Middle Ages* (Madison, Wis.: University of Wisconsin Press, 1959)

Clagett, Marshall, *Archimedes in the Middle Ages* (Madison, Wis.: University of Wisconsin Press, 1964, 2 volumes)

Duhem, Pierre, *Les origines de la statique* (Paris, 1905-1906, 2 volumes)

Ginsburg, Benjamin, "Duhem and Jordanus Nemorarius", *Isis*, **25** (1936), 340-362

Grant, Edward, "Bradwardine and Galileo: Equality of Velocities in the Void", *Archive for History of Exact Sciences*, **2** (1965), 344-364

Grant, Edward, "Nicole Oresme and his *De proportionibus proportionum*", *Isis*, **51** (1960), 293-314

Grant, Edward, "Part I of Nicole Oresme's Algorismus proportionum", *Isis*, **56** (1965), 327-341

Grant, Edward, ed., *Nicole Oresme: De proportionibus proportionum and Ad pauca respicientes* (Madison, Wis.: University of Wisconsin Press, 1966)

Hill, G. F., *The Development of Arabic Numerals in Europe* (Oxford: Clarendon, 1915)

Murdoch, John, "Oresme's Commentary on Euclid", *Scripta Mathematica*, **27** (1964), 67-91

Sarton, George, *Introduction to the History of Science* (Baltimore: Carnegie Institution of Washington, 1927-1948, 3 volumes em 5)

Smith, D. E., *History of Mathematics* (Boston: Ginn, 1923-1925, 2 vols.; reimpressão em brochura, New York: Dover, 1958)

Smith, D. E., e L. C. Karpinski, *The Hindu-Arabic Numerals* (Boston: Ginn, 1911)

Sullivan, J. W. N., *The History of Mathematics in Europe from the Fall of Greek Science to the Rise of the Conception of Mathematical Rigour* (New York: Oxford University Press, 1925)

Wieleitner, Heinrich, "Der 'Tractatus de latitudinibus formarum' des Oresme", *Bibliotheca Mathematica* (3), **13** (1913), 113-145

Wieleitner, Heinrich, "Ueber den Funktionsbegriff und die graphische Darstellung bei Oresme", *Bibliotheca Mathematica* (3), **14** (1914), 193-243

Wieleitner, Heinrich, "Zur Geschichte der unendlichen Reihen im christlichen Mittelalter", *Bibliotheca Mathematica* (3), **14** (1914), 150-168

Youschkevitch, A. P., *Geschichte der Mathematik im Mittelalter* (Leipzig: Teubner, 1964)

EXERCÍCIOS

1. Compare a obra matemática de um representante, que tenha vivido por volta do ano 500, de cada uma das civilizações seguintes: China, Índia, Roma, Grécia.
2. De que maneiras é provável que as cruzadas tenham ajudado ou prejudicado a transmissão da matemática do Islam para o mundo cristão?
3. A Europa Ocidental em 1150 tinha contatos mais fortes com o mundo árabe ou com o grego? Qual tinha relativamente mais a oferecer em matemática? Dê razões para suas respostas.

4. Quais dos seguintes — Euclides, Arquimedes, Apolônio, Diofante, Boécio, al-Khowarizmi — acha você que foram os três autores matemáticos mais influentes na Europa de 1250? Dê razões.

5. Compare as fontes de apoio para os matemáticos da Europa medieval com as da Arábia medieval.

6. Escreva o número 980 765 na notação de Planudes.

7. Para um círculo unitário exprima o seno reverso de um ângulo em termos do seno do mesmo ângulo. Explique como surgiram os termos seno e seno reverso.

8. Verifique a resposta dada por Fibonacci no problema (veja o texto) de converter uma fração de bizantium em fração de rotulus.

9. Ache à razão de u_{12} para u_{13} na seqüência de Fibonacci. Até quantos algarismos significativos isso coincide com a razão da secção áurea?

10. Prove que a cúbica de Fibonacci $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$ não têm raiz racional.

11. Prove que a equação no Exerc. 10 não tem raiz da forma $a + \sqrt{b}$, onde a e b são racionais.

12. Ache até o centésimo mais próximo uma raiz da cúbica no Exerc. 10 e prove que até esse ponto a resposta de Fibonacci e a sua concordam.

13. Verifique a regra de Jordanus (veja o texto) para dividir um "número dado *abc*."

14. Prove a construção para trissecção de Jordanus-Campanus.

15. Usando a lei de Bradwardine, e supondo que uma força de 10 kg produz num corpo uma velocidade de 20 m/s contra uma resistência de 2 kg, que velocidade será produzida no corpo contra a mesma resistência por uma força de 40 kg?

16. Trace o polígono estrelado de Bradwardine para onze pontos num círculo se ligarmos cada sétimo ponto na ordem.

17. Prove para uma subdivisão do intervalo de tempo em três partes iguais que a razão 1:3:5 de Oresme, para as distâncias percorridas, está correta.

*18. Verifique a somação do Calculator para a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}.$$

*19. Verifique a somação de Oresme da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{4^n}.$$

*20. Prove, usando o método de Oresme, que a série

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\cdots$$

é divergente.

Capítulo **15**

O Renascimento

> Porei, como muitas vezes uso no trabalho, um par de paralelas, ou retas gêmeas de um comprimento, assim: ═══ porque duas coisas não podem ser mais iguais.
>
> *Robert Recorde*

1 A queda de Constantinopla em 1453 representou o colapso do Império Bizantino, e serve como um marco cronológico conveniente na história dos acontecimentos políticos. A importância da data para a história da matemática, no entanto, é discutível. Afirma-se freqüentemente que por essa ocasião refugiados que escaparam para a Itália levaram manuscritos preciosos de antigos tratados gregos, e assim puseram o mundo europeu ocidental em contato com obras da antiguidade. É provável, porém, que a queda da cidade tivesse exatamente o efeito oposto: agora o Ocidente já não contava com o que tinha sido uma segura fonte de material manuscrito de clássicos da antiguidade, tanto literários quanto matemáticos. Qualquer que seja a decisão final quanto a esse ponto, não pode haver dúvida de que na metade do século quinze a atividade matemática estava outra vez aumentando. A Europa estava se recuperando do choque físico e espiritual da peste negra, e a invenção então recente da impressão com tipos móveis tornava possível uma difusão muito maior do que em qualquer período anterior de obras eruditas. O primeiro livro impresso na Europa Ocidental data de 1447, e pelo fim do século mais de 30 000 edições de várias obras estavam circulando. Dessas, poucas eram obras matemáticas; mas essas poucas, junto com os manuscritos existentes, forneceram uma base para expansão. A recuperação de clássicos geométricos gregos não familiares foi a princípio menos significativa do que a impressão de traduções medievais latinas de tratados árabes de álgebra e aritmética, pois poucos homens do século quinze liam grego ou conheciam suficientemente a matemática para tirar proveito das obras dos melhores geômetras gregos. Uma parte substancial dos tratados de Arquimedes, na verdade, já existia em latim na tradução de William de Moerbeke, mas com pouco resultado pois poucos podiam apreciar a matemática clássica. Quanto a isto a matemática diferia da literatura, e mesmo das ciências naturais. À medida que os humanistas dos séculos quinze e dezesseis se enamoravam mais profundamente dos tesouros gregos redescobertos nas ciências e nas artes, sua apreciação pelas realizações latinas e árabes imediatamente precedentes baixava. A matemática clássica, excetuadas as partes mais elementares de *Os elementos* de Euclides, era uma disciplina intensamente esotérica, só acessível aos que tinham grande preparo prévio; por isso a revelação dos tratados gregos nesse campo a princípio não interferiu muito no prosseguimento da tradição medieval. Os estudos medievais latinos de geometria elementar e teoria das proporções, bem como as contribuições árabes às operações aritméticas e métodos algébricos, não apresentavam dificuldades comparáveis às associadas às obras de Arquimedes e Apolônio. Os ramos mais elementares é que iam chamar a atenção e aparecer em obras impressas.

2 Oresme tinha dito que tudo o que é mensurável pode ser representado por uma reta (latitude); e durante o início do Renascimento se desenvolveu uma matemática da mensuração, tanto do ponto de vista teórico como prático. Um ponto de vista análogo foi adotado por Nicholas de Cusa (1401-1464), um homem que representa bem os pontos fracos de sua época, pois estava na linha fronteiriça entre os tempos medievais e o período moderno. (Cusa era o nome latino de uma cidade sobre o Mosela.) Nicholas percebeu que uma fraqueza escolástica na ciência tinha sido a falta de medidas; *mens*, julgava ele, era etimologicamente ligado a *mensura*, de modo que o conhecimento deve

Frontispício da primeira versão inglesa dos *Elementos* de Euclides (Londres, 1570). A tradução é apresentada como de Sir Henry Billingsley, que mais tarde foi Lord Mayor de Londres, mas parte dela, ou toda, pode ser de John Dee, que escreveu o prefácio

ser baseado em medidas. Cusa (ou Cusanus, a forma latina) também foi influenciado pela preocupação humanista com a antiguidade e adotou idéias neoplatônicas. Além disso, ele tinha acesso a uma tradução de parte da obra de Arquimedes feita em 1450 por Jacob de Cremona. Mas, infelizmente, Nicholas de Cusa era melhor eclesiástico

do que matemático[1]. Na Igreja ele subiu ao posto de cardeal, mas no domínio da matemática ele é conhecido como um desorientado quadrador-de-círculo. Sua doutrina filosófica da "concordância de contrários" levou-o a acreditar que máximos e mínimos são relacionados, portanto que o círculo (um polígono com o maior número possível de lados) deve ser reconciliável com o triângulo (o polígono com o menor número possível de lados). Ele acreditava que tomando médias de polígonos inscritos e circunscritos tinha chegado à quadratura. Que estivesse errado é menos importante que o fato de ser ele um dos primeiros europeus modernos a atacar um problema que havia fascinado as melhores mentes da antiguidade, e que seu esforço estimulasse seus contemporâneos a criticar sua obra.

3 Entre os que apontaram o erro no raciocínio de Cusa estava Regiomontanus (1436-1476), provavelmente o matemático mais influente do século quinze, cuja data de nascimento pode bem servir para marcar o início da nova era. Tendo estudado nas universidades de Leipzig e Viena, onde se desenvolveu seu amor à matemática e à astronomia, Regiomontanus acompanhou o Cardeal Bessarion a Roma, onde adquiriu bom conhecimento do grego e entrou em contato com as diversas correntes do pensamento cien-

Frontispício de Gregor Reisch, *Margarita philosophica* (1503). Ao redor da figura de três cabeças no centro estão agrupadas as sete artes liberais, com a aritmética sentaba no meio e segurando um ábaco

[1]Para uma exposição demasiadamente apreciativa de sua obra veja Max Simon, *Cusanus als Mathematiker* (Strassburg, 1911, em *Festchrift Heinrich Weber*, Leipzig e Berlin: Teubner, 1912, pp. 298-337). Para uma edição moderna (em alemão) das obras de Nicholas de Cusa ver seus *Mathematische Schriften*, ed. por J. E. Hofmann, (Hamburg: F. Meiner, cerca de 1952, 1950)

tífico e filosófico. Bessarion, que fora Arcebispo de Niceia, obtivera um chapéu cardinalício do Papa Eugênio IV em Roma (1439) por seus esforços para reunir as igrejas grega e latina. Tornou-se assim um elo entre a cultura clássica preservada em Constantinopla e o novo movimento renascentista no Ocidente. Provavelmente foi sua associação com o cardeal que inspirou em Regiomontanus a ambição de adquirir, traduzir e publicar o legado científico da antiguidade. Depois de viajar e estudar na Itália Regiomontanus voltou à Alemanha, onde estabeleceu uma impressora e um observatório em Nuremberg a fim de estimular a ciência e a literatura. Esperava imprimir traduções de Arquimedes, Apolônio, Heron, Ptolomeu e outros cientistas, mas sua morte trágica aos quarenta anos cortou seu ambicioso projeto. Em 1475 ele tinha sido convidado a ir a Roma pelo papa Sixto IV a fim de tomar parte numa das eternas tentativas de reformar o calendário, mas morreu lá (dizem alguns que envenenado por inimigos), logo depois de chegar. A lista dos livros que ele projetava imprimir se preservou[2] e indica que certamente o desenvolvimento da matemática se teria acelerado se ele tivesse sobrevivido. Por seus interesses amplos e variados ele era um típico "homem da Renascença", como indica o nome que adotou. Tinha nascido como "Johann Müller de Königsberg", mas como outros de seu tempo ele preferia ser conhecido pela forma latina de seu lugar natal, a germânica Königsberg ("montanha do rei") tornando-se Regiomontanus.

Regiomontanus tinha travado conhecimento, durante sua estada na Itália, com algumas das figuras de maior relevo de seu tempo, e manteve correspondência com outros sobre assuntos correntes. Seus interesses eram muitos, mas parece ter tido pouca simpatia pelo tipo de pensamento especulativo de Nicholas de Cusa, a quem criticou severamente. Na astronomia sua principal contribuição foi completar uma nova versão latina, começada por seu professor em Viena, Georg Peuerbach (1423-1469), do *Almajesto* de Ptolomeu. O *Theoricae novae planetarum* de Peuerbach, um novo texto de astronomia que foi publicado pela empresa de Regiomontanus em 1472, representava um progresso sobre o *Esferas* de Sacrobosco de que se encontravam cópias por toda parte; mas os humanistas sentiam necessidade de uma edição latina do *Almajesto* melhor do que a versão medieval derivada do árabe. (Os humanistas insistiam na elegância e na pureza em suas línguas clássicas; por isso detestavam o bárbaro latim medieval, assim como o árabe de que muitas vezes ele derivava.) Peuerbach projetara uma viagem à Itália com Regiomontanus para procurar uma boa cópia manuscrita, mas morreu prematuramente e recaiu sobre seu aluno a tarefa de completar o projeto. O plano de traduções de Regiomontanus resultou também em textos de sua autoria. Seu *Epitome do Almajesto de Ptolomeu* merece menção por dar ênfase a partes matemáticas que muitas vezes tinham sido omitidas em comentários que tratavam de astronomia descritiva elementar. De maior importância para a matemática, no entanto, foi seu *De triangulis omnimodis*, uma exposição sistemática dos métodos para resolver triângulos que marcou o renascimento da trigonometria.

Obras novas de astronomia invariavelmente eram acompanhadas de tabelas de funções trigonométricas, e as obras de Peuerbach incluíam uma nova tabela de senos. Nesses casos, no entanto, a trigonometria servia apenas como serva da astronomia. Na Índia, onde a função seno evidentemente nasceu, tinha havido pouco interesse por essa função, exceto quanto ao seu papel nos sistemas astronômicos ou *Siddhāntas*. Mesmo entre os árabes, para os quais o interesse pela trigonometria só era superado pelo interesse pela álgebra, o assunto não tivera existência independente, exceto no *Tratado sobre quadrilátero* de Nasir Eddin, obra que devia mais aos gregos do que aos hindus. A época de traduções na Europa no século doze incluíra alguma trigonometria árabe, mas por vários séculos as contribuições latinas foram só imitações pálidas das árabes. A *Practica geometriae* de Fibonacci e as obras de Bradwardine continham alguns elementos de trigonometria recolhidos de fontes árabes, mas foi só quando Regiomontanus começou a escrever seu *De triangulis*, que a Europa adquiriu preeminência nesse campo. Parece

[2]Ver George Sarton, "The Scientific Literature Transmitted Through the Incunabula", *Osiris*, 5 (1938), 41-247

que Regiomontanus conhecia a obra de Nasir Eddin, e pode ser essa a origem de seu desejo de organizar a trigonometria como disciplina independente da astronomia.

O primeiro livro de *De triangulis*, escrito por volta de 1464, começa com noções fundamentais, derivadas em grande parte de Euclides, sobre grandezas e razões; vêm, a seguir, mais de cinqüenta proposições sobre a resolução de triângulos, usando as propriedades dos triângulos retângulos. O segundo livro começa com um enunciado claro e uma prova da lei dos senos, e depois inclui problemas sobre determinação de lados, ângulos e áreas de triângulos planos, dadas condições determinadas. Entre os problemas, por exemplo, está o seguinte: Se a base de um triângulo e o ângulo oposto são conhecidos, e se damos ou a altura relativa à base ou a área, então os lados podem ser determinados. O terceiro livro contém teoremas do tipo encontrado nos antigos textos gregos sobre "esféricos" antes do uso da trigonometria. O quarto livro trata de trigonometria esférica, incluindo a lei esférica dos senos.

O uso de "fórmulas" de área, escritas em palavras, era uma das novidades no *De triangulis* de Regiomontanus, mas no evitar a função tangente mostra-se inferior ao tratamento de Nasir Eddin. No entanto a função tangente foi incluída em outro tratado de trigonometria de Regiomontanus — *Tabulae directionum*. Revisões de Ptolomeu tinham sugerido a necessidade de novas tabelas, e essas foram fornecidas por diversos astrônomos do século quinze, entre os quais Regiomontanus. A fim de evitar frações era costume tomar um valor grande para o raio do círculo, ou o *sinus totus*. Para uma de suas tabelas de senos Regiomontanus acompanhou seus predecessores imediatos usando um raio de 600 000; para outras usou 10 000 000 ou 600 000 000. Para sua tabela de tangentes em *Tabulae directionum* ele escolheu 100 000. Ele não chama a função de "tangente", mas usa apenas a palavra *numerus* para os valores, grau por grau, numa tabulação com o título *Tabula fecunda*. O valor dado para 89° é 5 729,796, e para 90° simplesmente *infinito*.

A morte súbita de Regiomontanus deu-se antes de serem publicadas suas duas obras trigonométricas, e isso atrasou consideravelmente seu efeito. O *Tabulae directionum* foi publicado em 1490, mas o tratado mais importante, *De triangulis*, só apareceu impresso em 1533 (e novamente em 1561). No entanto, as obras eram conhecidas em forma manuscrita pelo grupo de matemáticos em Nuremberg, onde Regiomontanus estava trabalhando, e é muito provável que tenham influenciado trabalhos do começo do século dezesseis[3]. Durante cem anos depois da queda de Constantinopla as cidades da Europa central notadamente Viena, Cracóvia, Praga e Nuremberg foram líderes em astronomia e matemática. A última dessas tornou-se um centro de impressão de livros (bem como de erudição, arte e invenção) e alguns dos maiores clássicos científicos foram publicados lá em meados do século dezesseis.

4 Um estudo geral de triângulos levou Regiomontanus a considerar problemas de construção geométrica um tanto reminiscentes da *Divisão de figuras* de Euclides. Por exemplo pede-se construir um triângulo dados um lado, a altura relativa a ele, e a razão dos dois outros. Aqui, no entanto, encontramos uma divergência importante quanto ao uso antigo: ao passo que em Euclides os problemas invariavelmente eram dados em termos de quantidades gerais, Regiomontanus dava a seus segmentos valores numéricos específicos, mesmo quando pretendia que seus métodos fossem gerais. Isso lhe permitia usar os métodos algorítmicos desenvolvidos pelos algebristas árabes e transmitidos à Europa nas traduções do século doze. No problema de construção acima, um dos lados desconhecidos pode ser expresso como raiz de uma equação quadrática com coeficientes numéricos conhecidos, e essa raiz pode ser construída por métodos familiares de *Os elementos* de Euclides, ou da *Álgebra* de al-Khowarizmi. (Como Regiomontanus o exprimiu, ele tomava uma parte como sendo a "coisa" e depois resolvia pela regra da "coisa" e "quadrado" — isto é, por equações quadráticas.) Outro problema em que Regiomontanus

[3]Uma exposição extensa de sua obra e influência está incluída em Irmã Mary Claudia Zeller, *The Development of Trigonometry from Regiomontanus to Pitiscus* (1944). Há uma tradução para o inglês do *De triangulis* com o título *Regiomontanus On Triangles*, ed. por Barnabas Hughes (1967)

pedia a construção de um quadrilátero cíclico, dados os quatro lados, pode ser tratado de modo semelhante.

A álgebra de Regiomontanus, como a dos árabes, era retórica. A *Arithmetica* de Diofante, em que alguma sincopação fora adotada, era conhecida em grego por Regiomontanus, que esperava traduzi-la; mas foi de al-Khowarizmi que a Europa aprendeu os processos algébricos rotineiros. Afinal, a *Arithmetica* dizia respeito, principalmente, aos aspectos mais recônditos da teoria dos números. Além disso, Regiomontanus não chegou a publicá-la, e por mais um século poucos estudiosos latinos tiveram idéia de seu conteúdo, até que em 1575 ela apareceu em latim. Na verdade, a influência de Regiomontanus sobre a álgebra foi reduzida não só por sua adesão à forma retórica de expressão e por sua morte prematura. Seus manuscritos, após sua morte, vieram às mãos de um patrono de Nuremberg que não tornou a obra efetivamente acessível à posteridade. A Europa aprendeu sua álgebra penosa e lentamente da escassa tradição grega, árabe e latina que fluía aos poucos pelas universidades, pelos escribas da igreja, pelas crescentes atividades mercantis e por estudiosos de outros campos.

5 Regiomontanus se situava num momento crítico na história da ciência, e ele tinha os gostos e capacidades adequados para tirar o máximo proveito disso. Seu amor pela cultura clássica era compartilhado pelos humanistas, mas diferentemente desses ele tinha forte inclinação pela ciência. Além disso, ele não participava do desprezo dos humanistas para com a cultura árabe e escolástica, e era um homem da Renascença em sua preocupação com as artes práticas além da erudição. Que melhor combinação poderia ter um cientista moderno que uma boa biblioteca, um observatório, uma impressora e amor ao conhecimento? Regiomontanus sabia, por seu contato com averroístas nas universidades italianas, que os astrônomos árabes se tinham preocupado com as inconsistências entre os esquemas de Aristóteles e Ptolomeu; e sem dúvida sabia também que Oresme e Cusa tinham considerado seriamente a possibilidade de que a terra se movesse. Conta-se que ele planejou reformar a astronomia; se tivesse vivido, poderia ter-se antecipado a Copérnico. Sua morte prematura cortou cerce todos esses projetos, e a astronomia e a matemática tiveram que confiar em outros para os passos seguintes, inclusive em particular em um francês que foi uma figura isolada da corrente principal de desenvolvimento.

6 A Alemanha e a Itália forneceram a maior parte dos matemáticos do início da Renascença, mas em 1484 foi composto na França um manuscrito que em nível e importância foi talvez o mais notável desde o *Liber abaci* de Fibonacci, de quase três séculos antes, e que, como o *Liber abaci* só foi impresso no século dezenove. Essa obra, intitulada *Triparty en la science des nombres*, foi escrita por Nicolas Chuquet (morreu por volta de 1500), de quem quase nada sabemos exceto que nasceu em Paris, bacharelou-se em medicina e praticou em Lyon. O *Triparty* não se parece muito com qualquer obra anterior de aritmética ou álgebra, e os únicos autores que nela são citados são Boécio e Campanus. Há evidência de influência italiana, que talvez resulte de o autor conhecer o *Liber abaci* de Fibonacci.

A primeira das "Três Partes" diz respeito às operações aritméticas racionais sobre os números, incluindo uma explicação dos numerais indo-arábicos. Sobre esses, Chuquet diz que "o décimo numeral não tem ou significa um valor, e por isso é chamado cifra ou nada ou numeral sem valor". A obra é essencialmente retórica, sendo as quatro operações fundamentais indicadas pelas palavras e frases *plus*, *moins*, *multiplier par*, e *partyr par*, as duas primeiras às vezes abreviadas à maneira medieval como $\bar{p}$ e $\bar{m}$. Ao tratar de cálculo de médias, Chuquet dá uma *regle des nombres moyens* segundo a qual $(a + c)/(b + d)$ está entre a/b e c/d se a, b, c, d são números positivos. Na segunda parte, que trata de raízes de números, há alguma sincopação, de modo que a expressão moderna $\sqrt{14 - \sqrt{180}}$ aparece na forma não muito diferente R)^2 . 14 . $\bar{m}$. R)^{2}180.

A última parte, sem dúvida a mais importante, do *Triparty*, diz respeito à *"Regle des premiers"* — isto é, a regra da incógnita, ou o que chamaríamos de álgebra. Durante os séculos quinze e dezesseis vários nomes foram dados à coisa desconhecida, tais como *res* (em latim), ou *chose* (em francês) ou *cosa* (em italiano) ou *coss* (em alemão); o termo de Chuquet *premier* não é usual nesse contexto. A segunda potência ele chamava *champs* (ao passo que o termo latino era *census*), a terceira *cubiez*, e a quarta *champs de champ*. Para múltiplos dessas Chuquet inventou uma notação exponencial de grande importância. A *denominacion* ou potência da quantidade desconhecida era indicada por um expoente associado ao coeficiente do termo, de modo que nossas expressões modernas $5x$ e $6x^2$ e $10x^3$ apareciam em *Triparty* como .5.^{1} e .6.^{2} e .10.^{3}. Ainda mais, expoentes zero e negativos também aparecem juntamente com as potências inteiras positivas, de modo que nosso $9x^0$ ficava .9.^{0}, e $9x^{-2}$ era escrito como .9.$^{2.m.}$, isto é, .9. *seconds moins*. Uma tal notação revelava as leis dos expoentes, que Chuquet pode ter conhecido através da obra de Oresme sobre proporções. Chuquet escreveu, por exemplo, que .72.^{1} dividido por .8.^{3} dá .9.$^{2.m}$ — isto é, $72x : 8x^3 = 9x^{-2}$. Sua observação sobre as relações entre as potências do número dois se relaciona com essas leis, os índices dessas potências sendo colocados numa tabela de 0 a 20, em que as somas dos índices correspondem aos produtos das potências. Exceto por serem tão grandes as lacunas isso seria uma tabela de logaritmos em miniatura. Durante o século seguinte observações semelhantes às de Chuquet seriam repetidas várias vezes, e certamente tiveram um papel na invenção dos logaritmos.

A segunda metade da última parte de *Triparty* trata da resolução de equações. Aqui se encontram muitos dos problemas que haviam aparecido em seus predecessores, mas há pelo menos uma novidade importante. Ao escrever .4.^{1} egaulx a $\bar{m}$.2.^{0} — isto é, $4x = -2$ — Chuquet estava pela primeira vez exprimindo um número negativo isolado numa equação algébrica. Em geral ele rejeitava o zero como raiz de uma equação, mas ocasionalmente ele observava que o número procurado era zero. Ao considerar equações da forma $ax^m + bx^{m+n} = cx^{m+2n}$ (onde os coeficientes e expoentes são números inteiros positivos específicos), ele descobriu que algumas traziam soluções imaginárias; nesses casos ele dizia simplesmente, *"Tel nombre est ineperible"*[4].

O *Triparty* de Chuquet, como o *Collectio* de Papus, é um livro em que não se pode avaliar o grau de originalidade do autor. Ambos evidentemente deviam muito a seus predecessores imediatos, mas não somos capazes de identificar nenhum desses. Além disso, no caso de Chuquet, não podemos avaliar sua influência sobre autores posteriores. O *Triparty* só foi impresso em 1880, e provavelmente poucos matemáticos o conheciam; mas um daqueles, em cujas mãos ele caiu, usou tão grande parte do material que pode ser acusado de plágio, embora mencionasse o nome de Chuquet. A *Larismethique nouvellement composee*, publicada em Lyons por Etienne de la Roche em 1520 e de novo em 1538, dependia pesadamente, agora o sabemos, de Chuquet; por isso pode-se dizer com segurança que o *Triparty* não deixou de ter efeitos.

7 A mais antiga álgebra de Renascença, a de Chuquet, foi escrita por um francês, mas a álgebra mais conhecida desse período foi publicada dez anos depois na Itália. Na verdade, a *Summa de arithmetica, geometrica, proportioni et proportionalita* do frade Luca Pacioli (1445-1514) obscureceu tanto o *Triparty* que as exposições históricas mais antigas da álgebra saltam diretamente do *Liber abaci* de 1202 para a *Summa* de 1494, sem mencionar a obra de Chuquet ou de outros do período intermediário. No entanto, o caminho para a *Summa* tinha sido preparado por uma geração de algebristas, pois a *Álgebra* de al-Khowarizmi foi traduzida para o italiano ao menos por volta de 1464, a data de uma cópia manuscrita na Plimpton Collection em Nova York; o autor desse manuscrito afirma que baseou sua obra em numerosos predecessores nesse campo, citando

[4]Boas exposições dessa obra se encontram em Ch. Lambo, S. J., "Une algèbre française de 1484. Nicolas Chuquet". *Revue des Questions Scientifiques*, (3), 2 (1902), 442-472, e em Aristide Marre, "Notice sur Nicolas Chuquet et son Triparty en la science des nombres", *Bulletino di Bibliografia e di Storia delle Scienze Matematiche e Fisiche*, **13** (1880), 555-659, 693-814; **14** (1881), 413-460

por nome alguns do século quatorze. Supõe-se frequentemente que o renascimento na ciência foi resultado da recuperação de obras gregas antigas; mas na matemática ele se caracterizou principalmente pelo surto da álgebra, e nisso era apenas uma continuação da tradição medieval. Regiomontanus conhecia bem o grego, mas não partilhava da apoteose do helenismo dos humanistas, e estava pronto a reconhecer a importância da álgebra medieval árabe e latina. Ele evidentemente conhecia as obras de al-Khowarizmi e Fibonacci e tinha projetado imprimir o *De numeris datis* de Jordanus Nemorarius. Se Regiomontanus tivesse realizado seus planos de publicação, a *Summa* de Pacioli (ou Paciuolo) certamente não seria considerada hoje a primeira obra impressa de álgebra.

A *Summa*, concluída em 1487, teve influência superior à sua originalidade. É uma notável compilação (com fontes de informação não indicadas em geral) de material em quatro campos: aritmética, álgebra, geometria euclidiana muito elementar, e contabilidade. Pacioli (também conhecido como Luca di Borgo) durante algum tempo fora professor dos filhos de um rico comerciante de Veneza e sem dúvida estava ciente da crescente importância da aritmética comercial na Itália. A mais antiga aritmética impressa, que apareceu anonimamente em Treviso em 1478, tinha tratado das operações fundamentais, das regras de dois e três, e de aplicações comerciais. Várias outras aritméticas técnicas comerciais apareceram logo depois, e Pacioli usou-as livremente como fonte. Uma delas, o *Compendio de lo abaco* de Francesco Pellos (viveu de 1450-1500), que foi publicada em Turim no ano em que Colombo descobriu a América, usava um ponto para indicar a divisão de um inteiro por uma potência de dez, uma sugestão do ponto decimal.

Summa, que como o *Triparty* foi escrito em vernáculo, era um resumo de obras não publicadas, que o autor escrevera antes, bem como do conhecimento geral da época. A parte sobre aritmética se ocupa muito de processos para multiplicação e extração de raízes quadradas; a secção sobre álgebra inclui a resolução usual de equações lineares e quadráticas. Embora não tenha a notação exponencial de Chuquet, há uso crescente de sincopação por abreviações. As letras p e m por essa época eram largamente usadas na Itália para indicar adição e subtração,e Pacioli usou *co*, *ce*, e *ae* para *cosa* (a incógnita), *censo* (o quadrado da incógnita), e *aequalis* respectivamente. Para a quarta potência da incógnita ele naturalmente usou *cece* (para quadrado-quadrado). Partilhando de uma impressão de Omar Khayyam, ele julgava que equações cúbicas não podiam ser resolvidas algebricamente.

A obra de Pacioli sobre geometria na *Summa* não é significativa, embora alguns de seus problemas geométricos nos lembrem a geometria algébrica de Regiomontanus, sendo usados casos numéricos específicos. Por exemplo, pede-se achar os lados de um triângulo se o raio do círculo inscrito é quatro e os segmentos em que um lado é dividido pelo ponto de contato são seis e oito. Embora a geometria de Pacioli não atraísse muita atenção, o aspecto comercial do livro tornou-se tão popular que o autor em geral é considerado o pai da contabilidade a duas entradas.

8 Pacioli, o primeiro matemático de quem temos um retrato autêntico, em 1509 fez mais duas tentativas no campo da geometria, publicando uma edição, sem grandes méritos, de Euclides e uma obra com o imponente título *De divina proportione*. Essa diz respeito a polígonos sólidos e regulares e a razão mais tarde chamada "a secção áurea". Merece destaque pela excelência das figuras[5], que têm sido atribuídas a Leonardo da Vinci (1452-1519). Leonardo é freqüentemente considerado um matemático, mas sua mente inquieta não se fixou na aritmética ou na álgebra ou na geometria por tempo suficiente para que fizesse alguma contribuição importante. Em seus cadernos de notas encontramos quadraturas de lunas, construções de polígonos regulares, e idéias sobre centros de gravidade e curvas de dupla curvatura; mas é mais conhecido por sua aplicação da matemática à ciência e à teoria da perspectiva. Da Vinci é citado como o típico homem da Renascença, com conhecimentos sobre tudo; e em campos, que não a matemática,

[5]Para uma descrição maior dessa obra e da atividade contemporânea ver R. Emmett Taylor, *No Royal Road, Luca Pacioli and His Times* (1942)

há muita justificativa para essa idéia. Leonardo era um gênio, de pensamento ousado e original, um homem de ação tanto quanto de contemplação, ao mesmo tempo artista e engenheiro; mas parece não ter tido grande contato com a principal tendência matemática da época — o desenvolvimento da álgebra. Poucos assuntos dependem tanto de uma tradição livresca contínua e de uma concentração por longo período de tempo quanto a matemática, e Leonardo não era dado a manter uma pesquisa concentrada em bibliotecas ou mesmo dado a levar suas próprias idéias imaginativas até suas conclusões. Séculos depois, as noções renascentistas sobre perspectiva matemática deveriam expandir-se num novo ramo da geometria, mas tais desenvolvimentos não foram influenciados, de modo perceptível, pelos pensamentos que o canhoto Leonardo confiou a seus cadernos, sob a forma de anotações em escrita como que refletida em espelho.

9 A palavra Renascença inevitavelmente traz à mente os tesouros literários, artísticos e científicos italianos, pois o renovado interesse pela arte e pela cultura se tornou aparente mais cedo na Itália do que em outras partes da Europa. Lá, num confuso conflito de idéias, os homens aprenderam a confiar mais em observações independentes da natureza e em juízes da mente. Além disso, a Itália fora uma das duas principais rotas ao longo das quais a cultura árabe, inclusive algorismo e álgebra, penetrara na Europa. No entanto, outras partes da Europa não ficaram muito atrás, como prova a obra de Regiomontanus e de Chuquet. Na Alemanha, por exemplo, os livros sobre álgebra foram tão numerosos que durante algum tempo a palavra germânica *coss* para a incógnita triunfou em outras partes da Europa, e o assunto ficou conhecido como a "arte cóssica". Além disso, os símbolos germânicos para adição e subtração acabaram substituindo os p e m italianos. Em 1489, antes da publicação da *Summa* de Pacioli, um professor alemão de Leipzig, Johann Widman (nasceu aproximadamente em 1460) tinha publicado uma aritmética comercial, *Rechenung auff allen Kauffmanschafft*, o mais antigo livro em que nossos sinais + e − aparecem impressos. Usados inicialmente para indicar excesso e deficiência em medidas, em armazéns, mais tarde tornaram-se símbolos para as operações aritméticas familiares[6]. Widman, incidentalmente, possuía uma cópia manuscrita da *Álgebra* de al-Khowarizmi, obra bem conhecida também por outros matemáticos alemães.

Frontispício de uma edição (1529) de um dos *Rechenbücher* de Adam Riese, o célebre *Rechenmeister*. Representa uma competição entre um algorista e um abacista

[6]Ver J. W. L. Glaisher, "On the Early History of the Signs + and − and on the Early German Arithmeticians", *Messenger of Mathematics*, 51 (1921-1922), 1-148

Entre as numerosas álgebras alemãs estava a *Die Coss*, escrita em 1524 pelo célebre Rechenmeister, Adam Riese (1492-1559). Esse foi o mais influente autor alemão no movimento para substituir a antiga computação (em termos de contas de ábaco e numerais romanos) pelo novo método (usando pena e numerais indo-arábicos); tão eficazes foram seus numerosos livros de aritmética que a frase "nach Adam Riese" (segundo Adam Riese) ainda subsiste na Alemanha como um tributo à exatidão em processos aritméticos. Riese, em seu *Coss*, menciona a *Álgebra* de al-Khowarizmi e se refere a numerosos predecessores alemães no campo.

A primeira metade do século dezesseis viu surgir uma nuvem de álgebras alemãs, entre as mais importantes delas estando a *Coss* (1525) de Christoph Rudolff (aproximadamente entre 1500-1545), a *Rechnung* (1527) de Peter Apian (1495-1552), e a *Arithmetica integra* (1544) de Michael Stifel (cerca de 1487-1567). A primeira é especialmente importante por ser das mais antigas obras impressas a usar frações decimais, bem como o símbolo moderno para raízes; a segunda merece menção pelo fato de nela, uma aritmética comercial, o chamado "triângulo de Pascal" ser impresso, na página de rosto, quase um século antes do nascimento de Pascal. A terceira obra, a *Arithmetica integra* de Stifel, foi a mais importante de todas as álgebras alemãs do século dezesseis. Inclui, também, o triângulo de Pascal, mas o aspecto mais importante é seu tratamento dos números negativos, radicais, e potências. Usando coeficientes negativos em equações, Stifel pôde reduzir a multiplicidade de casos de equações quadráticas ao que aparecia como uma única forma; mas teve que explicar, por uma regra especial, quando usar + e quando −. Ainda mais, até ele recusou admitir números negativos como raízes de uma equação. Stifel, um ex-monge que se tornou pregador luterano itinerante, e foi, por algum tempo, professor de Matemática em Jena, foi um dos muitos autores a difundir os símbolos "alemães" + e − às custas da notação "italiana" p e m. Conhecia muitíssimo bem as propriedades dos números negativos, apesar de chamá-los *"numeri absurdi"*. Quanto aos números irracionais ele se mostrava um tanto hesitante, dizendo que eles estão "escondidos sob uma espécie de nuvem de infinitude". Também chamando a atenção para as relações entre progressões aritméticas e geométricas, como Chuquet fizera com as potências de dois de 0 a 20. Stifel estendeu a tabela incluindo $2^{-1} = 1/2$ e $2^{-2} = 1/4$ e $2^{-3} = 1/8$ (sem, no entanto, usar notação exponencial). Para as potências da quantidade incógnita em álgebra Stifel na *Arithmetica integra* usou abreviações para as palavras alemãs coss, zensus, cubus, e zenzizensus; mas num tratado posterior, *De algorithmi numerorum cossicorum* ele propôs usar uma única letra para a incógnita e repetir a letra para indicar potências superiores da incógnita, esquema empregado mais tarde por Harriot[7].

10 A *Arithmetica integra* constituía um tratamento completo da álgebra tal como era geralmente conhecida até 1544, mas num certo sentido pelo ano seguinte já estava completamente superada. Stifel deu muitos exemplos levando a equações quadráticas, mas nenhum de seus problemas levava a cúbicas mistas, pela simples razão que ele não sabia mais sobre a solução algébrica das cúbicas do que sabiam Pacioli ou Omar Khayyam. Mas em 1545 a resolução não só da cúbica como também da quártica tornaram-se conhecimento comum pela publicação da *Ars magna* de Gerônimo Cardano (1501-1576). Um progresso tão notável e imprevisto causou tal impacto sobre os algebristas que o ano de 1545 freqüentemente é tomado como marco do início do período moderno na matemática. Deve-se assinalar imediatamente, porém, que Cardano (ou Cardan) não foi o descobridor original da solução quer da cúbica quer da quártica. Ele próprio admitiu isso francamente em seu livro. A sugestão para resolver a cúbica, ele afirma, lhe tinha sido dada por Niccolo Tartaglia (cerca de 1500-1557); a solução da quártica tinha sido descoberta primeiramente pelo antigo amanuense de Cardano, Ludovico Ferrari (1522-

[7]Para menções de livros antigos de aritmética e álgebra ver especialmente D. E. Smith, *Rara arithmetica* (1908). Para listas de aritméticas antigas veja J. E. Hofmann: *Geschichte der Mathematik* (1963). Vol. 1, pp. 142-145

-1565). O que Cardano deixou de mencionar na *Ars magna* foi o solene juramento que havia feito a Tartaglia de não revelar o segredo, pois esse último pretendia firmar sua reputação publicando a solução da cúbica como coroação de seu tratado sobre álgebra.

Para que não se dê a Tartaglia uma indevida simpatia, deve-se notar que ele tinha publicado uma tradução de Arquimedes (1543), derivada de Moerbeke, dando a impressão de que era obra sua, e em seu *Quesiti et inventioni diverse* (Veneza, Itália, 1546) ele deu a lei do plano inclinado, presumivelmente derivada de Jordanus Nemorarius, sem atribuição apropriada. Na verdade, é possível que o próprio Tartaglia tenha recebido uma sugestão quanto à resolução da cúbica de uma fonte mais antiga. Qualquer que seja a verdade numa controvérsia um tanto complicada e sórdida entre defensores de Cardano e Tartaglia, é claro que nenhum dos opositores foi o primeiro a fazer a descoberta. O herói no caso foi evidentemente alguém cujo nome mal é lembrado hoje — Scipione del Ferro (cerca de 1465-1526), professor de matemática em Bolonha, uma das mais antigas universidades medievais e uma escola com forte tradição matemática. Como ou quando Ferro fez sua maravilhosa descoberta não se sabe. Não publicou a solução, mas antes de sua morte ele a revelou a um estudante, Antonio Maria Fior (ou Floridus em latim), um medíocre matemático.

Parece que a idéia da existência de solução algébrica para uma cúbica se propalou, e Tartaglia nos conta que o conhecimento da possibilidade de resolver a equação inspirou-o a dedicar-se a achar o método por si. Seja independentemente, seja baseado numa sugestão, Tartaglia de fato aprendeu, por volta de 1541, a resolver equações cúbicas. Quando a notícia disso se espalhou, foi organizada uma competição matemática entre Tartaglia e Fior. Cada um dos concorrentes propôs trinta questões para que o outro resolvesse num intervalo de tempo fixado. Quando chegou o dia da decisão, Tartaglia tinha resolvido todas as questões propostas por Fior, enquanto que esse não tinha resolvido nenhuma das enunciadas por seu oponente. A explicação disso é relativamente simples. Hoje pensamos em equações cúbicas como sendo essencialmente todas de um mesmo tipo e podendo todas ser resolvidas por um mesmo método. Na época, porém, quando coeficientes negativos praticamente não eram usados, havia tantos tipos de cúbicas quantas são as possibilidades de coeficientes positivos e negativos. Fior só sabia resolver equações do tipo em que cubos e raízes estão igualados a um número — isto é, as do tipo $x^3 + px = q$, embora na época só fossem usados coeficientes numéricos (positivos) específicos. Mas enquanto isso Tartaglia tinha aprendido também a resolver equações em que cubos e quadrados são igualados a um número. É provável que Tartaglia soubesse reduzir esse caso ao de Fior por remoção do termo quadrático, pois por essa época tornou-se conhecido que se o primeiro coeficiente é a unidade, então o coeficiente do termo quadrático, quando aparece do outro lado do sinal de igual, é a soma das raízes.

A notícia do triunfo de Tartaglia chegou a Cardano, que logo convidou o vencedor a vir à sua casa, insinuando que trataria de arranjar um encontro entre ele e um possível patrono. Tartaglia não tinha nenhuma fonte substancial de recursos, em parte talvez por causa de um defeito de elocução. Quando criança tinha recebido um corte de sabre, na tomada de Bréscia pelos franceses em 1512, e isso lhe prejudicou a fala. Por esse fato é que recebeu o apelido de Tartaglia, ou gago, nome que usou em lugar do de Niccolo Fontana que recebera ao nascer. Cardano, ao contrário, lograra sucesso como médico. Tão grande era sua fama que foi uma vez chamado à Escócia para diagnosticar uma doença do Arcebispo de St. Andrews (evidentemente um caso de asma). De nascimento ilegítimo, e sendo astrólogo, jogador e herege, Cardano foi no entanto um respeitado professor em Bolonha e Milão, e finalmente recebeu do papa uma pensão. Um de seus filhos envenenou a própria esposa, outro era um canalha, e o secretário de Cardano, Ferrari, provavelmente morreu envenenado por sua própria irmã. Apesar desses transtornos, Cardano foi autor prolífico em tópicos que iam de sua própria vida e do elogio da gota à ciência e à matemática.

Em sua principal obra científica, um pomposo volume com o título *De subtilitate*, Cardano revela ser um verdadeiro filho de seu tempo, discutindo interminavelmente a física aristotélica transmitida através da filosofia escolástica, ao passo que ao mesmo tempo se entusiasmava com as novas descobertas dos tempos então recentes. Quase o mesmo pode ser dito de sua matemática, pois também essa era típica da época. Pouco sabia de Arquimedes e menos de Apolônio, mas conhecia muito bem álgebra e trigonometria. Tinha já publicado uma *Practica arithmetice* em 1539, que incluía entre outras coisas a racionalização de denominadores contendo raízes cúbicas. Quando publicou a *Ars magna*, meia dúzia de anos depois, ele provavelmente era o mais competente algebrista da Europa. Mesmo assim, hoje a *Ars magna* é uma leitura cacete. Caso após caso de equação cúbica é laboriosamente tratado em detalhe conforme termos dos vários graus apareçam de um mesmo lado ou de lados opostos da igualdade, pois os coeficientes eram necessariamente positivos. Apesar de tratar de equações sobre números, ele como al-Khowarizmi pensava geometricamente, de modo que podemos pensar em seu método como sendo de "completação do cubo". Há, é claro, certas vantagens nesse tratamento. Por exemplo, como x^3 é um volume $6x$, na equação de Cardano abaixo, também deve ser considerado como volume. Logo o número 6 deve ter dimensão de área, o que sugere o tipo de substituição usado por Cardano, como veremos logo.

Gerônimo Cardano

11 Cardano usava pouca sincopação, sendo um verdadeiro discípulo de al-Khowarizmi, e, como os árabes, pensava em suas equações com coeficientes numéricos específicos como representantes de categorias gerais. Por exemplo, quando escrevia, "Seja o cubo e seis vezes o lado igual a 20" (ou $x^3 + 6x = 20$), ele evidentemente estava pensando nessa equação como típica de *todas* as que têm "um cubo e coisa igual a um número" — isto é, da forma $x^3 + px = q$. A solução dessa equação cobre um par de páginas de retórica que agora poríamos em símbolos como segue: Substitua-se x por $u - v$ e suponha-se u e v relacionados de modo que seu produto (pensado como área) é um terço do coeficiente de x na equação cúbica — isto é, $uv = 2$. Substituindo na equação, vem $u^3 - v^3 = 20$; e, eliminando v, temos $u^6 = 20u^3 + 8$, uma equação quadrática em u^3. Portanto u^3, como é sabido, vale $\sqrt{108} + 10$. Da relação $u^3 - v^3 = 20$ vemos que $v^3 = \sqrt{108} - 10$; donde, de $x = u - v$ temos $x = \sqrt[3]{\sqrt{108} + 10} - \sqrt[3]{\sqrt{108} - 10}$. Tendo efetuado todos os cálculos para esse caso específico, Cardano termina com uma formulação verbal da regra equivalente à nossa solução de $x^3 + px = q$ como

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{(p/3)^3 + (q/2)^2} + q/2} - \sqrt[3]{\sqrt{(p/3)^3 + (q/2)^2} - q/2}.$$

Cardano passava então a outros casos, tais como "cubo igual a coisa e número". Aqui faz-se a substituição $x = u + v$ em vez de $x = u - v$, o resto do método permanecendo essencialmente o mesmo. Nesse caso, porém, há uma dificuldade. Quando se aplica a regra a $x^3 = 15x + 4$, por exemplo, o resultado é $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$. Cardano sabia que não existe raiz quadrada de número negativo, e no entanto ele sabia que $x = 4$ é uma raiz. Não conseguiu entender como sua regra faria sentido em tal situação. Tinha jogado com raízes quadradas de números negativos em outra situação quando pediu que se dividisse 10 em duas partes tais que o produto fosse 40. As regras usuais da álgebra levam às respostas $5 + \sqrt{-15}$ e $5 - \sqrt{-15}$ para as partes (ou, na notação de Cardano, 5p:R m:15 e 5m:R m:15). Cardano se referia a essas raízes quadradas de números negativos como "sofísticas" e concluía que o resultado nesse caso era "tão sutil quanto inútil". Autores posteriores mostrariam que tais manipulações eram de fato sutis mas nada inúteis. É um mérito de Cardano que ele ao menos tenha dado alguma atenção a essa intrigante situação[8].

12 Sobre a regra para resolver equações quárticas Cardano escreveu na *Ars magna* que "é devida a Luigi Ferrari, que a inventou a meu pedido". Novamente, casos separados, num total de vinte, são sucessivamente tratados, mas para o leitor de hoje basta um. Seja quadrado-quadrado e quadrado e número igual a lado. (Cardano sabia eliminar o termo cúbico somando a ou subtraindo das raízes um quarto do coeficiente do termo cúbico.) Então os passos para a resolução de $x^4 + 6x^2 + 36 = 60x$ são descritos por Cardano essencialmente como segue:

1. Primeiro somar suficientes quadrados e números a ambos os lados para que o primeiro membro fique um quadrado perfeito, nesse caso $x^4 + 12x^2 + 36$ ou $(x^2 + 6)^2$.

2. Agora somar a ambos os membros da equação termos envolvendo uma nova incógnita y de modo que o primeiro membro permaneça um quadrado perfeito, como $(x^2 + 6 + y)^2$. A equação agora fica

$$\begin{aligned}(x^2 + 6 + y)^2 &= 6x^2 + 60x + y^2 + 12y + 2yx^2,\\ &= (2y + 6)x^2 + 60x + (y^2 + 12y).\end{aligned}$$

3. O passo crucial seguinte consiste em escolher y do modo que o trinômio no segundo membro fique um quadrado perfeito. Isso se faz, é claro, igualando a zero o dis-

[8]Não foi publicada nenhuma tradução de toda a *Ars magna* mas uma seleção aparece em D. E. Smith, *A Source Book in Mathematics* (1929). Numa comunicação recente D. J. Struik informou que existe em manuscrito uma tradução para o inglês da *Ars magna* por J. R. Witner em Washington. Deve ser publicada pela M. I. T. Press

criminante — uma regra antiga e bem conhecida que nesse caso leva a

$$60^2 - 4(2y + 6)(y^2 + 12y) = 0.$$

4. Do passo 3 resulta uma equação cúbica em $y - y^3 + 15y^2 + 36y = 450$ — hoje chamada a "cúbica resolvente" da equação quártica dada. Essa é agora resolvida em relação a y pelas regras previamente dadas para resolução de equações cúbicas, sendo o resultado

$$y = \sqrt[3]{287\tfrac{1}{2} + \sqrt{80\,449\tfrac{1}{4}}} + \sqrt[3]{287\tfrac{1}{2} - \sqrt{80\,449\tfrac{1}{4}}} - 5.$$

5. Substituir o valor de y obtido em 4 na equação para x do passo 2 e extrair a raiz quadrada de ambos os membros.

6. O resultado do passo 5 é uma equação quadrática, que deve agora ser resolvida a fim de achar o valor de x desejado.

13 A resolução das equações cúbica e quárticas foi talvez a maior contribuição à álgebra desde que os babilônios, quase quatro milênios antes, aprenderam a completar o quadrado para equações quadráticas. Nenhuma outra descoberta constitui um estímulo para o desenvolvimento da álgebra comparável a essas reveladas na *Ars magna*. A resolução de equações cúbicas e quárticas não foi em nenhum sentido motivada por considerações práticas, nem tinham valor para os engenheiros ou praticantes de matemática. Soluções aproximadas de algumas equações cúbicas já eram conhecidas na antiguidade, e al-Kashi, um século antes de Cardano, podia resolver com qualquer grau de aproximação qualquer equação cúbica resultante de um problema prático. A fórmula de Tartaglia-Cardano é de grande importância lógica, mas não é nem de longe tão útil para as aplicações, quanto os métodos de aproximações sucessivas.

O mais importante resultado das descobertas publicadas na *Ars magna* foi o enorme impulso dado à pesquisa em álgebra em várias direções. Era natural que o estudo fosse generalizado de modo a incluir equações polinomiais de qualquer ordem e que em particular se procurasse resolver a quíntica. Aqui os matemáticos dos dois séculos seguintes enfrentaram um problema algébrico insolúvel, comparável aos problemas geométricos clássicos da antiguidade. Resultou muito boa matemática, mas somente uma conclusão negativa. Outro resultado imediato da resolução da cúbica foi a primeira observação significativa de uma nova espécie de número. Os números irracionais já tinham sido aceitos no tempo de Cardano, embora não tivessem base firme, pois eram aproximáveis por números racionais. Os números negativos causaram dificuldades maiores porque não são aproximáveis por números positivos, mas a noção de sentido sobre uma reta tornou-os plausíveis. Cardano usou-os embora chamando-os *"numeri ficti"*. Se um algebrista desejava negar a existência de números irracionais ou negativos, dizia simplesmente, como os gregos antigos, que as equações $x^2 = 2$ e $x + 2 = 0$ não são resolúveis. Semelhantemente os algebristas tinham podido evitar os imaginários, simplesmente dizendo que uma equação como $x^2 + 1 = 0$ não é resolúvel. Não havia necessidade de considerar raízes quadradas de números negativos. Porém com a solução da equação cúbica a situação mudou radicalmente. Sempre que as três raízes de uma equação cúbica são reais e diferentes de zero a fórmula de Tartaglia-Cardano leva inevitavelmente a raízes quadradas de números negativos. Sabia-se que o alvo era um número real, mas ele não podia ser atingido sem que se compreendesse alguma coisa sobre os números imaginários. Era agora necessário levar em conta os imaginários mesmo que se concordasse em só aceitar raízes reais.

A essa altura um outro importante algebrista italiano, Rafael Bombelli (cerca de 1526-1573) teve o que chamou "idéia louca", pois toda a questão "parecia apoiar-se em sofismas". Os dois radicandos das raízes cúbicas que resultam da fórmula usual diferem apenas por um sinal. Vimos que a solução pela fórmula de $x^3 = 15x + 4$ leva a $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$, ao passo que se sabe por substituição direta que

$x = 4$ é a única raiz positiva da equação. (Cardano tinha observado que quando todos os termos de um lado do sinal de igualdade são de grau maior que os do outro lado, a equação tem uma e uma só raiz positiva — uma pequena antecipação de parte da regra dos sinais de Descartes.) Bombelli teve a feliz idéia de que os próprios radicais poderiam ser relacionados de modo análogo àquele em que os radicandos são relacionados — que, como diríamos agora, eles são imaginários conjugados que levam ao número real 4. É evidente que se a soma das partes reais é 4, então a parte real de cada um é 2; e se um número da forma $2 + b\sqrt{-1}$ deve ser uma raiz cúbica de $2 + 11\sqrt{-1}$, então é fácil ver que b deve ser 1. Logo $x = 2 + 1\sqrt{-1} + 2 - 1\sqrt{-1}$, ou 4.

Com seu engenhoso raciocínio Bombelli mostrou o papel importante que os números imaginários conjugados iriam desempenhar no futuro; mas na época a observação não ajudou na operação efetiva de resolver equações cúbicas, pois Bombelli precisava saber antecipadamente o valor de uma das raízes. Mas então a equação já está resolvida, e não se precisa da fórmula; sem tal conhecimento prévio, o método de Bombelli falha. Qualquer tentativa para achar algebricamente as raízes cúbicas dos números imaginários na regra de Cardano-Tartaglia leva à própria cúbica, em cuja resolução as raízes cúbicas apareceram, de modo que se volta ao ponto de partida. Porque esse impasse surge sempre que as três raízes sejam reais, esse caso é conhecido como "caso irredutível". Aqui uma expressão para a incógnita é de fato fornecida pela fórmula, mas a forma em que aparece é inútil para quase todos os fins.

Bombelli escreveu sua *Álgebra*[9] por volta de 1560, mas só foi impressa em 1572, cerca de um ano antes de sua morte, e só em parte. Um dos aspectos significativos desse livro é que contém simbolismos que lembram os de Chuquet. Bombelli escrevia às vezes 1 Z p.5Rm.4 (isto é, 1 zenus plus 5 res minus 4) para $x^2 + 5x - 4$. Mas usava também outra forma de expressão — $1^{\smile 2}$p.$5^{\smile 1}$m.4 — em que a potência da incógnita é representada simplesmente como um numeral arábico acima de um pequeno arco de círculo, de modo que por exemplo x, x^2, x^3 aparecem como $\underset{\smile}{1}$, $\underset{\smile}{2}$, $\underset{\smile}{3}$, talvez por influência da *Larismethique* de de la Roche. A *Álgebra* de Bombelli, naturalmente, usa os símbolos italianos p e m para adição e subtração, mas ele ainda não tinha um símbolo para a igualdade. Nosso sinal de igualdade tinha sido publicado antes de Bombelli escrever seu livro, mas o símbolo tinha aparecido numa parte distante da Europa — na Inglaterra em 1557 no *Whetstone of Witte* de Robert Recorde (1510-1558).

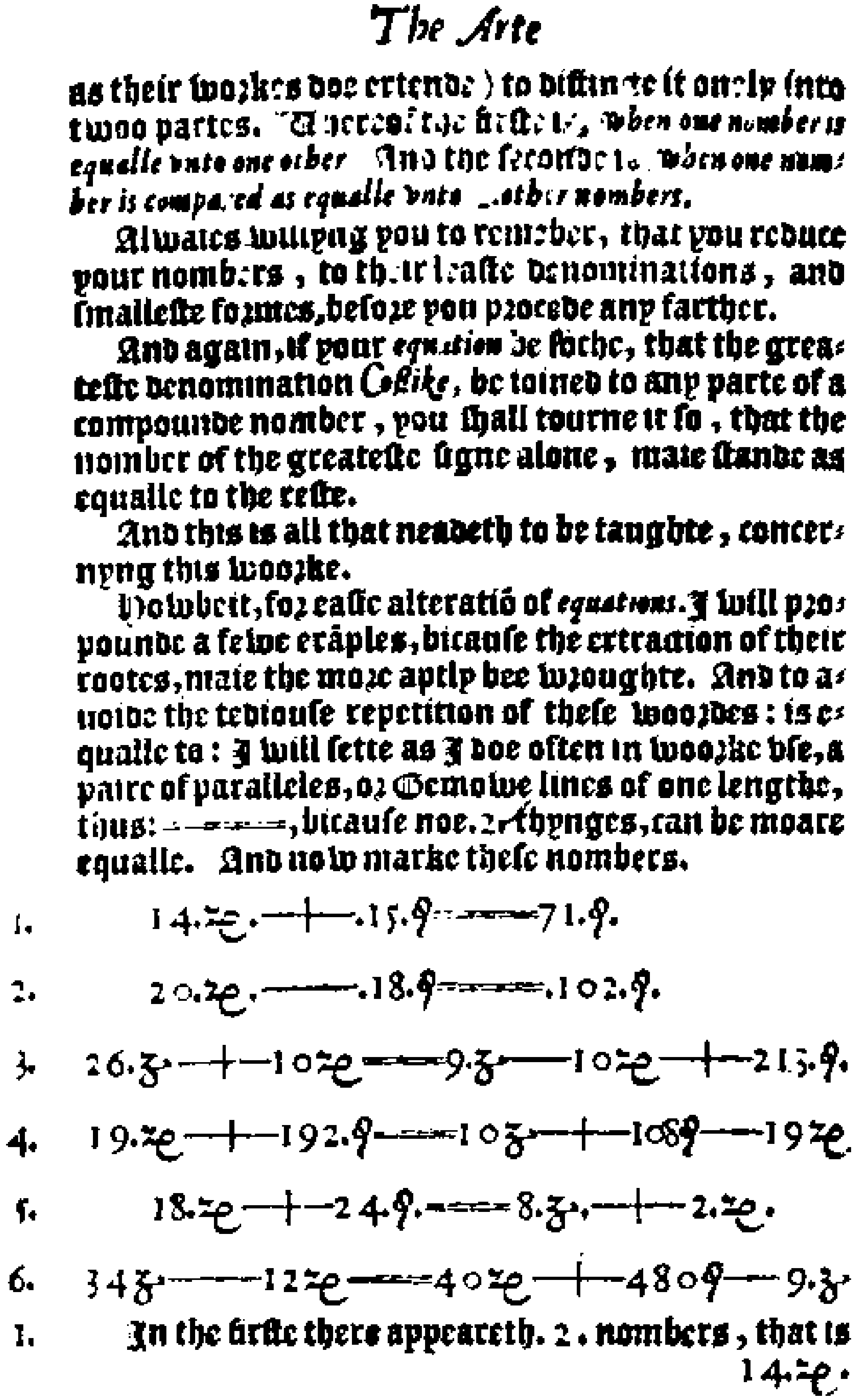
14 A matemática não tinha prosperado na Inglaterra no período de quase dois séculos após a morte de Bradwardine, e o pouco trabalho lá realizado no começo do século dezesseis dependia muito de autores italianos como Pacioli. Na verdade, Recorde foi praticamente o único matemático de importância na Inglaterra durante esse século. Nasceu no País de Gales, estudou e ensinou matemática tanto em Oxford, quanto em Cambridge. Em 1545 graduou-se em medicina em Cambridge, e tornou-se médico de Edward VI e da Rainha Mary. Uma das coisas notáveis dessa época é o número surpreendentemente grande de médicos que deram contribuições notáveis à matemática, sendo Chuquet, Cardano, e Recorde três dos mais conhecidos. É provável que Recorde fosse o mais influente dos três em seu país, pois fundou, praticamente, a escola inglesa de matemática; como Chuquet e Pacioli antes dele, e Galileu depois, escreveu em vernáculo; isso pode ter limitado sua influência no continente, embora a simples forma de diálogo que ele adotou fosse usada também, algum tempo depois, por Galileu. A primeira obra de Recorde ainda existente é *Grounde of Artes* (1541), uma popular aritmética que inclui computação por ábaco e algorismo, com aplicações comerciais. O nível e estilo desse livro, dedicado a Edward IV e que teve mais de duas dúzias de edições, podem ser avaliados pelo problema seguinte:

Então o que você diz dessa equação? Se eu lhe vendo um cavalo tendo 4 ferraduras e cada ferradura 6 pregos, com a condição, que você pague, pelo primeiro prego, um ob; pelo segundo dois

[9]Não há edição conveniente. Sobre a vida de Bombelli, veja artigos por S. A. Jayawardine em *Isis*, **54** (1963), 391-395; **56** (1965), 298-306

ob; pelo terceiro quatro ob; e assim por diante, dobrando até terminarem todos os pregos, agora pergunto-lhe, a quanto chegará o preço do cavalo?[10].

Seu *Castle of Knowledge*, uma astronomia em que o sistema de Copérnico é citado com aprovação, e seu *Pathewaie to Knowledge*, uma edição abreviada de *Os Elementos* e a primeira geometria a aparecer em inglês, apareceram ambos em 1551. A obra mais freqüentemente citada de Recorde é *The Whetstone of Witte*, publicado em 1557, apenas um ano antes de ele morrer na prisão. (Não se sabe se foi encarcerado por razões políticas ou religiosas ou por causa de dificuldades relacionadas com a posição que teve a partir de 1551 como Inspetor das Minas e Finanças da Irlanda[11].) O título *Whetstone*



The Arte

as their woorkes doe extende) to distincte it onely into twoo partes. Whereof the firste is, when one nomber is equalle unto one other. And the seconde is, when one nomber is compared as equalle unto .2. other nombers.

Alwaies willyng you to remeber, that you reduce your nombers, to their leaste denominations, and smalleste formes, before you procede any farther.

And again, if your equation be soche, that the greateste denomination Cosike, be ioined to any parte of a compounde nomber, you shall tourne it so, that the nomber of the greateste signe alone, maie stande as equalle to the reste.

And this is all that neadeth to be taughte, concernyng this woorke.

Howbeit, for easie alteratiō of equations. I will propounde a fewe exāples, bicause the extraction of their rootes, maie the more aptly bee wroughte. And to auoide the tediouse repetition of these woordes: is equalle to: I will sette as I doe often in woorke use, a paire of paralleles, or Gemowe lines of one lengthe, thus: =====, bicause noe .2. thynges, can be moare equalle. And now marke these nombers.

1. 14.ze.—+—.15.ʒ ===== 71.ʒ.
2. 20.ze.———.18.ʒ ===== .102.ʒ.
3. 26.ʒ—+—10ze ===== 9.ʒ——10ze—+—213.ʒ.
4. 19.ze—+—192.ʒ ===== 10ʒ—+—108ʒ——19ze.
5. 18.ze—+—24.ʒ ===== 8.ʒ—+—2.ze.
6. 34ʒ——12ze ===== 40ze—+—480ʒ——9.ʒ.

1. In the firste there appeareth. 2. nombers, that is 14.ze.

Uma página do *Whetstone of Witte* de Robert Recorde. Observe-se que os sinais de igualdade são muito mais longos que os nossos

[10]Veja E. R. Ebert, "A Few Observations on Robert Recorde and his 'Grounde of Artes'", *The Mathematics Teacher*, 30 (1937), 110-121. Ver também Joy B. Easton, "A Tudor Euclid", *Scripta Mathematica*, 27 (1966), 339-355; F. R. Johnson e S. V. Larkey, "Robert Recorde's Mathematical Teaching and the Anti-Aristotelian Movement", *Huntington Library Bulletin*, 7 (1935), 59-87

[11]Veja F. M. Clarke, "New Light on Robert Recorde", *Isis*, 7 (1926), 50-70

(pedra de amolar) era evidentemente um trocadilho sobre a palavra "coss" pois *cos* em latim significa pedra de amolar, e o livro trata da *cossike practise* (isto é, álgebra). Fez para a Inglaterra o que Stifel fizera para a Alemanha — com uma adição. O bem conhecido sinal de igualdade apareceu primeiro nele, explicado por Recorde na frase citada no início deste capítulo. No entanto, um século ou mais passaria antes que o sinal triunfasse sobre as notações rivais.

15 Recorde morreu em 1558, o ano em que também a Rainha Mary morreu, e durante o longo reinado de Elizabeth I não apareceu matemático inglês comparável. Foi a França, não a Inglaterra ou a Alemanha ou a Itália, que produziu o mais importante matemático da Era Elizabetana; mas antes de nos voltarmos à obra deste, no próximo capítulo, devemos esclarecer alguns aspectos do começo do século dezesseis. A direção em que houve maior progresso na matemática durante o século dezesseis, foi evidentemente a álgebra, mas os desenvolvimentos na trigonometria não ficaram muito atrás, embora não fossem nem de longe tão espetaculares. A construção de tabelas trigonométricas é uma tarefa aborrecida, mas elas são de grande utilidade para astrônomos e matemáticos; nisso a Polônia e a Alemanha no princípio do século dezesseis muito ajudaram. Quase todos nós hoje pensamos em Nicolau Copérnico (1473-1543) como um astrônomo que revolucionou a visão do mundo ao conseguir colocar a Terra movendo-se em torno do Sol (o que Aristarco tentara sem sucesso); mas um astrônomo era quase inevitavelmente um trigonômetra também, e devemos a Copérnico também serviços à matemática.

Durante a vida de Regiomontanus a Polônia tivera uma "Idade Áurea" da cultura, e a Universidade de Cracóvia, onde Copérnico se inscrevera em 1491 tinha grande prestígio em matemática e astronomia. Depois de mais estudos sobre direito, medicina e astronomia em Bolonha, Pádua e Ferrara, e depois de ensinar durante algum tempo em Roma, Copérnico voltou à Polônia em 1510 para tornar-se Cônego de Frauenburg. Apesar de numerosos deveres administrativos, inclusive reforma da moeda e controle da Ordem dos Cavaleiros Teutônicos, Copérnico completou o célebre tratado, *De revolutionibus orbium coelestium*, publicado em 1543, ano de sua morte. Contém secções substanciais sobre trigonometria que haviam sido publicadas em separado no ano anterior sob o título *De lateribus et angulis triangulorum*. O conteúdo é semelhante ao do *De triangulis* de Regiomontanus, publicado em Nuremberg apenas uma década antes; mas as idéias de Copérnico sobre trigonometria parecem datar de antes de 1533, e nessa época ele provavelmente não conhecia a obra de Regiomontanus. É muito provável, no entanto, que a forma final da trigonometria de Copérnico derivasse em parte de Regiomontanus, pois em 1539 ele recebeu como estudante o matemático prussiano Georg Joachim Rheticus (ou Rhaeticus, 1514-1576), matemático de Wittenberg que evidentemente tinha tido contato com a matemática de Nuremberg. Rheticus trabalhou com Copérnico cerca de três anos, e foi ele quem, com aprovação de seu professor, publicou a primeira breve exposição da astronomia de Copérnico numa obra intitulada *Narratio prima* (1540) e que tomou as primeiras providências, completadas por Andreas Osiander, para a impressão do célebre *De revolutionibus*. É provável, portanto, que a trigonometria na obra clássica de Copérnico se relacione de perto, através de Rheticus, com a de Regiomontanus.

Percebemos o completo conhecimento de trigonometria de Copérnico não só pelos teoremas incluídos em *De revolutionibus*, mas também por uma proposição originalmente incluída pelo autor numa versão manuscrita anterior do livro, mas não na obra impressa. A proposição eliminada é uma generalização do teorema de Nasir Eddin (que aparece no livro) sobre o movimento retilíneo resultante da composição de dois movimentos circulares. O teorema de Copérnico é como segue: Se um círculo menor rola sem deslisar ao longo do interior de um círculo maior de diâmetro duas vezes maior, então o lugar geométrico de um ponto que não está sobre a circunferência do círculo menor mas que é fixo com relação a esse círculo menor, é uma elipse. Cardano, incidentalmente, conhecia o teorema de Nasir Eddin, mas não o de Copérnico, teorema redescoberto no século dezessete[12].

16 Através dos teoremas trigonométricos em *De revolutionibus* Copérnico ampliou a influência de Regiomontanus, mas seu estudante Rheticus foi mais longe. Ele combinou as idéias de Regiomontanus e Copérnico, juntamente com as suas próprias, no tratado mais elaborado de trigonometria escrito até então — o *Opus palatinum de triangulis*, em dois volumes. Nele a trigonometria atingiu a maioridade. O autor abandonou a tradicional consideração de funções relativas ao arco de círculo e em lugar disso concentrou-se nos triângulos retângulos. Além disso, as seis funções trigonométricas agora foram completamente utilizadas, pois Rheticus calculou elaboradas tabelas de todas. As frações decimais ainda não eram de uso comum; por isso para as funções trigonométricas ele usou uma hipotenusa (raio) de 10 000 000 e para as outras quatro funções uma base (ou lado adjacente ou raio) de 10 000 000 partes, para intervalos de ângulo de 10″. Começou tabelas de tangentes e secantes com uma base de 10^{15} partes; mas não viveu bastante para terminá-las, e o tratado foi completado e editado com adições, por seu discípulo Valentin Otho (cerca de 1550-1605) em 1596[13].

17 A obra de Rheticus, que como Copérnico, Chuquet, Cardano e Recorde tinha também estudado medicina, foi muito admirada por Pierre de la Ramée ou Ramus (1515-1572), que contribuiu para a matemática num sentido pedagógico. No Collège de Navarre ele, em 1536, tinha defendido, para seu grau de mestre, a tese audaciosa de que tudo o que Aristóteles tinha dito estava errado — numa época em que o Peripateticismo era o mesmo que ortodoxia. Por seu espírito de crítica intelectual e seus interesses pedagógicos ele pode ser comparado com Recorde na Inglaterra. Ramus estava em oposição à sua época de muitos modos, e ao passo que seus contemporâneos humanistas não tinham a matemática em grande estima ele tinha uma fé quase cega no assunto. Propôs modificações dos currículos das universidades de modo que a lógica e a matemática recebessem atenção maior; sua lógica conquistou grande popularidade nos países protestantes, em parte porque ele morreu como mártir no massacre de S. Bartolomeu. Não se satisfazendo nem mesmo com *Os elementos* de Euclides, Ramus editou-os com revisões. Porém sua competência em geometria era muito limitada, e as modificações matemáticas que sugeriu eram em direção oposta às de nosso tempo. Ramus tinha mais confiança na matemática elementar prática do que na álgebra e geometria mais avançadas e especulativas; ao passo que olhando retrospectivamente para sua época parece-nos hoje que a preocupação com problemas práticos de aritmética era já excessivamente grande, ao passo que a fraqueza em geometria era mais que evidente.

18 Papus em 320 quis iniciar um renascimento da geometria, mas não teve sucessor realmente capaz em geometria pura na Grécia. Na China e na Índia nunca houve real interesse pela geometria além de problemas de mensuração, mas os árabes, que apreciavam o raciocínio demonstrativo, usavam argumentos geométricos em sua álgebra. Na Europa medieval, como vimos, havia uma tendência para relacionar álgebra e geometria em sentido duplo. Segundo a tradição medieval, os Livros IV e VI da *Álgebra* de Bombelli estavam cheios de problemas de geometria resolvidos algebricamente — um tanto no estilo de Regiomontanus, mas usando os novos simbolismos. Por exemplo, Bombelli perguntava qual o lado do quadrado inscrito num triângulo de lados $ac = 13$, $cf = 14$, $fa = 15$ de tal modo que um lado jaz sobre cf (Fig. 15.1), o que ele resolve da seguinte maneira: seja $bg = 14^{\underline{1}}$ (isto é, $14x$). Então $ag = 15^{\underline{1}}$ e $ab = 13^{\underline{1}}$. Agora $ah = 12^{\underline{1}}$ e $hi = 14^{\underline{1}}$. Como $ai = 12$, temos $26^{\underline{1}} = 12$; logo "cosa" ou x vale 6/13 de modo que hi, ou o lado do quadrado, deve ser 14 vezes 6/13, ou seja 6 6/13. Aqui uma álgebra altamente simbólica veio auxiliar a geometria; mas Bombelli trabalhava também em sentido

[12]Ver C. B. Boyer, "Note on Epicycles and the Ellipse from Copernicus to Lahire", *Isis*, **38** (1947), 54-56

[13]Veja J. D. Bond, "The Development of Trigonometric Methods Down to the Close of the XVth Century", *Isis*, **4** (1921-1922), 295-323; também Irmã Mary Claudia Zeller, *The Development of Trigonometry from Regiomontanus to Pitiscus* (1946)

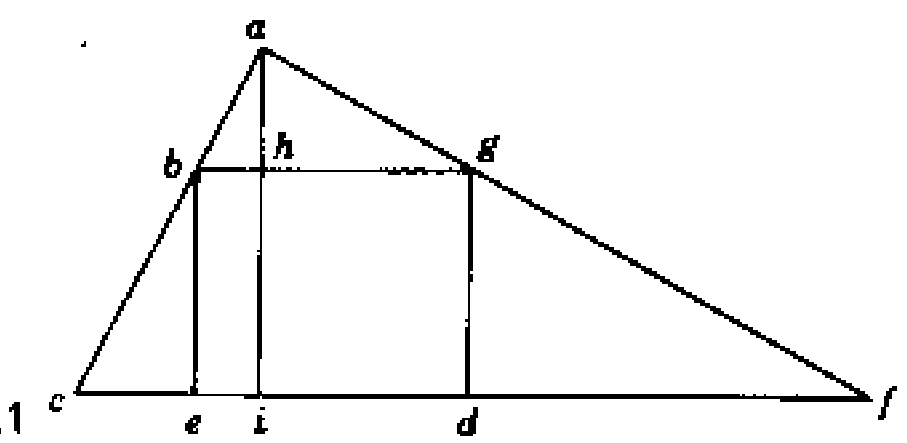


Figura 15.1

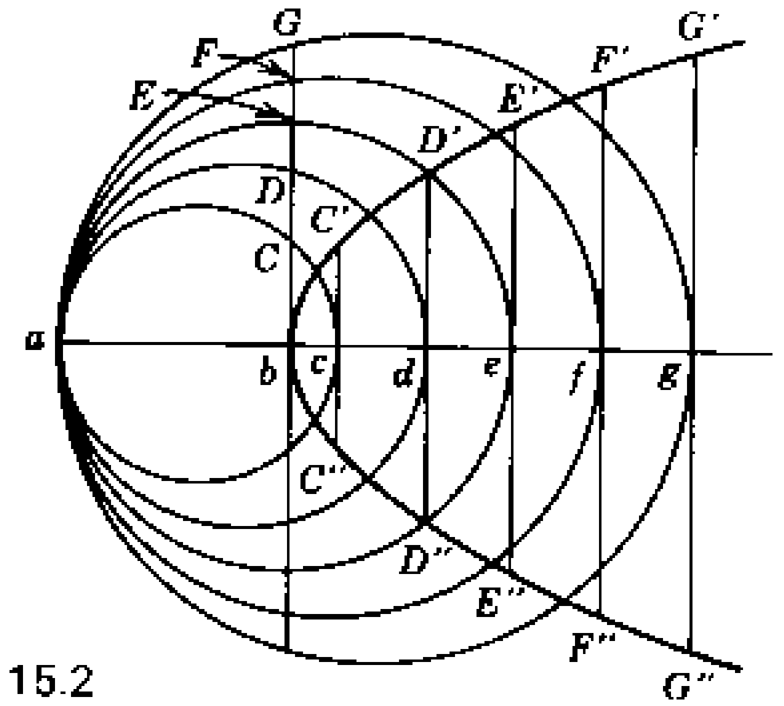


Figura 15.2

oposto. Na *Álgebra* a resolução algébrica de equações cúbicas é acompanhada de demonstrações geométricas em termos de subdivisão do cubo. Infelizmente para o futuro da geometria — e da matemática em geral — os últimos livros da *Álgebra* de Bombelli não foram incluídos na publicação de 1572, permanecendo como manuscrito até 1929[14].

19 A geometria pura no século dezesseis não ficou inteiramente sem representantes, pois contribuições, não espetaculares, foram feitas na Alemanha por Johannes Werner (1468-1528) e Albrecht Dürer (1471-1528), e na Itália por Francesco Maurolico (1494-1575) e Pacioli. Novamente observamos a predominância desses dois países nas contribuições à matemática durante a Renascença. Werner tinha ajudado a preservar a trigonometria de Regiomontanus, mas de maior importância para a geometria foi sua obra em latim, em vinte e dois livros, sobre *Elementos de cônicas*, impressa em Nuremberg em 1522. Essa obra não pode ser favoravelmente comparada à *As cônicas* de Apolônio, quase inteiramente desconhecida no tempo de Werner, mas assinala um novo interesse pelas curvas quase pela primeira vez desde Papus. Porque o autor estava primariamente preocupado com a duplicação do cubo, ele se concentrou na parábola e na hipérbole, derivando as equações no plano estereometricamente do cone, como o tinham feito seus predecessores na Grécia; mas parece haver alguma originalidade em seu método para marcar no plano os pontos de uma parábola com régua e compasso. Primeiro traça-se um feixe de círculos tangentes entre si e cortando a normal comum nos pontos $c, d, e, f, g, \ldots$ (Fig. 15.2). Depois ao longo da normal comum marca-se uma distância ab igual a um parâmetro desejado. Em b levanta-se a perpendicular bG a ab, que corta os círculos nos pontos $C, D, E, F, G, \ldots$ respectivamente. Então em c traça-se segmentos de reta cC' e cC'' perpendiculares a ab e iguais a bC; em d traçam-se os segmentos dD' e dD'' perpendiculares a ab e iguais a bD; em e os segmentos eE' e eE'' iguais a bE, e assim por diante. Então os pontos $C', C'', D', D'', E', E'', \ldots$ jazem todos sobre a parábola de vértice b, eixo segundo ab e tendo ab como grandeza do parâmetro — como se vê facilmente pelas relações $(cC')^2 = ab \cdot bc$, $(dD')^2 = ab \cdot bd$, e assim por diante[15].

20 A obra de Werner se relaciona de perto com os estudos sobre cônicas da antiguidade; mas ao mesmo tempo na Itália e na Alemanha uma relação mais ou menos nova entre a matemática e a arte estava aparecendo. Um ponto importante em que a arte renascentista diferia da medieval era o uso da perspectiva na representação plana de objetos do espaço tridimensional. Diz-se que o arquiteto florentino Filippo Brunelleschi (1377-1446) deu muita atenção a esse problema, mas a primeira exposição formal de alguns problemas foi dada por Leon Battista Alberti (1404-1472) num tratado de 1435 (impresso em 1511) chamado *Della pictura*. Alberti começa com uma discussão geral dos princípios da redução (em perspectiva) depois descreve um método que tinha inventado para representar num "plano de figura" vertical uma coleção de quadrados num "plano

[14]Veja *L'algebra. Opera di Rafael Bombelli da Bologna*, Livros IV e V, contendo "La parte geometrica", editado por Ettore Bortolotti (1929)

[15]Veja J. L. Coolidge, *A History of the Conic Sections and Quadratic Surfaces* (Oxford: Clarendon, 1945), pp. 26-28

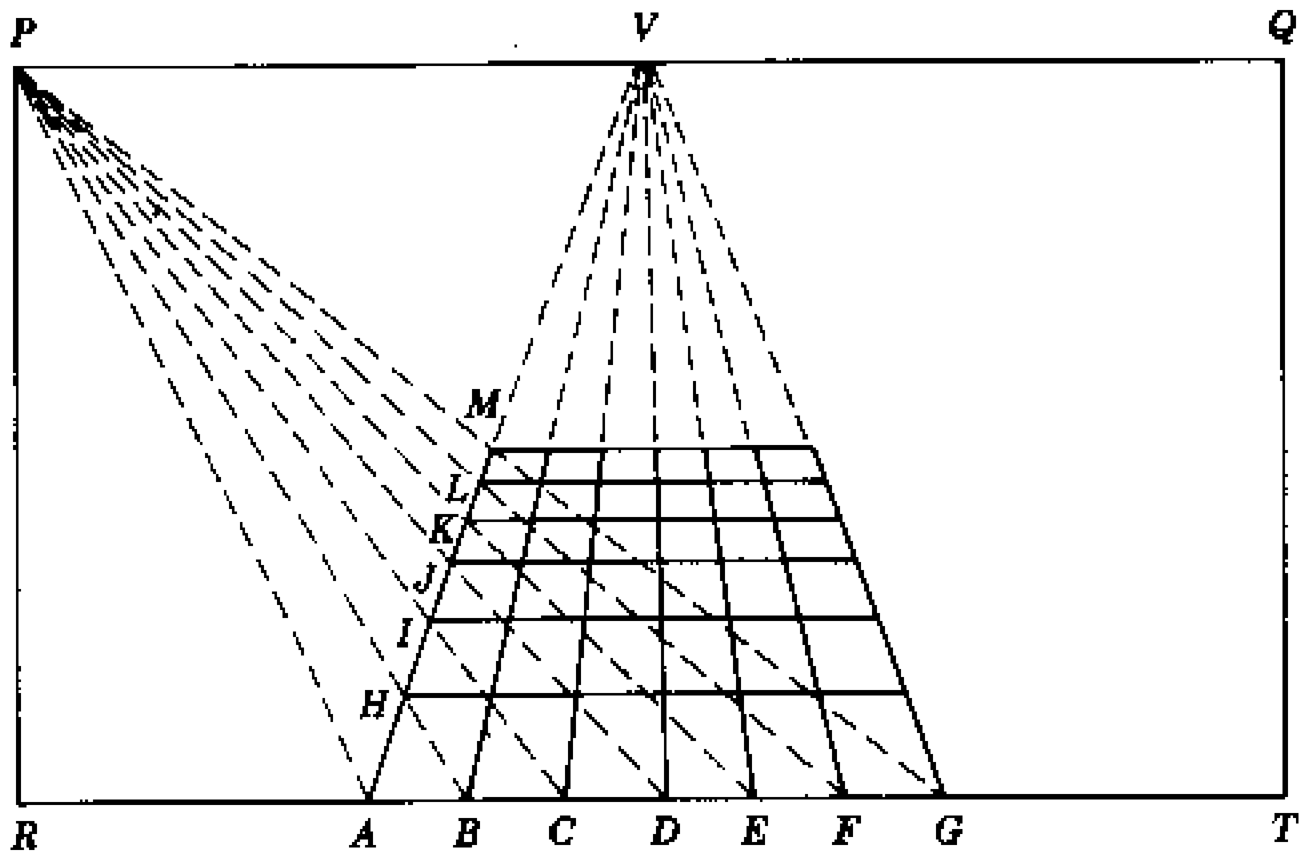


Figura 15.3

de terra" horizontal. Suponhamos o olho colocado num "ponto de parada" S que está h unidades acima do plano de terra e k unidades à frente do plano de figura. A intersecção do plano de figura com o de terra chama-se a "linha de terra", o pé V da perpendicular de S ao plano de figura chama-se o "centro de visão" (ou o ponto de desaparecimento principal), a reta por V paralela à linha de terra chama-se "reta de desaparecimento" (ou de horizonte) e os pontos P e Q sobre essa reta que estão a k unidades de V chamam-se "pontos de distância". Se tomarmos os pontos A, B, C, D, E, F, G a distâncias iguais ao longo da linha de terra RT (Fig. 15.3) onde D é a intersecção dessa reta com o plano vertical por S e V, e se traçarmos retas ligando esses pontos a V, então a projeção dessas retas, com S como centro, sobre o plano de terra será uma coleção de retas paralelas e equidistantes. Se P (ou Q) é ligado aos pontos B, C, D, E, F, G formando outra coleção de retas que cortam AV nos pontos H, I, J, K, L, M, e se por esses pontos traçamos paralelas à linha de terra RT, então a coleção de trapézios no plano da figura corresponderá a uma coleção de quadrados no plano de terra[16].

Outro passo no desenvolvimento da perspectiva foi dado pelo pintor italiano de afrescos, Piero della Francesca (1410?-1492), em *De prospectiva pingendi* (cerca de 1478). Ao passo que Alberti se tinha concentrado na representação sobre o plano da pintura de figuras sobre o plano de terra, Piero atacou o problema mais complicado de representar, sobre o plano da pintura, objetos em três dimensões vistos de um ponto de vista dado. Escreveu também um *De corporibus regularibus* em que observou "a proporção divina" em que as diagonais de um pentágono regular se cortam e em que achou o volume comum a dois cilindros circulares iguais cujos eixos se cortam em ângulo reto (sem saber do *Método* de Arquimedes, desconhecido na época). A relação entre a arte e a matemática era também forte na obra de Leonardo da Vinci. Escreveu uma obra, agora perdida, sobre perspectiva; seu *Trattato della pittura* começa com a advertência, "Que ninguém que não seja matemático leia minhas obras"[17]. A mesma combinação de interesses matemáticos e artísticos se encontra em Albrecht Dürer, um contemporâneo de Leonardo e conterrâneo de Werner em Nuremberg. Na obra de Dürer vemos também a influência de Pacioli, especialmente na célebre gravura de 1514 intitulada *Melancolia*. Aqui o quadrado mágico tem presença proeminente. Esse é considerado freqüentemente o primeiro uso do quadrado mágico no Ocidente, mas Pacioli tinha deixado um manuscrito não publicado, *De viribus quantitatis*, em que mostra interesse por tais quadrados. O interesse de Dürer pela matemática, no entanto, era muito mais geométrico do que aritmético, como indica o título de seu livro mais importante: "Investigação sobre a me-

[16]Mais detalhes, bem como uma sólida exposição de outras obras de Piero della Francesca, Leonardo da Vinci, e Albrecht Dürer, se encontram em J. L. Coolidge, *The Mathematics of Great Amateurs* (Oxford: Clarendon, 1949) pp. 30-70

[17]Morris Kline, *Mathematics in Western Culture* (New York: Oxford University Press, 1953). Esse livro contém uma exposição eminentemente acessível sobre a relação entre a arte e a matemática

"Melancolia" de Albrecht Dürer (The British Museum). Observe-se o quadrado mágico de quatro células no canto superior direito

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

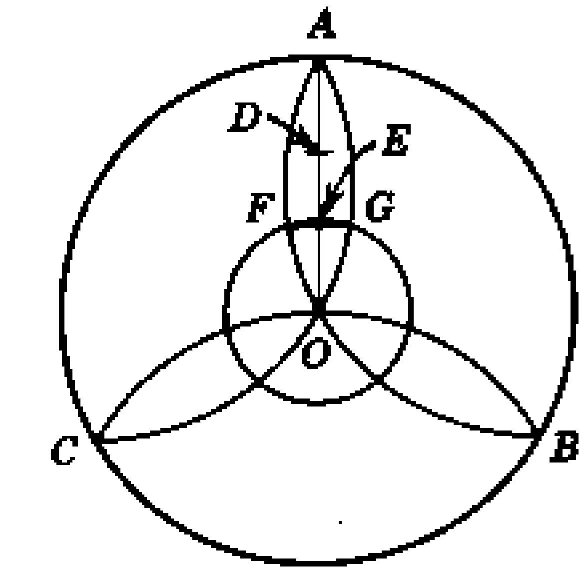


Figura 15.4

dida com círculos e retas de figuras planas e sólidas". Essa obra, que apareceu em várias edições alemãs e latinas entre 1525 e 1538, contém várias novidades dignas de nota, sendo suas novas curvas as mais importantes. Essa é uma direção em que a Renascença poderia facilmente ter aperfeiçoado a obra dos antigos, que só haviam estudado um punhado de tipos de curvas. Dürer tomou um ponto fixo sobre um círculo e depois deixou que o círculo rolasse ao longo da circunferência de um outro círculo, gerando uma epiciclóide; mas, não tendo os instrumentos algébricos necessários, não a estudou analiticamente. O mesmo se deu com outras curvas planas que ele obteve projetando curvas reversas helicoidais sobre um plano para formar espirais. Demasiado freqüentemente os que trabalhavam com perspectiva não conheciam a matemática básica e não distinguiam entre resultados exatos e aproximados. Na obra de Dürer encontramos a construção de Ptolomeu do pentágono regular, que é exata, bem como outra construção original que é apenas uma aproximação. Para o heptágono e o eneágono ele também deu construções engenhosas, mas evidentemente inexatas. A construção de Dürer de um nonágono, aproximadamente regular, é como segue: seja O o centro de um círculo ABC em que A, B, C são os vértices do triângulo equilátero inscrito (Fig. 15.4). Por A, O e C traçar um arco de círculo, traçar arcos semelhantes por B, O e C e por B, O e A. Seja AO trissectado nos pontos D e E, e por E tracemos um círculo com centro em O e cortando os arcos AFO e AGO nos pontos F e G respectivamente. Então o segmento de reta FG será muito aproximadamente igual ao lado do nonágono regular inscrito nesse círculo menor, o ângulo FOG diferindo de 40° por menos de 1°[18]. A relação entre a arte e a geometria poderia ter sido realmente muito produtiva, se tivesse chamado a atenção de matemáticos profissionais, mas nisso ela falhou por mais de um século depois do tempo de Dürer.

21 Os matemáticos puros contemporâneos de Dürer não souberam avaliar o futuro das transformações geométricas, mas vários tipos de projeções são essenciais para os cartógrafos. As explorações geográficas tinham ampliado os horizontes e criado uma necessidade de melhores mapas, mas nisso o escolasticismo e o humanismo eram de pouca ajuda pois as novas descobertas tinham tornado obsoletos os mapas antigos e medievais. Um dos mais importantes inovadores foi um matemático e astrônomo alemão Peter Apian (ou Bienewitz, 1495-1552). Em 1520 ele publicou talvez o mais antigo mapa do Velho Mundo e do Novo Mundo, em que tenha sido usado o nome "América"; em 1527 ele publicou uma aritmética comercial em que, na página de rosto, aparecia o triângulo aritmético, ou "de Pascal" impresso pela primeira vez. Os mapas de Apian eram bem feitos, mas sempre que possível seguiam de perto os de Ptolomeu. Para a novidade que se considera tão característica da Renascença é melhor olhar para um geógrafo flamengo, Gerard Mercator (ou Gerhard Kremer, 1512-1594), que por algum tempo esteve ligado à corte de Carlos V em Bruxelas. Pode-se dizer que Mercator rompeu com Ptolomeu em geografia, como Copérnico se tinha revoltado contra Ptolomeu em astronomia.

Durante a primeira metade de sua vida Mercator se apoiou pesadamente em Ptolomeu, mas em 1554 ele já se emancipara suficientemente para reduzir a avaliação feita por Ptolomeu da largura do Mediterrâneo de 62° para 53°. (Na verdade é próxima de 40°.) E o que é mais importante, em 1569 ele publicou o primeiro mapa, *Nova et aucta orbis terrae descriptio*, traçado com princípios novos. Os mapas usados no tempo de Mercator eram em geral baseados numa rede retangular formado de duas coleções de retas paralelas equidistantes, uma coleção para as latitudes, a outra para as longitudes. Porém o comprimento de um grau de longitude varia conforme o paralelo de latitude ao longo do qual ele é medido, uma variação desprezada na prática comum e que resulta em distorção da forma e erros de direção da parte dos navegadores que baseavam uma rota numa reta traçada entre dois pontos do mapa. A projeção estereográfica de Ptolomeu preservava as formas, porém não usava o reticulado de retas. A fim de obter algum acordo entre a teoria e a prática, Mercator introduziu a projeção que tem seu nome e que, com aperfeiçoamentos posteriores, tem sido básica para a cartografia a partir daí. O primeiro passo na projeção de Mercator consiste em pensar na terra como uma esfera inscrita num cilindro circular reto infinitamente longo que a toca ao longo do equador (ou de algum outro círculo máximo), e em projetar sobre o cilindro, a partir do centro da terra, os pontos

[18]Veja Moritz Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* (Leipzig: Teubner, 1900-1908, 4 volumes), II, 425

O Triângulo de Pascal em sua primeira impressão, 1527. Frontispício da aritmética de Petrus Apianus, Ingolstadt, 1527, mais de um século antes de Pascal investigar as propriedades do triângulo

sobre a superfície da terra. Cortando em seguida o cilindro ao longo de uma geratriz e estendendo-o num plano, os meridianos e paralelos sobre a terra se transformam num reticulado retangular de retas. As distâncias entre retas meridianas sucessivas serão iguais, mas as distâncias entre retas de latitude sucessivas não. Na verdade, essas últimas distâncias crescerão tão rapidamente à medida que nos afastamos do equador, que ocorrem distorções de forma; porém Mercator descobriu que por meio de uma modificação empiricamente determinada dessas distâncias era possível preservar direções e formas (embora não os tamanhos)[19]. Em 1599 Edward Wright (1558-1615), de Cambridge, professor de Henry, Príncipe de Gales, e um bom navegador, desenvolveu a base teórica da projeção de Mercator calculando a relação funcional $D = a \ln \mathrm{tg}(\phi/2 + 45°)$ entre a distância D no mapa a partir do equador e a latitude ϕ.

A matemática durante a Renascença tinha sido largamente aplicada — à contabilidade, mecânica, mensuração de terras, arte, cartografia, óptica — e havia numerosos livros tratando das artes práticas. No entanto, o interesse pelas obras clássicas da antiguidade permanecia forte, como vemos no caso de Maurolico, padre de origem grega que nasceu, viveu e morreu na Sicília. Maurolico era um geômetra de boa cultura que

[19]Uma exposição histórica dessa projeção e de outras se encontra no artigo "Map" de E. G. Ravenstein e outros, *Encyclopaedia Britannica*, 11ª edição, 17, 629-663

fez muito no sentido de reavivar o interesse pelas obras mais avançadas da antiguidade[20]. A geometria na primeira metade do século dezesseis dependera excessivamente das propriedades elementares ensinadas em Euclides. Werner tinha sido uma exceção a essa regra, mas poucos dentre os demais tinham conhecido realmente a geometria de Arquimedes, Apolônio e Papus. A razão para isso era simples — as traduções latinas desses autores só se difundiram suficientemente em meados do século. Nesse processo de tradução uniu-se a Maurolico um estudioso italiano entusiástico, Federigo Commandino, que morreu no mesmo ano — 1575. Já mencionamos a tradução de Arquimedes, impressa em 1543, que Tartaglia tomou emprestada; a essa seguiu-se uma edição em grego em 1544 e uma tradução latina por Commandino em Veneza em 1558.

Quatro livros de *As cônicas* de Apolônio tinham sido preservados em grego, e esses tinham sido traduzidos para o latim e impressos em Veneza em 1537. A tradução de Maurolico, completada em 1548, só foi publicada mais de um século depois, aparecendo em 1654, mas outra tradução, feita por Commandino, foi impressa em Bolonha em 1566. A *Coleção matematica* de Papus tinha sido virtualmente ignorada pelos árabes e europeus medievais, mas também foi traduzida pelo infatigável Commandino, embora só fosse impressa em 1588. Maurolico conhecia os vastos tesouros de geometria antiga que se estavam tornando disponíveis, pois lia grego, bem como latim. Na verdade, a partir de algumas indicações em Papus sobre a obra de Apolônio sobre máximos e mínimos — isto é, sobre normais às secções cônicas — Maurolico tentou reconstruir o então perdido Livro V de *As cônicas*. Nisso ele representava uma voga que seria um dos principais estímulos à geometria antes de Descartes — a de reconstruir obras perdidas em geral e os quatro últimos livros de *As cônicas* em particular. Durante o intervalo entre a morte de Maurolico em 1575 e a publicação de *La géométrie* de Descartes em 1637, a geometria marcou passo até que o desenvolvimento da álgebra atingisse um nível que tornasse possível a geometria algébrica. A Renascença poderia perfeitamente ter desenvolvido a geometria pura na direção sugerida pela arte e pela perspectiva, mas não foi dada atenção a essa possibilidade até quase exatamente a mesma época em que foi criada a geometria algébrica. Enquanto isso, entre Maurolico e Descartes, a matemática se desenvolveu em várias direções não geométricas, e a essas nos voltamos agora.

BIBLIOGRAFIA

Bond, J. D., "The Development of Trigonometric Methods Down to the Close of the XVth Century", *Isis*, 4 (1921-1922), 295-323

Bortolotti, Ettore, *Studi e ricerche sulla storia della matematica in Italia nei secoli XVI e XVII* (Bologna, 1928)

Bortolotti, Ettore, ed., *L'algebra. Opera di Rafael Bombelli da Bologna* (Bologna, 1929)

Cardan, Jerome, *The Book of My Life*, traduzido por Jean Stoner (edição em brochura, New York: Dover, 1963)

Clarke, F. M., "New Light on Robert Recorde," *Isis*, 7 (1926), 50-70

Easton, Joy B, "A Tudor Euclid", *Scripta Mathematica*, 27 (1966), 339-355

Ebert, E. R., "A Few Observations on Robert Recorde and his 'Grounde of Artes'", *The Mathematics Teacher*, 30 (1937), 110-121

Glaisher, J. W. L., "On the Early History of the Signs + and – and on the Early German Arithmeticians," *Messenger of Mathematics*, 51 (1921-1922), 1-148

Hofmann, J. E., *Geschichte der Mathematik*, 2.ª edição (Berlin: Walter de Gruyter, 1963) Vol. I

Hughes, Barnabas, ed., *Regiomontanus on Triangles* (Madison, Wis.: University of Wisconsin Press, 1967)

Lambo, Ch., S. J., "Une algèbre française de 1484. Nicolas Chuquet," *Revue des Questions Scientifiques* (3), 2 (1902), 442-472

Marre, Aristide, "Notice sur Nicolas Chuquet et son Triparty en la science des nombres," *Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze Matematiche e Fisiche*, 13 (1880), 555-659, 693-814; 14 (1881), 413-460

[20]Alguma idéia da extensão de seus escritos e da dificuldade em datá-los pode ser obtida consultando Edward Rosen, "The Editions of Maurolico's Mathematical Works". *Scripta Mathematica*, 20 (1959), 59-76

Ore, Oystein, *Cardano, the Gambling Scholar* (Princeton, N. J.: Princeton University Press, 1953)

Sarton, George, "The Scientific Literature Transmitted Through the Incunabula," *Osiris*, 5 (1938), 41-247

Simon, Max, *Cusanus als Mathematiker* (Strassburg, 1911, in *Festschrift Heinrich Weber*, Leipzig and Berlin: Teubner, 1912, pp. 298-337)

Smith, D. E., *Rara arithmetica* (Boston: Ginn, 1908)

Smith, D. E., ed. *A Source Book in Mathematics* (New York: McGraw-Hill, 1929; edição em brochura, New York: Dover, 1959, 2 volumes)

Sullivan, J. W. N., *The History of Mathematics in Europe, from the Fall of Greek Science to the Rise of the Conception of Mathematical Rigour* (New York: Oxford University Press, 1925)

Taylor, R. Emmett, *No Royal Road. Luca Pacioli and His Times* (Chapel Hill, N. C.: University of North Carolina Press, 1942)

Waters, W. G., *Jerome Cardan, a Biographical Study* (Londres, 1898)

Zeller, Irmã Mary Claudia, *The Development of Trigonometry from Regiomontanus to Pitiscus* (Ann Arbor, Michigan, University of Michigan, Ph. D. thesis, 1944)

EXERCÍCIOS

1. Quais dos fatores seguintes foram importantes para o desenvolvimento da matemática na Renascença: (a) a queda de Constantinopla, (b) a Reforma protestante, (c) o surgimento do humanismo, (d) a invenção da imprensa, (e) a emergência da classe mercantil? Explique.

2. Como você explica o fato de a álgebra e a trigonometria terem se desenvolvido mais rapidamente que a geometria durante o Renascimento?

3. Por que a resolução da cúbica foi tão importante para o desenvolvimento dos números imaginários?

4. Como explica o fato de tantos dos principais matemáticos do século dezesseis serem médicos?

5. Que países lideraram, durante a Renascença, o desenvolvimento da (a) álgebra, (b) trigonometria, (c) geometria? Mencione contribuições específicas em cada caso.

6. Como se compara o valor de Regiomontanus para $\operatorname{tg} 89^\circ$ com o das tabelas modernas? Como poderia ele ter achado seu valor?

7. Construa, com régua e compasso, um triângulo em que um lado é cinco, a altura relativa a esse lado é 3, e a razão dos outros dois lados é $\sqrt{2}:1$. (*Sugestão*: aplique o método algébrico de Regiomontanus e Bombelli.)

8. Resolva o problema de Pacioli em que se pede achar os lados de um triângulo se o raio do círculo inscrito é 4, e se os segmentos em que um lado é dividido pelo ponto de contato são 6 e 8.

9. Obtenha uma solução da equação de Bombelli $x^3 = 15x + 4$ como uma soma ou diferença de raízes cúbicas de números imaginários.

10. Reduza a resolução da quártica de Ferrari $x^4 + 6x^2 + 36 = 60x$ à resolução de uma equação cúbica.

11. Verifique a afirmação de Bombelli que $4 + \sqrt{-1}$ é uma raiz cúbica de $52 + \sqrt{-2209}$.

12. O *Grounde of Artes* de Recorde contém o seguinte esquema "simplificado" para multiplicar dois números de um algarismo (ambos maiores que 5): Primeiro subtrair cada número de 10. O produto dessas diferenças é o algarismo das unidades no produto dos números dados, e se qualquer das diferenças é subtraída do *outro* número dado, isso dará o algarismo das dezenas no produto dos números dados. Prove essa regra.

13. Forme a equação cúbica com raízes $1 \pm \sqrt{3}$ e -3 e depois aplique o método de Cardano-Tartaglia para resolver essa cúbica.

14. Resolva o problema de Cardano de dividir 10 em duas partes cujo produto seja 40. Verifique sua resposta.

*15. Justifique a construção da parábola de Werner, indicando onde está a diretriz.

*16. Como sabe que a construção de Dürer do nonágono não é exata? Ache o valor do arco *FG* com erro de menos de meio minuto.

*17. Mostre como construir o quadrilátero cíclico com lados sucessivos $a = 25$, $b = 33$, $c = 60$, $d = 16$.

*18. Prove o teorema de Copérnico sobre a geração da elipse pela epiciclóide.

*19. Justifique o método de Alberti para representar no plano da figura uma coleção de quadrados traçados no plano de terra.

Capítulo **16**

Prelúdio à matemática moderna

Na matemática não posso achar deficiência, a não ser que os homens não compreendem suficientemente o uso excelente da matemática pura.

Francis Bacon

1 Quando, em 1575, Maurolico e Commandino morreram, a Europa Ocidental tinha recuperado a maior parte das principais obras matemáticas da antiguidade agora existentes. A álgebra árabe fora perfeitamente dominada e tinha sido aperfeiçoada, tanto pela resolução das cúbicas e quárticas quanto por um uso parcial de simbolismo; e a trigonometria se tornara uma disciplina independente. A época estava quase madura para rápidos progressos além das contribuições antigas, medievais e renascentistas — mas não completamente. Há na história da matemática um alto grau de continuidade de um período para o seguinte; a transição da Renascença para o mundo moderno também se fez através de um grande número de figuras intermediárias, das quais consideraremos agora algumas das mais importantes. Dois desses homens, Galileu Galilei (1564-1642) e Bonaventura Cavalieri (1598-1647) vieram da Itália; vários outros, como Henry Briggs (1561-1639), Thomas Harriot (1560-1621), e William Oughtred (1574-1660), eram ingleses; dois deles, Simon Stevin (1548-1620) e Albert Girard (1590-1633), eram flamengos; outros vieram de vários países — John Napier (1550-1617) da Escócia, Jobst Bürgi (1552-1632) da Suíça, e Johann Kepler (1571-1630) da Alemanha. A maior parte da Europa Ocidental participava agora do desenvolvimento da matemática, mas a figura central e mais magnífica na transição foi um francês, François Viète (1540-1603) ou, em latim, Franciscus Vieta.

Viète não era matemático por vocação. Na juventude ele estudou e praticou direito, tornando-se membro do parlamento da Bretanha; mais tarde tornou-se membro do conselho do rei, servindo primeiro sob Henrique III depois sob Henrique IV. Foi, enquanto servia a esse último, Henrique de Navarra, que teve tanto sucesso ao decifrar as mensagens em código do inimigo que os espanhóis o acusaram de ter um pacto com o demônio. Só o tempo de lazer de Viète era dedicado à matemática, no entanto fez contribuições à aritmética, álgebra, trigonometria, e geometria. Houve um período de quase meia dúzia de anos, antes da ascensão de Henrique IV, em que Viète esteve em desfavor, e esses anos ele dedicou em grande parte a estudos matemáticos. Na aritmética, ele deve ser lembrado por seu apelo em favor do uso de frações decimais em lugar de sexagesimais. Em uma de suas primeiras obras, o *Canon-mathematicus* de 1579, ele escreveu:

> Sexagesimais e múltiplos de sessenta devem ser pouco, ou nunca, usados, e milésimos e milhares, centésimos e centenas, décimos e dezenas, e progressões semelhantes, ascendentes e descendentes, usadas frequentemente ou exclusivamente[1].

Nas tabelas e computações ele seguiu sua regra e usou frações decimais. Os lados dos quadrados inscrito e circunscrito num círculo de diâmetro 200 000 ele escreveu como $141{,}421{,}^{356\,24}$ e $200{,}000{,}\underline{^{000{,}00}}$, e sua média como $177{,}245{,}\underline{^{385{,}09}}$. Algumas páginas adiante ele escreveu a semicircunferência como $314{,}159{,}\frac{265{,}35}{1.000.00}$, e, mais adiante, ainda, esse número aparecia como **314,159**,265,36, com a parte inteira em negrito. Ocasionalmente ele usava uma barra vertical para separar as partes inteira e fracionária, como quando escreve que o apótema do polígono regular de 96 lados, num círculo de diâmetro 200 000 é aproximadamente **99,946**|458,75.

[1]Para mais detalhes ver C. B. Boyer, "Viète's Use of Decimal Fractions", *The Mathematics Teacher*, **55** (1962), 123-127

O uso de uma vírgula decimal para separatriz é atribuído em geral a G. A. Magini (1555-1617), um cartógrafo amigo de Kepler e rival de Galileu como candidato a uma cátedra em Bolonha, em seu *De planis triangulis* de 1592, seja a Christoph Clavius (1537--1612), um jesuíta amigo de Kepler, numa tabela de senos de 1593. Mas o ponto decimal só se tornou popular quando Napier o usou mais de vinte anos depois.

2 Sem dúvida foi à álgebra que Viète deu suas mais importantes contribuições, pois foi aqui que chegou mais perto das idéias modernas. A matemática é uma forma de raciocínio, e não uma coleção de truques, como Diofante possuíra; no entanto a álgebra durante o tempo dos árabes e o começo do período moderno não tinha ido longe no processo de libertação do uso de tratar casos particulares. Não poderia haver grande progresso na teoria da álgebra enquanto a preocupação principal fosse a de encontrar a "coisa" numa equação com coeficientes numéricos específicos. Tinham sido desenvolvidos símbolos e abreviações para uma incógnita e suas potências, bem como para operações e a relação de igualdade. Stifel tinha ido ao ponto de escrever *AAAA* para indicar a quarta potência de uma quantidade incógnita; no entanto não tinha um esquema para escrever uma equação que pudesse representar uma qualquer dentre uma classe toda de equações, dentre todas as quadráticas, por exemplo, ou dentre todas as cúbicas. Um geômetra, num diagrama, poderia fazer *ABC* representar todos os triângulos, mas um algebrista não tinha um esquema correspondente para escrever todas as equações de segundo grau. Desde os dias de Euclides que letras tinham sido usadas para representar grandezas, conhecidas ou desconhecidas, e Jordanus fizera isso constantemente; mas não havia meios de distinguir grandezas supostas conhecidas das quantidades desconhecidas que devem ser achadas. Aqui Viète introduziu uma convenção tão simples quanto fecunda. Usou uma vogal para representar, em álgebra, uma quantidade suposta desconhecida, ou indeterminada, e uma consoante para representar uma grandeza ou número supostos conhecidos ou dados. Aqui encontramos, pela primeira vez na álgebra, uma distinção clara entre o importante conceito de parâmetro e a idéia de uma quantidade desconhecida.

3 Se Viète tivesse adotado outros simbolismos já existentes em seus dias, ele poderia ter escrito *todas* as equações quadráticas na forma única $BA^2 + CA + D = 0$, onde A é a incógnita e B, C, e D são parâmetros; mas infelizmente ele só era moderno em alguns aspectos, em outros era antigo e medieval. Sua álgebra é fundamentalmente sincopada e não simbólica, pois embora ele sensatamente adotasse os símbolos germânicos para adição e subtração, e ainda mais sensatamente usasse símbolos diferentes para parâmetros e incógnitas, o resto de sua álgebra consistia de palavras e abreviações. A terceira potência da quantidade incógnita não era A^3, ou mesmo *AAA*, mas *A cubus*, e a segunda potência era *A quadratus*. A multiplicação era denotada pela palavra latina *in*, a divisão pela barra de fração, e para a igualdade Viète usava uma abreviação para a palavra latina *aequalis*. Não é dado a um só homem fazer toda uma dada transformação; ela deve vir em passos sucessivos.

Um dos passos além da obra de Viète foi dado por Harriot quando reavivou a idéia que Stifel já tivera de escrever o cubo da incógnita como *AAA*. Essa notação foi usada sistematicamente por Harriot em seu livro póstumo intitulado *Ars analyticae praxis* e impresso em 1631. Seu título tinha sido sugerido por uma obra anterior de Viète, que não gostava da palavra árabe álgebra. Ao procurar uma outra palavra, Viète observou que em problemas envolvendo a "cosa" ou quantidade incógnita, geralmente se procede do modo que Papus e os antigos haviam descrito como análise. Isto é, em vez de raciocinar a partir do que é conhecido para o que se deve demonstrar, os algebristas invariavelmente raciocinavam a partir da hipótese que a incógnita foi dada e deduziam uma conclusão necessária da qual a incógnita pode ser determinada. Em símbolos modernos, se queremos resolver $x^2 - 3x + 2 = 0$, por exemplo, partimos da premissa de que existe um valor de x que satisfaz à equação; dessa hipótese tiramos a conclusão necessária que $(x-2)(x-1) = 0$ de modo que está satisfeita ou $x-2=0$ ou $x-1=0$ (ou ambas as coisas), logo que necessariamente x é 2 ou 1. No entanto, isso não significa que um, ou ambos, desses números satisfazem à equação a menos que se possa inverter os passos do desenvolvimento do raciocínio. Isto é, a análise dever ser seguida de demonstração sintética.

Tendo em vista o tipo de raciocínio tão freqüentemente usado na álgebra Viète denominou o assunto "a arte analítica". Além disso, ele percebia claramente o largo alcance do assunto, vendo que a quantidade desconhecida não precisava ser nem número nem segmento de reta. A álgebra raciocina sobre "tipos" ou espécies, por isso Viète estabeleceu contraste entre *logística speciosa* e *logística numerosa*. Sua álgebra foi exposta na *Isagoge* (ou *Introdução*), impressa em 1591, mas suas várias outras obras sobre álgebra só apareceram vários anos após sua morte. Em todas ele conservou um princípio de homogeneidade nas equações, de modo que numa equação como $x^3 + 3ax = b$, a é designado como *planum* e b como *solidum*. Isso sugere uma certa inflexibilidade, que Descartes removeu uma geração mais tarde; mas a homogeneidade tem também algumas vantagens, como Viète certamente percebeu.

4 A álgebra de Viète merece atenção pela generalidade de sua expressão, mas há ainda outras novidades. Por exemplo, Viète sugeriu um novo modo de atacar a resolução das cúbicas. Depois de reduzi-las à forma padrão equivalente a $x^3 + 3ax = b$, ele introduziu uma nova quantidade desconhecida y relacionada com x pela equação $y^2 + xy = a$. Isso transforma a cúbica em x numa equação quadrática em y^3, cuja solução se obtém facilmente. Além disso, Viète percebia algumas das relações entre raízes e coeficientes de uma equação, embora fosse tolhido por sua recusa em aceitar coeficientes ou raízes negativos. Ele percebia, por exemplo, que se $x^3 + b = 3ax$ tem duas raízes positivas, x_1 e x_2, então $3a = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$ e $b = x_1x_2^2 + x_2x_1^2$. Isso, é claro, é um caso particular de nosso teorema que diz que o coeficiente do termo em x, numa cúbica com primeiro coeficiente um, é a soma dos produtos das raízes tomadas duas a duas, e o termo constante é o oposto do produto das raízes. Em outras palavras, Viète chegou perto das funções simétricas das raízes na teoria das equações. Coube a Girard em 1629, em *Invention nouvelle en l'algèbre*, enunciar claramente as relações entre raízes e coeficientes, pois ele admitiu raízes negativas e imaginárias, ao passo que Viète reconhecia apenas as raízes positivas. De um modo geral Girard percebia que as raízes negativas são orientadas em sentido oposto ao dos números positivos, antecipando assim a idéia de reta numérica. "O negativo em geometria indica um retrocesso", ele disse, "ao passo que o positivo é um avanço". Parece que a ele também se deve a percepção de que uma equação pode ter tantas raízes quanto indica seu grau. Girard conservou as raízes imaginárias das equações porque elas exibem os princípios gerais na formação de uma equação a partir de suas raízes.

5 Descobertas semelhantes às de Girard tinham sido feitas antes por Thomas Harriot, mas elas só foram impressas dez anos depois de Harriot ter morrido de câncer em 1621. A publicação das obras de Harriot fora prejudicada por correntes políticas conflitantes durante os últimos anos do reinado de Elizabeth I. Ele tinha sido enviado por Sir Walter Raleigh como mensurador na expedição desse último ao Novo Mundo em 1585, tornando-se assim o primeiro matemático importante a chegar à América do Norte. (O Irmão Juan Diaz, jovem capelão de algum preparo matemático, tinha antes participado da expedição de Cortez ao Yucatan em 1518.) Ao voltar Harriot publicou *A Briefe and True Report of the New-found Land of Virginia* (1586). Quando seu patrono perdeu as boas graças da rainha e foi executado, Harriot recebeu uma pensão de £300 por ano de Henry, Conde de Northumberland; mas em 1606 o conde foi enviado à prisão pelo sucessor de Elizabeth, James I. Harriot continuou a ver Henry em sua prisão, e estes transtornos juntamente com sua má saúde contribuíram para que não publicasse seus resultados.

Harriot conhecia as relações entre raízes e coeficientes e entre raízes e fatores, mas como Viète ele era prejudicado por não reconhecer raízes negativas e imaginárias. No

que toca às notações, no entanto, ele fez progressos no uso de simbolismo, sendo responsável pela introdução dos sinais > e < para "maior que" e "menor que"[2]. Foi também em parte por ter ele usado o sinal de igualdade de Recorde que isso foi finalmente adotado. Harriot mostrou muito mais moderação no uso das novas notações que seu contemporâneo mais jovem, William Oughtred. Esse publicou seu *Clavis mathematicae* no mesmo ano, 1631, em que o *Praxis* de Harriot foi impresso. No *Clavis* a notação para potências era um passo atrás na direção de Viète, pois onde Harriot escrevia *AAAAAAA*, por exemplo, Oughtred usava *Aqqc* (isto é, *A* quadrado quadrado cubo). De todas as notações novas de Oughtred só uma é bastante usada, o sinal × para a multiplicação[3].

A forma homogênea de suas equações mostra que o pensamento de Viète sempre se mantinha próximo da geometria, mas sua geometria não era do nível elementar da de tantos predecessores seus; era no nível mais elevado de Apolônio e Papus. Interpretando as operações algébricas fundamentais geometricamente, Viète percebeu que régua e compasso bastam até para as raízes quadradas. No entanto, permitindo a interpolação de duas médias geométricas entre duas grandezas é possível construir raízes cúbicas, ou, a fortiori, resolver geometricamente qualquer equação cúbica. Então pode-se, mostrou Viète, construir o heptágono regular, pois essa construção conduz a uma cúbica da forma $x^3 = ax + a$. Na verdade toda equação cúbica ou quártica é resolúvel por trissecções de ângulos e inserção de duas médias geométricas entre duas grandezas. Aqui vemos claramente uma tendência muito significativa — a de associar a nova álgebra avançada com a antiga geometria avançada. A geometria analítica não podia então estar muito distante, e Viète poderia tê-la descoberto se não evitasse o estudo geométrico de equações indeterminadas. Os interesses matemáticos de Viète eram excepcionalmente amplos, por isso ele tinha lido a *Aritmética* de Diofante; mas quando um problema geométrico conduzia Viète a uma equação final em duas incógnitas ele o abandonava com a observação displicente de que o problema é indeterminado. Desejaríamos que, com sua visão geral, ele tivesse investigado as propriedades geométricas da indeterminação.

6 Em muitos aspectos a obra de Viète recebe avaliação muito inferior a seus méritos, mas em um caso é possível que tenha recebido crédito indevido por um método conhecido já muito antes na China. Em uma de suas últimas obras, o *De numerosa potestatum ... resolutione* (1600), ele deu um método para a resolução aproximada de equações que é praticamente aquele que hoje se chama método de Horner. Para resolver $x^2 + 7x = 60\,750$, por exemplo, Viète encontrou como uma primeira aproximação por falta para x o valor $x_1 = 200$. Depois, substituindo $x = 200 + x_2$ na equação de partida (ou, como diríamos, reduzindo as raízes de 200), ele achou $x_2^2 + 407x_2 = 19\,350$. Essa equação agora conduz a uma segunda aproximação $x_2 = 40$. Agora fazendo $x_2 = 40 + x_3$, resulta a equação $x_3^2 + 487x_3 = 1\,470$, e a raiz positiva dessa é $x_3 = 3$. Portanto $x_2 = 43$ e $x = 243$. Essa equação ilustrativa tirada de Viète (mas escrita em notação moderna) podia, é claro, ser resolvida por completação do quadrado; mas o autor resolveu do mesmo modo outros casos em que não dispunha de alternativa simples, achando, por exemplo, uma solução de $x^6 + 6\,000x = 191\,246\,976$. Uma das belezas do método é que se aplica a qualquer equação polinomial com coeficientes reais e uma raiz real.

7 A trigonometria de Viète, como sua álgebra, era caraterizada por uma ênfase maior sobre generalidade e largueza de visão. Assim como Viète foi o verdadeiro fundador

[2]Ver J. A. Lohne, "Thomas Harriot als Mathematiker", *Centaurus*, **11** (1965), 19-45. Quanto à vida de Harriot ver o artigo de Agnes M. Clerke em *Dictionary of National Biography*, XXIV (1890), 437-439. Ver também R. C. H. Tanner, "On the Role of Equality and Inequality in the History of Mathematics", *British Journal of the History of Science*, 1 (1962), 159-169; Robert Kargon, "Thomas Harriot, the Northumberland Circle and Early Atomism in England", *Journal of the History of Ideas*, **27** (1966), 128-136

[3]Para uma vida de Oughtred e outras referências, ver Florian Cajori, *William Oughtred, a Great Seventeenth-Century Teacher of Mathematics* (1916) e o artigo sobre Oughtred de J. B. Mullinger no *Dictionary of National Biography*, XLII (1895), 356-358. Quanto a simbolismo é essencial consultar Florian Cajori, *A History of Mathematical Notations* (1929)

de uma álgebra literal, também com alguma justificação pode ser chamado o pai de uma abordagem analítica generalizada para a trigonometria que às vezes é chamada goniometria. Aqui também, é claro, Viète partiu da obra de seus predecessores, notadamente Regiomontanus e Rheticus. Como o primeiro ele considerava a trigonometria um ramo independente da matemática; como o segundo ele em geral trabalhava sem referência direta a meias cordas num círculo. Viète no *Canon mathematicus* (1579) preparou extensas tabelas de todas as seis funções de ângulos aproximados até minutos. Vimos que ele tinha recomendado o uso de frações decimais, em vez de sexagesimais; mas para evitar todas as frações tanto quanto possível, Viète escolheu um "sinus totus" ou hipotenusa de 100 000 partes para as tabelas de senos e co-senos e uma "base" ou *perpendiculum* de 100 000 partes para as tabelas de tangentes, co-tangentes, secantes e co-secantes. (Não usava, porém, esses nomes, exceto quanto à função seno.)

Para resolver triângulos oblíquos, Viète no *Canon mathematicus* decompunha-os em triângulos retângulos, mas em outra obra, poucos anos depois, *Variorum de rebus mathematicis* (1593) há um enunciado equivalente a nossa lei das tangentes:

$$\frac{\dfrac{(a+b)}{2}}{\dfrac{(a-b)}{2}} = \frac{\operatorname{tg}\dfrac{A+B}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{A-B}{2}}.$$

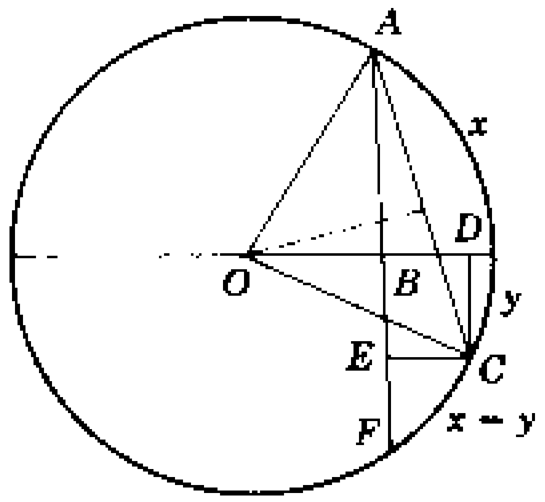


Figura 16.1

Embora Viète possa ter sido o primeiro a usar essa fórmula, ela foi publicada pela primeira vez por uma figura mais obscura, Thomas Finck, em 1583, em *Geometria rotundi*.

Por essa época estavam aparecendo identidades trigonométricas de vários tipos em todas as partes da Europa, o que teve como resultado uma redução da ênfase na computação na resolução de triângulos e aumento da preocupação com relações funcionais analíticas. Entre essas havia um grupo de fórmulas conhecidas como regras de prostaférese — isto é, fórmulas que transformavam um produto de funções numa soma ou diferença (daí o nome *prosthaphaeresis*, palavra grega que significa adição e subtração). Do seguinte tipo de diagrama, por exemplo, Viète obtinha a fórmula $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = 2 \operatorname{sen} (x+y)/2 \cos (x-y)/2$. Seja $\operatorname{sen} x = AB$ (Fig. 16.1) e $\operatorname{sen} y = CD$. Então $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = AB = CD = AE = AC \cos (x-y)/2 = 2 \operatorname{sen} (x+y)/2 \cos (x-y)/2$. Fazendo as substituições $(x+y)/2 = A$ e $(x-y)/2 = B$ obtemos a forma mais útil $\operatorname{sen} (A+B) + \operatorname{sen} (A-B) = 2 \operatorname{sen} A \cos B$. De modo semelhante obtém-se $\operatorname{sen} (A+B) - \operatorname{sen}(A-B) = 2 \cos A \operatorname{sen} B$, colocando os ângulos x e y do mesmo lado do raio OD. As fórmulas $2 \cos A \cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$ e $2 \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$ são obtidas de modo semelhante.

As regras acima às vezes são chamadas "fórmulas de Werner", pois parecem ter sido usadas por Werner para simplificar cálculos astronômicos. Pelo menos uma delas, a que transforma um produto de co-senos numa soma de co-senos, era conhecida pelos árabes no tempo de ibn-Yunus, mas foi somente no século dezesseis, mais particularmente no fim do século, que o método de prostaférese veio a ser comumente usado. Se, por exemplo, se desejava multiplicar 98 436 por 79 523, podia-se por $\cos A = 49\,218$ (isto é, 98 436/2) e $\cos B = 79\,523$. (Em notação moderna, colocaríamos provisoriamente uma vírgula decimal antes de cada um dos números e ajustaríamos a vírgula na resposta.) Então da tabela de funções trigonométricas acham-se os ângulos A e B, e da tabela tira-se o valor de $\cos(A+B)$ e o de $\cos(A-B)$, a soma desses sendo o produto desejado. Note-se que o produto é encontrado sem que qualquer multiplicação tenha sido efetuada. Em nosso exemplo de multiplicação por prostaférese não houve grande economia de tempo e energia; mas quando lembramos que naquela época não eram

raras as tabelas trigonométricas com até doze ou quinze algarismos significativos, as possibilidades da prostaférese como meio de economizar esforço se tornam mais aparentes. O artifício era usado nos principais observatórios astronômicos, inclusive no de Tycho Brahe (1546-1601) na Dinamarca, de onde a informação sobre ele foi levada a Napier na Escócia. Quocientes eram tratados de modo semelhante, usando uma tabela de secantes e co-secantes.

Talvez a generalização de Viète de trigonometria para goniometria seja mais aparente em conexão com suas fórmulas para ângulos múltiplos que em qualquer outra conexão. As fórmulas de ângulo duplo para seno e co-seno já eram, é claro, conhecidas por Ptolomeu, e as fórmulas para ângulo triplo são então facilmente obtidas com as fórmulas de Ptolomeu para o seno e o co-seno da soma de dois ângulos. Usando as fórmulas de Ptolomeu recursivamente, pode-se obter uma fórmula para $\operatorname{sen} nx$ ou para $\cos nx$, mas com grande trabalho. Viète usou uma engenhosa manipulação de triângulos retângulos e a identidade bem conhecida

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ad + bc)^2 + (bd - ac)^2 = (ad - bc)^2 + (bd + ac)^2$$

para chegar a fórmulas para ângulos múltiplos equivalentes às que agora escreveríamos na forma

$$\cos nx = \cos^n x - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cos^{n-2} x \operatorname{sen}^2 x,$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cos^{n-4} x \operatorname{sen}^4 x - \cdots$$

e

$$\operatorname{sen} nx = n \cos^{n-1} x \operatorname{sen} x - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cos^{n-3} x \operatorname{sen}^3 x + \cdots$$

onde os sinais se alternam e os coeficientes são em valor absoluto os números alternados na linha adequada do triângulo aritmético. Aqui vemos um elo significativo entre a trigonometria e a teoria dos números.

8 Viète observou também uma conexão importante entre suas fórmulas e a resolução de equações cúbicas. A trigonometria podia servir de auxiliar para a álgebra onde esta tinha esbarrado contra um muro que não sabia transpor, isto é, no caso irredutível da cúbica. Isso evidentemente ocorreu a Viète quando ele observou que o problema de trissecção do ângulo levava a uma equação cúbica. Se na equação $x^3 + 3px + q = 0$ substituímos $mx = y$ (para obter um grau de liberdade na posterior escolha de um valor para m), o resultado é $y^3 + 3m^2py + m^3q = 0$. Comparando isso com a fórmula $\cos^3 \theta - 3/4 \cos \theta - 1/4 \cos 3\theta = 0$, observamos que se $y = \cos \theta$, e se $3m^2p = -3/4$, então $-1/4 \cos 3\theta = m^3q$. Como p é dado, m agora fica conhecido (e será real sempre que as três raízes sejam reais). Portanto 3θ é facilmente determinado, já que q é conhecido; portanto $\cos \theta$ é conhecido. Portanto y, e daí x, está determinado. Além disso, considerando todos os possíveis ângulos que satisfazem às condições, todas as três raízes reais serão encontradas. Essa resolução trigonométrica do caso irredutível da cúbica, sugerida por Viète, foi feita em detalhe por Girard em 1629 em *Invention nouvelle en l'algèbre*.

Em 1593 Viète encontrou uma ocasião pouco comum para usar suas fórmulas para ângulos múltiplos. Um matemático belga, Adriaen van Roomen (1561-1615) ou Romanus, havia feito um desafio público para quem quer que conseguisse resolver uma equação de grau quarenta e cinco:

$$x^{45} - 45x^{43} + 945x^{41} - \cdots - 3\,795x^3 + 45x = K.$$

O embaixador dos Países Baixos na corte de Henrique IV afirmou que a França não tinha nenhum matemático capaz de resolver o problema proposto por seu compatriota. Viète, chamado a defender a honra de seus conterrâneos, observou que a equação resulta de exprimir $K = \operatorname{sen} 45\theta$ em termos de $x = 2\operatorname{sen} \theta$, e imediatamente achou as raízes positivas. O sucesso impressionou tanto van Roomen que ele fez a Viète uma visita especial.

Ao aplicar a trigonometria a problemas algébricos e aritméticos Viète ampliava o alcance do assunto[4]. Além disso, suas fórmulas para ângulos múltiplos deveriam ter revelado a periodicidade das funções goniométricas, mas provavelmente foi sua reticência quanto aos números negativos que o impediu — como impediu seus contemporâneos — de chegar tão longe. Havia considerável entusiasmo pela trigonometria no fim do século dezesseis e começo do dezessete, mas tomou a forma primariamente de sínteses e livros de texto. Foi durante esse período que o nome "trigonometria" veio a ser dado ao assunto. Foi usado como título de uma exposição por Bartholomeus Pitiscus (1561-1613), que foi publicada pela primeira vez em 1595 como suplemento a um livro sobre esféricas e novamente, em separado, em 1600, 1606 e 1612[5]. Por coincidência o desenvolvimento dos logaritmos, a partir daí sempre aliados da trigonometria, estava também tendo lugar durante esses anos.

9 John Napier (ou Neper), como Viète, não era matemático profissional. Era um proprietário escocês, Barão de Murchiston, que administrava suas grandes propriedades e escrevia sobre vários assuntos. Num comentário sobre o *Livro das revelações*, por exemplo, ele afirmava que o papa em Roma era o anti-Cristo. Ele só se interessava por certos aspectos da matemática, particularmente os que se referiam a computação e trigonometria. As "barras de Napier" eram bastões em que itens de tabuadas de multiplicação eram esculpidos numa forma que se prestava ao uso prático; as "analogias de Napier" e a "regra de Napier das partes circulares" eram regras mnemônicas ligadas a trigonometria esférica.

Napier conta que trabalhou em sua invenção dos logaritmos durante vinte anos antes de publicar seus resultados, o que colocaria a origem de suas idéias em 1594 aproximadamente. Ele pensara nas seqüências, publicadas vez por outra, de potências sucessivas de um dado número — como na *Arithmetica integra* de Stifel cinqüenta anos antes e como nas obras de Arquimedes. Em tais seqüências era evidente que as somas e diferenças dos índices das potências correspondiam a produtos e quocientes das próprias potências; mas uma seqüência de potências inteiras de uma base, tal como dois, não podia ser usada para computações porque as grandes lacunas entre termos sucessivos tornavam a interpolação demasiado imprecisa. Enquanto Napier refletia no assunto, o Dr. John Craig, médico de James VI da Escócia, falou-lhe no uso da prostaférese na Dinamarca. Presumivelmente Craig tinha sido parte do grupo que com James VI em 1590 viajara para a Dinamarca para encontrar a noiva deste, Anne da Dinamarca. O grupo fora forçado por tempestades a desembarcar não longe do observatório de Tycho Brahe, onde, enquanto esperavam tempo mais favorável, tinham conversado com o astrônomo. Aparentemente foi mencionado o maravilhoso artifício da prostaférese, muito usado em computações no observatório; e a informação sobre isto encorajou Napier a redobrar seus esforços e finalmente a publicar em 1614 o *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* (Uma descrição da maravilhosa regra dos logaritmos).

10 A chave da obra de Napier pode ser explicada muito simplesmente. Para conservar próximos os termos numa progressão geométrica de potências inteiras de um número dado, é necessário tomar o número dado muito próximo de um. Napier por isso escolheu como seu número dado $1 - 10^{-7}$ (ou 0,9999999). Assim os termos na progressão de potências crescentes ficam realmente próximos — próximos demais, na verdade. Para chegar a um equilíbrio e evitar decimais Napier multiplicou cada potência por 10^7. Isto é, se $N = 10^7(1 - 1/10^7)^L$, então L é o "logaritmo" de Napier do número N. Assim seu

[4]Não há edição geralmente acessível das obras de Viète, nem mesmo uma boa exposição em inglês de sua vida e obra. Sua *Opera mathematica*, editado por Fr. van Schooten (Leiden, 1646) é rara, como quase todas as obras publicadas de Viète. É útil a obra de Frédéric Ritter, *François Viète* (1895). Uma comunicação recente do Prof. D. J. Struik informa que existe uma tradução em inglês da *Isagoge* de Viète por J. Winfree Smith, St. John's College, Annapolis, Md., 1955

[5]Para uma exposição completa de sua obra ver Irmã Mary Claudia Zeller, *The Development of Trigonometry from Regiomontanus to Pitiscus* (1944)

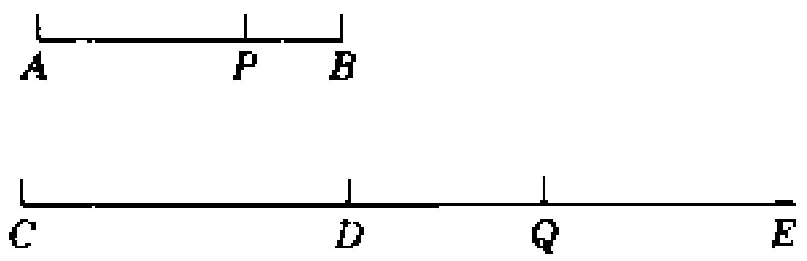


Figura 16.2

logaritmo de 10^7 é 0, seu logaritmo de $10^7(1 - 1/10^7) = 9999999$ é 1, e assim por diante. Dividindo seus números e logaritmos por 10^7 teríamos virtualmente um sistema de logaritmos de base $1/e$, pois $(1 - 1/10^7)^{10^7}$ fica próximo de $\lim_{n \to \infty} (1 - 1/n)^n = 1/e$. Deve-se lembrar, no entanto, que Napier não tinha o conceito de base de um sistema de logaritmos, pois sua definição era diferente da nossa. Os princípios de sua obra eram explicados em termos geométricos da maneira seguinte. Sejam dados um segmento de reta AB e uma semi-reta $CDE\ldots$ (Fig. 16.2). Suponhamos que um ponto P parte de A e se move ao longo de AB com velocidade variável, decrescendo em proporção com sua distância a B; durante o mesmo tempo, suponhamos que um ponto Q parte de C e se move ao longo de $CDE\ldots$ com velocidade uniforme igual à velocidade inicial de P. Napier chamava a distância CQ o logaritmo da distância PB.

A definição geométrica de Napier concorda, é claro, com a descrição numérica dada acima. Para mostrar isto, seja $PB = x$ e $CQ = y$. Se AB é tomado como 10^7, e se a velocidade inicial de P também é tomada como 10^7, então em notações modernas temos $dx/dt = -x$ e $dy/dt = 10^7$, $x_0 = 10^7$, $y_0 = 0$. Então $dy/dx = -10^7/x$, ou $y = -10^7 \ln cx$, onde das condições iniciais resulta $c = 10^{-7}$. Logo $y = -10^7 \ln (x/10^7)$ ou $y/10^7 = \log_{1/e}(x/10^7)$. Isto é, se as distâncias PB e CQ fossem divididas por 10^7, a definição de Napier levaria precisamente a um sistema de logaritmos de base $1/e$, como mencionamos antes. É desnecessário dizer que Napier construiu suas tabelas numericamente em vez de geometricamente, como a palavra "logaritmo", que ele fabricou, implica. A princípio ele chamou seus índices de potências "números artificiais", mas mais tarde ele fez a composição de duas palavras gregas, *Logos* (ou razão) e *arithmos* (ou número).

Napier não pensou numa base para seu sistema, mas suas tabelas eram compiladas por multiplicações repetidas, equivalentes a potências de 0,9999999. Evidentemente a potência (ou número) decresce à medida que o índice (ou logaritmo) cresce. Isso é de se esperar, pois ele usava essencialmente a base $1/e$ que é menor que 1. Uma diferença mais importante entre seus logaritmos e os nossos está em que seu logaritmo de um produto (ou quociente) não era igual à soma (ou diferença) dos logaritmos. Se $L_1 = \text{Log } N_1$ e $L_2 = \text{Log } N_2$, então $N_1 = 10^7(1 - 10^{-7})^{L_1}$ e $N_2 = 10^7(1 - 10^{-7})^{L_2}$, de modo que a soma dos logaritmos de Napier será o logaritmo não de N_1N_2 mas de $N_1N_2/10^7$. Modificações semelhantes valem, naturalmente, para logaritmos de quocientes, potências e raízes. Se $L = \text{Log } N$, por exemplo, então $nL = \text{Log } N^n/10^{7(n-1)}$. Essas diferenças não são muito significativas, pois envolvem apenas um deslocamento da vírgula decimal. Que Napier conhecia perfeitamente as regras para produtos e potências se vê por sua observação de que todos os números (ele os chamava "senos"), na razão de 2 para 1, têm diferenças de 6 931 469,22 nos logaritmos, e todos os que estão na proporção de 10 para 1 têm diferenças de 23 025 842,34 nos logaritmos. Nessas diferenças vemos, deslocando a vírgula, os logaritmos naturais dos números dois e dez. Por isso não é desarrazoado usar o nome "neperianos" para os logaritmos naturais, embora esses não sejam exatamente os que Napier tinha em mente.

O conceito de função logarítmica está implícito na definição de Napier e em toda sua obra sobre logaritmos, mas essa relação não preponderava em seu espírito. Tinha laboriosamente construído seu sistema com um objetivo — a simplificação de computações, especialmente de produtos e quocientes. Além disso, que ele tinha em mente as computações trigonométricas fica claro pelo fato que aquilo que nós, por simplicidade de exposição, chamamos logaritmo de Napier, de um número ele na verdade chamava de logaritmo de um seno. Na Fig. 16.2, CQ era chamado logaritmo do seno PB. Isso não faz diferença nenhuma, nem na teoria nem na prática, é claro.

11 A publicação em 1614 do sistema de logaritmos teve sucesso imediato, e entre seus admiradores mais entusiásticos estava Henry Briggs, o primeiro *"Savilian professor"* de geometria em Oxford. Em 1615 ele visitou Napier em sua casa na Escócia, e lá eles discutiram possíveis modificações no método dos logaritmos. Briggs propôs o uso de potências de dez, e Napier disse que tinha pensado nisso e concordava. Napier uma vez tinha proposto uma tabela usando $\log 1 = 0$ e $\log 10 = 10^{10}$ (para evitar frações). Os dois homens finalmente concordaram em que o logaritmo de um deveria ser zero e que o logaritmo de dez deveria ser um. Mas Napier já não tinha a energia suficiente para por em prática essas idéias. Morreu em 1617, o ano em que sua *Rhabdologia*, com a descrição de suas barras, apareceu. O segundo de seus clássicos tratados sobre logaritmos, o *Mirifici logarithmorum canonis constructio*, em que dava uma exposição completa dos métodos que usava para construir suas tabelas, apareceu postumamente em 1619[6]. Por isso recaiu sobre Briggs a tarefa de construir a primeira tabela de logaritmos comuns, ou Briggsianos. Em vez de tomar as *potências* de um número próximo de dez, como fizera Napier, Briggs começou com $\log 10 = 1$ e depois achou outros logaritmos tomando *raízes* sucessivas. Calculando que $\sqrt{10} = 3{,}162277$, Briggs tinha que $\log 3{,}162277 = 0{,}5000000$, e de $10^{3/4} = \sqrt{31{,}62277} = 5{,}623413$ tinha que $\log 5{,}623413 = 0{,}7500000$. Continuando desse modo, ele calculou outros logaritmos comuns. No ano da morte de Napier, 1617, Briggs publicou seu *Logarithmorum chilias prima* — isto é, os logaritmos dos números de 1 a 1 000, cada um calculado com quatorze casas. Em 1624, em *Arithmetica logarithmica*, Briggs ampliou a tabela incluindo logaritmos comuns dos números de 1 a 20 000 e de 90 000 a 100 000, novamente com quatorze casas. O trabalho com logaritmos podia a partir daí ser realizado exatamente como hoje, pois para as tabelas de Briggs todas as leis usuais sobre logaritmos se aplicavam. Incidentalmente é do livro de Briggs de 1624 que provêm nossas palavras "mantissa" e "característica". Enquanto Briggs estava computando suas tabelas de logaritmos comuns, um contemporâneo, John Speidell, calculou os logaritmos naturais das funções trigonométricas, publicando-os em seu *New Logarithmes* de 1619. Alguns logaritmos naturais tinham já aparecido antes, em 1616, numa tradução para o inglês feita por Edward Wright (1559-1615) da primeira obra de Napier sobre logaritmos. Poucas vezes uma descoberta nova "pegou" tão depressa quanto a invenção dos logaritmos, e o resultado foi o aparecimento imediato de tabelas de logaritmos que eram mais que adequadas para a época.

12 Ficou sugerido, até agora, que a invenção dos logaritmos foi obra de um só homem, mas tal impressão não deve permanecer. Napier foi de fato o primeiro a publicar uma obra sobre logaritmos, mas idéias muito semelhantes foram desenvolvidas independentemente na Suíça por Jobst Bürgi mais ou menos ao mesmo tempo. Na verdade, é possível que a idéia de logaritmo tenha ocorrido a Bürgi[7] em 1588, o que seria meia dúzia de anos antes de Napier começar a trabalhar na mesma direção. Porém Bürgi só publicou seus resultados em 1620, meia dúzia de anos depois de Napier publicar sua *Descriptio*. A obra de Bürgi apareceu em Praga num livro intitulado *Arithmetische und geometrische Progress-Tabulen*, e isso indica que as influências que guiaram seu trabalho foram semelhantes às que operaram no caso de Napier. Os dois partiram das propriedades das seqüências aritméticas e geométricas, estimulados, provavelmente, pelo método de prostaférese. As diferenças entre as obras dos dois homens estão principalmente na terminologia e nos valores numéricos que usavam; os princípios fundamentais eram os mesmos.

[6]Há muitas exposições boas da obra de Napier. Entre as melhores está o artigo sobre "Logarithms" de J. W. L. Glaisher na *Encyclopaedia Britannica*, 11.ª ed., Vol. 16, pp. 868-877. Também excelente é o artigo de Florian Cajori, "History of the Exponential and Logarithmic Concepts", *American Mathematical Monthly*, **20** (1913), 5-14, 35-47, 75-84, 107-117, 148-151, 173-182, 205-210, bem como o artigo de Glaisher, "On Early Tables of Logarithms and Early History of Logaritms", *Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics*, **48** (1920), 151-192. Veja também E. W. Hobson, *John Napier and the Invention of Logarithms* (1914) e o *Napier Tercentary Memorial Volume*, editado por C. G. Knott (1915). Porém este último dá a Napier mais méritos do que merece

[7]Veja J. E. Hofmann: *Geschichte der Mathematik* (1963), p. 167

Em vez de partir de um número um pouco *menor* que um (como Napier que usava $1 - 10^{-7}$), Bürgi escolheu um número um pouco *maior* que um — o número $1 + 10^{-4}$; e em vez de multiplicar as potências desse número por 10^7, Bürgi multiplicava por 10^8. Havia ainda outra pequena diferença: em sua tabulação Bürgi multiplicava todos os seus índices de potência por dez. Isto é, se $N = 10^8(1 + 10^{-4})^L$, Bürgi chamava $10L$ o número "vermelho" correspondente ao número "preto" N. Se nesse esquema dividirmos todos os números pretos por 10^8 e todos os vermelhos por 10^5, teremos virtualmente um sistema de logaritmos naturais. Por exemplo, Bürgi dava para o número preto 1 000 000 000 o número vermelho 230 270,022, o que, deslocando a vírgula, equivale a dizer que $\ln 10 = 2{,}30270022$. Isso não é uma aproximação má do valor moderno, especialmente quando lembramos que $(1 + 10^{-4})^{10^4}$ não é bem a mesma coisa que $\lim_{n \to \infty} (1 + 1/n)^n$, embora os valores coincidam até quatro casas significativas.

Em suas tabelas Bürgi colocava seus números vermelhos do lado da página e os pretos no corpo da tabela, portanto tinha o que chamaríamos uma tabela de antilogaritmos; mas isso é um pequeno detalhe. A essência do princípio dos logaritmos está lá, e Bürgi deve ser considerado um descobridor independente, que não teve crédito pela invenção por causa da prioridade de Napier na publicação. Num ponto seus logaritmos se aproximam mais dos nossos que os de Napier, pois quando os números pretos de Bürgi crescem também os vermelhos crescem; mas os dois sistemas partilham da desvantagem de o logaritmo de um produto ou quociente não ser a soma ou diferença dos logaritmos.

13 A invenção dos logaritmos veio a ter um tremendo impacto sobre a estrutura da matemática, mas na época não podia ser comparada em significado teórico com a obra de Viète, por exemplo. Os logaritmos foram saudados alegremente por Kepler não como uma contribuição às idéias, mas porque aumentavam enormemente a capacidade de computação dos astrônomos. Viète não era exatamente uma "voz clamando no deserto" mas é verdade que a maior parte de seus contemporâneos estava preocupada principalmente com os aspectos práticos da matemática. Bürgi fazia relógios, Galileu era um físico e astrônomo, e Stevin era um engenheiro. Era inevitável que esses homens preferissem as partes da matemática que prometiam aplicabilidade a seus problemas. Bürgi e Stevin, por exemplo, ajudaram o desenvolvimento das frações decimais, e Bürgi e Galileu eram rivais na manufatura e venda de um artifício prático de computação chamado compasso proporcional. O chamado Renascimento na ciência, ilustrado pela obra de homens como Leonardo da Vinci e Copérnico, era um fermento que em grande parte vinha do contato entre idéias antigas e novas e entre os pontos de vista dos artesãos e dos eruditos.

Na matemática do século dezesseis há tendências variadas e conflitantes; mas podemos perceber nela, tanto quanto na ciência, os resultados de uma confrontação entre idéias estabelecidas e novos conceitos, e entre a visão teórica e as exigências de problemas práticos. Vimos que a obra de Viète resultou de dois fatores em particular: (1) a redescoberta de antigos clássicos gregos e (2) os desenvolvimentos relativamente novos na álgebra medieval e do início do período moderno. Durante todo o século dezesseis tanto os matemáticos teóricos profissionais quanto amadores mostraram preocupação com as técnicas práticas de computação, o que contrastava fortemente com a dicotomia enfatizada dois milênios antes por Platão. Viète, o maior matemático da França então, em 1579 tinha recomendado insistentemente o uso de frações decimais em vez de sexagesimais. Em 1585 uma recomendação ainda mais forte em favor da escala decimal para frações tanto como para inteiros foi feita pelo principal matemático dos Países Baixos, Simon Stevin de Bruges.

Stevin, que apoiava a facção protestante sob Guilherme de Orange na luta contra a Espanha católica, era tolerante, senão indiferente, quanto à religião. Sob o Príncipe Maurício de Nassau ele serviu como comissário de obras públicas, e durante algum tempo ensinou matemática ao príncipe. Embora Stevin fosse grande admirador dos tratados teóricos de Arquimedes, na obra do engenheiro flamengo nota-se um veio prático que é mais característico do Renascimento que da antiguidade clássica. Assim Stevin foi o maior responsável pela introdução nos Países Baixos do sistema de contabilidade inspirado no de Pacioli, introduzido na Itália quase um século antes[8]. De influência muito mais ampla, na prática comercial, na engenharia, e na notação matemática, foi o livrinho de Stevin com o título flamengo *De thiende* (O décimo), publicado em Leyden em 1585. Uma versão em francês intitulada *La disme* apareceu no mesmo ano, e a popularidade do livro foi tal que seu lugar no desenvolvimento da matemática tem sido freqüentemente mal compreendido.

É claro que Stevin não foi em nenhum sentido o *inventor* das frações decimais, nem o primeiro a usá-las sistematicamente. Na China antiga encontra-se um uso mais do que incidental de frações decimais, como também na Arábia medieval e na Europa do Renascimento; quando Viète as recomendou diretamente em 1579 elas já eram geralmente aceitas pelos matemáticos que se encontravam nas fronteiras da pesquisa. Entre o povo em geral, no entanto, e mesmo entre praticantes de matemática, as frações decimais só se tornaram amplamente conhecidas quando Stevin se dispôs a explicar o sistema do modo elementar e completo. Ele queria ensinar a todos "como efetuar, com facilidade nunca vista, todas as computações necessárias entre os homens por meio de inteiros sem frações". Isto é, estranhamente, Stevin se concentrava em seus décimos, centésimos, milésimos, etc., como numeradores inteiros, como fazemos na medida comum do tempo em minutos e segundos. Quantos dentre nós pensamos em 3 minutos e 4 segundos, digamos, como numa fração? É muito mais provável que pensemos em 3 minutos como num inteiro em vez de como 3/60 de hora; e essa era exatamente a maneira de pensar de Stevin. Por isto ele não escrevia suas expressões decimais como um denominador, como o fazia Viète; em vez disso, num círculo acima ou depois de cada digito ele escrevia a potência de dez assumida como divisor. Assim o valor aproximado de π aparecia como

$$3⓪\,1①\,4②\,1③\,6④ \quad \text{ou} \quad \begin{matrix} ⓪ & ① & ② & ③ & ④ \\ 3 & 1 & 4 & 1 & 6 \end{matrix}$$

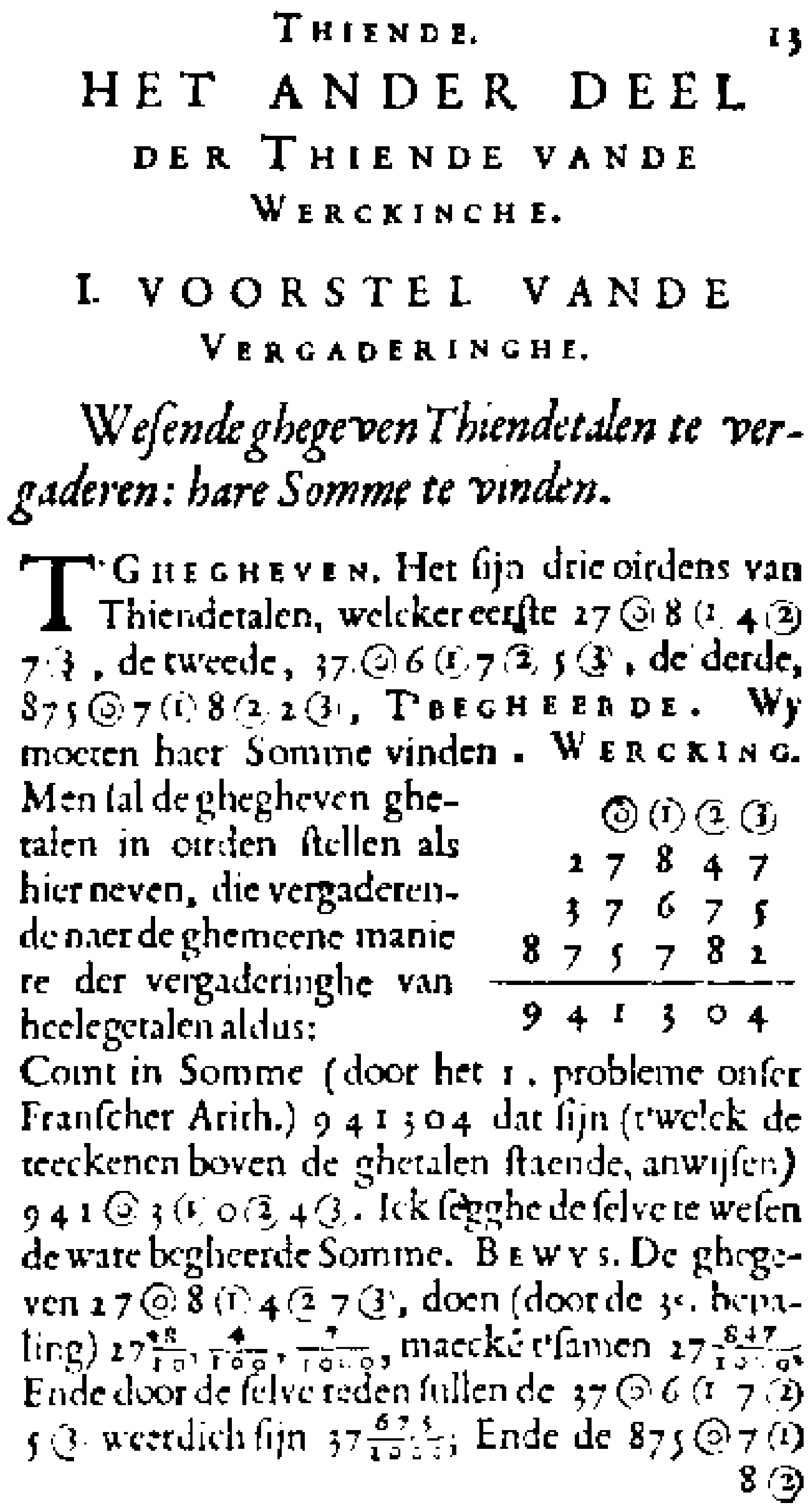
Em vez das palavras "décimo", "centésimo", etc. ele usava "primo", "segundo", etc., um tanto à maneira pela qual designamos casas em frações sexagesimais[9].

Stevin evidentemente tinha idéias corretas quanto às frações decimais, mas sua notação, inspirada na de Bombelli, era mais apropriada para a álgebra do que para a aritmética. Felizmente, a notação moderna não demorou a aparecer. Na tradução em inglês de 1616 da *Descriptio* de Napier as frações decimais aparecem como hoje, com um ponto separando a parte inteira da fracionária. Em 1617 na *Rhabdologia*, em que descreveu a computação com o uso de suas barras, Napier se referiu à aritmética decimal de Stevin e propôs o uso de um ponto ou de uma vírgula como separatriz decimal. Na *Constructio* de Napier de 1619 o ponto decimal se tornou o padrão na Inglaterra, mas muitos países europeus usam a vírgula decimal. Stevin recomendou também a adoção de um sistema decimal de pesos e medidas, mas essa parte de sua obra ainda não triunfou na Inglaterra e América do Norte.

Na história da ciência, como na matemática, Stevin é uma figura importante. Ele e um amigo deixaram cair duas esferas de chumbo, uma dez vezes mais pesada que a outra, de uma altura de 9 m sobre uma tábua, e viram que os sons que produziam ao bater na tábua eram quase simultâneos. Mas o relato que Stevin publicou (em flamengo em 1586) sobre a experiência recebeu muito menor atenção que uma experiência semelhante mas posterior, atribuída, com provas muito duvidosas, a Galileu. De outro lado,

[8] Para um relato da vida e obra de Stevin veja *The Principal Works of Simon Stevin*, editado por E. J. Dijksterhuis, D. J. Struik e outros. Amsterdam, 1955-1958

[9] Veja D. J. Struik, "Simon Stevin and the Decimal Fractions", *The Mathematics Teacher*, 52 (1959), 474-478; também George Sarton, "Simon Stevin of Bruges (1548-1620)", *Isis*, 21 (1934), 241-303, e "The First Explanation of Decimal Fractions and Measures" (1585), *Isis*, 23 (1935), 153-244. Veja também D. E. Smith, "The Invention of the Decimal Fraction", *Teachers College Bulletin*, 5 (1910), 11-21



THIENDE. 13

HET ANDER DEEL DER THIENDE VANDE WERCKINCHE.

I. VOORSTEL VANDE VERGADERINGHE.

Wesende ghegeven Thiendetalen te vergaderen: hare Somme te vinden.

T'GHEGHEVEN. Het sijn drie oirdens van Thiendetalen, welcker eerste 27⓪8①4②7③, de tweede, 37⓪6①7②5③, de derde, 875⓪7①8②2③, T'BEGHEERDE. Wy moeten haer Somme vinden. WERCKING. Men sal de ghegheven ghetalen in oirden stellen als hier neven, die vergaderende naer de ghemeene maniere der vergaderinghe van heelegetalen aldus:

	⓪	①	②	③
2	7	8	4	7
3	7	6	7	5
8 7	5	7	8	2
9 4	1	3	0	4

Comt in Somme (door het 1. probleme onser Franscher Arith.) 941304 dat sijn (t'welck de teeckenen boven de ghetalen staende, anwijsen) 941⓪3①0②4③. Ick segghe de selve te wesen de ware begheerde Somme. BEWYS. De ghegeven 27⓪8①4②7③, doen (door de 3e. bepaling) $27\frac{8}{10}, \frac{4}{100}, \frac{7}{1000}$, maecken t'samen $27\frac{847}{1000}$. Ende door de selve reden sullen de 37⓪6①7②5③ weerdich sijn $37\frac{675}{1000}$; Ende de 875⓪7①8②

Uma página da obra de Stevin (edição de 1634) mostrando a notação de Stevin para frações decimais

Stevin usualmente recebe crédito pela descoberta da lei do plano inclinado, justificado pelo seu diagrama familiar da "coroa de esferas", ao passo que essa lei tinha sido enunciada antes por Jordanus Nemorarius[10].

14

Stevin era um matemático de mente prática que não dava muito valor aos aspectos mais especulativos do assunto. Sobre os números imaginários ele escreveu: "Há muitas coisas válidas com que trabalhar, sem que seja preciso se ocupar de coisas incertas". No entanto, não tinha espírito estreito, e a leitura de Diofante fez com que ele visse a importância de notações apropriadas como auxiliar do pensamento. Embora seguisse o costume de Viète e outros contemporâneos no escrever algumas palavras, como para igualdade, ele preferia uma notação puramente simbólica para as potências. Transportando para a álgebra sua notação posicional para frações decimais, ele escrevia ② em vez de *Q* (para quadrado), ③ em vez de *C* (para cubo), ④ em vez de *QQ* (ou quadrado-quadrado), e assim por diante. Essa notação pode ter sido sugerida pela *Álgebra* de Bombelli. Também lembra uma notação de Bürgi, que indicava as potências de uma incógnita colocando numerais romanos acima dos coeficientes. Assim $x^4 + 3x^2 - 7x$,

[10] Veja Marshall Clagett, *The Science of Mechanics in the Middle Ages* (Madison, Wis.: University of Wisconsin Press, 1959)

por exemplo, seria escrito por Bürgi como

$$\begin{array}{ccccc} \text{iv} & & \text{ii} & & \text{i} \\ 1 & + & 3 & - & 7 \end{array}$$

e por Stevin como

$$\begin{array}{ccccc} ④ & & ② & & ① \\ 1 & + & 3 & - & 7 \end{array}$$

Stevin foi mais longe que Bombelli ou Bürgi, ao propor que tais notações fossem usadas também para potências fracionárias. (É interessante notar que embora Oresme tivesse usado tanto índices de potências fracionárias, quanto métodos de coordenadas em geometria, isso parece ter tido influência apenas muito indireta, ou nenhuma, no progresso da matemática nos Países Baixos e na França no começo do século dezessete.) Embora Stevin não tivesse ocasião de usar a notação com índice fracionário, ele disse claramente que 1/2 dentro de um círculo significava raiz quadrada e que 3/2 dentro de um círculo indicaria a raiz quadrada de um cubo. Um pouco mais tarde Girard, editor das obras de Stevin, adotou também a notação de números em círculos para potências, e também ele indicou que isso poderia ser usado para raizes em vez de símbolos como $\sqrt{\ }$ e $\sqrt[3]{\ }$. A álgebra simbólica estava se desenvolvendo rapidamente, e atingiu a maturidade oito anos apenas depois da *Invention nouvelle* de Girard, na *La géométrie* de Descartes.

15 Simon Stevin era um matemático típico de seu tempo no fato de gostar das aplicações elementares do assunto; nisso se assemelhava a Galileu. Galileu inicialmente tinha tido a intenção de se graduar em medicina, mas seu gosto pelas obras de Euclides e Arquimedes levou-o a tornar-se professor de matemática, primeiro em Pisa e depois em Pádua. Isso não significa, no entanto, que o que ensinava estivesse no nível dos autores que admirava. Pouca matemática era incluída no currículo das universidades da época, e grande parte do que era ensinado nos cursos de Galileu hoje seria classificado como física ou astronomia ou aplicações à engenharia. Além disso, Galileu não era um matemático no sentido de Viète; ele estava perto do que chamaríamos um praticante de matemática. Isso se revela em seu interesse por técnicas de computação, que o levou em 1597 a construir e vender um instrumento que ele chamou seu "compasso geométrico e militar".

Num panfleto de 1606 com o título *Le operazioni del compasso geometrico et militare* ele descreveu detalhadamente o modo pelo qual o instrumento podia ser usado para efetuar uma variedade de computações rapidamente sem pena, papel ou ábaco. A teoria por trás disso era extremamente elementar, e o grau de precisão muito limitado, mas o sucesso financeiro do instrumento mostra que os engenheiros militares e outros praticantes sentiam necessidade de uma tal ajuda às computações. Bürgi tinha construído um instrumento semelhante, mas Galileu tinha mais espírito empresarial, o que lhe dava vantagens. O compasso de Galileu consistia de dois braços unidos como os de um compasso usual mas cada um marcado com graduações de vários tipos.

A Fig. 16.3 mostra apenas graduações simples, equidistantes, até 250, e só a mais simples das muitas computações possiveis, a primeira descrita por Galileu, é explicada aqui. Se, por exemplo, quisermos dividir um dado segmento de reta em cinco partes iguais, abre-se um compasso comum ao comprimento do segmento. Depois abre-se o compasso geométrico de modo que a distância entre as pontas do compasso comum cubra a distância entre duas marcas, uma em cada braço do compasso geométrico, que sejam múltiplos inteiros simples de cinco — digamos, o número 200 em cada braço. Então, mantendo fixa a abertura do compasso geométrico e colocando as pontas do outro na marca 40 em cada braço, a distância entre as pontas do compasso comum será a quinta parte da distância dada, como se queria. As instruções que Galileu fornecia com

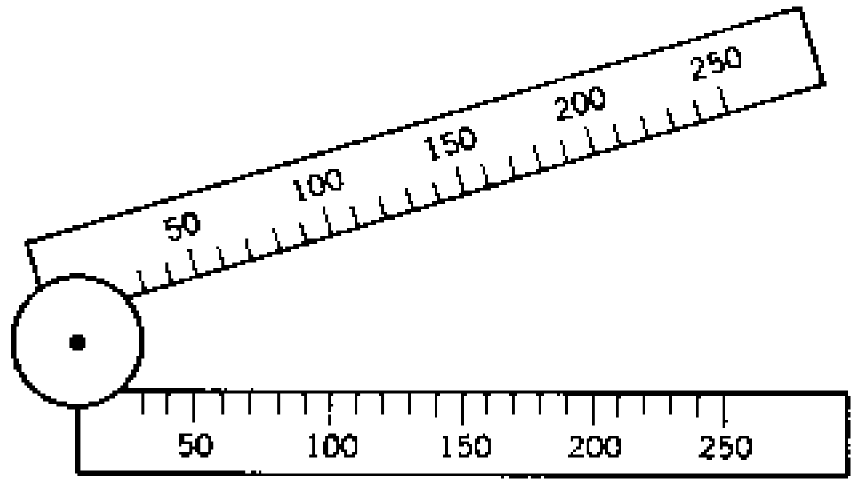


Figura 16.3

seu compasso incluíam muitas outras operações, desde mudar a escala de um desenho até calcular quantias de dinheiro com juros compostos[11].

16 Embora tão elementar, o panfleto de Galileu de 1606 sobre o compasso geométrico, publicado quando tinha mais de quarenta anos, foi seu único tratado estritamente matemático. No entanto, não foi de modo nenhum sua única contribuição à matemática. Mais importantes são os numerosos apelos ao raciocínio matemático em suas obras sobre física e astronomia, e nelas ele freqüentemente chegou perto dos desenvolvimentos que levariam ao Cálculo. O mesmo pode ser dito de Stevin e Kepler. A física e a astronomia tinham chegado a um ponto em que havia necessidade crescente de argumentos referentes a coisas infinitamente grandes ou pequenas — o assunto que hoje chamamos análise. Viète fora um dos primeiros a usar a palavra "análise" como sinônimo de álgebra, mas foi também um dos mais antigos analistas no sentido mais moderno, de alguém que estuda processos infinitos.

Antes do tempo de Viète havia já muitas aproximações boas e más para a razão da circunferência para o diâmetro de um círculo[12], tais como a de V. Otho e A. Anthonisz que, independentemente, redescobriram (por volta de 1573) a aproximação 355/113, subtraindo numeradores e denominadores dos valores de Ptolomeu e Arquimedes, 377/120 e 22/7 respectivamente. Viète calculou π corretamente a dez algarismos significativos, aparentemente sem conhecer a aproximação ainda melhor de al-Kashi. A mais impressionante realização nessa linha foi a de Ludolph van Ceulen (1540-1610). Primeiro ele publicou em 1596 um valor com vinte casas, obtido a partir de um polígono de quinze lados e dobrando o número de lados trinta e sete vezes. Usando um número de lados ainda maior ele finalmente conseguiu uma aproximação com trinta e cinco casas, que sua viúva fez gravar sobre sua pedra tumular. Esse feito de computação impressionou tanto seus sucessores que π freqüentemente foi chamado a "constante de Ludolph". Mas tais *tours de force* não têm significado teórico. Uma expressão exata era muito mais desejável, e foi Viète a dar a primeira expressão numérica para π teoricamente precisa — como produto infinito que pode ser escrito como

$$2/\pi = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\sqrt{\tfrac{1}{2}+\sqrt{\tfrac{1}{2}}}\sqrt{\tfrac{1}{2}+\sqrt{\tfrac{1}{2}+\sqrt{\tfrac{1}{2}}}}\cdots$$

Num certo sentido a idéia de Viète não é nova. Seu produto aparece facilmente se inscrevermos um quadrado num círculo e depois aplicarmos a fórmula trigonométrica recursiva $a_{2n} = a_n \sec \pi/n$, onde a_n é a área do polígono regular inscrito de n lados e fizermos n tender a infinito. Além disso, o mesmo produto infinito se obtém calculando raios vetores de pontos sobre a quadratriz de Hípias, $r \operatorname{sen} \theta = 2\theta$, para bissecções sucessivas do ângulo, começando com $\theta = \pi/2$ e observando que $r_n/r_{n-1} = \cos \pi/2^n$ e que $\lim_{n\to\infty} r_n = 2/\pi$. No entanto, foi Viète o primeiro a expressar π analiticamente, um resultado significativo porque as noções aritméticas, algébricas e trigonométricas invadiam

[11]Um curto extrato, em tradução para o inglês, de *Le operazioni del compasso geometrico et militare* se encontra em D. E. Smith, *Source Book in Mathematics* (1929), pp. 186-191. O original italiano encontra-se nas *Opere* de Galileu (Florença 1890-1909, 20 volumes), II, 335-424

[12]Uma extensa lista de muitos desses valores é dada por H. C. Schepler, "The Chronology of Pi", *Mathematics Magazine*, 23 (1949-1950), 162-170, 216-228, 279-283

cada vez mais o reino do infinitamente grande e do infinitamente pequeno, reino outrora dominado exclusivamente pela geometria.

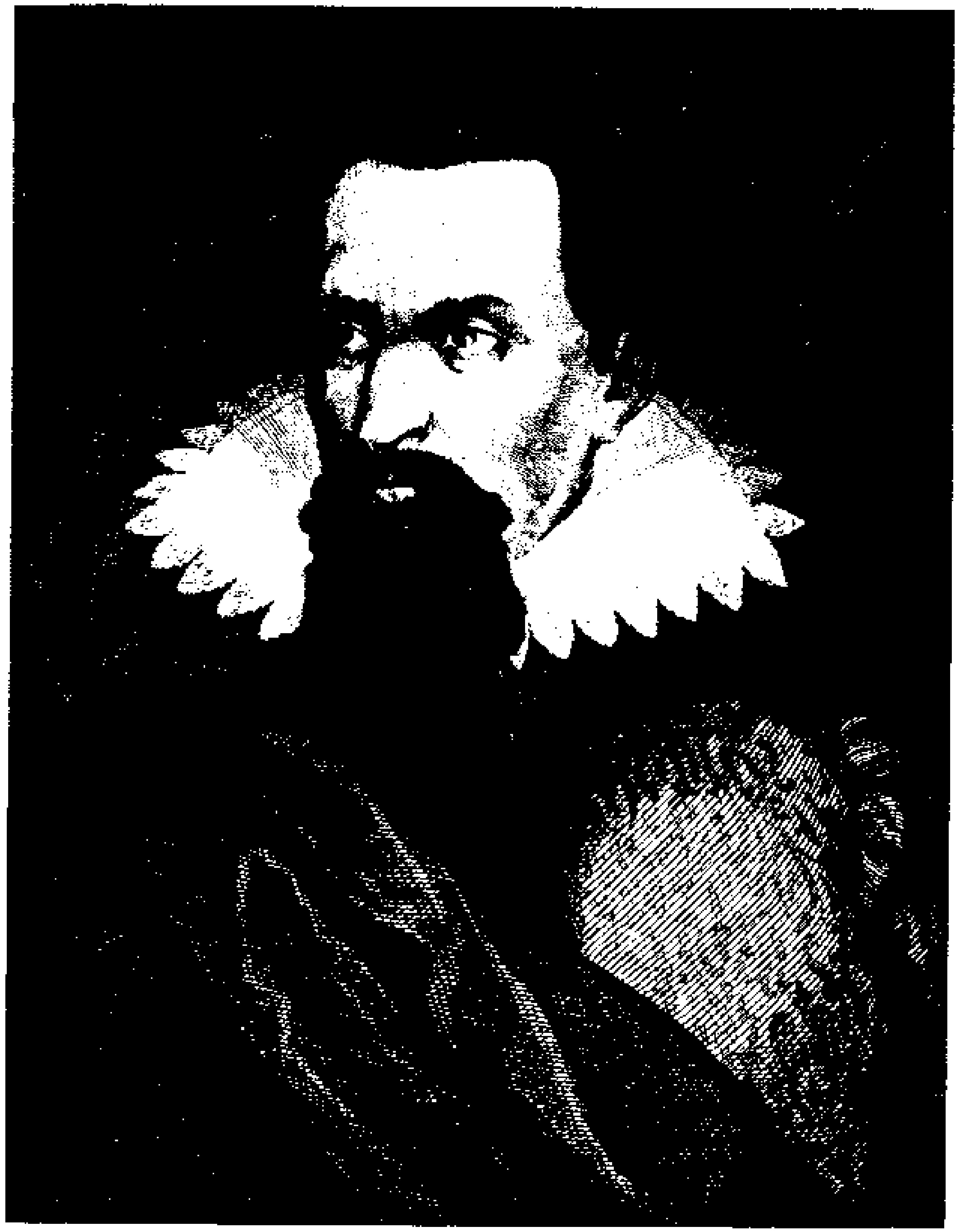
Os últimos anos da vida de Viète foram amargurados por uma controvérsia pela qual ele próprio foi grandemente responsável. Christopher Clavius (1537-1612), um matemático contemporâneo bem conhecido, tinha sido consultado pelo Papa Gregório XIII quanto à reforma do calendário, e Viète atacou a exatidão da mesma. O azedume dos comentários de Viète talvez resultasse de ressentimento por seu opositor não ter avaliado corretamente a importância da nova "logistica speciosa". Viète tinha uns poucos discípulos ardorosos, um dos quais, Alexander Anderson (1582-1620 aproximadamente) da Escócia, publicou parte de sua obra em 1615, mas só por volta de 1630 é que a "Arte Analítica" começou a atrair a atenção que merecia. Essa demora contrasta fortemente com a rapidez com que se difundiu o conhecimento dos logaritmos.

17 Viète era primariamente um analista, mas contribuiu também para a geometria pura. Aqui sua obra se concentra principalmente em problemas originados pelas obras de Apolônio. Regiomontanus tinha duvidado que o célebre problema de Apolônio (proposto no livro perdido *Sobre tangências*), de construir um círculo tangente a três círculos, pudesse ser resolvido com régua e compasso; van Rooman por isso resolveu-o usando duas hipérboles que se cortam. Viète sabia por uma referência na *Coleção* de Papus que uma construção elementar era possível, e em sua *Varia responsa* de 1600 ele publicou sua solução. Numa reconstrução do que ele achava que o livro de Apolônio poderia ter contido, Viète partiu dos casos mais simples, em que um ou mais dos três círculos são substituídos por pontos ou retas, até chegar ao décimo caso, o mais difícil — o dos três círculos. Essa construção foi uma das mais belas contribuições de Viète à matemática. Tais problemas de geometria mais tarde exerceriam atração significativa sobre Descartes, mas os sucessores imediatos de Viète se sentiam muito menos atraídos pelos resultados teóricos de Apolônio que pelas possibilidades de aplicação da obra de Arquimedes.

18 Stevin, Kepler e Galileu necessitavam dos métodos de Arquimedes, como homens práticos que eram, mas desejavam evitar os rigores lógicos do método de exaustão. Em grande parte foram as modificações por isso introduzidas nos antigos métodos infinitesimais que finalmente conduziram ao cálculo, e Stevin foi um dos primeiros a sugerir modificações. Em sua *Estática* de 1586, quase um século antes de Newton e Leibnitz publicarem seu cálculo, o engenheiro de Bruges demonstrava que o centro de gravidade de um triângulo jaz sobre sua mediana da seguinte maneira. No triângulo *ABC* inscreva-se uma coleção de paralelogramos de igual altura cujos lados, são, dois a dois, paralelos a um lado e à mediana traçada a esse lado (Fig. 16.4). O centro de gravidade das figuras inscritas cairá sobre a mediana, pelo princípio de Arquimedes de que figuras bilateralmente simétricas estão em equilíbrio. Mas podemos inscrever no triângulo uma infinidade de tais paralelogramos, e quanto maior o número de paralelogramos menor será a diferença entre a figura inscrita e o triângulo. Como a diferença pode ser tornada tão pequena quanto se queira, o centro de gravidade do triângulo também jaz sobre a mediana. Em algumas de suas proposições sobre pressão dos fluidos Stevin acrescentou a esse tratamento geométrico uma "demonstração por números" em que uma seqüência de números tendia a um valor limite; mas o "Arquimedes Holandês" tinha mais confiança numa prova geométrica que numa prova aritmética[13].

19 Ao passo que Stevin se interessava pelas aplicações à física de infinidades de elementos infinitamente pequenos, Kepler necessitava de aplicações à astronomia, especialmente em relação às suas órbitas elíticas de 1609. Desde 1604 que Kepler se envolvera com secções cônicas, em seus trabalhos sobre óptica e as propriedades dos espelhos parabólicos. Ao passo que Apolônio se inclinara a pensar nas cônicas como sendo três tipos diferentes de curvas — elipses, parábolas e hipérboles — Kepler preferia pensar em cinco espécies de cônicas, todas pertencentes a uma só família ou genus. Com sua

[13]Para mais detalhes veja C. B. Boyer, *The Concepts of the Calculus* (1939), pp. 99-104



Johann Kepler

forte imaginação e um sentimento pitagórico da harmonia da matemática, Kepler desenvolveu para as cônicas em 1604 (em seu *Ad Vitellionem paralipomena*, isto é, "Introdução à óptica de Vitello") o que chamamos de princípio de continuidade. Da secção cônica que consiste de duas retas que se cortam, em que os dois focos coincidem no ponto de intersecção, passamos gradualmente por uma infinidade de hipérboles à medida

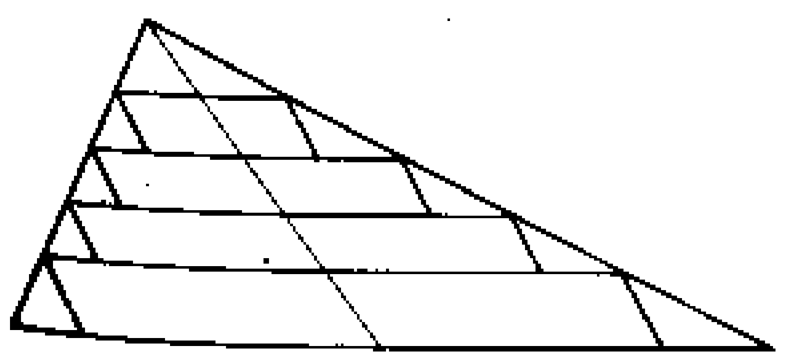


Figura 16.4

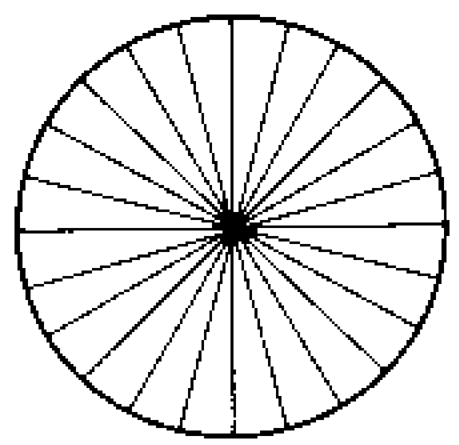


Figura 16.5

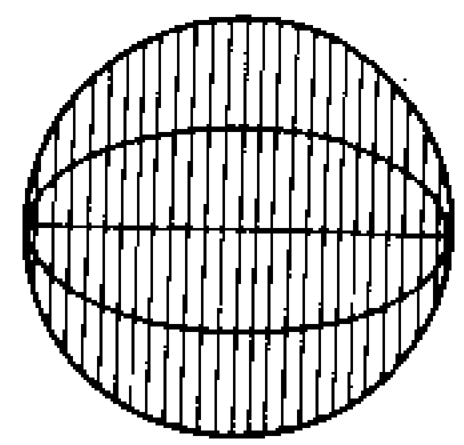


Figura 16.6

que um foco se afasta cada vez mais do outro. Quando um foco está infinitamente longe, já não temos a hipérbole de dois ramos mas uma parábola. Se o foco móvel passa além do infinito e regressa pelo outro lado passamos por uma infinidade de elipses até que, quando os focos coincidem novamente, chegamos ao círculo.

A idéia de que a parábola tem dois focos, um deles no infinito, deve-se a Kepler, bem como a palavra "focus" (latim para lareira); encontramos essa audaciosa e frutífera especulação sobre "pontos no infinito" ampliada uma geração mais tarde na obra de Desargues. Enquanto isso, Kepler encontrou um processo útil de ataque ao problema do infinitamente pequeno na astronomia. Em sua *Astronomia nova* de 1609 ele anunciou suas duas primeiras leis de astronomia: (1) os planetas descrevem órbitas elíticas em torno do Sol, com o Sol ocupando um dos focos, e (2) o raio vetor que une um planeta ao Sol varre áreas iguais em tempos iguais. Ao tratar problemas de área como esse Kepler pensava na área formada de uma infinidade de pequenos triângulos com um vértice no Sol e os outros dois vértices em pontos infinitamente próximos um do outro ao longo da órbita. Dessa forma ele pode usar uma forma tosca de cálculo integral semelhante à de Oresme. A área do círculo, por exemplo, é encontrada desse modo, observando que as alturas dos triângulos infinitamente finos (Fig. 16.5) são iguais ao raio. Se chamarmos $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ as bases infinitamente pequenas jazendo ao longo da circunferência, então a área do círculo — isto é, a soma das áreas dos triângulos será $1/2b_1r + 1/2b_2r + \cdots + 1/2b_nr + \cdots$ ou $1/2r(b_1 + b_2 + \cdots + b_n + \cdots)$. Como a soma dos b é a circunferência C, a área A será dada por $A = 1/2rC$, o bem conhecido teorema antigo que Arquimedes provara mais cuidadosamente.

Por raciocínio semelhante Kepler conhecia a área da elipse — um resultado de Arquimedes não existente então. A elipse pode ser obtida de um círculo de raio a por uma transformação sob a qual a ordenada do círculo em cada ponto é diminuída segundo uma razão dada, seja $b{:}a$. Então, segundo Oresme, podemos pensar na área da elipse e na área do círculo como formadas de todas as ordenadas de pontos sobre as curvas (Fig. 16.6); mas como as razões das componentes das áreas são $b{:}a$ as áreas elas próprias devem estar na mesma razão. Mas a área do círculo sabe-se ser πa^2; portanto a área da elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ deve ser πab. Esse resultado está correto; mas para o comprimento da elipse o melhor que Kepler pôde fazer foi dar a fórmula aproximada $\pi(a + b)$. Os comprimentos das curvas em geral e da elipse em particular iriam fugir aos matemáticos ainda durante meio século.

Kepler tinha trabalhado com Tycho Brahe, primeiro na Dinamarca e mais tarde em Praga, onde, após a morte de Brahe, Kepler tornou-se matemático do Imperador Rudolph II. Uma de suas incumbências era tirar horóscopos; os matemáticos, seja de imperadores seja de universidades, encontravam várias aplicações para seus talentos, como Kepler descobriu enquanto estava em Linz, na Áustria. O ano de 1612 tinha sido muito bom para a safra de vinhos, e Kepler começou a meditar por essa época nos métodos toscos em uso para avaliar os volumes dos tonéis de vinho. Comparou esses métodos com os de Arquimedes sobre os volumes de conóides e esferóides, e passou a calcular os volumes de vários sólidos de revolução não considerados por Arquimedes. Por exemplo, ele considerou o sólido gerado por rotação de um segmento de círculo em torno de sua corda, chamando o resultado um limão se o segmento era menor que um semicírculo e uma maçã se o segmento era maior que um semicírculo. Seu método volumétrico consistia em considerar os sólidos como compostos de uma infinidade de elementos infinitesimais, e procedia de modo semelhante ao que indicamos acima para áreas. Dispensava a dupla *reductio ad absurdum* de Arquimedes, e nisto foi acompanhado pela maior parte dos matemáticos desde aquela época até agora[14].

20 Kepler reuniu suas idéias volumétricas num livro que apareceu em 1615 com o título *Stereometria doliorum* (Medida de volumes de barris). Durante uma vintena de anos pareceu não ter despertado grande interesse, mas em 1635 as idéias de Kepler

[14]Veja D. J. Struik, "Kepler as a Mathematician" em *Johann Kepler*, 1571-1630. *A Tercentenary Commemoration of His Life and Works* editado por F. E. Brasch (1931)

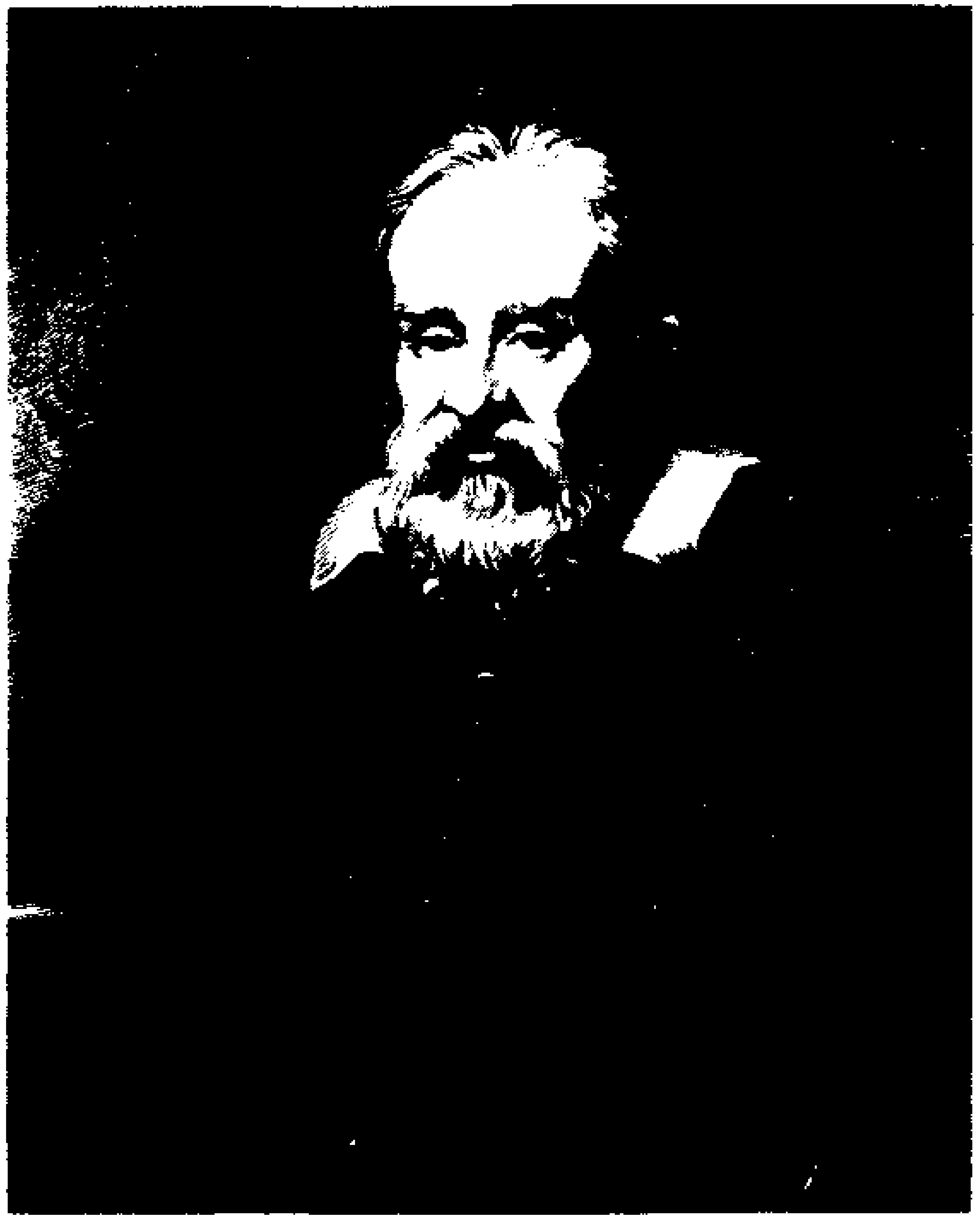
foram sistematicamente desenvolvidas num livro célebre chamado *Geometria indivisibilibus* escrito por Cavalieri, um discípulo de Galileu. Enquanto Kepler estudava barris de vinho, Galileu estivera observando os céus com um telescópio e rolando bolas sobre planos inclinados. Os resultados dos esforços de Galileu foram dois famosos tratados, um de astronomia outro de física. Ambos foram escritos em italiano, mas usaremos os títulos traduzidos como *Os dois principais sistemas* (1632) e *As duas novas ciências* (1638). O primeiro era uma discussão sobre os méritos relativos dos sistemas de Ptolomeu e Copérnico para o universo entre três homens: Salviati (um estudioso bem informado cientificamente), Sagredo (um leigo inteligente) e Simplícius (um aristotélico obtuso). Galileu deixava poucas dúvidas quanto às suas preferências, e as conseqüências foram seu julgamento e prisão. Durante os anos de sua detenção ele no entanto preparou *As duas novas ciências*, uma discussão sobre a dinâmica e a resistência dos materiais entre os mesmos três personagens. Embora nenhum dos dois grandes tratados de Galileu fosse estritamente matemático, em ambos há muitos pontos em que se faz apelo à matemática, freqüentemente às propriedades dos infinitamente grandes e infinitamente pequenos.

O infinitamente pequeno era de maior importância imediata para Galileu que o infinitamente grande, pois lhe parecia essencial em sua dinâmica. Galileu deu a impressão de que a dinâmica era uma ciência totalmente nova criada por ele, e demasiados escritores daí então concordaram com essa reivindicação. É praticamente certo, no entanto, que ele conhecia perfeitamente a obra de Oresme sobre a latitude de formas, e várias vezes em *Duas novas ciências* Galileu usou um diagrama de velocidades semelhante ao gráfico triangular de Oresme. Porém Galileu organizou as idéias de Oresme e deu-lhes uma precisão matemática que lhes faltava. Entre as contribuições novas de Galileu à dinâmica estava sua análise do movimento dos projéteis numa componente horizontal uniforme e uma componente vertical uniformemente acelerada. Pode assim mostrar que a trajetória de um projétil, desprezando a resistência do ar, é uma parábola. É um fato notável que as secções cônicas tivessem sido estudadas por mais de 2 000 anos antes que duas delas, quase simultaneamente, encontrassem possibilidades de aplicação na ciência — a elipse na astronomia e a parábola na física. Galileu erradamente supôs ter encontrado outra aplicação da parábola na curva de suspensão de uma corda ou cadeia (*catena*) flexível; mas mais tarde, ainda no mesmo século, provou-se que essa curva, a catenária, não só não é uma parábola como nem sequer é algébrica.

Galileu se assemelhava a Dürer no fato de ambos observarem rapidamente o aparecimento de curvas novas, mas nenhum dos dois tinha suficiente preparo matemático para analisá-las. Galileu tinha reparado na curva hoje chamada ciclóide, traçada por um ponto sobre o bordo de uma roda quando esta rola num caminho horizontal, e tentou achar a área sob um arco dela. Mas o melhor que pode fazer foi traçar a curva em papel, recortar um arco, e pesá-lo, concluindo que a área era um pouco menor que três vezes a área do círculo gerador. (Mais tarde, matemáticos franceses e italianos mostraram que a área do arco é exatamente três vezes a área do círculo.) Galileu abandonou o estudo da curva, limitando-se a sugerir que a ciclóide forneceria um belo arco para uma ponte; muitos anos mais tarde seu discípulo Torricelli estudou a curva com grande sucesso.

21 Nos *Dois sistemas principais* de 1632 Galileu deu uma contribuição mais importante à matemática, no ponto no "terceiro dia" em que Salviati menciona a idéia de um infinitésimo de ordem superior. Simplício tinha argüido que um objeto numa terra que gira seria arremessado tangencialmente para fora pelo movimento; mas Salviati dizia que a distância OR de que um objeto tem que cair para permanecer sobre a terra enquanto ela gira de um ângulo pequeno θ (Fig. 16.7) é infinitamente pequeno se comparado com a distância tangencial PQ percorrida horizontalmente. Por isso basta uma tendência para baixo muito pequena comparada com o impulso para frente para manter o objeto em terra[15]. O argumento de Galileu aqui equivale a dizer que PS = vers θ é um infinitésimo de ordem superior com relação aos segmentos PQ ou RS ou o arco PR.

[15]Há duas edições excelentes em inglês de *Os dois sistemas principais*, uma edição feita por Stillman Drake (1953), outra por Giorgio de Santillana (1953)



Galileu Galilei

Um raciocínio semelhante aparece também no *Duas novas ciências* de Galileu, de 1638, um tratado sobre dinâmica e resistência dos materiais muito influente. Aqui o autor usa às vezes o infinitamente pequeno a um ponto de fantasia, como quando Salviati afirma a Simplício que é tão fácil decompor um segmento de reta em um número infinito de partes quanto dividi-lo em número finito de partes. Primeiro ele faz Simplício admitir que não é necessário separar as partes mas basta marcar os pontos de divisão. Se, por exemplo, um segmento de reta é dobrado em forma de quadrado ou octógono regular, ele foi dividido em quatro ou oito partes iguais. Salviati conclui então que curvando o segmento em forma de círculo ele "reduziu à realidade aquele infinito número de partes que você afirmou estarem contidas nele apenas potencialmente, enquanto era reto", pois o círculo é um polígono com número infinito de lados. Mas em outra

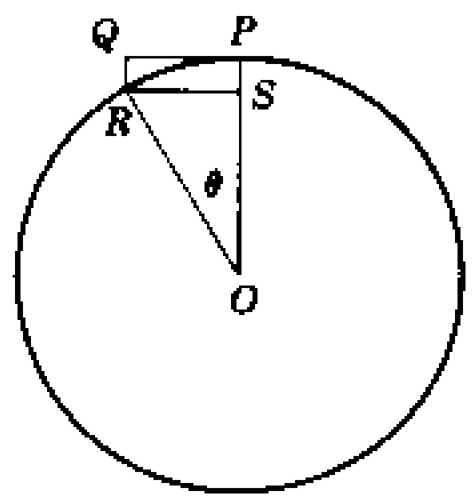


Figura 16.7

ocasião Galileu faz Salviati afirmar que infinitos e indivisíveis "transcendem nosso entendimento finito, os primeiros por causa de sua grandeza, os outros por causa de sua pequenez; Imaginem o que são quando combinados".

Do infinito em geometria Salviati levou Simplício ao infinito em aritmética, observando que uma correspondência um a um pode ser estabelecida entre todos os inteiros e os quadrados perfeitos, apesar de que quanto mais longe se vai na seqüência dos inteiros mais raros se tornam os quadrados perfeitos. Pelo simples expediente de contar os quadrados perfeitos, uma correspondência um a um é estabelecida em que cada inteiro inevitavelmente fica em correspondência com um quadrado perfeito, e vice-versa. Embora haja muitos inteiros que não são quadrados perfeitos (e a proporção desses aumenta quando consideramos números cada vez maiores), "devemos dizer que existem tantos quadrados quanto números". Galileu aqui enfrentava a propriedade fundamental de um conjunto infinito — de que uma parte dele pode equivaler ao conjunto todo — mas Galileu não tirou essa conclusão. Embora Salviati concluísse corretamente que o número de quadrados não é menor que o número de inteiros, não teve ânimo para afirmar que são iguais. Em vez disso, ele concluiu simplesmente que "os atributos 'igual', 'maior' e 'menor' não se aplicam ao infinito, mas somente a quantidades finitas". Afirmou até (incorretamente, como sabemos agora) que não se pode dizer que um número infinito é maior que outro número infinito, ou mesmo que um número infinito é maior que um número finito. Como Moisés, Galileu chegou a avistar a terra prometida mas não pode penetrar nela[16].

22 Galileu tinha tido a intenção de escrever um tratado sobre o infinito em matemática, mas ele não foi encontrado. Enquanto isso seu discípulo Cavalieri fora estimulado pela *Stereometria* de Kepler, bem como por idéias antigas e medievais e pelo encorajamento de Galileu, a organizar seus pensamentos sobre infinitésimos em forma de livro. Cavalieri era membro de uma ordem religiosa (dos Jesuados, não dos jesuítas como se tem dito freqüentemente mas incorretamente) e viveu em Milão e Roma antes de tornar-se professor em Bolonha em 1629. Caracteristicamente para seu tempo ele escreveu sobre muitos aspectos da matemática pura e aplicada — geometria, trigonometria, astronomia e óptica — e foi o primeiro autor italiano a apreciar o valor dos logaritmos. Em seu *Directorium universale uranometricum* de 1632 ele publicou tabelas de senos, tangentes, secantes e senos versos, junto com seus logaritmos, até oito casas; mas ele é relembrado mais por um dos livros mais influentes do início do período moderno, a *Geometria indivisibilibus continuorum*, publicada em 1635.

O argumento em que se baseia o livro é essencialmente o sugerido por Oresme, Kepler e Galileu — que uma área pode ser pensada como sendo formada de segmentos ou "indivisíveis" e que um volume pode ser considerado como composto de áreas que são volumes indivisíveis ou quase-atômicos. Embora Cavalieri na época não pudesse tê-lo percebido, ele seguia pegadas realmente muito respeitáveis, pois esse é exatamente o tipo de raciocínio que Arquimedes usou em *O método*, então perdido. Mas Cavalieri, ao contrário de Arquimedes, não hesitava perante as deficiências lógicas nas bases de tais processos.

O princípio geral de que numa equação, envolvendo infinitésimos, os de ordem superior podem ser desprezados pois não têm efeito sobre o resultado final é freqüentemente e erroneamente creditado à *Geometria indivisibilibus* de Cavalieri. O autor certamente conhecia tal idéia, pois ela está implícita em algumas obras de Galileu, e ela apareceu mais especificamente em resultados de matemáticos franceses contemporâneos; mas Cavalieri assumiu quase o oposto desse princípio. Não havia no método de Cavalieri nenhum processo de aproximação contínua, nem omissão de termos, pois ele usava uma estrita correspondência um a um dos elementos em duas configurações. Nenhum elemento era descartado, qualquer que fosse a dimensão. O estilo geral e a especiosa plausibilidade do método dos indivisíveis são bem ilustrados pela proposição ainda co-

[16]O *Diálogo relativo a duas novas ciências* de Galileu existe em tradução para o inglês em edição da Dover Publications, New York, (sem data)

nhecida em muitos livros de geometria no espaço como "o teorema de Cavalieri":

Se dois sólidos têm alturas iguais, e se secções feitas por planos paralelos às bases e a distâncias iguais dessas estão sempre numa dada razão, então os volumes dos sólidos estão também nessa razão[17].

Cavalieri evidentemente tinha desenvolvido esse método por volta de 1626, pois nesse ano ele escreveu a Galileu que ia publicar um livro sobre o assunto. O próprio Galileu tinha projetado escrever um livro sobre o infinito, e talvez Cavalieri tenha retardado a publicação de seu próprio trabalho por deferência a Galileu. Porém, o livro de Galileu sem dúvida teria sido mais filosófico e especulativo, com ênfase na natureza do infinitamente grande e pequeno, tema que Cavalieri evitou. Em vez disso, Cavalieri se concentrou num teorema geométrico extremamente útil, equivalente à afirmação atual

$$\int_0^a x^n\,dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}.$$

O enunciado e a prova do teorema são muito diferentes dos que o leitor moderno conhece, pois Cavalieri comparava potências dos segmentos num paralelograma paralelos à base com as potências correspondentes de segmentos em qualquer dos dois triângulos em que uma diagonal divide o paralelogramo. Seja o paralelogramo $AFDC$ dividido em dois triângulos pela diagonal CF (Fig. 16.8) e seja HE um indivisível do triângulo CDF que é paralelo à base CD. Então tomando $BC = FE$ e traçando BM paralelo a CD é fácil mostrar que o indivisível BM no triângulo ACF será igual a HE. Portanto podemos estabelecer correspondência entre todos os indivisíveis do triângulo CDF e indivisíveis iguais do triângulo ACF, e portanto os triângulos são iguais. Como o paralelogramo é a soma dos indivisíveis nos dois triângulos, é claro que a soma das primeiras potências dos segmentos em um dos triângulos é metade da soma das primeiras potências dos segmentos no paralelogramo; em outras palavras,

$$\int_0^a x\,dx = \frac{a^2}{2}.$$

Com argumento semelhante mas consideravelmente mais elaborado Cavalieri mostrava que a soma dos quadrados dos segmentos no triângulo é um terço da soma dos quadrados dos segmentos no paralelogramo[18]. Para os cubos dos segmentos ele encontrou a razão 1/4. Mais tarde ele estendeu a demonstração a potências superiores, finalmente afirmando, em *Exercitationes geometricae sex* (isto é, Seis exercícios geométricos) de 1647, a importante generalização que diz que para potências n-ésimas a razão é $1/(n+1)$. Isso era conhecido dos matemáticos franceses ao mesmo tempo, porém Cavalieri foi o primeiro a publicar esse teorema — que deveria abrir caminho para muitos algoritmos do cálculo. A *Geometrica indivisibilibus*, que tanto facilitou o problema das quadraturas,

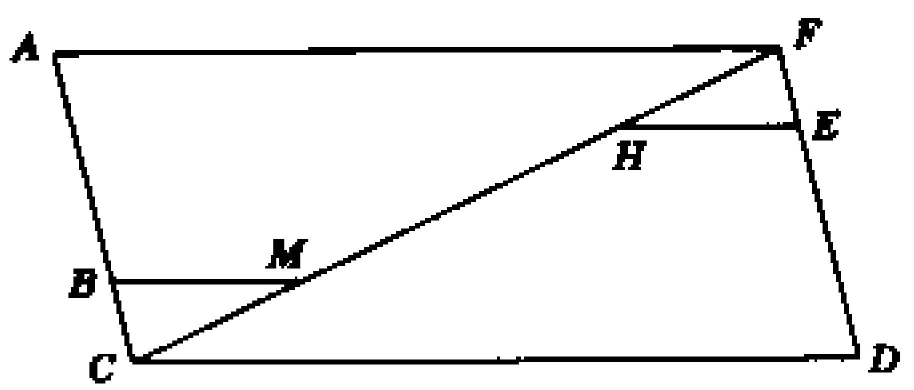


Figura 16.8

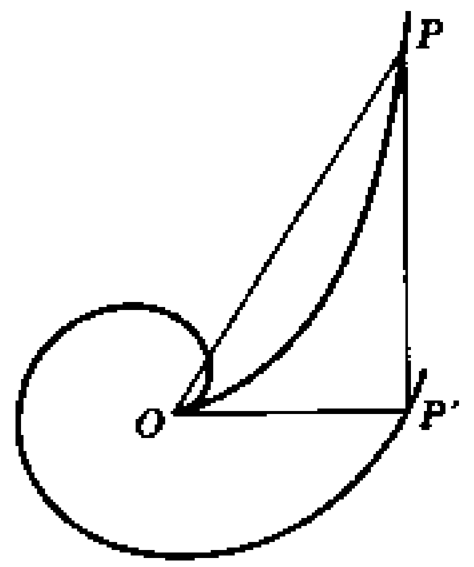


Figura 16.9

[17]D. E. Smith, *Source Book in Mathematics*, pp. 605-609

[18]Para mais detalhes veja C. B. Boyer, "Cavalieri, Limits and Discarded Infinitesimals", *Scripta Mathematica*, **8** (1941), 79-91

apareceu novamente em segunda edição em 1653, mas já então os matemáticos tinham obtido resultados notáveis em direções novas e os laboriosos métodos geométricos de Cavalieri estavam fora de moda.

23 O teorema de longe mais importante na obra de Cavalieri era seu equivalente de

$$\int_0^a x^n\,dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

mas também outra contribuição deveria levar a resultados importantes. A espiral $r = a\theta$ e a parábola $x^2 = ay$ eram conhecidas desde a antiguidade sem que ninguém antes tivesse observado uma relação entre elas, até que Cavalieri pensou em comparar indivisíveis segmentos de reta com indivisíveis curvilíneos. Se, por exemplo, enrolarmos a parábola $x^2 = ay$ (Fig. 16.9) como uma mola de relógio de modo que o vértice O permaneça fixo enquanto que o ponto P vai sobre o ponto P', então as ordenadas da parábola podem ser pensadas como transformando-se em raios vetores através das relações $x = r$ e $y = r\theta$ entre o que chamamos agora coordenadas retangulares e polares. Os pontos sobre a parábola $x^2 = ay$ estudada por Apolônio vão então cair sobre a espiral de Arquimedes $r = a\theta$. Cavalieri observou ainda que se PP' é tomado igual à circunferência do círculo de raio OP', a área dentro da primeira volta da espiral é exatamente igual à área entre o arco parabólico OP e o raio vetor OP. Aqui vemos trabalho de geometria analítica e Cálculo, no entanto Cavalieri escrevia antes de qualquer desses assuntos ser formalmente inventado. Como em outras partes da história da matemática, vemos que os grandes marcos não aparecem subitamente, mas são apenas formulações mais precisas ao longo do espinhoso caminho do pouco uniforme desenvolvimento.

BIBLIOGRAFIA

Boyer, C. B., *The Concepts of the Calculus* (New York, 1939; edição em brochura, New York: Dover, 1959)

Brasch, F. E., ed., *Johann Kepler*, 1571-1630. *A Tercentenary Commemoration of His Life and Works* (Baltimore: Williams and Wilkins, 1931)

Braunmühl, Anton von, *Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie* (Leipzig: Teubner, 1900, 2 volumes)

Cajori, Florian, *A History of the Logarithmic Slide Rule and Allied Instruments* (New York: McGraw-Hill, 1909)

Cajori, Florian, "History of the Exponential and Logarithmic Concepts," *American Mathematical Monthly*, **20** (1913), 5-14, 35-47, 75-84, 107-117

Cajori, Florian, *William Oughtred, a Great Seventeenth-Century Teacher of Mathematics* (Chicago: Open Court, 1916)

Cajori, Florian, *A History of Mathematical Notations* (Chicago: Open Court, 1929, 2 volumes)

Caspar, Max, *Kepler*, traduzido por C. Doris Hellman (New York: Abelard-Schuman, 1959)

Dedron, Pierre, e Jean Itard, *Mathématiques et mathématiciens* (Paris: Magnard, 1959)

Dijksterhuis, E. J., e D. J. Struik, eds., *The Principal Works of Simon Stevin* (Amsterdam: Swets and Zeitlinger, 1955-1958

Galilei, Galileo, *Dialogue Concerning Two New Sciences*, ed. por Henry Crew e Alonso de Salvio (edição em brochura, New York: Dover, sem data

Galilei, Galileo, *Discourses on the Two Chief Systems*, editado por Stillman Drake (Berkeley, Calif.: University of California Press, 1953)

Galilei, Galileo, *Discourses on the Two Chief Systems*, ed. por Giorgio de Santillana (Chicago: University of Chicago Press, 1953)

Glaisher, J. W. L., "Logarithms," *Encyclopaedia Britannica*, 11.ª edição, (1910-1911), Vol. XVI, pp. 868-877

Glaisher, J. W. L., "On Early Tables of Logarithms and Early History of Logarithms," *Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics*, **48** (1920), 151-192

Hobson, E. W., *John Napier and the Invention of Logarithms* (Cambridge, 1914)

Hofmann, J. E., *Geschichte der Mathematik*, 2.ª edição (Berlin: Walter de Gruyter, 1963)

Kepler, Johann, *Gesammelte Werke*, ed. por Walther von Dyck e Max Caspar (München: C. H. Beck, 1937).

Knott, C. G., *Napier Tercentenary Memorial Volume* (Londres: Longmans, Green, 1915)

Ritter, Frédéric, *François Viète* (Paris, 1895)

Sarton, George, "Simon Stevin of Bruges (1548-1620)", *Isis*, **21** (1934), 241-303
Sarton, George, "The First Explanation of Decimal Fractions and Measures (1585)," *Isis*, **23** (1935), 153-244
Smith, D. E., *A Source Book in Mathematics* (New York: McGraw-Hill, 1929; edição em brochura, New York: Dover, 1959, 2 volumes)
Tropfke, Johannes, *Geschichte der Elementar-Mathematik* (Berlin: De Gruyter, 1923), Vol. V
Turnbull, H. W., *The Great Mathematicians* (New York: New York University Press, 1961)
Zeller, Irmã Mary Claudia, *The Development of Trigonometry from Regiomontanus to Pitiscus* (Ann Arbor, Mich.: University of Michigan, Ph.D. thesis, 1944)

EXERCÍCIOS

1. Compare as contribuições de Stevin à matemática com as de Bürgi.
2. Por que se diz às vezes que Viète foi o primeiro matemático verdadeiramente moderno? Explique claramente.
3. Quais foram as duas primeiras curvas, além da reta e círculo, ou combinações dessas, a encontrar aplicação na ciência? Explique como vieram a ser aplicadas.
4. Que vantagens têm as frações decimais sobre as sexagesimais? Que razões pode dar para o tardio aparecimento das primeiras na Europa?
5. Que é um parâmetro? Pode encontrar exemplos de parâmetros antes de Viète? Explique.
6. Compare o uso feito por Viète do método analitico com o de Euclides.
7. Quais são as vantagens e desvantagens relativas das notações algébricas de Viète e Harriot?
8. Prove a observação de Viète que diz que se x_1 e x_2 são raízes positivas de $x^3 + b = 3ax$, então $3a = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$ e $b = x_1x_2^2 + x_2x_1^2$.
9. Usando o método de Viète resolva $x^3 = 232x^2 - 465x + 702$ para a raiz positiva (que fica entre 200 e 300).
10. Prove a forma de Viète da lei das tangentes.
11. Usando o método de Viète, prove que

$$\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = 2\cos\frac{x+y}{2}\operatorname{sen}\frac{x-y}{2}$$

12. Usando o método de Viète, prove que

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}.$$

13. Multiplique 8743 por 5692 usando prostaférese.
14. Divida 8743 por 5692 usando prostaférese.
15. Escreva sen $10x$ e cos $10x$ em termos de potências de sen x e cos x.
16. Usando o sistema de logaritmos de Napier, qual é a relação entre Log x, Log y e Log x/y? Justifique sua resposta.
17. Ache aproximadamente o número cujo logaritmo de Napier é 3.
18. Ache aproximadamente o número cujo logaritmo de Bürgi é 4.
19. Qual a diferença entre os logaritmos de Napier de dois números que estão na razão de 3 para 1?
20. Usando o método de Brigg, ache antilog 0,2500 com quatro casas decimais.

*21. Usando os logaritmos de Bürgi, qual a relação entre log x, log y, log z, e log xy/z?

22. Use o tipo de raciocínio de Kepler para provar que o volume de uma esfera é um terço da área da superfície vezes o raio.

*23. Verifique a afirmação de Galileu

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\text{vers }\theta}{\theta} = 0.$$

*24. Verifique a comparação de Cavalieri entre as áreas da espiral e da parábola.

*25. Prove a fórmula de Viète de produto infinito para π partindo de um polígono inscrito de quatro lados e dobrando sucessivamente o número de lados.

*26. Use o método trigonométrico de Viète e Girard para resolver a equação $x^3 - 9x^2 + 15x + 7 = 0$ para uma raiz correta até o mais próximo milésimo.

Capítulo **17**

O tempo de Fermat e Descartes

Fermat, o verdadeiro inventor do cálculo diferencial.

Laplace

1 O ano de 1647 em que Cavalieri morreu foi também o da morte de outro discípulo de Galileu, o jovem Evangelista Torricelli (1608-1647); mas em muitos aspectos Torricelli representava a nova geração de matemáticos que estava construindo rapidamente sobre as fundações infinitesimais que Cavalieri tinha esboçado bem vagamente.

Se Torricelli não tivesse morrido tão prematuramente, a Itália poderia ter continuado a partilhar a liderança nos novos desenvolvimentos; porém a França é que veio a ser o indisputado centro da matemática durante o segundo terço do século dezessete. As figuras principais foram René Descartes (1596-1650) e Pierre de Fermat (1601-1665), mas três outros franceses contemporâneos também fizeram contribuições importantes, além de Torricelli — Gilles Persone de Roberval (1602-1675), Girard Desargues (1591--1661) e Blaise Pascal (1623-1662). Este capítulo, que cobre um dos períodos mais cruciais na história da matemática, focaliza a atenção sobre esses seis homens, não só como indivíduos, mas também coletivamente, pois desde os dias de Platão não havia tanta intercomunicação matemática quanto no século dezessete.

Não existiam ainda organizações de matemáticos profissionais, mas na Itália, França e Inglaterra havia grupos científicos mais ou menos organizados: a Accademia dei Lincei (a que Galileu pertencia) e a Accademia del Cimento, na Itália; o Cabinet Du Puy, na França; e o Invisible College, na Inglaterra. Havia ainda um indivíduo que, durante o período que estamos agora considerando, serviu através de correspondência como centro de distribuição de informação matemática. Esse foi o frade Minimita, Marin Mersenne (1588-1648), muito amigo de Descartes e Fermat, como de muitos outros matemáticos da época. Se Mersenne tivesse vivido um século antes talvez não tivesse havido tanta demora na difusão de informação relativa à solução da cúbica, pois, quando Mersenne sabia de alguma coisa, toda a "República de Letras" era logo informada. Do século dezessete em diante, portanto, a matemática se desenvolveu mais em termos de lógica interna do que sob a ação de forças econômicas, sociais ou tecnológicas, como se evidencia particularmente na obra de Descartes, o matemático mais conhecido do período.

2 Descartes pertencia a uma boa família e recebeu educação cuidada no colégio jesuíta em La Flèche, onde os livros de texto de Clavius eram fundamentais. Mais tarde graduou-se em Poitier, onde estudara direito sem muito entusiasmo. Durante vários anos ele viajou em conjunção com várias campanhas militares, primeiro na Holanda com Maurice, príncipe de Nassau, depois com o Duque Maximiliano I da Baviera, e mais tarde ainda com o exército francês no cerco de La Rochelle. Descartes não era verdadeiramente um soldado profissional, e seus breves períodos de serviço em conexão com campanhas foram separados por intervalos de viagem e estudo independente durante os quais ele encontrou alguns dos principais sábios em várias partes da Europa — Faulhaber na Alemanha e Desargues na França, por exemplo. Em Paris ele conheceu Mersenne e um círculo de cientistas que discutiam livremente críticas ao pensamento peripatético; de tais estímulos Descartes progrediu para tornar-se o "pai da filosofia moderna", para apresentar uma visão científica transformada do mundo e estabelecer um novo ramo da matemática. Em seu mais célebre tratado, o *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences* (Discurso sobre o método para raciocinar bem e procurar a verdade nas ciências) de 1637, ele anunciou seu programa de pesquisa filosófica. Ele esperava, por dúvida sistemática, chegar a idéias claras

René Descartes

e precisas, a partir das quais seria possível deduzir inúmeras conclusões válidas. Essa visão da ciência levou-o a admitir que tudo era explicável em termos de matéria (ou extensão) e movimento. O universo todo, ele postulou, era feito de matéria em movimento incessante em vórtices, e todos os fenômenos deveriam ser explicados mecanicamente em termos de forças exercidas pela matéria contígua. A ciência cartesiana gozou de grande popularidade por quase um século, mas depois necessariamente cedeu lugar ao raciocínio matemático de Newton. Ironicamente, foi em grande parte a matemática de Descartes que mais tarde possibilitou a derrota da ciência cartesiana.

3 A filosofia e a ciência de Descartes eram quase revolucionárias em sua ruptura com o passado; em contraste, sua matemática tinha fortes elos com a tradição anterior. Até certo ponto isso pode ter resultado da herança humanística comumente aceita — uma crença de que houvera uma Idade Áurea no passado, um "reino de Saturno", cujas grandes idéias tinham que ser redescobertas. Provavelmente foi ainda mais o resultado do fato que o crescimento da matemática é mais cumulativamente progressivo que o desenvolvimento de outros ramos do conhecimento. A matemática cresce por acreções, com pouca necessidade de descartar irrelevâncias, ao passo que a ciência cresce em grande parte por substituições quando coisas melhores são encontradas. Não deve causar surpresa, portanto, ver que a principal contribuição de Descartes à matemática, a fundação da geometria analítica, foi motivada por uma tentativa de voltar ao passado.

Descartes estava interessado seriamente na matemática quando passou com o exército bávaro o frio inverno de 1619, em que ficava na cama até as dez da manhã pensando em problemas. Foi durante esse período de sua vida que ele descobriu a fórmula sobre poliedros que usualmente leva o nome de Euler — $v + f = a + 2$, onde v, f, e a são o número de vértices, faces e arestas, respectivamente, de um poliedro simples. Nove anos mais tarde Descartes escreveu a um amigo na Holanda que tinha feito tais avanços na aritmética e na geometria que já não tinha mais nada a desejar. Que avanços eram esses não se sabe, pois Descartes nada tinha publicado; mas a direção de seus pensamentos está indicada numa carta de 1628 a seu amigo holandês em que ele deu uma regra para a construção das raízes de qualquer equação cúbica ou quártica por meio de uma parábola. Isso, é claro, é essencialmente o tipo de coisa que Menaecmus tinha feito para a duplicação do cubo cerca de 2 000 anos antes, e que Omar Khayyam fizera para as cúbicas, em geral por volta de 1100.

Se Descartes em 1628 estava ou não em completa posse de sua geometria analítica não é claro, mas a data efetiva da invenção da geometria cartesiana não pode ser muito posterior a isso. Por essa época Descartes deixou a França indo para a Holanda, onde passou os vinte anos seguintes. Três ou quatro anos depois de instalar-se lá, um outro amigo holandês, um classicista, chamou a sua atenção para o problema das três e quatro retas de Papus. Sob a errônea impressão de que os antigos não tinham conseguido resolver esse problema, Descartes aplicou a ele seus novos métodos e resolveu-o sem dificuldade. Isso fez com que ele percebesse o poder e a generalidade de seu ponto de vista, e em conseqüência ele escreveu a obra bem conhecida, *La géométrie*, que levou a geometria analítica ao conhecimento de seus contemporrâneos.

4 *La géométrie* não foi apresentada ao mundo como um tratado isolado, mas como um dos três apêndices do *Discours de la méthode* em que ele pensou dar ilustrações de seu método filosófico geral. Os outros dois apêndices eram *La dioptrique*, contendo a primeira publicação da lei da refração (descoberta anteriormente por Snell), e *Les météores*, que continha entre outras coisas a primeira explicação quantitativa satisfatória do arco-íris. Os sucessores de Descartes tiveram dificuldades para perceber como os três apêndices se relacionavam com seu método geral, e em edições subseqüentes do *Discours* eles freqüentemente foram omitidos. A edição original do *Discours* foi publicada sem o nome do autor, mas a autoria da obra era conhecida.

Geometria cartesiana agora é sinônimo de geometria analítica, mas o objetivo fundamental de Descartes era muito diferente do dos textos modernos. O tema é estabelecido na primeira frase:

> Todo problema de geometria pode facilmente ser reduzido a termos tais que o conhecimento dos comprimentos de certos segmentos basta para a construção.

Como essa afirmação indica, o objetivo é geralmente uma construção geométrica, e não necessariamente a redução da geometria à álgebra. A obra de Descartes é com demasiada freqüência descrita simplesmente como aplicação da álgebra à geometria, ao passo que na verdade poderia ser caracterizada igualmente bem como sendo a tradução de operações algébricas em linguagem geométrica. A primeira secção de *La géométrie* tem mesmo o título "Como os cálculos de aritmética se relacionam com operações de geometria"; a segunda secção descreve "Como a multiplicação, a divisão, e a extração de raízes quadradas são efetuadas geometricamente". Aqui Descartes fazia o que até certo ponto tinha sido feito de al-Khowarizmi a Oughtred — fornecia um correspondente geométrico de operações algébricas. Mostra que as cinco operações aritméticas correspondem a construções simples com régua e compasso, justificando assim a introdução de termos aritméticos em geometria.

Descartes ia mais longe em sua álgebra simbólica, e na interpretação geométrica da álgebra, do que qualquer de seus predecessores. A álgebra formal vinha progredindo constantemente desde a Renascença, e encontrou seu auge na *La géométrie* de Descartes, o texto matemático mais antigo que um estudante de hoje possa seguir sem encontrar dificuldades com a notação. Quase que o único símbolo arcaico no livro é o uso de $\propto$ em vez de = para a igualdade. O uso de letras do começo do alfabeto para parâmetros e das do fim como incógnitas, a adatação da notação exponencial a essas, e o uso dos símbolos germânicos + e −, tudo isso fez com que a notação de Descartes se assemelhasse à nossa, pois naturalmente tiramos a nossa dele. Havia porém uma diferença importante na maneira de ver as coisas, pois ao passo que pensamos em parâmetros e incógnitas como números, Descartes pensava neles como segmentos. Num ponto essencial ele rompeu com a tradição grega, pois em vez de considerar x^2 e x^3, por exemplo, como uma área e um volume, ele também os interpretava como segmentos. Isso permitiu-lhe abandonar o princípio de homogeneidade, ao menos explicitamente, e no entanto preservar o significado geométrico. Descartes podia escrever uma expressão como $a^2b^2 - b$ porque, como ele dizia, "deve-se considerar a quantidade a^2b^2 dividida uma vez pela unidade (isto é, o segmento unitário), e a quantidade b multiplicada duas vezes pela unidade". É claro que Descartes substituía a homogeneidade formal por homogeneidade em pensamento, o que tornou sua álgebra geométrica mais flexível — tão flexível na verdade que lemos xx como "x quadrado" sem jamais enxergar mentalmente um quadrado.

5 O Livro I contém instruções detalhadas para resolver equações quadráticas, não no sentido algébrico dos antigos babilônios, mas geometricamente, um tanto à maneira dos gregos antigos. Para resolver a equação $z^2 = az + b^2$, por exemplo, Descartes procede do modo seguinte. Tracemos um segmento LM de comprimento b (Fig. 17.1) e em L levante-se um segmento NL igual a $a/2$ e perpendicular a LM. Com centro N construímos um círculo de raio $a/2$ e traçamos a reta por M e N que cortará o círculo em O e P. Então $z = OM$ é o segmento desejado. (Descartes ignorava a raiz PM da equação porque é "falsa", isto é negativa.) Construções semelhantes são dadas para $z^2 = az - b^2$ e para $z^2 + az = b^2$, as únicas outras equações quadráticas com raízes positivas.

Tendo mostrado como as operações algébricas, inclusive a resolução de quadráticas, são interpretadas geometricamente, Descartes se volta para a aplicação da álgebra a problemas geométricos determinados, formulando, muito mais claramente que os cossistas da Renascença, o método geral:

> Se, pois, queremos resolver qualquer problema, primeiro supomos a solução efetuada, e damos nomes a todos os segmentos que parecem necessários à construção — aos que são desconhecidos e aos que são conhecidos. Então, sem fazer distinção entre segmentos conhecidos e desconhecidos, devemos esclarecer a dificuldade, de modo que mostre mais naturalmente as relações entre esses segmentos, até conseguirmos exprimir uma mesma quantidade de dois modos. Isso constituirá uma equação (numa única incógnita) pois os termos de uma dessas expressões juntos são iguais aos termos da outra[1].

Descartes nos Livros I a III de *La géométrie* está sempre preocupado essencialmente com esse tipo de problema geométrico, em que a equação algébrica final só pode conter uma quantidade desconhecida. Descartes percebia bem que era o grau dessa equação algébrica resultante que determinava o instrumento geométrico pelo qual a construção geométrica requerida pode ser realizada.

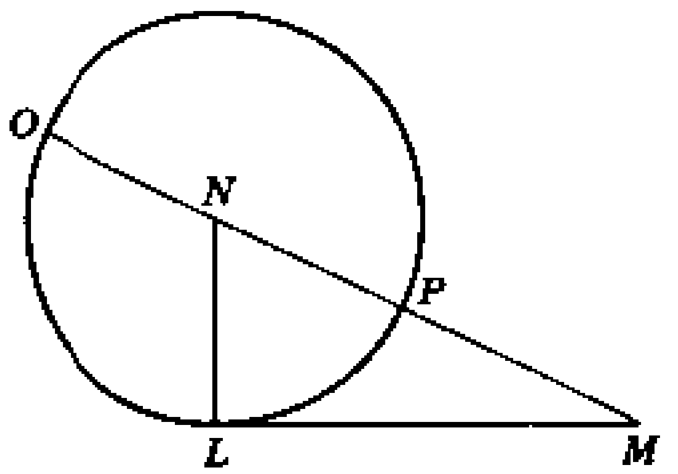


Figura 17.1

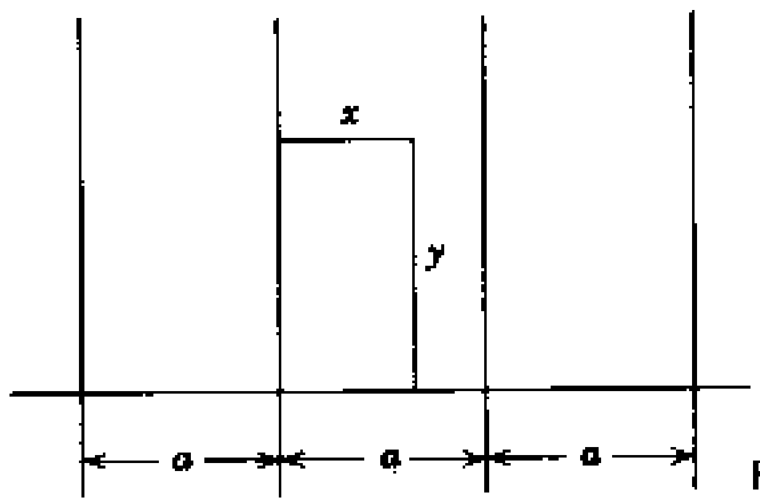


Figura 17.2

[1]Tradução de passagens de *La géométrie*, tiradas no original inglês de *The Geometry of René Descartes*, traduzido por D. E. Smith e Marcia L. Latham (New York: Dover, 1954). Veja pp. 7-9 para a passagem acima

> Se pode ser resolvido por geometria ordinária, isto é, com uso de retas e círculos traçados sobre uma superfície plana, quando a última equação tiver sido completamente resolvida restará no máximo o quadrado de uma incógnita, igual ao produto de sua raiz por alguma quantidade conhecida, acrescido ou diminuído de alguma outra quantidade também conhecida.

Aqui vemos uma clara afirmação de que o que os gregos chamavam de "problemas planos" não levava a nada pior que uma equação quadrática. Como Viète já tinha mostrado que duplicação do cubo e a trissecção do ângulo levavam a equações cúbicas, Descartes afirmava, mas sem prova adequada, que esses problemas não podem ser resolvidos com régua e compasso. Dos três problemas antigos, portanto, só o da quadratura do círculo permanecia aberto a discussão.

O título *La géométrie* não deve levar ao engano de pensar que a obra é primariamente geométrica. Já no *Discours*, do qual a *Geometria* era um apêndice, Descartes tinha discutido os méritos relativos da álgebra e da geometria, sem mostrar parcialidade por nenhuma delas. Acusava a segunda de usar demasiado pesadamente diagramas que fatigam a imaginação desnecessariamente, e a primeira de ser uma arte confusa e obscura que embaraça a mente. O objetivo de seu método, portanto, era duplo: (1) por processos algébricos libertar a geometria de diagramas e (2) dar significado às operações da álgebra por meio de interpretações geométricas. Descartes estava convencido de que todas as ciências matemáticas partem dos mesmos princípios básicos, e decidiu usar o melhor de cada ramo. Seu método em *La géométrie* consistia então em partir de um problema geométrico, traduzi-lo em linguagem de equação algébrica, e depois, tendo simplificado ao máximo a equação, resolvê-la geometricamente, de modo semelhante ao que usava para quadráticas. Seguindo Papus, Descartes insistia em que na solução geométrica de uma equação deviam ser usados apenas os meios mais simples apropriados ao grau da equação. Para equações quadráticas, retas e círculos bastam; para cúbicas e quárticas, secções cônicas. Agora Descartes estava pronto para ir além do ponto em que os gregos se tinham detido.

6 Descartes ficou muito impressionado com a força de seu método no tratamento do problema do lugar das três e quatro retas, e por isso passou a generalizações desse problema — um problema que corre como um fio de Ariadne através dos três livros de *La géométrie*. Sabia que Papus não pudera dizer nada sobre os lugares quando o número de retas era aumentado para seis ou oito ou mais; por isso Descartes passou a estudar tais casos. Ele percebia que para cinco ou seis retas o lugar é uma cúbica, para sete ou oito é uma quártica, e assim por diante. Mas Descartes não mostrou interesse pela forma desses lugares, porque estava obcecado com a questão dos meios necessários para construir geometricamente as ordenadas correspondentes a abscissas dadas. Para cinco retas, por exemplo, ele observou triunfante que se elas não são todas paralelas então o lugar é elementar no sentido que, dado um valor de x, o segmento representando y pode ser construído só com régua e compasso. Se quatro das retas são paralelas e a distâncias iguais a e a quinta é perpendicular às outras (Fig. 17.2) e se a constante de proporcionalidade no problema de Papus é tomada como sendo essa mesma constante a, então o lugar é dado por $(a + x)(a - x)(2a - x) = axy$, uma cúbica que Newton mais tarde chamou a parábola ou tridente de Descartes — $x^3 - 2ax - a^2x + 2a^3 = axy$. Essa curva aparece repetidamente em *La géométrie*, no entanto Descartes não deu em parte alguma um esboço completo dela. Seu interesse pela curva era triplo: (1) obter sua equação como um lugar de Papus, (2) mostrar sua geração pelo movimento de curvas de grau inferior e (3) usá-la por sua vez para construir as raízes de equações de grau superior.

Descartes considerava o tridente construtível só por métodos planos no sentido que, para cada ponto x no eixo das abscissas, a ordenada y pode ser traçada só com régua e compasso. Isso em geral não é possível, para cinco ou mais retas traçadas arbitrariamente no problema de Papus. No caso de não mais do que oito retas, o lugar é um polinômio em x e y tal que, para um ponto dado no eixo x a construção da ordenada y correspondente exige a solução geométrica de uma cúbica ou de uma quártica, o que, como vimos, em geral requer o uso de secções cônicas. Para não mais de doze retas no problema, o lugar é um polinômio em x e y de grau não superior a seis, e a construção em geral exige curvas além das secções cônicas. Aqui Descartes efetuou um progresso importante, além do que os gregos haviam feito quanto a problemas de construtibilidade geométrica. Os antigos nunca tinham verdadeiramente aceito como legítimas construções que usassem curvas que não fossem retas ou círculos, embora às vezes reconhecessem relutantemente, como Papus fizera, as classes que denominavam problemas sólidos e problemas lineares. A segunda categoria em particular era uma miscelânea de problemas sem verdadeira aceitação.

Descartes agora resolveu especificar uma classificação ortodoxa de problemas geométricos determinados. Os que levam a equações quadráticas e podem portanto ser construídos com régua e compasso, ele colocou na primeira classe; os que levam a equações cúbicas e quárticas, cujas raízes podem ser construídas por meio de secções cônicas, na classe número dois; os que levam a equações de graus cinco ou seis podem ser construídos introduzindo uma cúbica como o tridente ou a parábola superior $y = x^3$, e esses ele colocou na classe três. Descartes continuou assim, reunindo problemas geométricos e equações algébricas em classes, assumindo que a construção das raízes de uma equação de grau $2n$ ou $2n-1$ era um problema de classe n.

Essa classificação por pares de graus parecia confirmada por considerações algébricas. Sabia-se que a solução da quártica era redutível à da cúbica resolvente, e Descartes extrapolou prematuramente assumindo que a solução de uma equação de grau $2n$ pode ser reduzida à de uma equação resolvente de grau $2n-1$. Muitos anos depois mostrou-se que a atraente generalização de Descartes não é válida. Muitos de seus contemporâneos mostraram-se ansiosos por apontar um erro mais sério cometido por Descartes, pois da teoria da eliminação algébrica resulta claramente que curvas de grau n bastam para resolver equações de graus não só até $2n$ como até n^2. Sua classificação, portanto, perdia a validade, mas sua obra teve o efeito salutar de encorajar o relaxamento das regras sobre construtibilidade, de modo que curvas planas de grau superior podiam ser usadas.

7 Deve-se notar que a classificação de Descartes dos problemas geométricos incluía alguns, mas não todos, dos que Papus amontoara sob o nome de "lineares". Ao introduzir as curvas novas de que necessitava para construções geométricas além do quarto grau, Descartes acrescentara aos axiomas usuais da geometria mais um axioma:

> Duas ou mais retas (ou curvas) podem ser movidas, uma sobre a outra, determinando por suas intersecções novas curvas.

Isso em si não difere muito do que os gregos tinham feito em sua geração cinemática de curvas como a quadratriz, a cissóide, a conchóide, e a espiral; mas ao passo que os antigos tinham agrupado todas elas, Descartes agora fez distinções cuidadosas entre aquelas, como a cissóide e a conchóide, que chamaríamos de algébricas, e outras, como a quadratriz e a espiral, que hoje são chamadas transcendentes. Ao primeiro tipo Descartes deu reconhecimento geométrico total, junto com a reta, o círculo, e as cônicas, chamando todas elas de "curvas geométricas"; o segundo tipo ele excluiu totalmente da geometria, estigmatizando-as como "curvas mecânicas". Para essa decisão Descartes tomou como base a "exatidão de raciocínio". As curvas mecânicas, disse ele, "devem ser concebidas como descritas por dois movimentos separados cuja relação não admite determinação exata", — tal como a razão entre a circunferência e o diâmetro de um círculo no caso dos movimentos que descrevem a quadratriz e a espiral. Em outras palavras, Descartes considerava as curvas algébricas como descritas *exatamente*, e as transcendentes como *inexatamente* descritas, porque essas últimas são em geral definidas em termos de comprimentos de arcos. Sobre isso ele escreveu, em *La géométrie*:

> A geometria não deveria incluir linhas que são como cordas por serem às vezes retas e às vezes curvas, porque as razões entre linhas retas e curvas não são conhecidas e eu creio que não podem ser descobertas por mentes humanas, portanto nenhuma conclusão baseada em tais relações pode ser aceita como rigorosa e exata.

Descartes aqui simplesmente reitera o dogma, sugerido por Aristóteles e afirmado por Averroes, que diz que nenhuma curva algébrica pode ser exatamente retificada. É interessante que em 1638, o ano seguinte ao da publicação de *La géométrie*, Descartes se deparou com uma curva "mecânica" que se verifica ser retificável. Através de Mersenne, o representante de Galileu em França, a questão, levantada em *Duas novas ciências*, da trajetória de queda de um objeto sobre uma terra que gira (assumindo a terra permeável) foi amplamente discutida, e isso levou Descartes à espiral equiangular ou logarítmica $r = ae^{b\theta}$ como a possível trajetória[2]. Se Descartes não fosse tão firme em sua rejeição de tais curvas não-geométricas, ele poderia ter-se antecipado a Torricelli na descoberta, em 1645, da primeira retificação moderna de uma curva. Torricelli mostrou, por métodos infinitesimais que tinha aprendido com Arquimedes, Galileu e Cavalieri, que o comprimento total da espiral logarítmica a partir de $\theta = 0$ quando se enrola para traz em torno do pólo O é exatamente igual ao comprimento da tangente polar PT (Fig. 17.3) no ponto para o qual $\theta = 0$. Esse notável resultado, é claro, não ia contra a doutrina cartesiana da não-retificabilidade de curvas *algébricas*. Na verdade, Descartes poderia ter dito não só que a curva não era exatamente determinada, por ser mecânica, como também que o arco da curva tem um ponto assintótico no pólo, que nunca atinge.

8 Praticamente toda a *La géométrie* está dedicada a uma completa aplicação da álgebra à geometria e da geometria à álgebra; mas há pouco no tratado que se assemelha ao que hoje se considera como geometria analítica. Não há nada de sistemático sobre coordenadas retangulares, pois ordenadas oblíquas são geralmente assumidas; portanto, não há fórmulas para distâncias, inclinação, ponto de divisão, ângulo entre duas retas, ou outro material introdutório semelhante. Além disso, em toda a obra não há uma única curva nova traçada diretamente a partir da equação, e o autor se interessava tão pouco por esboçar curvas que nunca entendeu completamente o significado de coordenadas negativas. Ele sabia de modo geral que as ordenadas negativas são orientadas em sentido oposto ao tomado como positivo, mas nunca usou abscissas negativas. Ainda mais, o princípio fundamental da geometria analítica — a descoberta de que equações indeterminadas em duas incógnitas correspondem a lugares — só aparece no segundo livro, e mesmo então só incidentalmente.

> A solução de qualquer desses problemas sobre lugares não é mais do que achar um ponto para cuja completa determinação falta uma condição . . . Em todo caso assim pode-se obter uma equação contendo duas incógnitas.

Só num caso Descartes examinou com detalhe um lugar, e isso foi em conexão com o problema do lugar das três e quatro retas de Papus, para o qual Descartes derivou a equação $y^2 = ay - bxy + cx - dx^2$. Essa é a equação geral de uma cônica passando pela origem; embora os coeficientes literais sejam supostos positivos, isto é de longe o ataque mais geral até então feito à análise da família das secções cônicas. Descartes indicou condições sobre os coeficientes sob as quais a cônica é uma reta, uma parábola, uma elipse, ou uma hipérbole, a análise num certo sentido sendo equivalente ao reconhecimento da característica da equação da cônica. O autor sabia que com uma escolha apropriada da origem e dos eixos podia-se obter a forma mais simples da equação, mas não deu

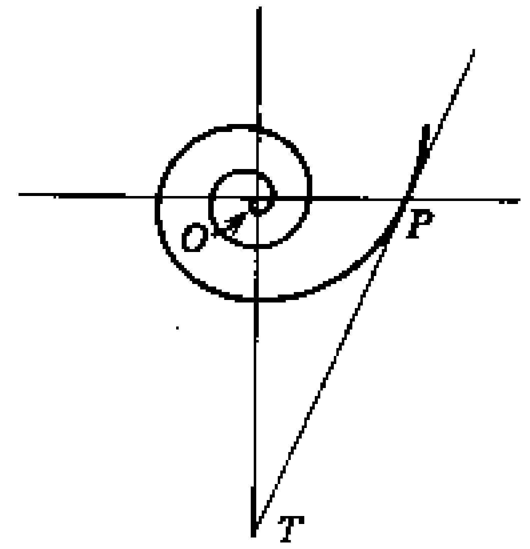


Figura 17.3

[2]Veja *Oeuvres de Descartes*, editado por Charles Adam e Paul Tannery (1897-1913), II, 222-245

nenhuma das formas canônicas. A omissão de grande parte dos detalhes elementares tornou a obra muito difícil de entender para seus contemporâneos. Nas observações finais Descartes procurou justificar a insuficiência da exposição com a afirmação pouco razoável de que havia deixado muito por dizer a fim de não roubar ao leitor a alegria da descoberta. Sendo um gênio, ele não podia avaliar a dificuldade que outros teriam para compreender suas novas e profundas idéias. Não é de espantar que o número de edições de *La géométrie*, além das que continham consideráveis amplificações, foi pequeno durante o século dezessete e ainda menor depois.

Inadequada como é a exposição, é o Livro II de *La géométrie* que mais se aproxima do estilo moderno em geometria analítica. Há até um enunciado de um princípio fundamental de geometria analítica no espaço:

> Se faltam duas condições para a determinação de um ponto, o lugar do ponto é uma superfície.

No entanto Descartes não deu qualquer exemplo de tais equações nem amplificação dessa breve sugestão de geometria analítica em três dimensões.

9 Descartes percebia tão bem o significado de sua obra que a considerava como tendo mais ou menos a mesma relação com a geometria antiga que a retórica de Cícero com o *a, b, c* das crianças. Seu engano, de nosso ponto de vista, esteve em dar ênfase a equações determinadas em vez de indeterminadas. Ele percebia que todas as propriedades de uma curva, tais como sua área ou a direção de sua tangente ficam completamente determinadas quando é dada uma equação em duas incógnitas, mas não explorou completamente essa percepção. Escreveu:

> Terei dado aqui uma introdução suficiente ao estudo das curvas quando der um método geral para traçar uma reta fazendo ângulos retos com uma curva num ponto arbitrariamente escolhido sobre ela. E ouso dizer que isso é não somente o problema de geometria mais útil e geral que conheço, mas também que eu jamais desejei conhecer.

Descartes tinha toda razão ao dizer que o problema de achar a normal (ou a tangente) a uma curva era de grande importância, mas o método que publicou em *La géométrie* era menos eficiente que o que Fermat tinha desenvolvido na mesma época. Descartes sugeria que para achar a normal a uma curva algébrica num ponto P fixado sobre a curva, deveria ser tomado um segundo ponto Q variável sobre a curva, depois achar a equação do círculo com centro no eixo das coordenadas (pois ele usava só o eixo das abscissas) e passando por P e Q. Agora igualando a zero o discriminante da equação que determina as intersecções do círculo com a curva, acha-se o centro do círculo para o qual Q coincide com P. Conhecido esse centro, a tangente e a normal à curva em P são facilmente encontradas.

O Livro II de *La géométrie* contém também muito material sobre as "ovais de Descartes", que são muito úteis em óptica e são obtidas generalizando o "método de jardineiro" de construir uma elipse por meio de barbantes. Se D_1 e D_2 são as distâncias de um ponto variável P a dois pontos fixos F_1 e F_2 respectivamente, e se m e n são inteiros positivos e K é qualquer constante positiva, então o lugar de P tal que $mD_1 + nD_2 = K$ é agora chamado uma oval de Descartes; mas o autor não usou as equações dessas curvas. Descartes percebeu que seus métodos podiam ser estendidos a "todas as curvas que podem ser concebidas como geradas pelo movimento regular dos pontos de um corpo no espaço tridimensional", mas não foi a detalhes. A frase final do Livro II — "E assim eu penso que nada omiti de essencial à compreensão das linhas curvas" — é realmente presunçosa.

O terceiro e último livro de *La géométrie* retoma o tópico do Livro I — a construção das raízes das equações determinadas. Aqui o autor previne que em tais construções "Devemos sempre escolher com cuidado a curva mais simples que pode ser usada para a resolução de um problema". Isso significa, é claro, que se deve saber qual a natureza das raízes de equação a ser tratada, e em particular deve-se saber se a equação é redutível ou não. Por isso, o Livro III é praticamente um curso sobre a teoria elementar das equações.

Diz como descobrir raízes racionais, se existem, como abaixar o grau da equação quando se conhece uma raiz, como aumentar ou diminuir as raízes de uma equação de qualquer quantidade, ou multiplicá-las ou dividi-las por um número, como eliminar o segundo termo, como determinar o número de possíveis raízes "verdadeiras" ou "falsas" (isto é, positivas e negativas) pela bem conhecida "regra dos sinais de Descartes" e como achar a solução algébrica de equações cúbicas ou quárticas. Para finalizar, o autor lembra que deu as construções mais simples possíveis para problemas nas várias classes mencionadas antes. Em particular, a trissecção do ângulo e a duplicação do cubo estão na classe dois, exigindo mais que retas e círculos.

10 Nossa exposição da geometria analítica de Descartes deve ter deixado claro quão longe estavam os pensamentos do autor de considerações práticas que hoje estão tão freqüentemente associadas com o uso de coordenadas. Ele não estabelecia um sistema de coordenadas a fim de localizar pontos como um medidor de terras ou um geógrafo poderiam fazer, nem pensava em suas coordenadas como pares de números. Quanto a isso, a frase "produto cartesiano", tão freqüentemente usada hoje, é um anacronismo. *La géométrie* em seu tempo foi tanto um triunfo da teoria não-prática quanto *As cônicas* de Apolônio na antiguidade, apesar do papel extraordinariamente útil que ambas viriam a desempenhar. Além disso, o uso de coordenadas oblíquas era quase o mesmo nas duas obras, confirmando assim que a origem da geometria analítica moderna está na antiguidade mais que na latitude de formas medieval. As coordenadas de Oresme, que influenciaram Galileu, estão mais perto, tanto em motivação quanto em forma, do ponto de vista moderno, que as de Apolônio e Descartes. Mesmo que Descartes conhecesse a representação gráfica de Oresme de funções, e isso não é evidente, não há nada em sua forma de pensar que indique ter ele percebido qualquer semelhança entre a finalidade da latitude de formas e sua própria classificação das construções geométricas. A teoria das funções veio a tirar grande proveito da obra de Descartes, mas a noção de forma ou função não teve papel aparente no desenvolvimento da geometria cartesiana.

Em termos de capacidade matemática, Descartes provavelmente foi o primeiro de seu tempo, mas ele no fundo não era realmente um matemático. Sua geometria foi apenas um episódio numa vida dedicada à ciência e à filosofia, e embora ocasionalmente mais tarde ele contribuísse para a matemática através de sua correspondência, ele não deixou outra grande obra no ramo. Em 1649 ele aceitou um convite da Rainha Cristina da Suécia para instruí-la em filosofia e estabelecer uma academia de ciências em Estocolmo. Descartes nunca teve boa saúde, e o rigor do inverno escandinavo foi demasiado para ele; morreu prematuramente, em 1650.

11 Se Descartes tinha um rival em capacidade matemática, era Fermat, mas esse não era de nenhum modo um matemático profissional. Fermat estudou direito em Toulouse, onde serviu no parlamento local, primeiro como advogado, mais tarde como conselheiro. Isso significava que era um homem ocupado; no entanto parece ter tido tempo para dedicar à literatura clássica, inclusive ciência e matemática, por prazer. O resultado foi que em 1629 ele começou a fazer descobertas de importância capital em matemática. Nesse ano ele começou a praticar um dos esportes favoritos do tempo — a "restauração" de obras perdidas da antiguidade com base em informação encontrada nos tratados clássicos preservados. Fermat se propôs a reconstruir o *Lugares planos* de Apolônio, baseado em alusões contidas na *Coleção matemática* de Papus. Um subproduto desse esforço foi a descoberta, não mais tarde que 1636, do princípio fundamental da geometria analítica:

> Sempre que numa equação final encontram-se duas quantidades incógnitas, temos um lugar, a extremidade de uma delas descrevendo uma linha, reta ou curva.

Esse enunciado profundo, escrito um ano antes do aparecimento da *Geometria* de Descartes, parece ter resultado da aplicação feita por Fermat da análise de Viète ao estudo dos lugares em Apolônio. Nesse caso, como no de Descartes, o uso de coordenadas não veio de considerações práticas, nem da representação gráfica medieval de funções. Surgiu da aplicação da álgebra de Renascença a problemas geométricos da antiguidade.

No entanto, o ponto de vista de Fermat não concordava inteiramente com o de Descartes, pois Fermat dava ênfase ao esboço de soluções de equações *indeterminadas*, em vez de à construção geométrica das soluções de equações algébricas *determinadas*. Além disso, ao passo que Descartes construíra sua *Geometria* em torno do difícil problema de Papus, Fermat limitou sua exposição, no curto tratado intitulado *Ad locus planos et solidos isagoge* (Introdução aos lugares planos e sólidos) aos lugares mais simples.

Descartes começara com o lugar das três e quatro retas, usando uma das retas como eixo das abscissas, Fermat começou com a equação linear e escolheu um sistema de coordenadas arbitrário sobre o qual esboçou-a.

Usando a notação de Viète, Fermat esboçou primeiro o caso mais simples de equação linear — dado em latim como "*D* in *A* aequetur *B* in *E*" (isto é, $Dx = By$ em simbolismo moderno). O gráfico, é claro, é uma reta pela origem — ou antes, semi-reta com a origem como extremidade, pois Fermat, como Descartes, não usava abscissas negativas.

A equação linear mais geral $ax + by = c^2$ (pois Fermat conservou a homogeneidade de Viète) ele esboçou como segmento de reta no primeiro quadrante com extremidades nos eixos de coordenadas. Em seguida, para mostrar o poder de seu método para tratar lugares, Fermat anunciou o seguinte problema que descobrira com o método novo:

> Dado qualquer número de retas fixadas, num plano, o lugar de um ponto, tal que a soma de múltiplos quaisquer dos segmentos traçados a ângulos dados do ponto às retas dadas, é constante, é uma reta.

Isso, é claro, é um corolário simples do fato que os segmentos são funções lineares das coordenadas, e da proposição de Fermat que diz que toda equação de primeiro grau representa uma reta[3].

Fermat em seguida mostrou que $xy = k^2$ é uma hipérbole e que uma equação da forma $xy + a^2 = bx + cy$ pode ser reduzida a uma da forma $xy = k^2$ (por uma translação de eixos). A equação $x^2 = y^2$ ele considerava como uma só reta (ou semi-reta) pois operava só no primeiro quadrante, e reduziu outras equações homogêneas de segundo grau a essa forma. Depois ele mostrou que $a^2 \pm x^2 = by$ é uma parábola, que $x^2 + y^2 + 2ax + 2by = c^2$ é um círculo, que $a^2 - x^2 = ky^2$ é uma elipse, e que $a^2 + x^2 = ky^2$ é uma hipérbole (da qual deu ambos os ramos). A equações quadráticas mais gerais, em que os vários termos de segundo grau aparecem, Fermat aplicou uma rotação de eixos para reduzi-las a uma das formas anteriores. Como "coroamento" de seu tratado, Fermat considerou a proposição seguinte.

> Dado qualquer número de retas, o lugar de um ponto tal que a soma dos quadrados dos segmentos traçados a ângulos dados do ponto às retas é constante, é um lugar sólido.

Essa proposição é evidente em termos da exaustiva análise de Fermat dos vários casos de equações quadráticas em duas incógnitas. Como apêndice à *Introdução aos lugares* Fermat acrescentou "A Solução de Problemas Sólidos por meio de Lugares", em que observa que equações determinadas cúbicas ou quárticas podem ser resolvidas por meio de cônicas, o tema que tomava tão grandes proporções na geometria de Descartes.

12 A *Introdução aos lugares* de Fermat não foi publicada em vida do autor; por isso na mente de muitos a geometria analítica era considerada invenção de Descartes unicamente. É claro agora que Fermat tinha descoberto essencialmente o mesmo método bem antes do aparecimento de *La géométrie* e que sua obra circulava em forma de manuscrito até sua publicação em *Varia opera mathematica*.

É uma pena que Fermat não tenha publicado quase nada em toda sua vida, pois sua exposição era muito mais sistemática e didática que a de Descartes. Além disso, sua geometria analítica era um tanto mais próxima da nossa no fato de serem as ordenadas usualmente tomadas perpendicularmente ao eixo das abscissas. Como Descartes, Fermat

[3]Para esse e outros aspectos da obra de Fermat veja suas *Oeuvres*, editado por Paul Tannery e Charles Henry (1891-1922)

percebia a existência de uma geometria analítica a mais que duas dimensões, pois em outra conexão ele escreveu:

> Há certos problemas que envolvem só uma incógnita e que podem ser chamados *determinados*, para distingui-los dos problemas de lugares. Há outros que envolvem duas incógnitas e que nunca podem ser reduzidos a uma só; e esses são os problemas de lugares. Nos primeiros problemas, procuramos um ponto único, nos segundos uma curva. Mas se o problema proposto envolve três incógnitas, deve-se achar, para satisfazer à equação, não apenas um ponto ou uma curva, mas toda uma superfície. Assim aparecem superfícies como lugares, etc.[4].

Aqui no "et coetera" final há uma sugestão de geometria a mais que três dimensões, mas se Fermat tinha realmente isso em mente não foi além. Mesmo a geometria a três dimensões teria que esperar até o século dezoito, antes de ser efetivamente desenvolvida.

13 É possível que Fermat desde 1629 estivesse de posse de sua geometria analítica, pois por essa época ele fez duas descobertas significativas que se relacionam de perto com seu trabalho sobre lugares. A mais importante dessas foi descrita alguns anos depois em um tratado, também não publicado durante sua vida, chamado *Método para achar máximos e mínimos*. Fermat estivera considerando lugares dados (em notação moderna) por equações da forma $y = x^n$; por isso elas são freqüentemente hoje chamadas "parábolas de Fermat" se n é positivo ou "hipérboles de Fermat" se n é negativo. Aqui temos uma geometria analítica de curvas planas de grau superior; mas Fermat foi além. Para curvas polinomiais da forma $y = f(x)$ ele notou um modo muito engenhoso para achar pontos em que a função assume um máximo ou um mínimo. Ele comparou o valor de $f(x)$ num ponto com o valor $f(x + E)$ num ponto vizinho. Em geral esses valores serão bem diferentes, mas num alto ou num baixo de uma curva lisa a variação será quase imperceptível. Portanto para achar os pontos de máximo e de mínimo Fermat igualava $f(x)$ e $f(x + E)$, percebendo que os valores, embora não exatamente iguais, são quase iguais. Quanto menor o intervalo E entre os dois pontos mais perto chega a pseudo-equação de ser uma verdadeira equação; por isso Fermat, depois de dividir tudo por E fazia $E = 0$. Os resultados lhe davam as abscissas dos pontos de máximo e mínimo do polinômio. Aqui em essência tem-se o processo hoje chamado de diferenciação pois o método de Fermat equivale a achar

$$\lim_{E \to 0} \frac{f(x + E) - f(x)}{E}$$

e igualar isso a zero. Portanto é razoável acompanhar Laplace ao saudar Fermat como descobridor do cálculo diferencial, bem como co-descobridor da geometria analítica. Evidentemente Fermat não tinha o conceito de limite, mas por outro lado seu método para máximos e mínimos se assemelha ao usado no Cálculo hoje, só que agora se usa em geral o símbolo h ou Δx em lugar do E de Fermat. O processo de Fermat de mudar ligeiramente a variável e considerar valores vizinhos é a essência da análise infinitesimal.

Durante os anos em que Fermat estava desenvolvendo sua geometria analítica, ele descobriu também como aplicar seu processo de valores vizinhos para achar a tangente a uma curva algébrica da forma $y = f(x)$. Se P é um ponto da curva $y = f(x)$ em que se procura a tangente, e se as coordenadas de P são (a, b), então um ponto vizinho da curva com coordenadas $x = a + E$, $y = f(a + E)$ estará tão perto da tangente que se pode pensar nele como estando aproximadamente também sobre a tangente. Portanto se a subtangente no ponto P é $TQ = c$ (Fig. 17.4), os triângulos TPQ e $TP'Q'$ podem ser considerados praticamente semelhantes. Portanto tem-se a proporção

$$\frac{b}{c} = \frac{f(a + E)}{c + E}.$$

Multiplicando em cruz, cancelando termos semelhantes, lembrando que $b = f(a)$, então dividindo tudo por E e finalmente pondo E 0, acha-se facilmente a subtangente c.

[4]Veja Fermat, *Oeuvres*, I, 186-187

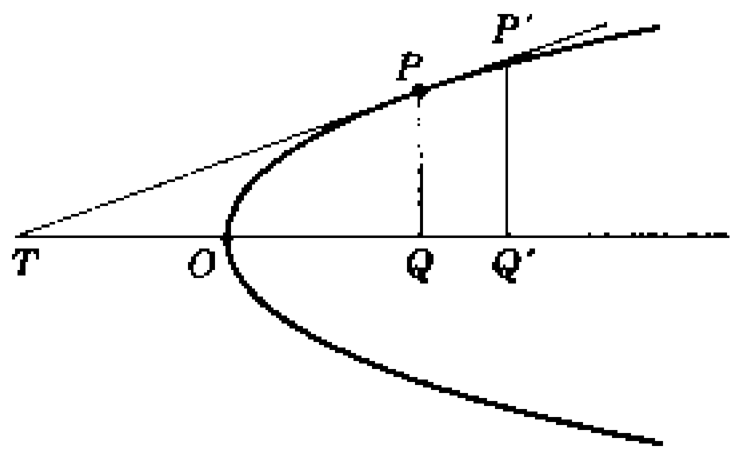


Figura 17.4

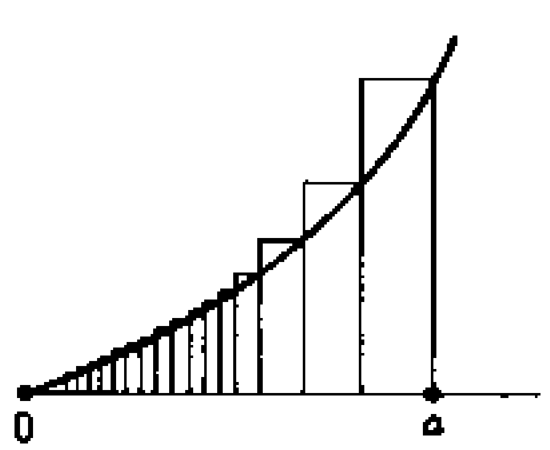


Figura 17.5

O processo de Fermat equivale a dizer que

$$\lim_{E \to 0} \frac{f(a+E)-f(a)}{E}$$

é a inclinação da tangente em $x = a$; mas Fermat não explicou satisfatoriamente seu processo, dizendo simplesmente que era semelhante ao seu método para máximos e mínimos. Descartes, em particular, quando o método lhe foi exposto por Mersenne, atacou-o como não sendo válido em geral. Ele propôs como um desafio a curva, a partir daí conhecida como "folium de Descartes", — $x^3 + y^3 = 3axy$. Que os matemáticos do tempo desconheciam coordenadas negativas fica aparente pelo fato de a curva ser desenhada como um simples *folium* ou "folha" no primeiro quadrante — ou às vezes como um trevo de quatro folhas, com uma folha em cada quadrante! Finalmente, de má vontade, Descartes reconheceu a validade do método de tangentes de Fermat, mas a Fermat nunca foi dada a apreciação que merecia.

14 Mersenne, por correspondência e em suas próprias obras publicadas, tornou conhecidos na França e na Itália alguns dos resultados de Fermat, mas teria sido muito melhor se Fermat tivesse publicado suas maravilhosas descobertas. Fermat não só tinha um método para achar a tangente de curvas da forma $y = x^m$, mas também, algum tempo depois de 1629 chegou a um teorema sobre a área sob essas curvas — o teorema que Cavalieri publicou em 1635 e 1647. Para achar a área Fermat a princípio parece ter usado fórmulas para as somas das potências dos inteiros, ou desigualdades da forma

$$1^m + 2^m + 3^m + \dots + n^m > \frac{n^{m+1}}{m+1} > 1^m + 2^m + 3^m + \dots + (n-1)^m,$$

para estabelecer o resultado para todos os valores inteiros positivos de m. Isso já era um progresso sobre a obra de Cavalieri, que se limitou aos casos de $m = 1$ até $m = 9$; mas mais tarde Fermat desenvolveu um método melhor para tratar o problema[5], que se aplicava a valores tanto fracionários quanto inteiros de m. Seja a curva $y = x^n$ e suponhamos que se procura a área sob a curva desde $x = 0$ até $x = a$. Então Fermat subdividia o intervalo desde $x = 0$ até $x = a$ em uma infinidade de subintervalos tomando os pontos com abscissa $a, aE, aE^2, aE^3, \dots$ onde E é uma quantidade menor que um. Nesses pontos ele levantava ordenadas da curva e depois aproximava a área sob a curva por meio de retângulos (como se indica na Fig. 17.5). As áreas dos retângulos circunscritos de aproximação, a começar do maior, são dados pelos termos em progressão geométrica $a^n(a - aE)$, $a^nE^n(aE - aE^2)$, $a^nE^{2n}(aE^2 - aE^3), \dots$ A soma a infinito desses termos é

$$\frac{a^{n+1}(1-E)}{1-E^{n+1}} \quad \text{ou} \quad \frac{a^{n+1}}{1+E+E^2+\dots+E^n}.$$

Quando E tende a um — isto é, os retângulos se tornam cada vez mais estreitos — a soma das áreas dos retângulos se aproxima da área sob a curva. Fazendo $E = 1$ na fórmula acima para a soma dos retângulos obtemos $(a^{n+1})/(n+1)$, a área procurada sob a curva $y = x^n$ desde $x = 0$ até $x = a$. Para mostrar que isso vale para valores racionais

[5]Veja Fermat, *Oeuvres*, I, 255-288; III, 216-240

fracionários, p/q, tomemos $n = p/q$. A soma da progressão geométrica é então

$$a^{(p+q)/q}\left(\frac{1-E^q}{1-E^{p+q}}\right) = a^{(p+q)/q}\left(\frac{1+E+E+\dots+E^{q-1}}{1+E+E^2+\dots+E^{p+q-1}}\right)$$

e quando $E = 1$ isso fica

$$\frac{q}{p+q}\,a^{(p+q)/q}.$$

Se, em notação moderna, queremos obter $\int_a^b x^n\,dx$ basta observar que isso é $\int_0^b x^n\,dx - \int_0^a x^n$ de x.

Para valores negativos de n (exceto $n = -1$) Fermat usava um processo semelhante, só que E é tomado como maior que um e se aproxima de um por cima, a área encontrada sendo a que se acha sob a curva desde $x = a$ até infinito. Para achar $\int_a^b x^{-n}\,dx$, então, bastava observar que isso é $\int_a^\infty x^{-n}\,dx - \int_b^\infty x^{-n}\,dx$.

15 Para $n = -1$ o processo falha; mas o contemporâneo mais velho de Fermat, Gregório de St. Vincent (1584-1667) resolveu esse caso em seu *Opus geometricum quadraturae circuli et sectionum coni* (Obra geométrica sobre a quadratura do círculo e de secções cônicas). Grande parte dessa obra tinha sido completada antes de Fermat trabalhar com tangentes e áreas, talvez entre 1622-1625, embora não fosse publicado até 1647. Gregório de St. Vincent, nascido em Ghent, era um professor jesuita em Roma e Praga e mais tarde tornou-se professor na corte de Filipe IV de Espanha. Em suas viagens ele se separou de seus papéis e em conseqüência o aparecimento da *Opus geometricum* se atrasou muito. Nesse tratado Gregório mostrara que se ao longo do eixo x marca-se a partir de $x = a$ pontos tais que os intervalos entre eles crescem em progressão geométrica, e se nesses pontos levantam-se ordenadas da hipérbole $xy = 1$, então as áreas sob a curva interceptadas entre ordenadas sucessivas são iguais. Isto é, ao passo que a abscissa cresce geometricamente a área sob a curva cresce aritmeticamente. Assim o equivalente de $\int_a^b x^{-1}\,dx = \ln b - \ln a$ era conhecido de Gregório e seus contemporâneos. Infelizmente uma aplicação errada do método dos indivisíveis levara Gregório de St. Vincent a acreditar que tinha quadrado o círculo, erro que prejudicou sua reputação.

Fermat se ocupara de muitos aspectos da análise infinitesimal — tangentes, quadraturas, volumes, comprimentos de curvas, centros de gravidade. Dificilmente poderia deixar de notar que ao achar tangentes a $y = kx^n$ multiplica-se o coeficiente pelo expoente e abaixa-se o expoente de uma unidade, ao passo que ao achar áreas aumenta-se o expoente e divide-se pelo novo expoente. Poderia a natureza inversa desses dois problemas ter-lhe escapado? Embora isso seja improvável, no entanto ao que parece em lugar nenhum ele chamou a atenção para a relação que hoje se chama o teorema fundamental do cálculo. Talvez ele tenha percebido a natureza inversa dos problemas mas não tenha visto grande significado nisso. A integração de x^n, a única função que ele realmente considerou, era, afinal, quase tão fácil para ele quanto a diferenciação — e cronologicamente, ao menos para valores positivos inteiros de n, a integração pode ter precedido a diferenciação na obra de Fermat. Assim também na obra de Gregório de St. Vincent o cálculo integral veio antes do diferencial para a função logarítmica.

A relação inversa entre problemas de área e tangente deveria ter sido aparente de uma comparação da área sob a hipérbole achada por St. Vincent com a análise feita por Descartes dos problemas inversos sobre tangentes propostos via Mersenne em 1638. Esses problemas tinham sido propostos por Florimond Debeaune (1601-1652), um jurista em Blois que também era um bom matemático, admirado até por Descartes. Um dos problemas pedia a determinação de uma curva cuja tangente tivesse a propriedade agora expressa pela equação diferencial $a\,dy/dx = x - y$. Descartes percebeu que a solução era não-algébrica, mas evidentemente não percebeu que envolvia logaritmos[6].

[6]Veja C. J. Scriba, "Zur Lösung des 2. Debeauneschen Problems durch Descartes", *Archive for History of Exact Sciences*, 1, (1961), 406-419

16 As contribuições de Fermat à geometria analítica e à análise infinitesimal foram apenas dois dos aspectos de sua obra — e provavelmente não seus tópicos favoritos. Em 1621 a *Arithmetica* de Diofante tinha sido ressuscitada mais uma vez pela edição grega e latina por Claude Gaspard de Bachet (1591-1639), um membro do grupo informal de cientistas em Paris. A *Arithmetica* de Diofante não era desconhecida pois Regiomontanus pensara em imprimi-la; várias traduções apareceram durante o século dezesseis, com pouco resultado para a teoria dos números. Talvez a obra de Diofante fosse muito pouco prática para os praticantes e muito algorítmica para os de inclinação especulativa; mas atraiu fortemente Fermat, que se tornou o fundador da moderna teoria dos números. Muitos aspectos do assunto apelaram à sua imaginação, inclusive os números perfeitos e amigáveis, números figurados, quadrados mágicos, triadas de Pitágoras, divisibilidade, e acima de tudo, números primos. Alguns de seus teoremas ele provou por um método que denominou sua "descida infinita" — uma espécie de indução ao contrário, processo que Fermat foi dos primeiros a usar. Como ilustração de seu processo vamos aplicá-lo a um velho e familiar problema — a prova de que $\sqrt{3}$ não é racional. Suponhamos que $\sqrt{3} = a_1/b_1$, onde a_1 e b_1 são inteiros positivos com $a_1 > b_1$. Como

$$\frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{2},$$

substituindo a primeira $\sqrt{3}$ por a_1/b_1 temos

$$\sqrt{3} = \frac{3b_1 - a_1}{a_1 - b_1}.$$

Da desigualdade $3/2 < a_1/b_1 < 2$ é claro que $3b_1 - a_1$ e $a_1 - b_1$ são inteiros positivos. a_2 e b_2, cada um menor que a_1 e b_1 respectivamente, e tais que $\sqrt{3} = a_2/b_2$. Esse raciocínio pode ser repetido indefinidamente, levando a uma descida infinita em que a_n e b_n são inteiros cada vez menores tais que $\sqrt{3} = a_n/b_n$. Isso leva à conclusão falsa de que não existe um menor inteiro. Portanto a premissa de $\sqrt{3}$ ser um quociente de inteiros é falsa.

Usando seu método Fermat conseguiu provar a afirmação de Girard de que todo número primo da forma $4n + 1$ pode ser escrito de uma e uma só maneira como soma de dois quadrados. Mostrou que se $4n + 1$ não é a soma de dois quadrados, há sempre um inteiro menor dessa forma que não é a soma de dois quadrados. Usando essa relação recursiva para traz chega-se à falsa conclusão de que o menor inteiro desse tipo, 5, não é a soma de dois quadrados (ao passo que $5 = 1^2 + 2^2$). Portanto o teorema geral fica provado. Como é fácil provar que nenhum inteiro da forma $4n - 1$ pode ser a soma de dois quadrados e como todos os primos exceto 2 são da forma $4n + 1$ ou $4n - 1$ pelo teorema de Fermat pode-se facilmente classificar os números primos em números que são ou não somas de dois quadrados. O primo 23, por exemplo, não pode ser assim dividido, ao passo que o primo 29 pode ser escrito como $2^2 + 5^2$. Fermat sabia que um primo de qualquer das duas formas pode ser expresso como diferença de dois quadrados de uma e uma só maneira.

17 Fermat usou seu método para provar que nenhum cubo é soma de dois cubos — isto é, que não existem inteiros positivos x, y, z tais que $x^3 + y^3 = z^3$. Indo além, Fermat enunciou a proposição geral que para n um inteiro maior que dois não há valores inteiros positivos x, y, z tais que $x^n + y^n = z^n$. Escreveu na margem de seu exemplar do Diofante de Bachet que tinha uma prova verdadeiramente maravilhosa desse célebre teorema, que a partir daí se tornou conhecido como "último" ou "grande" teorema de Fermat. Fermat, infelizmente, não deu sua prova, descrevendo-a apenas como tal que "essa margem é demasiado estreita para contê-la". Se Fermat tinha realmente essa prova, permaneceu perdida até hoje. Apesar de todos os esforços para encontrar uma prova, estimulados por um prêmio de pré-Primeira Guerra Mundial, de 100 000 marcos, para uma solução, o problema ainda não foi resolvido. No entanto, a procura de soluções levou a ainda mais matemática boa que aquela que na antiguidade resultou de esforços para resolver os três

problemas geométricos clássicos e insolúveis. Como os três príncipes de Serendip de Horace Walpole, os matemáticos parecem ter o dom de encontrar pelo caminho coisas agradáveis que não procuravam.

Se Fermat estava certo ou não ao enunciar seu "grande" teorema não se sabe ainda, mas chegou-se a decisão sobre duas outras conjeturas em teoria dos números. Talvez dois milênios antes de seu tempo tenha havido uma "hipótese chinesa" que dizia que n é primo se e só se $2^n - 2$ é divisível por n, onde n é um inteiro maior que um.

Metade dessa conjetura sabe-se hoje ser falsa, pois $2^{341} - 2$ é divisível por 341, e $341 = 11 \cdot 31$ é composto; mas a outra metade é verdadeira, e o "pequeno" teorema de Fermat é uma generalização disso. Uma consideração de muitos casos de números da forma $a^{p-1} - 1$, inclusive $2^{36} - 1$, sugeriu que sempre que p é primo e a é primo com p, então $a^{p-1} - 1$ é divisível por p. Baseado numa indução sobre apenas cinco casos ($n = 0, 1, 2, 3$ e 4) Fermat formulou uma segunda conjetura — que os inteiros da forma $2^{2^n} + 1$, agora conhecidos como "números de Fermat", são sempre primos. Euler um século mais tarde mostrou que essa conjetura é falsa, pois $2^{2^5} + 1$ é composto. Na verdade hoje se sabe que $2^{2^n} + 1$ *não* é primo para n entre cinco e dezesseis inclusive, e começamos a nos perguntar se existe algum outro número de Fermat primo além daqueles que Fermat conhecia[7].

O pequeno teorema de Fermat teve melhor destino que sua conjetura sobre números de Fermat primos. Uma prova do teorema foi deixada em manuscrito por Leibniz, e outra demonstração elegante e elementar foi publicada por Euler em 1736. A prova de Euler faz uso engenhoso da indução matemática, método que Fermat, tanto quanto Pascal, conhecia bem. Na verdade, a indução matemática, ou raciocínio por recorrência, às vezes é chamada "indução de Fermat" para distingui-la da indução científica ou "de Bacon". (Também se chama às vezes a primeira a indução "completa", a segunda a "incompleta".)

18 Fermat foi verdadeiramente "o príncipe dos amadores" em matemática. Nenhum matemático profissional de seu tempo fez maiores descobertas ou contribuiu mais para o assunto; no entanto Fermat era tão modesto que quase nada publicou. Contentava-se em escrever a Mersenne sobre suas idéias (incidentalmente o nome de Mersenne se preservou em conexão com os "números de Mersenne", isto é, primos da forma $2^p - 1$) e assim perdeu a atribuição de prioridade para muito de sua obra. Quanto a isso ele partilhou do destino de um de seus amigos e contemporâneos mais capazes — o pouco amigável professor Roberval, um membro do "grupo de Mersenne" e o único matemático verdadeiramente profissional entre os franceses que discutimos neste capítulo. A designação para a cátedra de Ramus no Collège Royal, que Roberval teve durante cerca de quarenta anos, era determinada cada três anos em base num exame competitivo, cujas questões eram postas pelos detentores. Em 1634, Roberval ganhou o concurso, provavelmente porque havia desenvolvido um método de indivisíveis semelhante ao de Cavalieri; não revelando seu método a outros, conseguiu conservar sua posição na cátedra até sua morte em 1675. Mas isso significou que ele não recebia reconhecimento pela maior parte de suas descobertas e que ele se envolvia em querelas numerosas a propósito de prioridades. A mais amarga dessas controvérsias foi referente à ciclóide, curva a que veio a ser aplicada a frase "a Helena dos geômetras" por causa da freqüência com que provocou querelas durante o século dezessete.

Mersenne em 1615 tinha chamado a atenção dos matemáticos para a ciclóide, tendo talvez ouvido falar da curva através de Galileu; em 1628, quando Roberval chegou a Paris, Mersenne propôs ao jovem que estudasse a curva. Em 1634 Roberval pôde provar que a área sob um arco da curva é exatamente três vezes a área do círculo gerador. Em 1638 ele tinha descoberto como traçar a tangente à curva em qualquer ponto (problema resolvido ao mesmo tempo também por Fermat e Descartes) e tinha achado o volume gerado quando a área sob um arco gira em torno da reta de base. Mais tarde ainda achou

[7] W. Sierpinski, "L'induction incomplète dans la théorie des nombres", *Scripta Mathematica*, **28** (1967), 5-13

os volumes gerados por revolução da área em torno do eixo de simetria ou em torno da tangente no vértice[8].

19 Roberval não publicou suas descobertas relativas à ciclóide (que ele denominou a "trochoide", da palavra grega para roda) porque pode ter desejado propor questões semelhantes aos possíveis candidatos à sua cátedra. Enquanto isso Torricelli se interessou pela ciclóide, talvez por sugestão de Mersenne, talvez através de Galileu, a quem Torricelli, como Mersenne, admirava grandemente. Em 1643 Torricelli enviou a Mersenne a quadratura de ciclóide, e em 1644 ele publicou uma obra intitulada *De parabole* em que incluiu tanto a quadratura da ciclóide quanto a construção da tangente. Torricelli não mencionou o fato de Roberval ter chegado a esses resultados antes dele, e por isso em 1646 Roberval escreveu uma carta acusando Torricelli de plágio, dele e de Fermat (sobre máximos e mínimos). É claro agora que a prioridade na descoberta cabe a Roberval, mas a prioridade na publicação é de Torricelli, que provavelmente redescobriu a área e a tangente independentemente. Roberval usara o método dos indivisíveis para o problema da área; Torricelli deu duas quadraturas, uma usando o método de Cavalieri dos indivisíveis e a outra pelo antigo método de exaustão. Para achar a tangente à curva os dois homens empregaram uma composição de movimentos reminiscente de Arquimedes quanto à tangente à espiral. Roberval pensou num ponto P sobre a ciclóide como sujeito a dois movimentos iguais, um de translação, outro de rotação. Quando o círculo gerador rola sobre a reta de base AB (Fig. 17.6), P é carregado horizontalmente, ao mesmo tempo que gira em torno de O, o centro do círculo. Portanto por P traça-se a horizontal PS, para o movimento de translação, e uma reta PR tangente ao círculo gerador, para a componente de rotação. Como o movimento de translação é igual ao de rotação, a bissetriz PT do ângulo SPR é a tangente à ciclóide.

A idéia da composição de movimentos não era original de Roberval, pois Arquimedes, Galileu, Descartes e outros a tinham usado. Torricelli poderia ter derivado a idéia de qualquer desses homens; portanto sua aplicação do princípio à ciclóide não precisa ter sido plágio de Roberval. Tanto Torricelli quanto Roberval aplicaram o método cinemático a outras curvas também. Um ponto sobre a parábola, por exemplo, se afasta do foco com a mesma velocidade com que se afasta da diretriz, portanto a tangente será a bissetriz do ângulo entre retas nessas duas direções. Um argumento semelhante vale para a elipse, em que o movimento para longe de um foco iguala o movimento em direção ao outro. Torricelli usou também o método de Fermat de tangentes para as parábolas de grau superior, método que se sabe ter-se tornado conhecido na Itália[9].

20 As obras de Roberval e Torricelli contêm muitos resultados excelentes, dos quais só podemos mencionar uns poucos. Entre as contribuições de Roberval está o primeiro esboço, em 1635, de um arco de uma sinusóide. Isso é uma importante indicação de que a trigonometria gradualmente se afastava da ênfase computacional, que tinha dominado o trabalho nesse ramo, caminhando para a ênfase no tratamento funcional. Com seu método

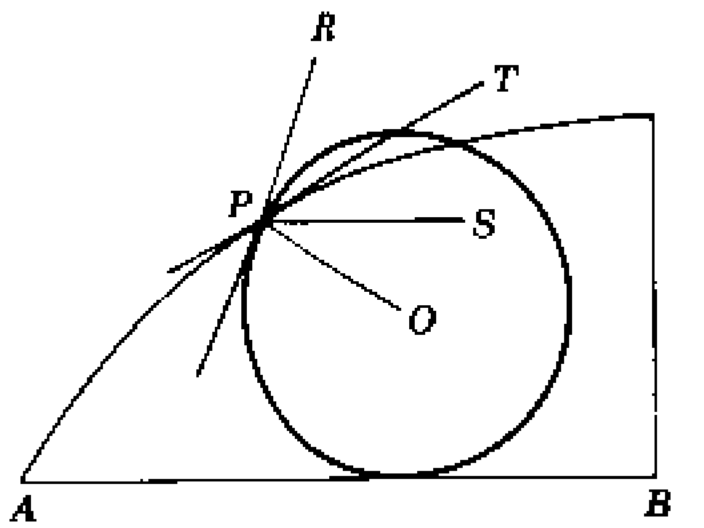


Figura 17.6

[8]Uma excelente exposição de toda essa obra e sobre o lugar de Roberval na matemática do tempo se encontra em Evelyn Walker. *A Study of the Traité des Indivisibles of Gilles Persone de Roberval* (1932)

[9]Não há uma boa exposição em inglês da obra de Torricelli, mas certos aspectos dela, especialmente tangentes, são bem tratados em Evelyn Walker, *A Study of the Traité des Indivisibles of Gilles Persone de Roberval*. Para outros aspectos ver Torricelli, *Opere* (1919-1944)

dos indivisíveis Roberval conseguiu provar o equivalente de $\int_a^b \operatorname{sen} x\,dx = \cos a - \cos b$, novamente indicando que os problemas de área na época pareciam mais fáceis de tratar que as questões sobre tangentes. Roberval e Torricelli, trabalhando independentemente mas em direções notavelmente semelhantes, estenderam a comparação feita por Cavalieri entre a parábola e a espiral considerando o comprimento de arco além da área. Na década de 1640-50 eles mostraram que o comprimento da primeira volta da espiral $r = a\theta$ é igual ao comprimento da parábola $x^2 = 2ay$ desde $x = 0$ até $x = 2\pi a$. O interesse pela espiral na época pode ter resultado de correspondência entre Galileu e Mersenne relativamente à trajetória de um objeto em queda livre numa terra que gira, mas a discussão logo se ampliou grandemente. Fermat, sempre pronto a procurar generalizações, introduziu as espirais de grau superior $r^n = a\theta$ e comparou os arcos delas com os de suas parábolas de grau superior $x^{n+1} = 2ay$. Torricelli estudou espirais de vários tipos, descobrindo a retificação da espiral logarítmica, como vimos. Havia uma notável unidade nos interesses matemáticos da época entre 1630 e 1650, em parte atribuível à intercomunicação através de Mersenne. Os problemas envolvendo infinitésimos eram de longe os mais populares na época, e Torricelli, em particular, se deliciava com eles. No *De dimensione parabolae*, por exemplo, Torricelli deu vinte e uma provas diferentes da quadratura da parábola, usando métodos com uso de indivisíveis e de exaustão mais ou menos em igual número. Um na primeira categoria é quase idêntico à quadratura mecânica dada por Arquimedes em seu *Método*, presumivelmente não existente então; como se poderia prever, um na segunda categoria é praticamente o dado no tratado de Arquimedes *Sobre a quadratura da parábola*, existente e bem conhecido na época. Se Torricelli tivesse aritmetizado seus processos nessa questão teria chegado muito perto do conceito moderno de limite, mas ele permaneceu sob a influência pesadamente geométrica de Cavalieri. No entanto, Torricelli foi muito mais longe que seu mestre no uso flexível de indivisíveis para chegar a novas descobertas.

Um resultado novo de 1641 que muito agradou a Torricelli foi sua prova de que se uma área infinita, tal como a limitada pela hipérbole $xy = a^2$, uma ordenada $x = b$, e o eixo das abscissas, é girada em torno do eixo x o volume do sólido gerado pode ser finito. Torricelli acreditava ser o primeiro a descobrir que uma figura de dimensões infinitas pode ter grandeza finita; mas nisso pode ser que Fermat se tenha antecipado a ele, em sua obra sobre as áreas sob as hipérboles de grau superior, ou possivelmente Roberval, e certamente Oresme no século quatorze.

Entre os problemas que Torricelli considerou logo antes de sua morte prematura em 1647 estava um em que ele esboçou a curva cuja equação escreveríamos como $x = \log y$ — talvez o primeiro gráfico de uma função logarítmica, trinta anos após a morte do descobridor dos logaritmos como artifício computacional. Torricelli achou a área limitada pela curva, sua assíntota, e uma ordenada, bem como o volume do sólido obtido por evolução da área em torno do eixo x.

Torricelli foi um dos mais promissores matemáticos do século dezessete — século freqüentemente chamado o do gênio. Mersenne tornara a obra de Fermat, Descartes e Roberval conhecida na Itália, tanto por sua correspondência com Galileu a partir de 1635 como durante uma peregrinação a Roma em 1644; Torricelli logo dominou os novos métodos, embora sempre desse preferência ao tratamento geométrico em relação ao algébrico. A breve associação de Torricelli com o idoso e cego Galileu de 1634 a 1642 tinha despertado no jovem estudante também o interesse pela física, e hoje ele é talvez mais lembrado como inventor do barômetro que como matemático. Ele estudou as trajetórias parabólicas dos projéteis disparados de um ponto com velocidades iniciais fixas mas ângulos de elevação variáveis, verificando que a envoltória das parábolas é outra parábola.

Ao passar de uma equação para a distância em termos de tempo para a da velocidade como função do tempo, e inversamente, Torricelli percebeu o caráter inverso dos problemas de quadratura e tangente. Se tivesse vivido mais é possível que se tornasse o inventor do cálculo; mas sua vida terminou prematuramente em Florença poucos dias antes de completar trinta e nove anos.

21 Os grandes desenvolvimentos da matemática durante os dias de Descartes e Fermat foram na geometria analítica e na análise infinitesimal. É provável que o próprio sucesso desses ramos fizesse com que os homens da época esquecessem um pouco outros aspectos da matemática. Já vimos que Fermat não encontrou quem partilhasse sua fascinação com a teoria dos números; também a geometria pura sofreu um abandono totalmente imerecido no mesmo período. *As cônicas* de Apolônio tinham sido uma das obras favoritas de Fermat, mas os métodos analíticos modificaram seu ponto de vista. Enquanto isso *As cônicas* tinham chamado a atenção de um homem prático com uma imaginação muito pouco prática — Girard Desargues, um arquiteto e engenheiro militar de Lyons. Durante alguns anos Desargues estivera em Paris, onde pertencia ao grupo de matemáticos que estivemos considerando; mas seu ponto de vista muito pouco ortodoxo sobre o papel da perspectiva na arquitetura e geometria encontrou pouca simpatia, e ele voltou a Lyons para trabalhar em seu novo tipo de matemática quase sozinho. O resultado foi um dos grandes livros menos bem sucedidos de todos os tempo. Mesmo o título pomposo era repulsivo — *Brouillon projet d'une atteinte aux événements des rencontres d'un cone avec un plan* (Paris 1639). Isso pode ser traduzido como "Esboço tosco de uma tentativa de tratar o resultado de um encontro entre um cone e um plano", título de uma falta de gosto que contrasta com a brevidade e simplicidade de *As cônicas* de Apolônio. Mas a idéia em que se baseia a obra de Desargues é a essência da simplicidade — derivada da perspectiva na arte da Renascença e do princípio de continuidade de Kepler. Todos sabem que um círculo, olhado obliquamente, aparece como uma elipse, ou que o contorno da sombra de um quebra-luz será um círculo ou uma hipérbole conforme esteja projetada no teto ou numa parede. As formas e tamanhos mudam conforme o plano de incidência que corta o cone de raios visuais ou raios de luz; mas certas propriedades permanecem as mesmas em todas essas mudanças, e foram essas propriedades que Desargues estudou. Primeiro, uma secção cônica continua sendo uma secção cônica, não importa quantas vezes é projetada. As cônicas formam uma única família de parentes próximos, como Kepler sugerira por razões um tanto diferentes. Mas ao aceitar esse ponto de vista Desargues tinha que supor, com Kepler, que a parábola tem um foco "no infinito" e que retas paralelas se encontram "num ponto no infinito". A teoria da perspectiva torna plausíveis essas idéias, pois a luz do Sol é ordinariamente considerada como formada de raios paralelos — formando um cilindro ou feixe de raios paralelos — ao passo que os raios de uma fonte de luz terrestre são tratados como um cone ou feixe de um ponto. O cilindro é simplesmente um cone com vértice no infinito, e um feixe de retas paralelas é simplesmente uma família de retas que passam todas pelo mesmo ponto no infinito. De modo semelhante Desargues estudou um feixe de planos por um ponto, finito ou infinito.

22 O tratamento dado por Desargues às cônicas é muito belo, embora sua linguagem não seja convencional. Ele chama uma secção cônica de "golpe de rolo" (isto é, incidência com um rolo de amassar). Quase o único termo introduzido por ele que ficou é "involução" — isto é, pares de pontos de uma reta cujo produto das distâncias a um ponto fixo é constante. Chamou os pontos em divisão harmônica uma involução de quatro pontos, e mostrou que essa configuração é um invariante projetivo, resultado conhecido por Papus, sob um ponto de vista diferente. Por causa de suas propriedades harmônicas o quadrângulo completo desempenhou um papel importante no tratamento de Desargues, pois ele sabia que quando um tal quadrângulo (como *ABCD* na Fig. 17.7) é inscrito numa cônica, a reta por dois dos pontos diagonais (*E*, *F* e *G* na Fig. 17.7) é a reta polar, com relação à cônica, do terceiro ponto diagonal. Ele sabia, é claro, que as intersecções com a cônica da polar de um ponto com relação à cônica eram os pontos de contato das tangentes do ponto à cônica; e em vez de definir um diâmetro metricamente, Desargues introduziu-o como polar de um ponto no infinito. Há uma agradável unidade no tratamento dado por Desargues às cônicas por métodos projetivos, mas era uma ruptura demasiado completa com o passado para ser aceita.

A geometria projetiva de Desargues tinha uma enorme vantagem em generalidade sobre a geometria métrica de Apolônio, Descartes e Fermat, pois muitos casos especiais de um teorema se juntam num enunciado geral. No entanto os matemáticos da época não só não aceitaram os métodos da nova geometria, como se opuseram ativamente a eles, considerando-os perigosos e mal fundamentados. Eram tão raros os exemplares do *Brouillon projet* de Desargues que pelo fim do século todos haviam desaparecido, pois Desargues publicava suas obras não para vendê-las mas para dá-las aos amigos. A obra ficou completamente perdida até que em 1847 uma cópia à mão feita por Philippe de Lahire, um dos poucos admiradores de Desargues, foi encontrada numa biblioteca em Paris. Parte do abandono sofrido pela geometria projetiva é culpa do próprio Desargues, pois escrevia de modo difícil e pouco convencional. Não escrevia para estudiosos profissionais, que poderiam ter seguido seus vôos de imaginação, mas para mecânicos e matemáticos práticos, que não compreenderam o sentido de sua obra. Além disso ele usava um vocabulário novo e estranho, cheio de termos tirados da botânica, terminologia que desagradava tanto aos eruditos quanto aos praticantes. Além disso, o ponto de vista projetivo não estava em acordo com o tempo, que celebrava os triunfos na álgebra e na análise. Descartes, que conhecera Desargues em Paris em 1626 e esteve com ele em 1628 no sítio de La Rochelle, sempre teve alta estima por seu amigo não-conformista; mas até Descartes quando ouviu dizer que o *Brouillon projet* trataria de secções cônicas sem usar álgebra ficou desanimado. Não parecia possível dizer algo sobre cônicas que não fosse mais fácil de se exprimir com álgebra do que sem[10]. O prestígio da álgebra era tal que por quase dois séculos a beleza da geometria projetiva passou despercebida. Mesmo hoje o nome de Desargues é familiar não por ser o autor do *Brouillon projet* mas por uma proposição que não aparece no livro, o famoso teorema de Desargues:

> Se dois triângulos estão colocados de tal maneira que as retas que unem os pares de vértices correspondentes são concorrentes, então os pontos de intersecção de pares de lados correspondentes são colineares, e reciprocamente.

Esse teorema[11], que vale tanto em duas quanto em três dimensões, foi publicado primeiro em 1648 pelo amigo dedicado e admirador de Desargues, Abraham Bosse (1611-1678), um gravador. Aparece num livro com o título *Manière universelle de S. Desargues pour pratiquer la perspective*. O teorema, que Bosse atribui explicitamente a Desargues, no século dezenove tornou-se uma das proposições fundamentais da geometria projetiva. É interessante notar que embora em três dimensões o teorema seja uma conseqüência simples do axioma de incidência, a prova para duas dimensões requer uma hipótese adicional.

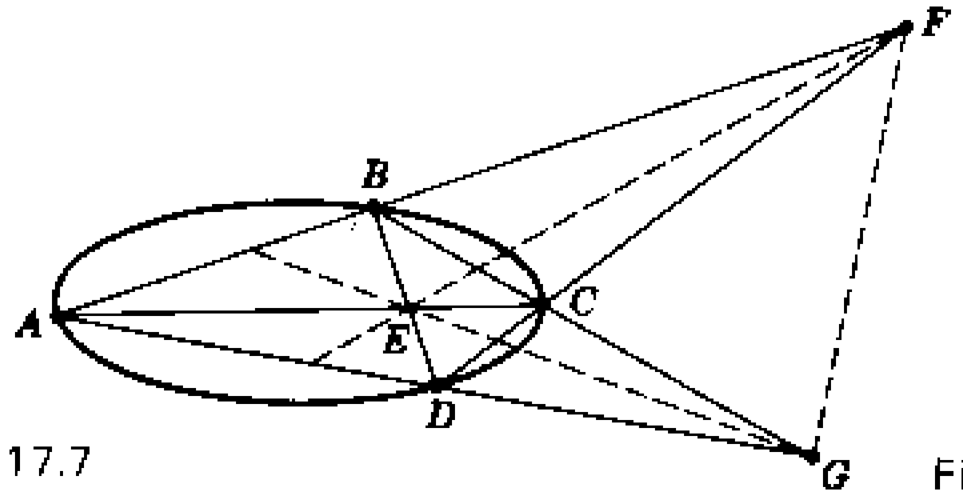


Figura 17.7

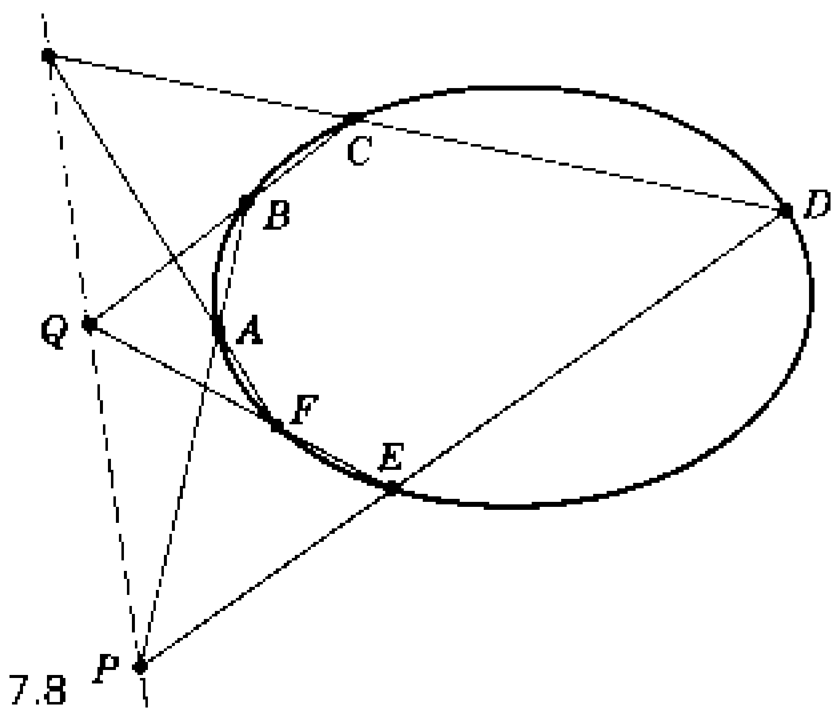


Figura 17.8

[10]Veja W. M. Ivins Jr., "A Note on Girard Desargues", *Scripta Mathematica*, **9** (1943), 33-48. Embora as obras de Desargues não fossem traduzidas para o inglês, existem exposições nessa língua. Veja, por exemplo, J. L. Coolidge, *A History of Geometrical Methods* (1940)

[11]Veja N. A. Court, "Desargues and his Strange Theorem", *Scripta Mathematica* **20** (1954), 5-13, 155-164

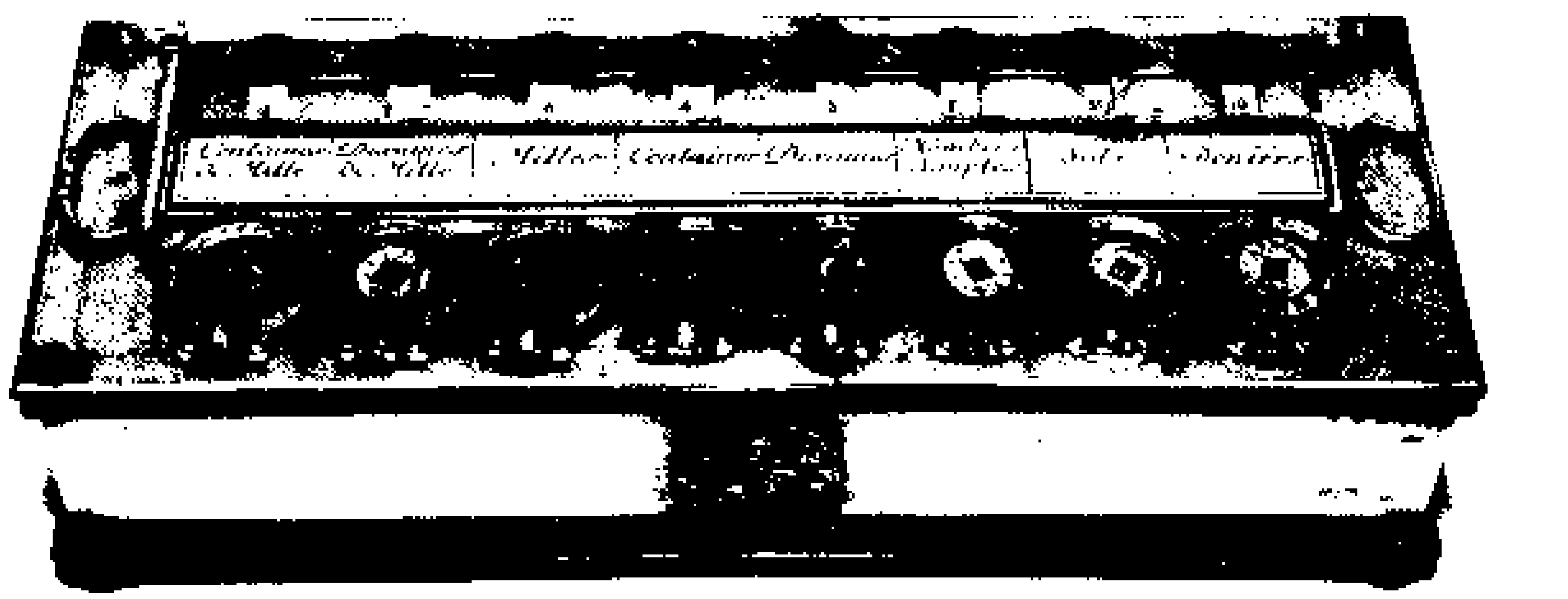
23 Desargues foi o profeta de geometria projetiva, mas não foi reconhecido em seu tempo, em grande parte porque seu discípulo mais promissor, Blaise Pascal, abandonou a matemática pela teologia. Pascal foi um prodígio matemático. Seu pai, também, tinha inclinação para a matemática, e o "limaçon de Pascal" deve o nome ao pai, Etienne, não ao filho, Blaise. O limaçon $r = a + b \cos \theta$ era chamado por Jordanus Nemorarius, e possivelmente pelos antigos, "a conchóide do círculo", mas Etienne Pascal estudou a curva tão completamente que, por sugestão de Roberval, a partir daí ela leva seu nome. Dizem que a princípio ele não deu livros de matemática a seu filho Blaise para encorajá-lo a desenvolver outros interesses, mas aos doze anos o menino mostrou tal talento geométrico que a partir daí sua inclinação foi encorajada.

Aos quatorze anos Blaise, com seu pai, participou das reuniões informais da Academia de Mersenne em Paris. Aqui ele veio a conhecer as idéias de Desargues; dois anos depois, em 1640, o jovem Pascal, então com dezesseis anos, publicou um *Essay pour les coniques*. Consistia de uma só página impressa — mas uma das mais fecundas da história. Continha a proposição, descrita pelo autor como *mysterium hexagrammicum*, que a partir daí foi chamada teorema de Pascal. Este diz, em essência, que os lados opostos de um hexágono inscrito numa cônica se cortam em três pontos colineares. Pascal não enunciou o teorema assim, pois não é verdadeiro a não ser que, como no caso de um hexágono regular inscrito num círculo, se recorra aos pontos e retas ideais da geometria projetiva. Em vez disso ele usou a linguagem especial de Desargues, dizendo que se A, B, C, D, E e F são vértices sucessivos de um hexágono numa cônica, e se P é a intersecção de AB e DE e Q é a intersecção de BC e EF (Fig. 17.8) então PQ e CD e FA são retas "da mesma ordem" (ou, como diríamos, as retas pertencem a um mesmo feixe, seja de um ponto seja um feixe paralelo).

O jovem Pascal prosseguiu dizendo que tinha deduzido muitos corolários desse teorema, inclusive a construção da tangente a uma cônica num ponto da cônica. (A construção da tangente num ponto P sobre a cônica é fácil se lembrarmos que a tangente é uma reta por dois "pontos consecutivos" e aplicarmos o teorema de Pascal a esses e quatro outros pontos quaisquer sobre a cônica.) A inspiração para o pequeno *Essay* foi francamente admitida, pois depois de citar um teorema de Desargues o jovem autor escreveu, "Gostaria de dizer que devo o pouco que descobri sobre esse assunto a seus escritos".

O *Essay* era um começo auspicioso para uma carreira matemática, mas o interesse matemático de Pascal variava como um camaleão.

Quando tinha cerca de dezoito anos dedicou-se a planejar uma máquina de calcular, e nos anos seguintes ele construiu e vendeu umas cinqüenta máquinas. Então em 1648 Pascal se interessou pela hidrostática, e o resultado foi a célebre experiência em Puy-de-Dôme confirmando o peso do ar e a experiência sobre pressão dos fluidos que esclareceu o paradoxo hidrostático. Em 1654 ele voltou à matemática e trabalhou em dois projetos não relacionados. Um era uma *Obra completa sobre cônicas*, evidentemente uma continuação do pequeno *Essay* que publicara aos dezesseis anos; mas essa obra maior sobre



Máquina de calcular de Pascal (de um modelo original na coleção do Departamento de Artes e Ciências da IBM)

cônicas nunca foi impressa e não existe hoje. Leibniz viu uma cópia manuscrita e as notas que tomou são agora tudo o que resta da obra[12]. (Só duas cópias da obra menor se preservaram.) De acordo com as notas de Leibniz a *Obra completa sobre cônicas* continha uma secção sobre o familiar lugar das três e quatro retas e uma sobre o *magna problema* — colocar uma cônica dada num cone de revolução dado. O tratado usava métodos sintéticos, pois por algum motivo Pascal nunca adquiriu facilidade no uso da álgebra simbólica nem viu o papel que boas notações desempenham na descoberta em matemática. Nisso ele estava bastante em atraso com relação a seu tempo.

24 Enquanto Pascal em 1654 trabalhava em sua *As cônicas*, seu amigo, o Chevalier de Méré, propôs-lhe questões como esta: Em oito lances de um dado um jogador deve tentar lançar um, mas depois de três tentativas infrutíferas, o jogo é interrompido. Como deveria ele ser indenizado? Pascal escreveu a Fermat sobre isto, e a correspondência entre eles foi o ponto de partida real da moderna teoria das probabilidades, as idéias de Cardano de um século antes tendo sido esquecidas[13]. Embora nem Pascal nem Fermat escrevessem seus resultados, Huygens em 1657 publicou um pequeno folheto, *De ratiociniis in ludo aleae* (Sobre o raciocínio em jogos de dados) que foi estimulado pela correspondência entre os franceses. Enquanto isso Pascal havia ligado o estudo das probabilidades com o triângulo aritmético, levando a discussão tão mais longe que Cardan, que o arranjo triangular a partir daí é conhecido como triângulo de Pascal. O próprio triângulo tinha mais de 600 anos, mas Pascal descobriu algumas propriedades novas, como a seguinte.

> Em todo triângulo aritmético, se duas células são contíguas na mesma base, a superior está para a inferior como o número de células desde a superior até o topo da base está para o número de células da inferior, até o ponto mais baixo inclusive.

(Pascal chamava posições na mesma coluna vertical, na Fig. 17.9, "células do mesmo posto perpendicular", e as de uma mesma horizontal "células de mesmo posto paralelo"; células na mesma diagonal apontando para cima ele chamava "células da mesma base".) O método de prova dessa propriedade é mais significativo que a propriedade em si, pois aqui em 1654 Pascal deu uma explanação eminentemente clara do método de indução matemática. Indicações sobre esse método podem ser encontradas antes em obra de Maurolycus; mas Pascal tinha habilidade excepcional no esclarecimento de conceitos, por isso partilha, com Fermat e outros, do desenvolvimento do raciocínio por recorrência. O nome "indução matemática" parece ter surgido muito mais tarde no artigo de De Morgan sobre "Induction (Mathematics)" na Penny Cyclopaedia de 1838[14].

1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	
1	3	6	10	15		
1	4	10	20			
1	5	15				
1	6					
1						

Figura 17.9

[12]Para mais informação sobre esse aspecto e outros da obra de Pascal veja Henri Bosmans, "Sur l'oeuvre mathématique de Blaise Pascal", *Mathesis*, **38** (1924), Supplement, pp. 1-59. Veja também (C. B. Boyer, "Pascal: O homem e o matemático", *Scripta Mathematica*, **26** (1963), 283-307, e René Taton, "L' 'essay pour les coniques' de Pascal", *Revue d'Histoire des Sciences*, **8** (1955), 1-18

[13]Veja Oystein Ore, "Pascal and the Invention of Probability Theory" *American Mathematical Monthly*, **47** (1960), 409-419

[14]Para uma extensa exposição histórica sobre a indução matemática veja W. H. Bussey, "Origin of Mathematical Induction", *American Mathematical Monthly*, **24** (1917), 199-207. Cf. Florian Cajori, "Origin of the Name 'Mathematical Induction' ", *American Mathematical Monthly*, **25** (1918), 197-201, e Hans Freudenthal, "Zur Geschichte der vollständigen Induktion", **6** (1953), 17-37

Fermat esperava interessar Pascal na teoria dos números, e em 1654 ele lhe enviou o enunciado de um de seus mais belos teoremas (provado apenas no século dezenove):

Todo inteiro é composto de um, dois ou três números triangulares, de um, dois, três ou quatro quadrados, de um, dois, três, quatro ou cinco pentágonos, de um, dois, três, quatro, cinco, ou seis hexágonos, e assim ao infinito.

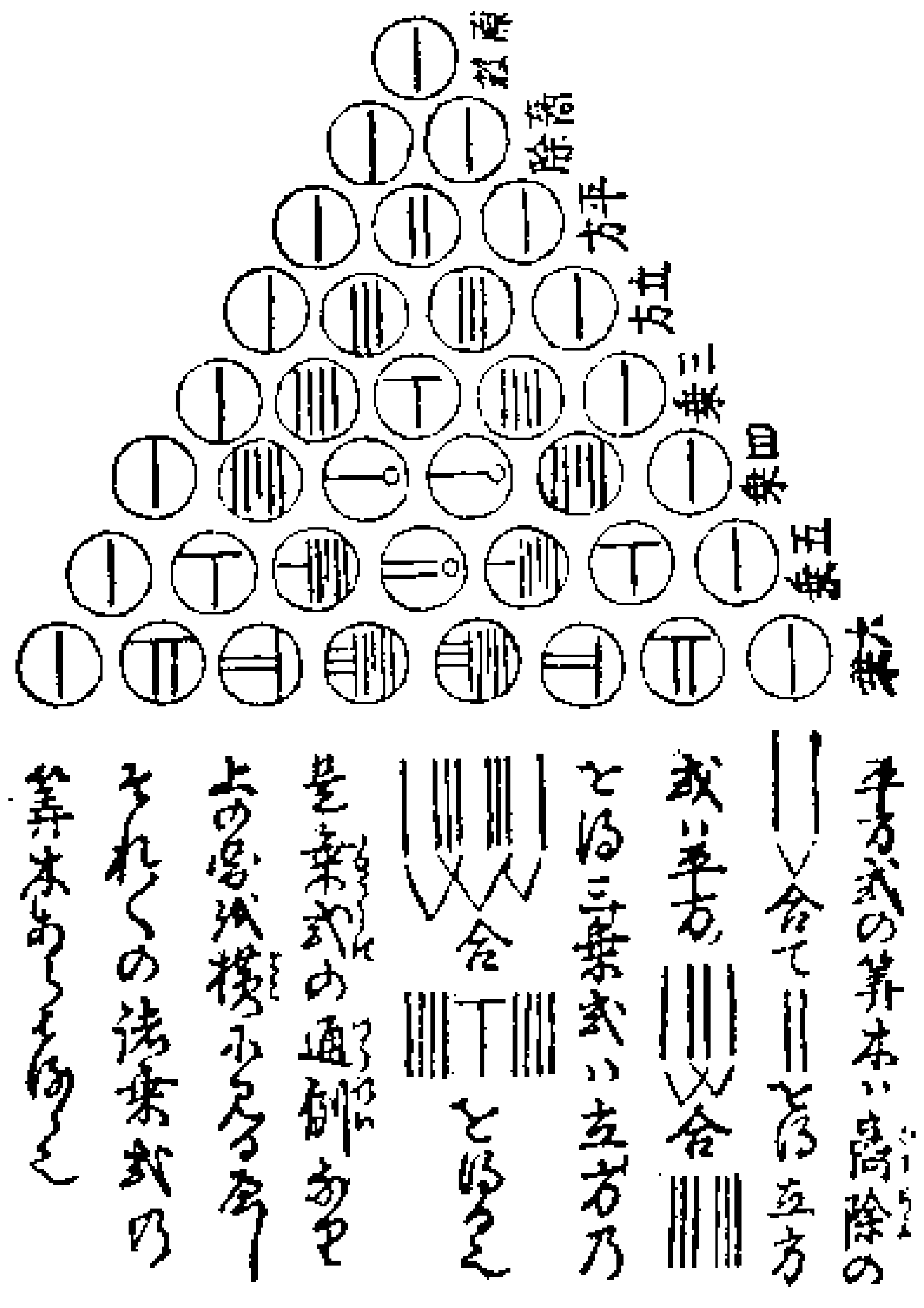
Mas Pascal era um diletante em matemática, bem como um virtuose, e não se interessou pelo problema. Mas considerou um problema de teoria dos números muito discutido na época — uma fórmula para a soma das potências m-ésimas dos primeiros n inteiros consecutivos — pois isso ele relacionava com o triângulo aritmético, com raciocínio por recorrência e com análise infinitesimal. A fórmula, como é usual em Pascal, é expressa verbalmente, mas em simbolismo moderno equivale a

$${}_{m+1}C_1 \sum i^m + {}_{m+1}C_2 \sum i^{m-1} + \dots + {}_{m+1}C_m \sum i = (n+1)^{m+1} - (n+1),$$

onde as somas são tomadas de $i = 1$ a $i = n$. Dessa fórmula[15] Pascal facilmente derivou o equivalente da bem conhecida fórmula do Cálculo

$$\int_0^a x^n\,dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}.$$

Na noite de 23 de novembro de 1654, das 22h e 30 min às 24h e 30 min Pascal experimentou um êxtase religioso que fez com que abandonasse a ciência e a matemática pela teologia. O resultado foi que escreveu *Lettres provinciales* e *Pensées*; só por um breve período, de 1658-1659, é que Pascal voltou à matemática. Uma noite em 1658



O Triângulo de Pascal no Japão. Do *Sampō Dōshi-mon* de Murai Chūzen (1781), mostrando também a forma sangi dos numerais

[15] Para detalhes veja C. B. Boyer, "Pascal's Formula for the Sums of the Powers of the Integers", *Scripta Mathematica*, 9 (1943), 237-244

uma dor de dentes ou mal-estar impediu-o de dormir e para se distrair da dor ele voltou-se para o estudo da ciclóide. Milagrosamente a dor melhorou, e Pascal tomou isso como um sinal de Deus de que o estudo da matemática não Lhe desagradava. Tendo achado certas áreas, volumes e centros de gravidade associados à ciclóide, Pascal propôs meia dúzia de tais questões aos matemáticos de seu tempo, oferecendo um primeiro e um segundo prêmio para as soluções — e indicando Roberval como um dos juízes. A publicidade e o senso de tempo eram tão fracos então que só duas coleções de soluções foram apresentadas e continham pelo menos alguns erros de cálculo. Pascal por isso não concedeu nenhum prêmio; mas publicou suas próprias soluções, com outros resultados, tudo precedido por uma *Histoire de la roulette* (nome geralmente usado para a curva na França) numa série de *Lettres de A. Dettonville* (1658-1659). (O nome Amos Dettonville era um anagrama de Louis de Montalte, o pseudônimo usado em *Lettres provinciales*.) As questões do concurso e as *Lettres de A. Dettonville* focalizaram o interesse sobre a ciclóide, mas despertaram um "vespeiro" de controvérsias. Os dois finalistas, Antoine de Lalouvère e John Wallis, ambos matemáticos competentes, se aborreceram por lhes serem negados os prêmios; e os matemáticos italianos ficaram indignados porque a "História da Ciclóide" de Pascal praticamente desconhecia os méritos de Torricelli, sendo concedida a prioridade na descoberta apenas a Roberval.

Muito do material contido nas *Lettres de A. Dettonville*, como a igualdade entre os arcos de espirais e parábolas, bem como as questões do concurso sobre a ciclóide era conhecido por Roberval e Torricelli; mas parte disso aparecia impresso pela primeira vez. Entre os resultados novos estava a igualdade do comprimento de um arco da ciclóide generalizada $x = aK\phi - a \text{ sen } \phi$, $y = a - a\cos\phi$ e a semicircunferência da elipse $x = 2a(1+K)\cos\phi$, $y = 2a(1-K)\text{ sen }\phi$. O teorema era expresso retoricamente em vez de simbolicamente, e era demonstrado de modo essencialmente arquimediano, como eram quase todas as demonstrações de Pascal em 1658-1659.

Tratando da integração da função seno em seu *Traité des sinus du quart de cercle* (Tratado sobre os senos num quadrante de um círculo) de 1658 Pascal chegou notavelmente perto da descoberta do cálculo — tão perto que Leibniz mais tarde escreveu que foi ao ler essa obra de Pascal que uma luz subitamente jorrou sobre ele. Se Pascal não tivesse morrido, como Torricelli, logo depois de completar trinta e nove anos, ou se tivesse se dedicado mais constantemente à matemática, ou se fosse mais atraído por métodos algorítmicos que pela geometria e pela especulação sobre a filosofia da matemática, há pouca dúvida de que poderia ter-se antecipado a Newton e Leibniz em sua maior descoberta. Pascal foi sem dúvida o maior "poderia-ter-sido" da história da matemática: no entanto é um dos elos importantes no desenvolvimento da matemática. Nisso, é claro, ele não era único.

No capítulo seguinte consideramos a obra dos precursores mais imediatos de Newton e Leibniz.

BIBLIOGRAFIA

Bosmans, Henri, "Sur l'oeuvre mathématique de Blaise Pascal", *Mathesis*, **38** (1924), Supplement, pp. 1-59

Boyer, C. B., *History of Analytic Geometry* (New York: Scripta Mathematica, 1956)

Boyer, C. B., *The History of the Calculus* (edição em brochura, New York: Dover, 1959)

Boyer, C. B., "Pascal: The Man and the Mathematician," *Scripta Mathematica*, **26** (1963), 283-307

Brassine, E., *Précis des oeuvres mathématiques de P. Fermat* (Paris, 1853)

Castelnuovo, G., *Le origini del calcolo infinitesimale nell'era moderna* (Bologna: Nicola Zanichelli, 1938)

Coolidge, J. L., *A History of Geometrical Methods* (New York: Oxford University Press, 1940; edição em brochura, New York: Dover, 1963)

David, F. N., *Games, Gods and Gambling* (New York: Hafner, 1962)

Descartes, René, *Oeuvres*, editado por Charles Adam and Paul Tannery (Paris: L. Cerf, 1897-1913, 12 volumes e suplemento)

Duhamel, J. M. C., "Mémoire sur la méthode des maxima et minima de Fermat et sur les méthodes des tangentes de Fermat et Descartes", *Memoires de l'Académie des Sciences de l'Institut Impérial de France*, **32** (1864), 269-330

Fermat, Pierre de, *Oeuvres*, editado por Paul Tannery and Charles Henry (Paris: Gauthier Villars, 1891--1922, 4 volumes e suplemento)
Genty, Abbé Louis, *L'Influence de Fermat sur son siècle, relativement au progrès de la haute géométrie et du calcul* (Orleans. 1784)
Henry, Charles, "Recherches sur les manuscrits de Pierre de Fermat", *Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze Matematiche e Fisiche*, 12 (1879), 477-568, 619-740; 13 (1880), 437-470
Loria, Gino, *Storia delle matematiche* (Torino: Sten, 1929-1933, 3 volumes)
Ore, Oystein, "Pascal and the Invention of Probability Theory", *American Mathematical Monthly*, 47 (1960), 409-419
Pascal, Blaise, *Oeuvres*, editado por Léon Brunschvicg and Pierre Boutroux (Paris: Hachette, 1904-1914, 14 volumes)
Scriba, C. J., "Zur Lösung des 2. Debeauneschen Problems durch Descartes", *Archive for History of Exact Sciences*, 1 (1961), 406-419
Smith, D. E., e Marcia L. Latham, eds., *The Geometry of René Descartes* (edição em brochura, New York: Dover, 1954)
Smith, D. E., *A Source Book in Mathematics* (New York: McGraw-Hill, 1929; edição em brochura, New York: Dover, 1959, 2 volumes)
Todhunter, Isaac, *A History of Probability, from the Time of Pascal to that of Laplace* (reimpressão. New York: Chelsea, 1949)
Toeplitz, Otto, *The Calculus, a Genetic Approach* (Chicago: University of Chicago Press, 1963)
Torricelli, Evangelista, *Opere*, editado por Gino Loria (Florença: G. Montanari, 1919-1944, 4 volumes)
Turnbull, H. W., *The Great Mathematicians* (New York: New York University Press, 1961)
Walker, Evelyn, *A Study of the Traité des Indivisibles of Gilles Persone de Roberval* (New York: Teachers College, 1932)
Wallner, C. R., "Die Wandlungen des Indivisibilienbegriffs von Cavalieri bis Wallis", *Bibliotheca Mathematica* (3), 4 (1903), 28-47
Zeuthen, H. G., *Geschichte der Mathematik im 16. und 17. Jahrhundert*, traduzido por R. Meyer (Leipzig, 1903)

EXERCÍCIOS

1. Que causas possíveis sugere para a supremacia francesa em matemática no terço médio do século dezessete?

2. A dúvida sistemática, como a de Descartes, é uma ajuda ou um óbice para o desenvolvimento da matemática? Explique.

3. Compare a influência de Descartes com a de Fermat no desenvolvimento da matemática.

4. Como você explica que a geometria projetiva de Desargues e Pascal encontrasse tão pouco eco entre seus contemporâneos?

5. Verifique a fórmula poliedral de Descartes-Euler para cada um dos cinco sólidos regulares.

6. Justifique completamente a construção usada por Descartes para resolver $z^2 = az + b^2$.

7. Ache uma construção semelhante à de Descartes para $z^2 = az - b^2$ e para $z^2 = b^2 - az$.

8. Nosso sinal de igualdade é melhor ou pior que o de Descartes? Explique.

9. Esboce a parábola ou tridente de Descartes para $a = 1$.

10. Verifique a retificação de Torricelli de $r = ae^{b\theta}$.

11. Ache uma relação necessária entre os coeficientes da equação de Descartes $y^2 = ay - bxy + cx - dx^2$ para que seja uma parábola.

12. Usando o método de Descartes, ache a normal a $y^2 = 4x$ no ponto $(1, 2)$.

13. Usando o método de Fermat, ache a tangente a $x^2 = 4y$ no ponto $(2, 1)$.

14. Ache a equação da oval de Descartes tal que duas vezes a distância de qualquer ponto (x, y) a $(-1, 0)$ somada com a distância de (x, y) a $(1, 0)$ dá 4.

15. Esboce o folium de Descartes para $a = 1$.

16. Mostre que por uma translação de eixos a equação de Fermat $xy + a^2 = bx + cy$ pode ser reduzida à forma $xy = K^2$.

17. Prove o teorema de Fermat que diz que se a soma dos quadrados das distâncias de um ponto variável P a qualquer número de retas fixas é constante, o lugar de P é uma secção cônica.

18. Use o método de Fermat para achar os valores máximo e mínimo de $(x + 1)(2x^2 + 5x - 7)$.

19. Use o *método* de Fermat (mas *não* sua fórmula) para achar $\int_0^4 x^5\, dx$.

20. Use o método de Fermat (mas não sua fórmula) para achar $\int_2^{\infty} 1/x^3\, dx$.

21. Use o método de Fermat (mas não sua fórmula) para achar $\int_0^1 x^{5/2}\, dx$.

22. Quais dos primos entre 10 e 30 podem ser escritos como soma de dois quadrados? Ache os dois quadrados nos casos em que é possível.

23. Ache $2^{2^n} + 1$ para $n = 0, 1, 2, 3$ e verifique que são primos.

24. Verifique o teorema menor de Fermat para quatro casos, usando o primo 3.

25. Usando régua e compasso construa pelo método de Roberval a tangente à ciclóide num ponto sobre ela.

*26. Verifique o resultado de Roberval e Torricelli sobre a área sob um arco da ciclóide.

*27. Resolva o seguinte problema proposto por Pascal: A área limitada pela ciclóide, a ordenada pelo vértice e uma reta paralela à base é resolvida em torno do eixo x. Ache o volume gerado.

*28. Verifique o teorema de Roberval sobre o comprimento de arco da espiral e da parábola.

*29. Usando o teorema de Pascal, trace uma tangente a uma elipse num ponto sobre a elipse.

**30. Verifique a descoberta de Torricelli de que a revolução de uma área infinita pode fornecer um volume finito.

*31. Usando o quadrângulo completo de Desargues mostre como construir as tangentes a uma cônica de um ponto externo.

*32. Usando os métodos de equações diferenciais resolva a equação de Debeaune $y' = x - y$ para a curva pela origem.

*33. Usando $1/(\sqrt{2} - 1) = \sqrt{2} + 1$ e o método de Fermat de "descida infinita" prove que $\sqrt{2}$ não é racional.

Capítulo **18**

Um período de transição

Matemática a inabalável base das ciências e a abundante Fonte do Progresso nos negócios humanos.

Isaac Barrow

1 Com a morte de Desargues em 1661, de Pascal em 1662 e de Fermat em 1665, encerrou-se um grande período da matemática francesa. É verdade que Roberval viveu ainda mais uma década, mas suas contribuições já não eram significativas e sua influência era limitada por sua recusa de publicar. Quase o único matemático de alguma importância na França então era Philippe de Lahire (1640-1718), um discípulo de Desargues e, como seu mestre, um arquiteto. A geometria pura evidentemente o atraía, e sua primeira obra sobre cônicas em 1673 era sintética, mas ele não rompeu com a onda analítica do futuro. Lahire estava à procura de um patrono, por isso em sua obra *Nouveaux élémens des sections coniques* de 1679, dedicada a Colbert, os métodos de Descartes estavam em evidência. Os métodos são métricos e bidimensionais, partindo, no caso da elipse e da hipérbole, das definições em termos da soma e diferença dos raios focais e, no caso da parábola, da igualdade das distâncias ao foco e diretriz. Mas Lahire transportou para a geometria analítica algo da linguagem de Desargues. O eixo das abscissas era o "tronco", os pontos sobre ele eram "nós" e as ordenadas eram "ramos". Dessa linguagem só o termo "origem" sobreviveu. Talvez fosse por causa de sua terminologia que seus contemporâneos não apreciassem devidamente um ponto significativo de seus *Nouveaux élémens* — Lahire forneceu um dos primeiros exemplos de uma superfície dada analiticamente por uma equação a três incógnitas — o que foi o primeiro passo para a geometria analítica no espaço. Como Fermat e Descartes ele tinha só um ponto de referência ou origem O sobre uma única reta de referência ou eixo OB, a que ele acrescentou agora o plano de referência ou coordenadas OBA (Fig. 18.1). Lahire verificou então que a equação do lugar de um ponto P tal que sua distância perpendicular PB ao eixo excede por uma quantidade fixa a a distância OB (a abscissa de P), com relação a esse sistema de coordenadas é $a^2 + 2ax + x^2 = y^2 + v^2$ (onde v é a coordenada agora usualmente denotada por z). O lugar, é claro, é um cone.

Em 1685 Lahire voltou a métodos sintéticos num livro com o simples título *Sectiones conicae*[1]. Esse poderia ser descrito como uma versão por Lahire de *As cônicas* de Apolônio traduzidas para o latim a partir da linguagem francesa de Desargues. As propriedades harmônicas do quadrângulo completo, pólos e polares, tangentes e normais, e diâmetros conjugados estão entre os tópicos familiares tratados de um ponto de vista projetivo.

É interessante notar que hoje o nome de Lahire está ligado não a qualquer coisa em seus tratados sintéticos ou analíticos sobre cônicas mas a um teorema num artigo de 1706

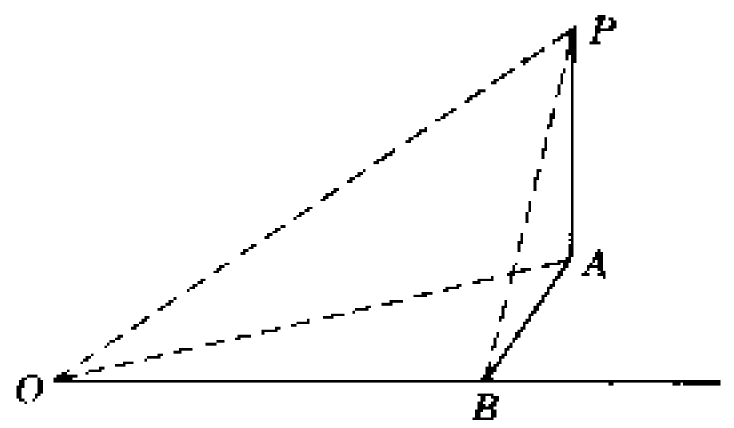


Figura 18.1

[1]Uma boa mas curta descrição disso é dada por J. L. Coolidge em *A History of the Conic Sections and Quadric Surfaces* (1945). Para uma exposição mais completa veja Ernst Lehmann, *La Hire und seine Sectiones conicae* (1888)

sobre "roulettes" nas *Mémoires* da Académie des Sciences. Aqui ele mostrou que se um círculo rola sem escorregar ao longo do interior de um círculo maior com diâmetro duplo então (1) o lugar de um ponto sobre a circunferência do círculo menor é um segmento de reta (um diâmetro do círculo maior) e (2) o lugar de um ponto que não está sobre a circunferência mas que é fixo em relação ao círculo menor é uma elipse. Como vimos, Nasir Eddin conhecia a primeira parte desse teorema e Copérnico conhecia a segunda[2]. O nome de Lahire merece ser lembrado, mas é pena que esteja ligado a um teorema que ele não foi o primeiro a descobrir. Num certo sentido a história foi pouco generosa com Lahire. Ele foi o primeiro especialista moderno em geometria tanto sintética quanto analítica: mas a geometria estava num declínio que durou ainda um século.

2 Lahire não foi o único geômetra não apreciado da época. Em 1672 o matemático dinamarquês Georg Mohr (1640-1697) publicou um livro pouco comum sob o título *Euclides danicus* em que mostrou que toda construção ponto a ponto que possa ser realizada com régua e compasso (isto é, todo problema "plano") pode ser feita só com compasso. Apesar de toda a insistência de Papus, Descartes e outros no princípio de parcimônia, Mohr mostrou que muitas das construções clássicas violavam esse princípio usando dois instrumentos onde um bastava! Evidentemente não se pode traçar uma reta com compasso; mas se considerarmos uma reta como conhecida sempre que dois pontos distintos sobre ela são conhecidos, então o uso de régua em geometria euclidiana é supérfluo. Tão pouca atenção prestaram os matemáticos da época a essa notável descoberta que a geometria que usa apenas compasso tem o nome não de Mohr mas de Mascheroni, que redescobriu o princípio 125 anos depois. O livro de Mohr desapareceu tão completamente que só em 1928, quando um exemplar foi acidentalmente descoberto por um matemático numa livraria de Copenhagen é que se soube que alguém havia provado antes de Mascheroni a superfluidade da régua.

3 O ano do natimorto *Euclides danicus* de Mohr, 1672, marcou a publicação na Itália de mais uma obra sobre quadratura do círculo, *Il problema della quadratura del circolo*, por Pietro Mengoli (1625-1686), um terceiro matemático não apreciado da época. Mengoli, um sacerdote, tinha crescido sob a influência de Cavalieri (de quem era sucessor em Bolonha), Torricelli e Gregório de St. Vincent. Continuando a obra deles sobre indivisíveis e a área sob as hipérboles, Mengoli aprendeu como tratar esses problemas por um processo cuja utilidade começou a tornar-se evidente quase pela primeira vez — o uso de séries infinitas. Mengoli viu, por exemplo, que a soma da série harmônica alternada $1/1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + \ldots + (-1^n)/n + \ldots$ é $\ln 2$. Tinha redescoberto a conclusão de Oresme, obtida por agrupamento de termos, de que a série harmônica não converge, teorema usualmente atribuído a Jacques Bernoulli em 1689; também mostrou a convergência dos recíprocos dos números triangulares, resultado em geral creditado a Huygens. Mengoli tentou sem sucesso achar a soma dos recíprocos dos quadrados, e de outras potências, somação obtida um século depois por Euler. A *Quadratura del circolo* incluía o produto infinito para π que fora dado por Wallis (descrito mais adiante neste capítulo). A preocupação de Mengoli com somas e produtos infinitos era um passo importante para desenvolvimentos futuros da matemática, mas nenhum de seus conterrâneos estava preparado para seguir tal caminho.

4 Consideramos acima três matemáticos não apreciados trabalhando por volta de 1670, e uma razão para não serem adequadamente apreciados era que o centro da matemática não estava em seus países. A França e a Itália, outrora líderes, estavam em declínio matematicamente, e a Dinamarca permanecia fora da corrente principal. Durante o período que estamos considerando — o intervalo entre Descartes e Fermat de um lado e Newton e Leibniz de outro — havia duas regiões em particular em que a matemática estava florescente: a Grã-Bretanha e os Países Baixos. Aqui achamos não figuras isoladas como na França, Itália e Dinamarca, mas um punhado de ingleses eminentes e outro punhado de matemáticos holandeses e flamengos.

[2]Veja C. B. Boyer, "Note on Epicycles and the Ellipse from Copernicus to Lahire", *Isis*, 38 (1947), 54-56

Já observamos que Descartes passou uma vintena de anos na Holanda, e sua influência matemática fora decisiva no fato de ter a geometria analítica lançado raízes lá mais depressa que em outros lugares da Europa. Em Leyden em 1646 Frans van Schooten (1615-1660) tinha sucedido a seu pai como professor de matemática, e foi principalmente através de Schooten, o filho, e de seus discípulos que a geometria cartesiana se desenvolveu rapidamente. A *La géométrie* de Descartes não fora publicada originalmente em latim, a língua universal dos estudiosos, e a exposição não era nada clara; mas ambas as desvantagens foram superadas quando van Schooten publicou uma versão para o latim em 1649, junto com material suplementar. A *Geometria a Renato Des Cartes* (Geometria por René Descartes) de van Schooten apareceu numa versão muito ampliada em dois volumes em 1659-1661, e mais edições foram publicadas em 1683 e 1695. Assim provavelmente não é exagero dizer que embora a geometria analítica fosse introduzida por Descartes, ela foi estabelecida por Schooten.

A necessidade de introduções explanatórias da geometria cartesiana fora reconhecida tão depressa que uma "Introdução" anônima a ela fora composta, mas não publicada, por um "cavalheiro holandês" menos de um ano depois de seu aparecimento. Dentro de mais um ano Descartes recebeu e aprovou um comentário mais extenso sobre a *Geometria*, esse por Debeaune sob o título *Notae breves*. As idéias de Descartes eram aqui explicadas, com ênfase maior sobre os lugares representados por equações simples de segundo grau, muito no estilo da *Isagoge* de Fermat. Debeaune mostrava, por exemplo, que $y^2 = xy + bx$, $y^2 = -2dy + bx$, e $y^2 = bx - x^2$ representam hipérboles, parábolas e elipses respectivamente.

Essa obra de Debeaune recebeu larga publicidade devido à sua inclusão na tradução para o latim de 1649 da *Geometria* junto com outros comentários por Schooten.

5 Uma contribuição mais ampla à geometria analítica foi composta em 1658 por um dos associados de Schooten, Jan De Witt (1629-1672) o bem conhecido Grande Pensionário da Holanda. De Witt estudara direito em Leyden, mas adquiriu gosto pela matemática quando vivia na casa de Schooten. Teve vida agitadíssima quando dirigia os negócios das Províncias Unidas durante os períodos de guerra, em que se opôs aos desígnios de Luiz XIV. Quando em 1672 os franceses invadiram os Países Baixos, De Witt foi destituído de seu cargo pelo partido Orange e agarrado por uma multidão enfurecida que o fez em pedaços. Embora tivesse sido homem de ação ele tinha achado tempo em sua juventude para compor uma obra chamada *Elementa curvarum*. Esta se divide em duas partes, das quais a primeira dá várias definições cinemáticas e planimétricas das secções cônicas. Entre essas encontram-se as definições por razão foco-diretriz: nossa palavra "diretriz" deve-se a ele. Outra construção da elipse dada por ele é pelo uso agora familiar de dois círculos concêntricos com o ângulo excêntrico como parâmetro. Aqui o tratamento é em grande parte sintético; mas o Livro II ao contrário faz uso tão sistemático de coordenadas que foi descrito, com alguma justificação, como o primeiro livro de texto de geometria analítica. A *Géométrie* de Descartes não era realmente um livro de texto, e a exposição de Fermat só foi publicada em 1679, ao passo que o *Elementa curvarum* de De Witt apareceu como parte da edição de 1659-1661 da *Geometria a Renato Des Cartes* de Schooten. A finalidade da obra de De Witt é reduzir todas as equações de segundo grau em x e y à forma canônica por translação e rotação de eixos.

Ele sabia reconhecer quando uma tal equação representava uma elipse, uma parábola ou uma hipérbole, conforme a chamada característica fosse negativa, nula, ou positiva[3].

Apenas um ano antes de sua morte trágica De Witt combinou os objetivos de um estadista com a visão de um matemático em seu *Tratado sobre Anuidades Vitalícias* (1671), motivado talvez pelo pequeno ensaio de Huygens sobre probabilidades. Nesse *Tratado* De Witt exprimiu o que agora seria descrito como a noção de esperança matemática; e em sua correspondência com Hudde ele considerou o problema de uma anuidade baseada no último sobrevivente de duas ou mais pessoas.

[3]Para mais detalhes veja C. B. Boyer, *History of Analytic Geometry* (1956), pp. 114-117, ou J. L. Coolidge, *The Mathematics of Great Amateurs* (1949), pp. 119-131

6 Em 1656-1657 Schooten tinha publicado uma obra sua, *Exercitationes mathematicae*, em que dava novos resultados sobre a aplicação da álgebra à geometria. Incluía descobertas feitas por seus discípulos mais capazes, tais como Johann Hudde (1629-1704), nobre que serviu durante cerca de trinta anos como burgomestre de Amsterdam. Hudde correspondeu-se com Huygens e De Witt sobre a manutenção de canais e problemas de probabilidades e expectação de vida; em 1672 ele dirigiu a obra de inundar a Holanda para obstruir o avanço do exército francês[4]. Em 1656 Hudde tinha escrito sobre a quadratura da hipérbole por meio de séries infinitas, como Mengoli fizera; mas o manuscrito perdeu-se. Nas *Exercitationes* de Schooten há uma secção por Hudde sobre o estudo de coordenadas de uma superfície de quarto grau, uma antecipação da geometria analítica no espaço que é anterior inclusive à de Lahire, embora menos explicitamente descrita. Além disso, parece que Hudde foi o primeiro matemático a permitir que um coeficiente literal numa equação represente qualquer número real, seja positivo seja negativo. Esse passo final no processo de generalização das notações de Viète na teoria das equações foi feito numa obra de Hudde intitulada *De reductione aequationum*, que também fazia parte da edição de 1659-1661 da edição de Schooten da *Geometria* de Descartes.

Os dois assuntos mais populares no tempo de Hudde eram a geometria analítica e a análise matemática, e o futuro burgomestre contribuiu para ambas. Em 1657-1658 Hudde descobriu duas regras que apontavam claramente para os algoritmos do cálculo:

1. Se r é uma raiz dupla da equação polinomial

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

e se $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}, b_n$ são números em progressão aritmética, então r é também uma raiz de

$$a_0b_0x^n + a_1b_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}b_{n-1}x + a_nb_n = 0.$$

2. Se para $x = a$ o polinômio

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

assume um valor máximo ou mínimo relativo, então a é uma raiz da equação

$$na_0x^n + (n-1)a_1x^{n-1} + \ldots + 2a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x = 0.$$

A primeira dessas "regras de Hudde" é uma forma camuflada do teorema moderno que diz que se r é uma raiz dupla de $f(x) = 0$, então r é também uma raiz de $f'(x) = 0$. A segunda é uma ligeira modificação do teorema de Fermat que hoje aparece na forma: se $f(a)$ é um valor máximo ou mínimo relativo de um polinômio $f(x)$, então $f'(a) = 0$. Note-se que não somente os problemas de área e tangente antedatam o cálculo de Newton e Leibniz, mas também o jogo com coeficientes e expoentes, tão familiar das regras elementares do Cálculo.

7 As regras de Hudde eram amplamente conhecidas, pois foram publicadas por Schooten em 1659 no Volume I da *Geometria a Renato Des Cartes*. Poucos anos antes uma regra semelhante para tangentes fora usada por outro representante dos Países Baixos, o canone René François de Sluse (1622-1685), nascido em Liège e oriundo de uma distinta família valã. Tinha estudado em Lyons e Roma, onde pode ter conhecido a obra dos matemáticos italianos. Talvez através de Torricelli, talvez independentemente, Sluse em 1652 chegou a um processo de rotina para achar a tangente a uma curva cuja equação é da forma $f(x, y) = 0$, onde f é um polinômio. A regra, só publicada em 1673, quando apareceu nos

[4]Para mais detalhes veja o artigo "Johannes Hudde, heer van Waveren en Sloterdijk", em *Nieuw Nederlandsch Biografisch Woordenboek* (Leiden, 1911), Vol. I, cols. 1172-1176. Veja também Joy B. Easton, "Johan De Witt's Kinematical Constructions of the Conics", *Mathematics Teacher*, **56** (1963), 632-635, e Karlheinz Haas, "Die mathematischen Arbeiten von Johann Hudde", *Centaurus*, **4** (1956), 235-284

Philosophical Transactions da Royal Society, pode ser enunciada como segue[5]: a subtangente será o quociente obtido colocando no numerador todos os termos contendo y, cada um multiplicado pelo expoente da potência de y que nele aparece, e colocando em denominador todos os termos contendo x, cada um multiplicado pelo expoente da potência de x que nele aparece e depois dividindo por x. Isso, é claro, equivale a formar o quociente que agora escreveriamos como yf_y/f_x, resultado conhecido por volta de 1659 também por Hudde. Tais exemplos mostram como as descobertas no cálculo estavam se acumulando mesmo antes da obra de Newton.

Sluse, partilhando da tradição dos Países Baixos, foi também muito ativo em promover a geometria de Descartes, embora preferisse o A e E de Viète e Fermat ao x e ao y de Descartes. Em 1659 ele publicou um livro bastante popular, *Mesolabum* (Dos meios) em que tratou do tópico familiar das construções geométricas das raízes das equações. Mostrou que dada qualquer cônica, pode-se construir as raízes de qualquer cúbica ou quártica por intersecções da cônica e de um círculo. O nome de Sluse é também ligado a uma família de curvas que ele introduziu em sua correspondência com Huygens e Pascal em 1657-1658. Essas chamadas "pérolas" de Sluse, como Pascal as chamou, são curvas dadas por equações da forma $y^m = kx^n(a-x)^b$. Sluse erroneamente pensou que casos como $y = x^2(a-x)$ tinham forma de pérola, pois, as coordenadas negativas não sendo compreendidas então, Sluse assumiu simetria em relação ao eixo (das abscissas). No entanto, Christiann Huygens (1629-1695), que tinha a reputação de ser o melhor aluno de Schooten, achou os pontos de máximo e mínimo e os pontos de inflexão e conseguiu esboçar a curva corretamente tanto para coordenadas positivas quanto para negativas. Pontos de inflexão tinham sido encontrados por muitos antes de Huygens, inclusive Fermat e Roberval.

8 Huygens era um cientista de reputação internacional que é lembrado pelo princípio que tem seu nome na teoria ondulatória da luz, pela observação dos anéis de Saturno e a real invenção do relógio de pêndulo. Foi em conexão com sua busca de melhoramentos em horologia que ele fez sua descoberta matemática mais importante. Ele sabia que as oscilações de um pêndulo simples não são estritamente isócronas, mas dependem da amplitude da oscilação. Para enunciar em outras palavras, se um objeto é colocado sobre o lado de uma superfície hemisférica lisa, e é largado, o tempo que leva para chegar ao ponto mais baixo será quase, mas não exatamente, independente da altura em que foi largado. Aconteceu que Huygens inventou o relógio de pêndulo quase ao mesmo tempo que se realizava o concurso de Pascal sobre a ciclóide, em 1658, e ocorreu-lhe observar o que aconteceria se a superfície hemisférica fosse substituída por outra cuja secção fosse um arco de ciclóide invertido. Ficou satisfeitíssimo ao observar que em tal caso o objeto chegará ao ponto mais baixo exatamente no mesmo tempo, qualquer que seja a altura sobre a superfície interna a que o objeto seja colocado na partida. Isto é, a ciclóide é verdadeiramente uma tautócrona; sobre um arco de ciclóide invertido um objeto escorregará de um ponto qualquer até o fundo exatamente no mesmo tempo, qualquer que seja o ponto de partida. Mas uma grande questão permanecia. Como fazer com que um pêndulo oscile num arco cicloidal em vez de um arco circular? Aqui Huygens fez mais uma bela descoberta. Se suspendermos de um ponto P na cúspide entre dois semiarcos cicloidais PQ e PR (Fig. 18.2) um pêndulo cujo comprimento seja igual ao comprimento de qualquer dos semiarcos, a extremidade do pêndulo descreverá um arco que é um arco de ciclóide QSR exatamente do mesmo tamanho e forma que os arcos de que PQ e PR são parte. Em outras palavras se o pêndulo do relógio oscila numa cunha cicloidal, ele será verdadeiramente isócrono.

Huygens fez alguns relógios de pêndulo assim, mas verificou que ao funcionar eles não eram mais precisos que os que dependiam das oscilações de um pêndulo ordinário simples, que são praticamente isócronos para oscilações muito pequenas. No entanto Huygens nessa investigação tinha feito uma descoberta de importância matemática

[5] Veja L. Rosenfeld, "René-François de Sluse et le problème des tangents", *Isis*, **10** (1928), 416-434

Christiaan Huygens

capital — a involuta de uma ciclóide é uma ciclóide semelhante, ou inversamente, a evoluta de uma ciclóide é uma ciclóide semelhante. Esse teorema, e outros resultados sobre involutas e evolutas de outras curvas, foram provados por Huygens de modo essencialmente arquimediano e fermatiano tomando pontos vizinhos e observando o resultado quando o intervalo desaparece. Descartes e Fermat tinham usado esse artifício para normais e tangentes a uma curva, e agora Huygens aplicou-o para achar o que chamamos o raio de curvatura de uma curva plana. Se em pontos vizinhos P e Q sobre uma curva (Fig. 18.3) acharmos as normais e seu ponto de intersecção I, então quando Q tende a P ao longo da curva, o ponto variável I tende a um ponto fixo O, que é chamado o centro de curvatura da curva para o ponto P, e a distância OP é chamada raio de curvatura. O lugar dos centros de curvatura O para pontos P de uma curva dada C_i é uma segunda curva C_e chamada a evoluta da curva C_i; e toda curva C_i de que C_e seja evoluta chama-se uma involuta de C_e. É claro que a envoltória das normais a C_i será C_e, que é tangente a cada uma das normais. Na Fig. 18.2 a curva QPR é a evoluta da curva QSR e a curva QSR é uma involuta

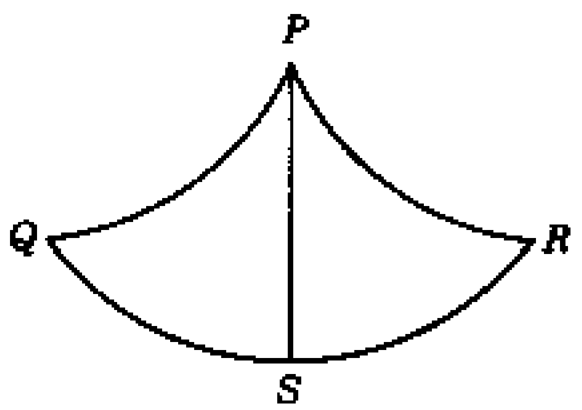


Figura 18.2

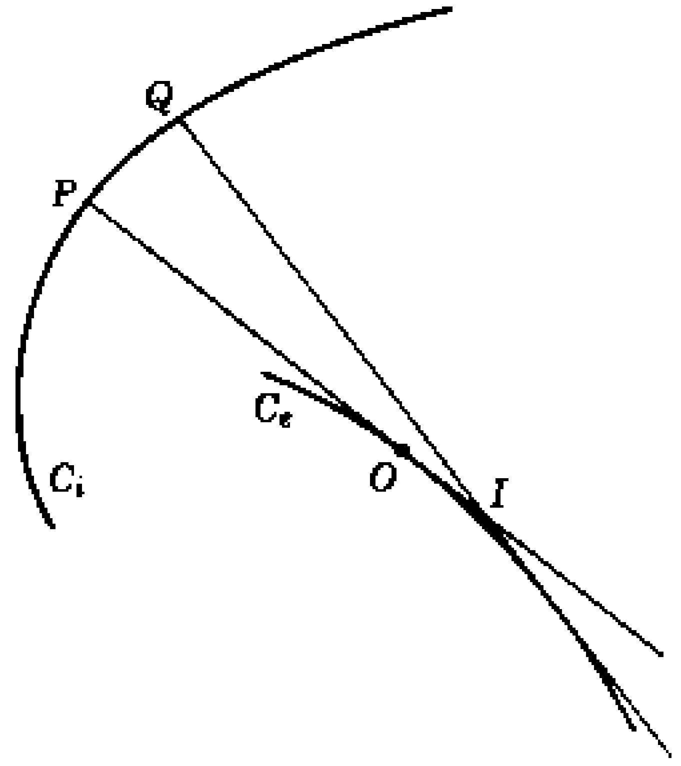
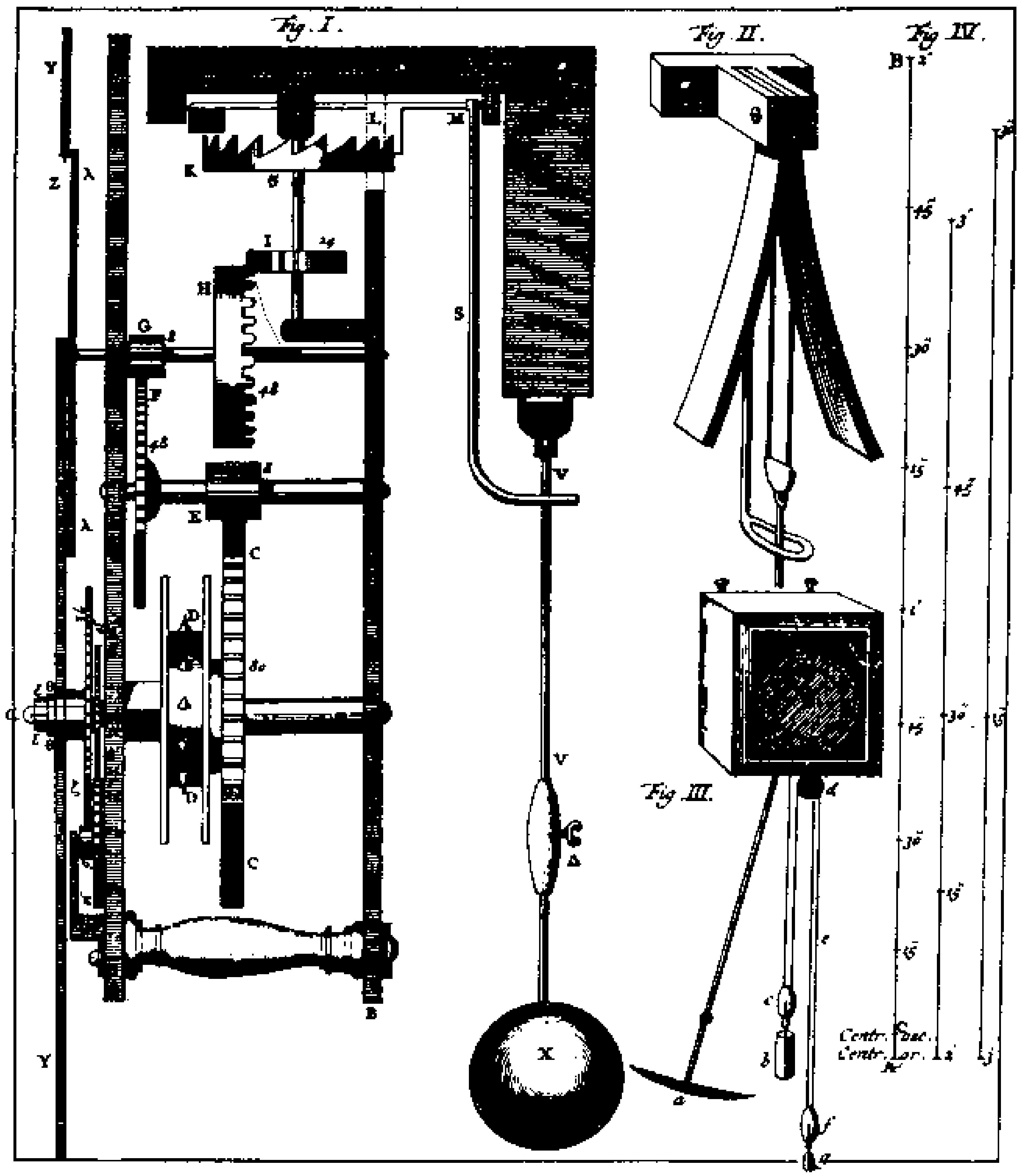


Figura 18.3

de QPR. As posições da corda, quando a ponta do pêndulo balança são normais a QSR e tangentes a QPR. Quando a ponta do pêndulo se afasta mais para um lado a corda se enrola cada vez mais ao longo da cunha cicloidal, e quando a ponta chega ao ponto mais



Diagramas de *Horologium oscillatorium* de Huygens (1673). O designado como Fig. II mostra a cunha cicloidal que faz o pêndulo oscilar segundo um arco cicloidal

baixo S a corda se desenrola. Por isso Huygens descreveu a ciclóide QSR como *ex evolutione descripta*, a ciclóide QPR sendo a *evoluta*. (Em francês usa-se *développante* e *développée*.)

9 Os conceitos de raio de curvatura e evoluta tinham sido sugeridos na obra puramente teórica sobre *As cônicas* de Apolônio, mas somente pelo interesse de Huygens em horologia é que os conceitos finalmente encontraram lugar permanente na matemática. A geometria analítica fora um produto de considerações essencialmente teóricas, mas o desenvolvimento dado por Huygens à idéia de curvatura foi estimulado por preocupações práticas. Um jogo entre os dois pontos de vista, o prático e o teórico, freqüentemente se mostra frutífero em matemática, como a obra de Huygens bem exemplifica. Seu pêndulo cicloidal presenteou-o com uma evidente retificação da ciclóide, resultado que Roberval achara antes mas não publicara. O fato de ser o arco QS (Fig. 18.2) formado quando a corda do pêndulo se enrola ao longo de QP mostra que o comprimento do segmento PS é exatamente igual ao comprimento do arco QP. Como PS é duas vezes o diâmetro do círculo que gera a ciclóide QSR, o comprimento do arco completo de ciclóide deve ser quatro vezes o diâmetro do círculo gerador. A teoria de involutas e evolutas levou também à retificação de muitas outras curvas, e o dogma peripatético-cartesiano da não-retificabilidade das curvas algébricas foi mais seriamente questionado. Em 1658 um dos associados de Huygens, Heinrich van Heuraet (1633-1660?), também protegido de Schooten, descobriu que a parábola semicúbica $ay^2 = x^3$ pode ser retificada por meios euclidianos, terminando assim as dúvidas. A descoberta apareceu em 1659 como um dos mais importantes aspectos da *Geometria a Renato Des Cartes* de Schooten. O resultado tinha sido obtido independentemente um pouco antes pelo inglês William Neil (1637-1670) e independentemente um pouco depois por Fermat na França, constituindo outro caso notável de simultaneidade de descoberta.

De todas as descobertas de Fermat em matemática só a retificação da parábola semicúbica, usualmente chamada parábola de Neil, foi publicada por ele. A solução apareceu em 1660 como suplemento no *Veterum geometria promota in septem de cycloide libris* (Geometria dos antigos promovida em sete livros sobre a ciclóide) de Antoine de Lalouvère (1600-1664), o quadrador de círculo que tinha tentado obter o prêmio de Pascal. A retificação de Fermat foi obtida comparando um pequeno arco da curva com a figura circunscrita formada pelas tangentes nas extremidades do arco. O método de van Heuraet se baseava na taxa de variação no arco, expressa em notação moderna pela equação $ds/dx = \sqrt{1 + (y')^2}$.

A retificação de Neil dependia da observação, já feita por Wallis em *Arithmetica infinitorum*, de que um arco pequeno é praticamente a hipotenusa de um triângulo retângulo cujos lados são os incrementos na abscissa e ordenada — isto é, o equivalente da fórmula moderna $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$. A retificação de Neil foi publicada em 1659 por John Wallis num tratado intitulado *Tractatus duo, prior de cycloide, posterior de cissoide* (Dois tratados, o primeiro sobre a ciclóide, o segundo sobre a cissóide). Essa obra veio poucos meses depois da obra de Pascal sobre a ciclóide, indicando até que ponto a febre cicloidal tinha atingido os matemáticos logo antes da invenção do cálculo.

A obra de Huygens sobre involutas e evolutas só foi publicada em 1673, quando apareceu em seu célebre *Horologium oscillatorium*. Esse tratado sobre relógios de pêndulo é um clássico que serviu como introdução aos *Principia* de Newton um pouco mais de uma década depois. Continha a lei da força centripeta para movimentos circulares, a lei de Huygens para movimento pendular, o princípio da conservação da energia cinética, e outros importantes resultados de mecânica. O livro foi publicado em Paris, pois Huygens tinha conhecimento da obra de Fermat e Pascal e em 1666 tinha ido a Paris como membro da recém-fundada Académie des Sciences. Ficou lá até 1681, quando a ameaça de revogação do Édito de Nantes (levada a efeito em 1685) o levou, como protestante, a abandonar a França católica; a morte de Colbert em 1683 confirmou-o em sua decisão de não voltar. Tinha antes visitado Londres e durante toda sua vida conservou grande interesse por tudo que era matemática, mas especialmente por curvas planas de grau superior.

Retificou a cissóide e estudou a tratriz; ao passo que Galileu julgara ser a catenária uma parábola, Huygens mostrou que é uma curva não-algébrica. Em 1656 tinha aplicado análise infinitesimal às cônicas, reduzindo a retificação da parábola à quadratura da hipérbole (isto é, a achar um logaritmo). No ano seguinte Huygens tornou-se o primeiro a achar a área da superfície de um segmento de um parabolóide de revolução (a "conóide" de Arquimedes), mostrando que o problema pode ser resolvido por meios elementares[6].

10 Van Schooten morreu em 1660, o ano em que a Royal Society foi fundada na Inglaterra (mas só foi reconhecida oficialmente em 1662), e a data pode ser tomada como marcando um novo deslocamento no centro matemático do mundo. O grupo de Leyden reunido em torno de Schooten, estava perdendo impulso e sofreu mais um golpe quando Huygens em 1666 partiu para Paris. Enquanto isso um vigoroso desenvolvimento matemático acontecia na Inglaterra, e foi encorajado ainda pela formação da Royal Society, uma das mais antigas organizações científicas ainda existentes. (A Accademia dei Lincei, fundada em 1603 em Roma parece ser a mais antiga.) William Oughtred morrera em 1660, mas deixou um brilhante estudante na pessoa de John Wallis (1616-1703), o mais influente predecessor inglês de Newton. Oughtred, um ministro episcopal, tinha dado aulas grátis de matemática, e Wallis foi quem mais aproveitou a instrução. Wallis também se tornou ministro religioso, mas dedicou a maior parte de seu tempo à matemática. Estudou em Cambridge, mas em 1649 foi nomeado *Savilian professor* de geometria em Oxford, ocupando a cátedra cujo primeiro ocupante fora Briggs quando ela foi estabelecida em 1619. Wallis era conhecido como monarquista, embora o governo de Cromwell não hesitasse em usar seus serviços na decifração de códigos; e quando Charles II recuperou o trono Wallis tornou-se capelão do rei. Wallis era membro da Royal Society, que ajudou a organizar. Anteriormente, em 1655, tinha publicado dois livros muito importantes, um sobre geometria analítica, o outro sobre análise infinita. Esses eram os dois principais ramos da matemática na época, e o gênio de Wallis era muito adequado para dar-lhes contribuição.

11 O *Tractatus de sectionibus conicis* de Wallis fez pela geometria analítica na Inglaterra o que *Elementa curvarum* de De Witt tinha feito no Continente. Wallis queixou-se, na verdade, de que a obra de De Witt era uma imitação de seu próprio *Tractatus*, mas o tratado de De Witt, embora publicado quatro anos depois do de Wallis, na verdade fora escrito antes de 1655. Os livros dos dois homens podem ser descritos como completação da aritmetização das secções cônicas que tinha sido iniciada por Descartes. Wallis em particular substituiu conceitos geométricos por numéricos sempre que possível. Mesmo a proporção, a praça forte da geometria antiga, Wallis considerou como conceito aritmético. Nessa atitude ele representou a tendência da matemática durante o século seguinte ao menos, mas deve ser observado que tal movimento não tinha bases sólidas pois os números reais não tinham sido definidos. A obra de Wallis ilustra bem o fato, tão freqüentemente verificado na história da matemática, que um ocasional desrespeito às exigências do rigor lógico pode ter efeito salutar sobre o progresso.

As cônicas de Wallis começavam mencionando de leve a geração das curvas como secções de um cone, mas ele deduzia todas as propriedades familiares com métodos de coordenadas no plano a partir das três formas-padrão $e^2 = ld - ld^2/t$, $p^2 = ld$ e $h^2 = ld + ld^2/t$ onde e, p e h são as ordenadas da elipse, parábola e hipérbole respectivamente, correspondentes a abscissas d medidas a partir de um vértice na origem, e onde l e t são o *lactus rectum* e o "diâmetro" ou eixo. Mais tarde ele tomou essas equações como definições das secções cônicas consideradas "absolutamente", isto é, sem referência ao cone. Aqui chegou mais perto ainda que Fermat da definição moderna de cônica como lugar de pontos num plano, munido de sistema de coordenadas, cujas coordenadas satisfazem a uma equação do segundo grau em duas variáveis, fato que Descartes percebia mas ao qual não deu ênfase.

[6]Não há um bom sumário em inglês da obra matemática de Huygens, mas tudo o que ele fez se encontra na suntuosa edição de suas *Oeuvres complètes* (1888-1950)

12 Se *As cônicas* de Wallis não tivessem aparecido a perda não seria grave, pois a obra de De Witt apareceu quatro anos depois. No entanto, não havia substituto para a *Arithmetica infinitorum* de Wallis, também publicada em 1655. Aqui Wallis aritmetizou a *Geometria indivisibilibus* de Cavalieri, como tinha aritmetizado *As cônicas* de Apolônio. Ao passo que Cavalieri obtivera o resultado

$$\int_0^a x^m\,dx = \frac{a^{m+1}}{m+1}$$

através de um laborioso processo de fazer corresponder a indivisíveis geométricos num paralelogramo os de um dos dois triângulos em que uma diagonal o divide, Wallis abandonou o pano de fundo geométrico depois de ter associado aos infinitos indivisíveis nas figuras valores numéricos. Se por exemplo queremos comparar os quadrados dos indivisíveis no triângulo com os quadrados dos indivisíveis no paralelogramo, toma-se o comprimento do primeiro indivisível no triângulo como sendo zero, o segundo um, o terceiro dois e assim até o último, que terá comprimento $n-1$ se há n indivisíveis. A razão dos quadrados dos indivisíveis nas duas figuras seria então

$$\frac{0^2+1^2}{1^2+1^2} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\,.$$

se houvesse apenas dois indivisíveis em cada um; ou

$$\frac{0^2+1^2+2^2}{2^2+2^2+2^2} = \frac{5}{12} = \frac{1}{3} + \frac{1}{12}\,.$$

se houvesse três; ou

$$\frac{0^2+1^2+2^2+3^2}{3^2+3^2+3^2+3^2} = \frac{14}{36} = \frac{1}{3} + \frac{1}{18}\,.$$

se houvesse quatro. Para $n+1$ indivisíveis o resultado é

$$\frac{0^2+1^2+2^2+\dots+(n-1)^2+n^2}{n^2+n^2+n^2+\dots+n^2+n^2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6n}\,.$$

e se n é infinito, a razão evidentemente é $1/3$. (Para n infinito, o termo resto $1/6n$ fica $1/\infty$ ou zero. Wallis aqui foi o primeiro a usar o símbolo para infinito agora familiar.) Isso, é claro, é o equivalente de dizer que $\int_0^1 x^2\,dx = 1/3$; Wallis estendeu o processo a potências inteiras superiores de x. Por indução incompleta ele concluiu que

$$\int_0^1 x^m\,dx = \frac{1}{m+1}\,.$$

para todos os valores inteiros de m.

Fermat com razão criticou a indução de Wallis, pois não tem o rigor do método de indução completa que Fermat e Pascal freqüentemente usavam. Além disso Wallis seguiu um princípio de interpolação ainda mais discutível, pelo qual ele assumiu que seu resultado valia para valores fracionários de m também, bem como para valores negativos (exceto $m = -1$). Teve até a temeridade de assumir que a fórmula valia para potências irracionais — o mais antigo enunciado no cálculo referente ao que chamaríamos agora uma "função transcendente superior". O uso de notação exponencial para potências fracionárias e negativas era uma importante generalização de sugestões feitas antes por Oresme e Stevin, mas Wallis não deu base sólida à sua extensão da exponenciação cartesiana. Deu apenas alguns exemplos de vários casos — que um termo ou número com índice -2 multiplicado pelo mesmo termo ou número com índice -3 é o termo com índice -5; ou um termo com índice -3 multiplicado por um com índice 2 é um com índice -1. Depois muito displicentemente conclui: "E o mesmo acontecerá em qualquer outro caso desse tipo, e portanto a proposição está provada."[7] Wallis era forte em descobertas mas não no rigor, como o francês se apressou a observar.

Wallis era um inglês chauvinista, e quando mais tarde (em 1685) publicou seu *Treatise of Algebra, Both Historical and Practical*, ele menosprezou a obra de Descartes, dizendo, muito injustamente, que a maior parte dela tinha sido tirada da *Artis analyticae praxis* de Harriot. O fato de suas soluções das questões do concurso de Pascal terem sido rejeitadas, não merecendo o prêmio, evidentemente, não contribuiu para melhorar seu preconceito antigaulês. Wallis parece ter tido muita disposição para suspeitar outros de terem má vontade. Em seu *Treatise of Algebra* ele escreveu:

> Que ela (a álgebra) era usada há muito entre os *gregos* não precisamos duvidar; mas cuidadosamente ocultada (por eles) como um grande Segredo. Temos exemplos em *Euclides*, pelo menos em *Theo* sobre ele; o qual atribui a invenção dela (entre eles) a Platão.

Quem leu nossos capítulos sobre a Grécia verá que Wallis era muito melhor matemático que historiador, pois ele não distingue entre a álgebra (ou análise de Viète) e a antiga análise geométrica.

13 Quando Wallis mandou sua resposta ao desafio de Pascal, Christopher Wren (1632-1723) enviou a Pascal sua retificação da ciclóide. Wren estudou em Oxford e mais tarde ocupou lá o cargo de "Savilian professor" de astronomia. Também ele foi eleito para a Royal Society, de que foi presidente durante alguns anos; se o grande incêndio de 1666 não tivesse destruído muito de Londres, Wren poderia ser agora conhecido como matemático, em vez de arquiteto da Catedral de St. Paul e cerca de cinqüenta outras igrejas. O círculo matemático a que Wren e Wallis pertenciam em 1657-1658 evidentemente estava aplicando o equivalente da fórmula para comprimento de arco $ds^2 = dx^2 + dy^2$ a várias curvas, e encontrando brilhante sucesso. Mencionamos antes que William Neil quando tinha apenas vinte anos conseguiu retificar sua curva em 1657; Wren achou o comprimento da ciclóide um ano depois. Ambas as descobertas foram incorporadas por Wallis, sendo dado o crédito devido aos descobridores, em seu *Tractatus duo* de 1659, um livro sobre problemas infinitesimais relacionados com a ciclóide e a cissóide. Neil parece não ter feito outras contribuições à matemática até sua morte prematura aos trinta e dois anos. O interesse de Wren logo se voltou para a física e depois para a arquitetura; mas em 1669 ele publicou em *Philosophical Transactions* a descoberta de que sobre o hiperbolóide de revolução de uma folha há duas famílias de retas geradoras.

É uma pena que a geometria de superfícies e curvas em três dimensões estivesse então atraindo tão pouca atenção que quase um século depois a geometria analítica no espaço praticamente não fora desenvolvida. Wallis em sua *Álgebra* de 1685 incluiu um estudo de uma superfície que pertencia à classe agora conhecida como das conóides (não, é claro, no sentido de Arquimedes). A superfície de Wallis, que ele chamou "*cono-cuneus*" (ou cunha cônica) pode ser descrita como segue. Seja C um círculo, L uma reta paralela ao plano de C, e P um plano perpendicular a L. Então o *cono-cuneus* é a totalidade das retas que são paralelas a P e passam por pontos de L e C. Wallis sugeriu outras superfícies conoidais obtidas substituindo o círculo C por uma cônica; e em seu *Mechanica* de 1670 ele notou as secções parabólicas sobre o hiperbolóide de Wren (ou "cilindróide hiperbólico"). No entanto Wallis não deu equações para as superfícies, nem aritmetizou a geometria de três dimensões como fizera com a de duas.

14 Wallis, sem dúvida o principal matemático inglês antes de Newton, fez suas contribuições mais importantes em análise infinitesimal. Entre elas havia uma em que, ao calcular $\int_0^1 \sqrt{x - x^2}\,dx$ ele antecipou algo da obra de Euler sobre a função gama ou fatorial. Da obra de Cavalieri, Fermat e outros, Wallis sabia que essa integral representa a área sob o semicírculo $y = \sqrt{x - x^2}$ e que essa área portanto é $\pi/8$. Mas como se pode chegar a essa resposta por cálculo direto da integral por métodos infinitesimais? Wallis não podia responder a essa questão mas seu método de indução e interpolação produziu

[7]Veja D. E. Smith, *A Source Book in Mathematics*, pp. 217-218

um resultado interessante. Depois de calcular $\int_0^1 (x - x^2)^n dx$ para vários valores inteiros positivos de n, Wallis chegou por indução incompleta à conclusão de que o valor dessa integral é $(n!)^2/(2n+1)!$

Assumindo que a fórmula vale para valores fracionários de n também, Wallis concluiu que

$$\int_0^1 \sqrt{x - x^2}\,dx = (1/2!)^2/2!$$

portanto que $\pi/8 = 1/2\,(1/2!)^2$ ou $1/2! = \sqrt{\pi}/2$. Esse é um caso especial da função beta de Euler, $B(m, n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx$, em que $m = 3/2$ e $n = 3/2$.

Thomas Hobbes (1588-1679) estava à frente dos que criticaram a aritmetização da geometria de Wallis, reprovando fortemente a "todo o rebanho daqueles que aplicam sua álgebra à geometria", e referindo-se à *Arithmetica infinitorum* como "uma sarna de símbolos". Hobbes, porém, tinha mais pretensões matemáticas que capacidade, insistindo em que tinha quadrado o círculo e resolvido os outros problemas geométricos antigos. Wallis podia se dar ao luxo de não levar Hobbes em conta e passar a novas descobertas. Entre seus resultados mais conhecidos está o produto infinito

$$\frac{2}{\pi} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \ldots}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \ldots}$$

Essa expressão pode ser facilmente obtida do teorema moderno

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x\,dx}{\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{n+1} x\,dx} = 1$$

e das fórmulas

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^m x\,dx = \frac{(m-1)!!}{m!!},$$

para m um inteiro ímpar e

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^m x\,dx = \frac{(m-1)!!}{m!!}\,\frac{\pi}{2}$$

para m par. (O símbolo $m!!$ representa o produto $m(m-2)(m-4)\ldots$ que termina em 1 ou 2 conforme m seja ímpar ou par.) Por isso as expressões acima para $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^m x\,dx$ são conhecidas como fórmulas de Wallis. No entanto o método que Wallis realmente usou para obter seu produto para $2/\pi$ era baseado novamente no seu princípio de indução e interpolação, aplicado dessa vez a $\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,dx$, que ele não podia calcular diretamente por falta do teorema binomial[8].

15 O teorema binomial para potências inteiras era conhecido na Europa pelo menos desde 1527, mas Wallis, surpreendentemente, não conseguiu aplicar aqui seu método de interpolação. Parece que esse resultado era conhecido pelo jovem escocês James Gregory (1638-1675), um predecessor de Newton que morreu quando tinha apenas trinta e seis anos. Gregory evidentemente tinha tido contato com a matemática de vários países. Seu tio-avô Alexander Anderson (1582-1620?) tinha editado as obras de Viète, e James Gregory tinha estudado matemática não só na escola em Aberdeen, mas também

[8]Para outros aspectos de sua obra veja J. F. Scott, *The Mathematical Works of John Wallis, D. D., F. R. S.* (1616-1703) (1938) e C. J. Scriba, *Studien zur Mathematik des John Wallis* (1616-1703) (1966)

com seu irmão mais velho, David Gregory (1627-1720); um rico patrono o tinha apresentado a John Collins (1625-1683), bibliotecário da Royal Society. Collins era para a matemática inglesa o que Mersenne tinha sido para a francesa uma geração antes — o grande correspondente. Em 1663 Gregory foi à Itália onde seu patrono o apresentou aos sucessores de Torricelli, especialmente Stefano degli Angeli (1623-1697). As muitas obras de Angeli, protegido do Cardeal Michelangelo Ricci (1619-1682) que tinha sido muito amigo de Torricelli, eram quase todas sobre métodos infinitesimais, com ênfase na quadratura de espirais generalizadas, parábolas e hipérboles. Gregory estudou com Angeli durante vários anos (1664-1668) antes de voltar a Londres, e é provavelmente que fosse na Itália, através de Mengoli e Angeli, que Gregory veio a apreciar a força das expansões de funções em séries de potências e dos processos infinitos em geral. Conseqüentemente, em 1667 ele publicou em Pádua uma obra intitulada *Vera circuli et hyperbolae quadratura*, contendo resultados muito significativos em análise infinitesimal.

Assim, Gregory estendeu o algoritmo de Arquimedes à quadratura de elipses e hipérboles. Tomava um triângulo inscrito de área a_0 e um quadrilátero circunscrito de área A_0; duplicando sucessivamente o número de lados dessas figuras ele formava seqüência $a_0, A_0, a_1, A_1, a_2, A_2, a_3, A_3, \ldots$ e mostrava que a_n é a média geométrica dos dois termos imediatamente precedentes e A_n a média harmônica dos dois termos precedentes. Assim ele tinha duas seqüências — a das áreas inscritas e a das áreas circunscritas — ambas convergindo para a área da cônica; ele as usou para obter aproximações muito boas para setores elíticos e hiperbólicos. Incidentalmente, a palavra "convergir" foi usada aqui por Gregory nesse sentido pela primeira vez. Por meio de seus processos infinitos Gregory tentou, sem sucesso, provar a impossibilidade de quadrar o círculo por meios algébricos. Huygens, considerado o maior matemático do tempo, acreditava que π pudesse ser expresso algebricamente, e uma disputa surgiu sobre a validade dos métodos de Gregory. A questão da transcendência de π era difícil, e dois séculos se passariam antes que a disputa fosse resolvida a favor de Gregory.

16 Em 1668 Gregory publicou mais duas obras, reunindo resultados oriundos da França, Itália, Holanda e Inglaterra, bem como novas descobertas suas. Uma delas, *Geometriae pars universalis* (A parte universal da geometria) foi publicada em Pádua; a outra, *Exercitationes geometricae* (Exercícios geométricos), em Londres[9].

Como o título do primeiro livro indica, Gregory rompeu com a distinção de Descartes entre curvas "geométricas" e "mecânicas". Ele preferia dividir a matemática em grupos de teoremas "gerais" e "especiais", em vez de entre funções algébricas e transcendentes. Gregory não queria sequer fazer distinção entre métodos algébricos e geométricos, e conseqüentemente sua obra aparece numa roupagem essencialmente geométrica que não a torna fácil de entender. Se tivesse expresso sua obra analiticamente poderia ter-se antecipado a Newton na invenção do cálculo, pois conhecia virtualmente todos os elementos fundamentais pelo fim de 1668. Conhecia muito bem quadraturas e retificações e provavelmente percebia que eram inversas de problemas de tangentes. Conhecia até o equivalente de $\int \sec x dx = \ln(\sec x + \operatorname{tg} x)$. Tinha descoberto independentemente o teorema binomial para potências fracionárias, resultado conhecido antes por Newton (mas ainda não publicado) e tinha descoberto a série de Taylor, por um processo equivalente ao de diferenciação sucessiva, mais de quarenta anos antes de Taylor publicá-la[10]. As séries de Maclaurin para $\operatorname{tg} x$ e $\sec x$ e para $\operatorname{arctg} x$ e $\operatorname{arcsec} x$ eram todas conhecidas por ele, mas só uma delas, a série para $\operatorname{arctg} x$, tem seu nome. Poderia ter aprendido na Itália que a área sob a curva $y = 1/(1 + x^2)$, desde $x = 0$ até $x = x$, é $\operatorname{arctg} x$; e uma divisão simples converte $1/(1 + x^2)$ em $1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots$ Portanto resulta imediatamente da

[9]Uma exposição detalhada da obra de Gregory é dada em H. W. Turnbull. *James Gregory Tercentenary Memorial Volume* (1939)

[10]A história da série de Taylor é realmente complicada. Encontra-se alguma antecipação dela na Índia antes de 1550. Veja C. T. Rajagopal e T. V. Vedamurthi, "On the Hindu Proof of Gregory's Series", *Scripta Mathematica*, **17** (1951), 65-74; ver também **15** (1949), 201-209 e **18** (1952), 25-30

fórmula de Cavalieri que

$$\int_0^x \frac{dx}{1 + x^2} = \operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots$$

Esse resultado é ainda conhecido como "série de Gregory".

17 Um resultado um tanto análogo à série de Gregory foi obtido mais ou menos ao mesmo tempo por Nicolaus Mercator (1620-1687) e publicado em seu *Logarithmotechnia* de 1668. Mercator (cujo verdadeiro nome era Kaufmann) nasceu em Holstein na Dinamarca, mas viveu em Londres durante muito tempo e tornou-se um dos primeiros membros da Royal Society. Em 1683 foi à França e desenhou as fontes de Versalhes; morreu em Paris quatro anos depois. A primeira parte da *Logarithmotechnia* é sobre cálculo de logaritmos por métodos derivados dos de Napier e Briggs; a segunda parte contém várias fórmulas de aproximação para logaritmos, uma das quais é essencialmente a que hoje se chama "série de Mercator". Da obra de Gregório de St. Vincent sabia-se que a área sob a hipérbole $y = 1/(1 + x)$, desde $x = 0$ até $x = x$, é $\ln(1 + x)$. Portanto, usando o método de divisão de Gregory seguido de integração temos

$$\int_0^x \frac{dx}{1 + x} = \int_0^x (1 - x + x^2 - x^3 + \ldots)\, dx = \ln(1 + x)$$

$$= \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$$

Mercator tirou de Mengoli o nome "logaritmos naturais" para os valores que são obtidos por meio dessa série. Embora a série tenha o nome de Mercator, parece que era conhecida antes por Hudde e por Newton, embora não publicada por eles.

Durante os anos de 1650 a 1670 uma grande variedade de métodos infinitos foi desenvolvida, inclusive o método das frações contínuas infinitas para π que fora dado por William Brouncker (1620?-1684), o primeiro presidente da Royal Society. Os primeiros passos para frações contínuas datavam de muito antes, na Itália, onde Pietro Antonio Cataldi (1548-1626) de Bolonha tinha escrito raízes quadradas nessa forma. Tais expressões são facilmente obtidas como segue: suponhamos que se quer $\sqrt{2}$ e ponhamos $x + 1 = \sqrt{2}$. Então $(x + 1)^2 = 2$ ou $x^2 + 2x = 1$ ou $x = 1/(2 + x)$. Se no segundo membro continuarmos a substituir x sempre que aparece por $1/(2 + x)$ acharemos

$$x = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ldots}}} = \sqrt{2} - 1.$$

Por manipulação do produto de Wallis para $2/\pi$, Brouncker chegou de algum modo[11] à expressão

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{25}{2 + \cfrac{49}{2 + \ldots}}}}$$

Brouncker e Gregory acharam também certas séries infinitas para logaritmos, mas essas foram ofuscadas pela maior simplicidade da série de Mercator. Gregory estudou também a curva $y = \ln x$, que ele derivava da espiral equiangular $r = e^\theta$ por uma trans-

[11]Não se sabe como Brouncker chegou a esse resultado mas uma prova baseada na obra de Euler é dada no capítulo sobre Brouncker em J. L. Coolidge, *The Mathematics of Great Amateurs* (1949)

formação geométrica equivalente a fazer o raio vetor r de um ponto transformar-se na abscissa x e transformando o arco θ em ordenada. Isso pode ter sido sugerido pela comparação, tão popular na Itália, da parábola com a espiral de Arquimedes. É triste dizer, porém, que Gregory não teve uma influência proporcional a suas realizações. Ele voltou à Escócia para tornar-se professor de matemática, primeiro em St. Andrews em 1668 depois em Edimburgo em 1674, onde ficou cego e morreu um ano depois. Depois do aparecimento em 1667-1668 de seus três tratados ele não publicou mais nada, e muitos de seus resultados tiveram que ser redescobertos por outros.

18 Newton poderia ter aprendido muito de Gregory, mas o jovem estudante de Cambridge evidentemente não conhecia bem a obra do escocês. Em vez desse, foram dois ingleses, um em Oxford outro em Cambridge, que mais o impressionaram. Foram John Wallis e Isaac Barrow (1630-1677). Barrow, como Wallis, tornou-se ministro religioso mas ensinou matemática. Em 1662 ele era professor de geometria em Gresham College em Londres, e em 1664 tornou-se o *Lucasian professor* de geometria em Cambridge, sendo o primeiro a ocupar a cátedra estabelecida por Henry Lucas (1610?-1663) e mais tarde ocupada por Newton, que sucedeu a Barrow. Um conservador em matemática, Barrow não gostava dos formalismos de álgebra e nisso sua obra é a antítese da de Wallis. Ele achava que a álgebra deveria ser parte da lógica e não da matemática, o que não era o melhor caminho para levar a descobertas analíticas. Admirador dos antigos, ele editou as obras de Euclides, Apolônio e Arquimedes, além de publicar suas próprias *Lectiones opticae* (1669) e *Lectiones geometriae* (1670) sendo que Newton ajudou na edição de ambas.

A data de 1668 é importante pelo fato de Barrow estar dando suas aulas geométricas ao mesmo tempo que apareciam a *Geometria pars universalis* de Gregory e *Logarithmotechnia* de Mercator, assim como a edição revista do *Mesolabum* de Sluse. O livro de Sluse continha uma nova secção tratando de problemas infinitesimais e contendo um método para máximos e mínimos. Querendo que suas *Lectiones geometriae* dessem conta do estado do assunto na época, Barrow incluiu uma exposição especialmente completa das novas descobertas. Problemas sobre tangentes e quadraturas eram a grande moda, e têm proeminência no tratado de Barrow de 1670. Aqui Barrow preferia o ponto de vista cinemático de Torricelli à aritmética estática de Wallis e gostava de pensar em grandezas geométricas como geradas por um fluxo uniforme de pontos. O tempo, ele dizia, tem muitas analogias com uma reta; no entanto ele considerava ambos como formados de indivisíveis. Embora seu raciocínio se aproximasse muito mais do de Cavalieri que do de Wallis ou Fermat, há um ponto em que a análise algébrica aparece proeminentemente. No fim da X Conferência Barrow escreve

> Em suplemento a isso acrescentamos, sob forma de apêndices, um método para encontrar tangentes por cálculo frequentemente usado por nós, embora eu não saiba, depois de tantos métodos bem conhecidos e usados dados acima, se há alguma vantagem em fazê-lo. No entanto eu o faço por conselho de um amigo [que mais tarde se mostrou ter sido Newton]; e com tanto maior boa vontade por parecer ser mais proveitoso e geral que os que já discuti.

Então Barrow prossegue explicando um método de tangentes que é virtualmente idêntico ao usado no cálculo diferencial[12]. É muito semelhante ao de Fermat, mas usa duas quantidades — em vez da letra E única de Fermat — quantidades que equivalem aos modernos Δx e Δy. Barrow explica sua regra para tangentes essencialmente do modo seguinte. Se M é um ponto sobre uma curva dada (em notação moderna) por uma equação polinomial $f(x, y) = 0$ e se T é o ponto de intersecção da tangente desejada MT com o eixo x, então Barrow marcava um "arco infinitamente pequeno MN da curva". Então traçava as ordenadas por M e N e por M uma reta MR paralela ao eixo x (Fig. 18.4). Então, designando por m a ordenada conhecida em M, por t a subtangente desejada PT e por a e e os lados vertical e horizontal do triângulo MRN, Barrow observava que a razão de a para

[12]Para mais detalhes sobre a obra de Barrow ver suas *Geometrical Lectures* editado por J. M. Child (1916), e *The Mathematical Works of Isaac Barrow*, editado por W. Whewell (1860). Veja também artigo de D. T. Whiteside em *Dictionary of Scientific Biography* (New York: Scribner's)

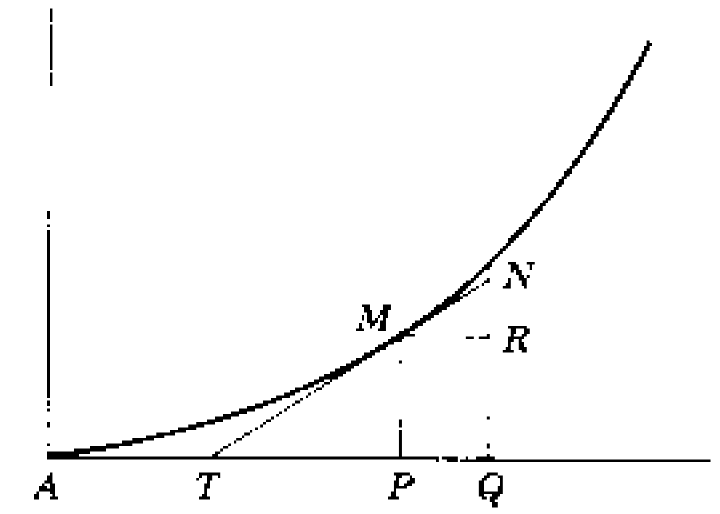


Figura 18.4

e é igual à razão de m para t. Como diríamos agora, a razão de a para e, para pontos infinitamente vizinhos, é a inclinação da curva. Para achar essa razão Barrow procedia de modo muito semelhante ao de Fermat. Substituía x e y em $f(x, y) = 0$ por $x + e$ e $y + a$ respectivamente, depois na equação resultante ele desprezava todos os termos não contendo a ou e (pois esses juntos dão zero) e todos os termos de grau maior que um em a e e, e finalmente substituía a por m e e por t. Daí a subtangente é obtida em termos de x e m, e se x e m são conhecidos a quantidade t está determinada.

Barrow aparentemente não tinha conhecimento direto da obra de Fermat, pois em lugar nenhum menciona seu nome; mas os homens que indica como fontes para suas idéias incluem Cavalieri, Huygens, Gregório de St. Vincent, James Gregory, e Wallis, e pode ser que Barrow tenha conhecido o método de Fermat através deles. Em particular, Huygens e James Gregory usavam freqüentemente o processo, e Newton, com quem Barrow estava trabalhando, reconhecia que o algoritmo de Barrow era apenas um aperfeiçoamento do de Fermat.

De todos os matemáticos que anteciparam partes do cálculo diferencial e integral, nenhum chegou mais perto da nova análise que Barrow. Ele parece ter reconhecido claramente a relação inversa entre os problemas de tangentes e de quadraturas. Mas sua conservadora adesão a métodos geométricos evidentemente impediu-o de fazer uso eficaz da relação, e seus contemporâneos achavam suas *Lectiones geometricae* difíceis de entender. Felizmente, Barrow sabia que naquele mesmo instante o próprio Newton estava trabalhando nos mesmos problemas e o homem mais velho insistiu com seu jovem associado para que reunisse e publicasse seus resultados. Barrow em 1669 foi chamado a Londres como capelão de Charles II e Newton, por sugestão de Barrow, sucedeu-o na cadeira Lucasiana em Cambridge. Que tal sucessão foi um acontecimento muito feliz se tornará claro no próximo capítulo.

BIBLIOGRAFIA

Agostini, Amedeo, "L'opera mathematica di Pietro Mengoli," *Archives Internationales d'Histoire des Sciences* (3), **29** (1950), 816-834

Barrow, Isaac, *Geometrical Lectures*, editado por J. M. Child (Chicago: Open Court, 1916)

Boyer, C. B., *History of Analytic Geometry* (New York: Scripta Mathematica, 1956)

Boyer, C. B., *History of the Calculus* (edição em brochura, New York: Dover, 1959)

Cantor, Moritz, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* (Leipzig: B. G. Teubner, 1892-1908, 4 volumes)

Castelnuovo, G., *Le origini del calcolo infinitesimale nell'era moderna* (Bologna: Nicola Zanichelli, 1938)

Chasles, Michel, *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie* (nova edição, Paris, 1875)

Coolidge, J. L., *A History of the Conic Sections and Quadric Surfaces* (Oxford: Clarendon, 1945)

Coolidge, J. L., *The Mathematics of Great Amateurs* (Oxford: Clarendon, 1949)

Haas, Karlheinz, "Die mathematischen Arbeiten von Johann Hudde," *Centaurus* 4 (1956), 235-284

Huygens, Christiaan, *Oeuvres complètes* (The Hague: M. Nijhoff, 1888-1950, 22 volumes)

Lehmann, Ernst, *La Hire und seine Sectiones conicae* (Leipzig, 1888)

Loria, Gino, *Storia delle matematiche* (Torino: Sten, 1929-1933, 3 volumes)

Montucla, Etienne, *Histoire des mathématiques* (nova edição, Paris, 1799-1802, 4 volumes)

Reiff, R., *Geschichte der Unendlichen Reihen* (Tübingen, 1889)

Rigaud, S. P., *Correspondence of Scientific Men of the Seventeenth Century* (Oxford, 1841, 2 volumes)

Rosenfeld, L., "René-François de Sluse et le problème des tangents," *Isis*, **10** (1928), 416-434

Schooten, Frans van, *Geometria a Renato Des Cartes*, 2.ª edição (Amsterdam, 1659-1661)
Scott, J. F., *The Mathematical Works of John Wallis, D. D., F. R. S.* (1616-1703) (Londres: Taylor e Francis, 1938)
Scriba, C. J., *Studien zur Mathematik des John Wallis* (1616-1703) (Wiesbaden: Steiner, 1966)
Smith, D. E., ed., *A Source Book in Mathematics* (New York: McGraw-Hill, 1929; edição em brochura, New York: Dover, 1959, 2 volumes)
Turnbull, H. W., *James Gregory Tercentenary Memorial Volume* (Londres: G. Bell, 1939)
Whewell, William, ed., *The Mathematical Works of Isaac Barrow* (Cambridge, 1860)
Zeuthen, H. G., *Geschichte der Mathematik im* 16. *und* 17. *Jahrhundert*, traduzido por R. Meyer (Leipzig: B. G. Teubner, 1903)

EXERCÍCIOS

1. Que razão pode dar para o fato de tão pouca atenção ser dada no século dezessete à geometria analítica no espaço?
2. Explique como o conceito de curvatura surgiu na obra de Huygens.
3. Por que as retificações de curvas foram descobertas tão mais tarde que as quadraturas?
4. Explique claramente as diferenças entre indução matemática e a indução ordinária de Wallis.
5. Quais eram três das principais fontes de sustento para os matemáticos do século dezessete? Dê alguns exemplos de cada uma.
6. Mencione vários matemáticos do século dezessete que foram homens de igreja e compare o nível de sua obra com o de vários que não o fossem.
7. Prove por indução matemática que

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n-1}$$

e use esse fato para achar a soma dos recíprocos dos números triangulares.

8. Use o método de Gregory e Mercator para achar os primeiros três termos da série para arcsen x a partir de

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

9. Dados dois círculos concêntricos de raios a e b (com $a > b$) mostre como construir pontos sobre a elipse $x = a\cos\theta$, $y = b \operatorname{sen}\theta$.
10. Justifique os teoremas de Hudde sobre raizes duplas de uma equação polinomial e sobre máximos e mínimos relativos.
11. Esboce a "pérola de Sluse" $y^2 = x(8-x)$
12. Ache o comprimento de $y^2 = x^3$ de $x = 0$ a $x = 1$.
13. Escreva $\sqrt{3}$ como fração contínua.
14. Escreva a raiz positiva da equação $x^2 + 3x = 4$ como fração contínua.
15. Use os cinco primeiros termos da série de Mercator para achar ln 1,1 aproximadamente.
16. Use o método de Barrow para achar a subtangente à curva $y = x^2 + 2x^3$ no ponto (2, 20)
17. Verifique a fórmula de Wallis

$$\frac{0^3+1^3+2^3+\cdots+n^3}{n^3+n^3+n^3+\cdots+n^3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4n}$$

para $n = 1, 2, 3, 4$.

18. Verifique a fórmula de Wallis

$$\int_0^1 (x-x^2)^n dx = (n!)^2/(2n-1)!$$

para $n = 1, 2, 3, 4$.

*19. Prove que a evoluta de uma ciclóide é outra ciclóide de mesmo tamanho.
*20. Obtenha o produto infinito de Wallis para $2/\pi$ pelo método indicado no Cap. 18.
*21. Ache a evoluta da parábola $y^2 = 2x$.
*22. Verifique o teorema de van Heuraet para pontos vizinhos, que diz que a razão da variação do arco para a variação da abscissa é igual à razão da normal para a ordenada.
*23. Ache pela fórmula de Wallis o comprimento de um arco da ciclóide $x = a(\theta - \operatorname{sen}\theta)$, $y = a(1-\cos\theta)$.
*24. Ache números de direção de duas retas sobre o hiperbolóide $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ pelo ponto (1, 2, 2).

Capítulo **19**

Newton e Leibniz

> Tomando a matemática desde o início do mundo até o tempo de Newton, o que ele fez é de longe a melhor metade.
>
> *Leibniz*

1 Isaac Newton, o sucessor de Barrow, nasceu prematuramente no dia de Natal de 1642, o ano da morte de Galileu. Seu pai tinha morrido antes que o doentio Isaac nascesse, e sua mãe casou-se novamente quando ele tinha três anos. O menino foi educado pela avó enquanto freqüentava a escola da vizinhança, e um tio do lado materno que se formara em Cambridge percebeu no sobrinho um talento matemático incomum e convenceu a mãe de Isaac a matriculá-lo em Cambridge. O jovem Newton então ingressou no Trinity College em 1661, provavelmente sem pensar em vir a ser um matemático, pois não estudou particularmente o assunto. A química pareceu a princípio ser seu principal interesse, e ele conservou um forte interesse por ela durante toda a sua vida. Porém no início de seu primeiro ano ele comprou e estudou um exemplar de Euclides, e logo depois leu a *Clavis* de Oughtred, a *Geometria a Renato Des Cartes* de Schooten, a *Óptica* de Kepler, as obras de Viète, e o que talvez tenha sido o mais importante de todos para ele, *Arithmetica infinitorum* de Wallis. Além disso, a esse estudo devemos acrescentar as aulas que Barrow deu como "*lucasian professor*", e a que Newton assistiu, depois de 1663. Também veio a conhecer obras de Galileu, Fermat, Huygens e outros. Não admira que Newton mais tarde escrevesse a Hooke, "Se eu enxerguei mais longe que Descartes é porque me sustentei sobre os ombros de gigantes."

Pelo fim de 1664 Newton parece ter atingido as fronteiras do conhecimento matemático e estava pronto para fazer contribuições próprias. Suas primeiras descobertas, datando dos primeiros meses de 1665, resultaram de saber exprimir funções em termos de séries infinitas — a mesma coisa que Gregory estava fazendo na Itália pela mesma época, embora dificilmente Newton pudesse saber disso. Newton também começou a pensar, em 1665, na taxa de variação, ou fluxo, de quantidades variáveis continuamente, ou fluentes — tais como comprimentos, áreas, volumes, distâncias, temperaturas. Daí então Newton ligou esses dois problemas — das séries infinitas e das taxas de variação — como "meu método".

Durante boa parte de 1665-1666, logo depois de Newton ter obtido seu grau A. B. Trinity College foi fechado por causa da peste, e Newton foi para casa para viver e pensar. O resultado foi o mais produtivo período de descoberta matemática jamais referido, pois foi durante esses meses, Newton mais tarde afirmou, que ele fez quatro de suas principais descobertas: (1) o teorema binomial, (2) o cálculo (3) a lei da gravitação e (4) a natureza das cores. A primeira delas nos parece tão evidente agora que é difícil ver por que a descoberta tardou tanto. Havia pelo menos meio milênio que os coeficientes binomiais para potências inteiras eram conhecidos. Cardan e Pascal, entre outros, conheciam perfeitamente a regra de sucessão para coeficientes; mas eles não usavam a notação exponencial de Descartes, por isso não podiam fazer a transição relativamente simples de potência inteira para fracionária. Stevin e Girard tinham sugerido potências fracionárias, mas não as usaram realmente. Portanto só com Wallis os expoentes fracionários entraram no uso comum, e vimos que mesmo Wallis, o grande interpolador, não foi capaz de escrever uma expansão para $(x-x^2)^{1/2}$ ou para $(1-x^2)^{1/2}$. Coube a Newton fornecer as expansões como parte de seu método de séries infinitas.

2 O teorema binomial, descoberto em 1664 ou 1665, foi descrito em duas cartas de 1676 de Newton a Henry Oldenburg (1615?-1677), secretário da Royal Society, e pu-

Sir Isaac Newton

blicado por Wallis (dando crédito a Newton) na *Álgebra* de Wallis de 1685. A forma de expressão dada por Newton (e Wallis) parece desajeitada ao leitor moderno, mas indica que a descoberta não foi uma simples substituição de potência inteira por fracionária; foi resultado de muitas tentativas e erros da parte de Newton em relação a divisões e radicais envolvendo quantidades algébricas. Finalmente Newton descobriu que

> As extrações de Raizes são muito abreviadas pelo Teorema
>
> $$\overline{P+PQ}\Big|^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}AQ + \frac{m-n}{2n}BQ + \frac{m-2n}{3n}CQ + \frac{m-3n}{4n}DQ + \text{etc.}$$
>
> onde $P + PQ$ representa uma Quantidade cuja Raiz ou Potência ou cuja Raiz de uma Potência se quer achar, P sendo o primeiro termo dessa quantidade, Q sendo os termos restantes divididos por essa primeira e m/n o indice numérico das potências de $P + PQ$ . . . Finalmente, em lugar dos termos que ocorrem durante o trabalho no Quociente, eu usarei A, B, C, D, etc. Assim A representa o primeiro termo $P^{(m/n)}$, B o segundo termo $(m/n)AQ$; e assim por diante[1].

Esse teorema foi anunciado pela primeira vez por Newton numa carta de 13 de junho de 1676, enviada a Oldenburg mas destinada a Leibniz. Numa segunda carta de 24 de outubro do mesmo ano Newton explicou detalhadamente como tinha chegado a essa série binomial. Ele escreveu que no começo de seu estudo de matemática deu com o trabalho de Wallis sobre a determinação da área (de $x = 0$ a $x = x$) sob curvas, cujas ordenadas são da forma $(1 - x^2)^n$. Examinando as áreas para expoentes n iguais a 0, 1, 2, 3 e assim por diante ele observou que o primeiro termo sempre é x, o segundo $-0/3\,x^3$ ou $-1/3\,x^3$ ou $-2/3\,x^3$ ou $-3/3\,x^3$ conforme a potência n seja 0 ou 1 ou 2 ou 3 e assim por diante. Por isso, pelo princípio de Wallis de "intercálculo" Newton assumiu que os primeiros dois termos na área para $n = 1/2$ deveriam ser

$$x - \frac{1/2\,x^3}{3}$$

Do mesmo modo, procedendo por analogia, ele achou outros termos, os cinco primeiros sendo

$$x - \frac{1/2\,x^3}{3} - \frac{1/8\,x^5}{5} - \frac{1/16\,x^7}{7} - \frac{5/128\,x^9}{9} - \ldots$$

Percebeu então que o mesmo resultado poderia ter sido achado obtendo primeiro $(1 - x^2)^{1/2} = 1 - 1/2\,x^2 - 1/8\,x^4 - 1/16\,x^6 - 5/128\,x^8 - \ldots$ por interpolação com o mesmo processo e depois achando a área por integração dos termos dessa série. Em outras palavras, Newton não passou diretamente do triângulo de Pascal para o teorema binomial, mas indiretamente de um problema de quadratura para o teorema binomial.

3 É provável que tenha sido benéfico para o futuro da obra de Newton que ele seguisse esse caminho indireto, pois isso tornou claro para ele que era possível operar com séries infinitas de modo muito semelhante ao usado para expressões polinomiais finitas. A generalidade dessa nova análise infinita foi então confirmada para ele quando ele obteve a mesma série infinita por extração da raiz quadrada de $1 - x^2$ pelo processo algébrico usual, verificando finalmente o resultado por multiplicação da série infinita por ela mesma para recuperar o radicando original $1 - x^2$. Assim também Newton verificou que o resultado obtido para $(1 - x^2)^{-1}$ por interpolação (isto é, o teorema binomial para $n = -1$) concordava com o resultado obtido por divisão. Por esses exemplos Newton tinha descoberto algo muito mais importante que o teorema binomial; ele tinha verificado que a análise por séries infinitas tinha a mesma consistência interior, e estava sujeita às mesmas leis gerais, que a álgebra de quantidades finitas. As séries infinitas já não deviam mais ser consideradas apenas como instrumentos de aproximação; eram outras formas das funções que representavam. Como Wallis expressou a idéia em sua *Álgebra* ao descrever o teorema binomial de Newton, essas séries infinitas ou séries convergentes "indicam a designação de alguma quantidade particular por uma Progressão regular de quantidades, que continuamente se aproximam dela, e que se prolongadas infinitamente, devem ser iguais a ela".

O próprio Newton nunca publicou o teorema binomial, nem o provou; mas redigiu e finalmente publicou várias exposições de sua análise infinita. A primeira dessas, cronologicamente, foi a *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas*, composta em 1669 com base em idéias adquiridas em 1665-1666, mas publicada só em 1711. Nela ele escreveu:

> E tudo que a análise comum [isto é, a álgebra] executa por meio de Equações com número finito de Termos (desde que possa ser feito) esse novo método sempre pode executar por Meio de Equações infinitas. Por isso não hesitei em dar a isso o nome de *Análise* também. Pois os raciocínios

[1]Veja D. E. Smith, *Source Book in Mathematics* (1929), pp. 224-228

aqui não são menos certos que na outra; nem as Equações menos exatas; embora nós Mortais cujos Poderes de raciocínio estão restritos a Limites estreitos, não possamos nem exprimir, nem conceber todos os Termos dessas Equações de modo a saber exatamente delas as Quantidades que queremos . . . Para concluir, podemos decidir com justiça que pertence à *Arte Analítica*, aquilo por cuja ajuda as Áreas e Comprimentos etc. das Curvas podem ser exatamente e geometricamente determinados[2].

Daí por diante, encorajados por Newton, já outros homens não tentaram mais evitar processos infinitos, como tinham feito os gregos, pois esses eram agora considerados como matemática legítima.

A *De analysi* de Newton tinha mais conteúdo, é claro, que algum outro trabalho sobre séries infinitas; é também de grande importância por ser a primeira exposição sistemática da principal descoberta matemática de Newton — o cálculo. Barrow, o mais importante dos mentores de Newton, era primariamente um geômetra, e o próprio Newton foi freqüentemente descrito como um expoente da geometria pura; mas os primeiros esboços manuscritos de suas idéias mostram que Newton usava livremente a álgebra e uma variedade de instrumentos algorítmicos e notações. Em 1666 ele não tinha ainda desenvolvido sua notação para fluxos, mas tinha formulado um método sistemático de diferenciação[3] que não estava muito longe do publicado em 1670 por Barrow. Basta substituir o a de Barrow pelo qo de Newton e o e de Barrow pelo po de Newton para chegar à primeira forma dada ao cálculo por Newton. Evidentemente, para Newton o representava um intervalo de tempo muito pequeno e op e oq pequenos incrementos pelos quais x e y variam nesse intervalo. A razão q/p, portanto, será a razão das taxas instantâneas de variação de y e x — isto é, a inclinação da curva $f(x, y) = 0$. A inclinação da curva $y^n = x^m$, por exemplo, é encontrada a partir de $(y + oq)^n = (x + op)^m$ expandindo ambos os lados pelo teorema binomial, dividindo tudo por o, e desprezando os termos que ainda contenham o, sendo o resultado

$$\frac{q}{p} = \frac{m}{n}\frac{x^{m-1}}{y^{n-1}} \quad \text{ou} \quad \frac{q}{p} = \frac{m}{n}x^{m/n-1}.$$

Expoentes fracionários já não preocupavam Newton, pois seu método de séries infinitas lhe tinha dado um algoritmo universal.

Lidando mais tarde com uma função explícita só de x Newton abandonou seu p e q e usou o como pequena variação da variável independente, notação que foi também usada por Gregory. Em *De analysi*, por exemplo, Newton provou como segue que a área sob a curva $y = ax^{m/n}$ é dada por

$$\frac{ax^{m/n+1}}{m/n+1}.$$

Seja z a área e suponhamos que

$$z = \frac{n}{m+n}ax^{(m+n)/n}.$$

Seja o momento ou acréscimo infinitesimal da abscissa o. Então a nova abscissa será $x + o$ e a área aumentada será

$$z + oy = \frac{n}{m+n}a(x+o)^{(m+n)/n}.$$

[2]A *De analysi* está incluída em *Opera quae exstant omnia*, editado por Samuel Horsley (1779-1785)

[3]Para parte da obra mais antiga de Newton veja *Unpublished Scientific Papers of Isaac Newton*, editado por A. R. Hall e M. R. Hall (1962) e a *Correspondence of Newton*, editado por H. W. Turnbull (1959-1961). De longe a fonte mais importante para trabalhos antigos de Newton é *The Mathematical Papers of Isaac Newton* (vol. I, 1664-1666, editado por D. T. Whiteside, Cambridge University Press, 1967). Nessa valiosa obra o editor mostra que Newton a princípio foi mais fortemente influenciado por Descartes, Schooten e Hudde do que geralmente se reconhece

Se aplicamos aqui o teorema binomial, cancelamos os termos iguais

$$z \text{ e } \frac{n}{m+n}ax^{(m+n)/n},$$

dividimos tudo por o e abandonamos os termos que ainda contêm o, o resultado será $y = ax^{m/n}$. Reciprocamente, se a curva é $y = ax^{m/n}$, então a área será

$$z = \frac{n}{m+n}ax^{(m+n)/n}.$$

Parece ser essa a primeira vez na história da matemática que uma área foi achada pelo inverso do que chamamos diferenciação, embora a possibilidade de usar tal processo evidentemente fosse conhecida por Barrow e Gregory, e talvez também por Torricelli e Fermat. Newton tornou-se o efetivo inventor do cálculo porque foi capaz de explorar a relação inversa entre inclinação e área através de sua nova análise infinita. Por isso é que mais tarde ele viu com maus olhos toda tentativa de separar seu cálculo de sua análise por séries infinitas.

4 Sabe-se que na mais popular apresentação feita por Newton de seus métodos infinitesimais ele considerou x e y como quantidades que fluem, ou fluentes, de que as quantidades p e q (acima) eram os fluxos ou taxas de variação; quando redigiu essa visão do cálculo por volta de 1671 ele substituiu p e q pelas "letras ponteadas" $\dot{x}$ e $\dot{y}$. As quantidades ou fluentes, de que x e y são os fluxos, ele designou por $\dot{x}$ e $\dot{y}$. Duplicando os pontos ou linhas ele podia representar fluxos de fluxos ou fluentes de fluentes. Deve-se notar que o título da obra, quando publicada muito mais tarde em 1742 (embora uma tradução para o inglês aparecesse antes em 1736) não era simplesmente o método dos fluxos mas *Methodus fluxionum et serierum infinitorum*.

Em 1676 Newton escreveu ainda uma terceira exposição de seu cálculo, sob o título *De quadratura curvarum* e dessa vez tentou evitar tanto quantidades infinitamente pequenas quanto quantidades que fluem, substituindo-as por uma doutrina de "primeiras e últimas razões". Ele achava a "primeira razão de aumentos nascentes" ou a "última razão de incrementos evanescentes" como segue. Suponhamos que se procure a razão das variações de x e x^n. Seja o o incremento de x e $(x + o)^n - x^n$ o correspondente incremento de x^n. Então a razão dos incrementos será

$$1 : \left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}ox^{n-2} + \ldots \right].$$

Para achar a primeira e última razão faz-se o desaparecer, obtendo a razão $1 : (nx^{n-1})$. Aqui Newton realmente se aproxima do conceito de limite, a objeção principal sendo o uso da palavra "desaparecer". Existe realmente uma razão entre incrementos que desapareceram? Newton não esclareceu a questão e ela continuou a perseguir os matemáticos durante todo o século dezoito[4].

5 Newton descobriu seu método das séries infinitas e o cálculo em 1665-1666, e durante a década seguinte ele escreveu pelo menos três exposições substanciais da nova análise. O *De analysi* circulou entre amigos, inclusive John Collins (1625-1683) e Isaac Barrow, e a expansão binomial infinita foi enviada a Oldenburg e Leibniz; mas Newton não fez nada para publicar seus resultados, embora soubesse que Gregory e Mercator em 1668 tinham revelado sua obra sobre séries infinitas. A primeira exposição do cálculo que Newton imprimiu apareceu em 1687 em *Philosophiae naturalis principia mathematica*,

[4]Para mais detalhes veja C. B. Boyer, *History of the Calculus* (1939, edição Dover em 1959). Os principais tratados de Newton sobre cálculo foram reunidos e editados por D. T. Whiteside em *Mathematical Works* (1964), Vol. I. Os *Mathematical Papers* de Newton estão sendo editados pelo Dr. Whiteside numa obra monumental, avaliada em oito volumes, o primeiro dos quais foi publicado em 1967 pela Cambridge University Press

o mais admirado tratado científico de todos os tempos. Esse livro é geralmente descrito como apresentando os fundamentos da física e da astronomia na linguagem da geometria pura. É verdade que uma parte grande da obra é em forma sintética, mas há também uma grande quantidade de passagens analíticas. A Sec. I do Livro I é, na verdade, intitulada "O método da primeira e última razões de quantidades, pelo uso do qual demonstramos as proposições que seguem", incluindo o Lema I:

> Quantidades, e as razões de quantidades, que em qualquer tempo finito convergem continuamente a igualdade, e antes do fim desse tempo se aproximam mais uma da outra que por qualquer diferença dada, se tornam finalmente iguais[5].

Isto, é claro, é uma tentativa de definir o limite de uma função. O Lema VII na Sec. I postula que "a última razão do arco, corda, e tangente, qualquer um para o outro, é a razão da igualdade"; outros lemas assumem a semelhança de certos "triângulos evanescentes". Aqui e ali no Livro I o autor recorre a séries infinitas. No entanto os algoritmos de cálculo só aparecem no Livro II, onde no Lema II deparamos com a enigmática formulação:

> O momento de qualquer genitum é igual aos momentos de cada um dos lados geradores multiplicados pelos índices das potências desses lados, e por seus coeficientes, continuamente.

A explicação de Newton mostra que a palavra *genitum* significa o que chamamos um "termo" e que por "momento" de um *genitum* ele entende o acréscimo infinitamente pequeno. Designando por a o momento de A e por b o momento de B, Newton prova que o momento de AB é $aB + bA$, que o momento de A^n é naA^{n-1} e que o momento de $1/A$ é $-a/(A^2)$. Essas expressões sibilinas, que são os equivalentes da diferencial de um produto, de uma potência e de um recíproco respectivamente constituem o primeiro pronunciamento oficial de Newton sobre o cálculo, tornando fácil entender por que tão poucos matemáticos da época dominaram a nova análise nos termos da linguagem de Newton.

Newton não foi o primeiro a diferenciar ou integrar, nem a ver a relação entre essas operações no teorema fundamental do cálculo. Sua descoberta consistiu na consolidação desses elementos num algoritmo geral aplicável a todas as funções, sejam algébricas, sejam transcendentes. Isso era enfatizado num escólio que Newton publicou nos *Principia* imediatamente após o Lema II:

> Numa carta que escrevi a Mr J. Collins, datada de 10 de dezembro de 1672, tendo descrito um método de tangentes, que eu suspeitava ser o mesmo que o de Sluse, não publicado então, eu acrescentei essas palavras. Isso é um particular, ou antes, um Corolário, de um método geral, que se estende, sem qualquer complicação de cálculo, não só ao traçado de tangentes de quaisquer linhas curvas, sejam geométricas sejam mecânicas ... mas também à resolução de outros tipos mais abstrusos de problemas sobre a curvatura, área, comprimento, centro de gravidade de curvas, etc., nem se limita (como o método de *maximis* e *minimis* de Hudden) a equações que são livres de quantidades em radicais. Esse método eu entrelacei com o outro de trabalhar em equações reduzindo-as a séries infinitas.

Na primeira edição dos *Principia* Newton reconheceu que Leibniz estava de posse de um método semelhante, mas na terceira edição em 1726, após a amarga disputa entre aderentes dos dois homens quanto à independência e prioridade da descoberta do cálculo, Newton omitiu a referência ao cálculo de Leibniz. Agora está bastante claro que a descoberta de Newton antedata a de Leibniz de cerca de dez anos, mas a descoberta de Leibniz foi independente da de Newton. Além disso, Leibniz tem prioridade de publicação, pois imprimiu uma exposição de seu cálculo em 1684 na *Acta Eruditorum*, espécie de "periódico científico" mensal que fora fundado só dois anos antes.

6 Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) nasceu em Leipzig, onde aos quinze anos entrou na universidade e aos dezessete obteve o grau de bacharel. Estudou teologia, direito, filosofia, e matemática na universidade, e às vezes é considerado o último sábio

[5] *Mathematical Principles of Natural Philosophy*, traduzido por Andrew Motte, tradução revista por Florian Cajori (1934). As passagens dos *Principia* no original inglês desse livro são dessa edição

Gottfried Wilhelm Leibniz

a conseguir conhecimento universal. Aos vinte ele estava preparado para o grau de doutor em direito, mas esse lhe foi recusado por causa de sua pouca idade. Deixou então Leipzig e obteve seu doutorado na Universidade de Altdorf em Nuremberg, onde lhe foi oferecido um posto de professor de direito, que ele recusou. Entrou então no serviço diplomático, primeiro para o eleitor de Mainz, depois para a família de Brunswick, e finalmente para os hanoverianos, a quem serviu durante quarenta anos. Entre os eleitores de Hanover a quem Leibniz serviu estava um que, como bisneto de James I da Inglaterra, sucedeu à Rainha Anne em 1714 como Rei George I. Como um influente representante de governo Leibniz viajou muito. Em 1672 foi a Paris, esperando distrair os desígnios aquisitivos dos franceses contra a Alemanha por meio de uma "guerra santa" dirigida contra o Egito (sugestão mais tarde adotada por Napoleão). Lá ele encontrou Huygens, que sugeriu que se ele desejava tornar-se um matemático deveria ler os tratados de Pascal de 1658-1659. Em 1673 uma missão política levou-o a Londres, onde comprou um exemplar das *Lectiones geometricae* de Barrow, encontrou Oldenburg e Collins, e tornou-se membro da Royal Society. É em grande parte em torno dessa visita que gira a querela posterior sobre prioridade, pois Leibniz poderia ter visto a *De analysi* de Newton em manuscrito; mas é duvidoso que nessa altura ele pudesse tirar grande proveito disso, pois Leibniz não estava ainda bem preparado em geometria ou análise.

Em 1676 Leibniz visitou novamente Londres, trazendo consigo sua máquina de calcular; foi durante esses anos entre suas duas visitas a Londres que o cálculo diferencial tomou forma. Como com Newton, as séries infinitas desempenharam papel importante nos primeiros trabalhos de Leibniz. Huygens tinha-lhe proposto o problema de achar a soma dos recíprocos dos números triangulares, isto é, $2/n(n+1)$. Leibniz astuciosamente escreveu cada termo como soma de duas frações, usando

$$\frac{2}{n(n+1)} = 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right),$$

de onde resulta evidentemente, escrevendo alguns termos, que a soma dos primeiros n termos é

$$2\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{n+1}\right).$$

portanto, que a soma da série infinita é 2. Desse sucesso ele ingenuamente concluiu que seria capaz de achar a série de quase todas as séries infinitas.

A somação de séries surgiu novamente no triângulo harmônico, cujas analogias com o triângulo aritmético (de Pascal) fascinaram Leibniz.

Triângulo aritmético

1	1	1	1	1	1	1 ···
1	2	3	4	5	6 ···	
1	3	6	10	15 ···		
1	4	10	20 ···			
1	5	15 ···				
1	6 ···					

Triângulo harmônico

$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$ ···
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{30}$ ···	
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{60}$ ···		
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{60}$ ···			
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{30}$ ···				
$\frac{1}{6}$ ···					

No triângulo aritmético cada elemento (que não esteja na primeira coluna), é a diferença dos dois termos logo abaixo dele e à esquerda; no triângulo harmônico cada termo (que não esteja na primeira linha) é a diferença dos dois termos, logo acima dele e à direita. Além disso, no triângulo aritmético cada termo (que não esteja na primeira linha ou coluna) é a soma de todos os termos na linha acima dele e à esquerda, ao passo que no triângulo harmônico cada termo é a soma de todos os termos na linha abaixo dele e à direita. Como o número de termos nesse caso é infinito, Leibniz teve muita prática em somar séries infinitas. A série na primeira linha é a série harmônica, que diverge; para todas as outras linhas a série converge. Os números na segunda linha são a metade dos recíprocos dos números triangulares, e Leibniz sabia que a soma dessa série é 1. Os números na terceira linha são um terço dos recíprocos dos números piramidais

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

e o triângulo harmônico indica que a soma dessa série é 1/2; os números na quarta linha são um quarto dos recíprocos dos números figurados que correspondem ao análogo em quatro dimensões do tetraedro, e a soma desses é 1/3; e assim por diante para as linhas sucessivas do triângulo harmônico. Os números na n-ésima diagonal desse triângulo são os recíprocos dos números na correspondente diagonal n-ésima do triângulo aritmético divididos por n.

7 De seus estudos sobre séries infinitas e o triângulo harmônico Leibniz se voltou para a leitura das obras de Pascal sobre a ciclóide e outros aspectos da análise infinitesimal.

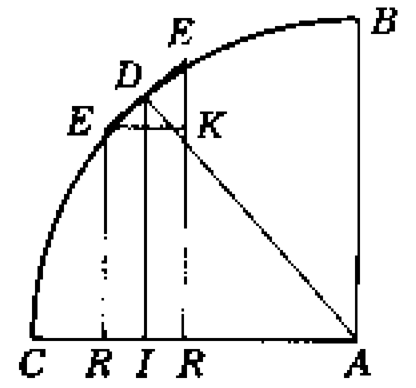


Figura 19.1

Em particular, foi ao ler a carta de Amos Dettonville sobre *Traité des sinus du quart de cercle* que Leibniz diz ter uma luz jorrado sobre ele. Percebeu então, em 1673, que a determinação da tangente a uma curva dependia da razão das *diferenças* das ordenadas e das abscissas, quando essas se tornavam infinitamente pequenas, e que as quadraturas dependiam da soma das ordenadas dos retângulos infinitamente finos que formam a área. Como nos triângulos aritmético e harmônico os processos de tomar somas ou diferenças estão em relação oposta, também na geometria os problemas de quadratura e tangentes, dependendo de somas e diferenças respectivamente, são inversos um do outro. O elo de ligação parecia ser o triângulo infinitesimal ou "característico", pois se Pascal o tinha usado para achar a quadratura de senos, Barrow o aplicara ao problema de tangentes. Uma comparação entre o triângulo no diagrama de Barrow (Fig. 18.4) e o da figura de Pascal (Fig. 19.1) mostrará a semelhança marcante que evidentemente tanto impressionou Leibniz[6]. Se *EDE* é tangente em *D* ao quadrante de círculo unitário *BDC* (Fig. 19.1) então, Pascal percebeu, *AD* está para *DI* como *EE* para *RR* ou *EK*. Para um intervalo *RR* muito pequeno o segmento *EE* pode ser considerado como virtualmente igual ao arco de círculo interceptado entre as ordenadas *ER*. Portanto, na notação que Leibniz desenvolveu poucos anos depois, temos $1/\text{sen}\,\theta = d\theta/dx$, onde θ é o ângulo DAC. Como $\text{sen}\,\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta}$ e $\cos\theta = x$, temos $d\theta = dx/\sqrt{1-x^2}$. Pelo algoritmo da raiz quadrada e divisão (ou pelo teorema binomial que Newton comunicara a Leibniz através de Oldenburg em 1676) é fácil achar $d\theta = (1 + x^2/2 + 3/8\,x^4 + 5/16\,x^6 + \ldots)\,dx$. Usando o método usual de quadratura como se encontra em Gregory e Mercator, obtém-se $\text{arcsen}\,x = x + x^3/6 + 3x^5/40 + 5x^7/112 + \ldots$ (ou, levando em conta a inclinação negativa e a constante de integração, $\text{arccos}\,x = \pi/2 - x - x^3/6 - 3x^5/40 - 5x^7/112 - \ldots$) Newton também tinha chegado a esse resultado antes e por método semelhante. Daqui era possível achar a série para $\text{sen}\,x$ pelo processo conhecido como reversão, processo aparentemente usado pela primeira vez por Newton mas redescoberto por Leibniz. Se fizermos $y = \text{arcsen}\,x$ ou $x = \text{sen}\,y$ e assumirmos para x uma série de potências da forma $x = a_1y + a_2y^2 + a_3y^3 + \ldots + a_ny^n + \ldots$, então, substituindo cada x na série de potências para $\text{arcsen}\,x$ por essa série em y obtemos uma identidade em y. Dessa obtemos as quantidades $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ igualando os coeficientes de mesmo grau. A série resultante, $\text{sen}\,y = y - y^3/3! + y^5/5! - \ldots$ era pois conhecida tanto por Newton quanto por Leibniz; e de $\text{sen}^2 y + \cos^2 y = 1$ obtinha-se a série para $\cos y$. O quociente das séries para seno e co-seno fornece a série para tangente, e seus recíprocos dão as três outras funções trigonométricas como séries infinitas. Da mesma maneira, por reversão da série de Mercator, Newton e Leibniz acharam a série para e^x.

8 Leibniz por volta de 1676 tinha chegado à mesma conclusão a que Newton chegara vários anos antes — que ele possuía um método que era altamente importante por causa de sua generalidade. Quer uma função fosse racional ou irracional, algébrica ou transcendente (palavra que Leibniz inventou), suas operações de achar somas e diferenças podiam sempre ser aplicadas. Cabia pois a ele desenvolver linguagem e notação adequadas para o novo assunto. Leibniz sempre teve uma percepção aguda da importância de boas notações como ajuda ao pensamento, e sua escolha no caso do cálculo foi particularmente feliz. Depois de algumas tentativas ele se fixou em dx e dy para as diferenças menores possíveis (diferenciais) em x e y, embora inicialmente usasse x/d e y/d para

[6]Veja *The Early Mathematical Manuscripts of Leibniz*, traduzido por C. I. Gerhardt, editado por J. M. Child (1920), especialmente pp. 15-16

indicar o abaixamento de grau. A princípio ele escrevia simplesmente omn. y (ou "todos os y") para a soma das ordenadas sob uma curva, mas mais tarde ele usou o símbolo $\int y$, e ainda mais tarde $\int y\,dx$, o sinal de integral sendo uma letra s (para soma) aumentada. Achar tangentes exigia o uso do *calculus differentialis* e achar quadraturas o *calculus summatorius* ou *calculus integralis*, frases de onde resultaram as expressões que usamos.

A primeira exposição do cálculo diferencial foi publicada por Leibniz em 1684 sob o longo mas significativo título de *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, qua nec irrationales quantitates moratur* (Um novo método para máximos e mínimos, e também para tangentes, que não é obstruído por quantidades irracionais). Aqui Leibniz deu as fórmulas $dxy = x\,dy + y\,dx$, $d(x/y) = (y\,dx - x\,dy)/y^2$ e $dx^n = nx^{n-1}\,dx$ para produtos, quocientes e potências (ou raízes) juntamente com aplicações geométricas. Essas fórmulas eram obtidas desprezando infinitésimos de ordem superior. Se por exemplo as menores diferenças em x e y são dx e dy respectivamente, então dxy ou a menor diferença em xy é $(x + dx)(y + dy) - xy$. Como dx e dy são infinitamente pequenos o termo $dxdy$ é infinitamente infinitamente pequeno e pode ser desprezado, dando o resultado $dxy = x\,dy + y\,dx$.

Dois anos mais tarde, novamente em *Acta Eruditorum*, Leibniz publicou uma explicação do cálculo integral em que se mostra que as quadraturas são casos especiais do método inverso do das tangentes. Aqui Leibniz deu ênfase à relação inversa entre diferenciação e integração no teorema fundamental do cálculo; observou que na integração das funções familiares "está incluída a maior parte de toda a geometria transcendente". Ao passo que a geometria de Descartes tinha excluído todas as curvas não-algébricas, o cálculo de Newton e Leibniz mostrava quanto é essencial o papel delas na nova análise. Se excluíssemos as funções transcendentes da nova análise não haveria integrais para funções algébricas como $1/x$ ou $1/(1 + x^2)$. Além disso, Leibniz parece ter visto, como Newton, que as operações da nova análise podem ser aplicadas a séries infinitas como a expressões algébricas finitas. Nisso Leibniz era menos cauteloso que Newton, pois dizia que a série infinita $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \ldots$ é igual a $1/2$. À luz do que se faz sobre séries divergentes não podemos dizer que é necessariamente "errado" atribuir a soma $1/2$ a essa série. Mas é claro que Leibniz se deixou arrastar demais pelo sucesso de seu algoritmo e não hesitou perante a incerteza dos conceitos. O raciocínio de Newton estava mais perto dos modernos fundamentos do cálculo que o de Leibniz, mas a plausibilidade da atitude de Leibniz e a eficácia de sua notação diferencial produziram uma maior aceitação das diferenciais que dos fluxos.

Newton e Leibniz desenvolveram sua nova análise rapidamente, de modo a incluir diferenciais e fluxos de ordem superior, como no caso da fórmula para curvatura de uma curva num ponto. Provavelmente foi por não ter idéias claras sobre ordens superiores de infinitésimos que Leibniz foi levado à conclusão errônea de que um círculo osculador tem quatro pontos "consecutivos" ou coincidentes de contato com uma curva, em vez dos três que determinam o círculo de curvatura. A fórmula para a derivada n-ésima (para usar linguagem moderna) de um produto, $(uv)^{(n)} = u^{(n)}v^{(0)} + nu^{(n-1)}v^{(1)} + \ldots + nu^{(1)}v^{(n-1)} + u^{(0)}v^{(n)}$, semelhante à expansão binomial de $(u + v)^n$, tem o nome de Leibniz. (No teorema de Leibniz os expoentes entre parênteses indicam ordens de diferenciação em vez de potências.) Também tem o nome de Leibniz a regra, dada num artigo de 1692, para achar a envoltória de uma família a um parâmetro de curvas planas $f(x, y, c) = 0$ pela eliminação de c entre as equações simultâneas $f = 0$ e $f_c = 0$, onde f_c é o resultado da diferenciação parcial de f com relação a c.

Newton conservou sua extraordinária capacidade matemática até o fim; quando Leibniz em 1716 (o último ano de sua vida) desafiou Newton a encontrar as trajetórias ortogonais de uma família a um parâmetro de curvas planas, Newton em poucas horas resolveu o problema e deu um método para achar trajetórias em geral. (Antes, em 1696, Newton fora desafiado a encontrar a braquistocrona, ou curva de mais rápida descida, e um dia depois de receber o problema ele deu a solução, mostrando que a curva é uma ciclóide.) O nome de Leibniz também é usualmente associado à série infinita $\pi/4 = 1/1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + \ldots$ uma de suas primeiras descobertas matemáticas. Essa série, que surge de sua quadratura do círculo é apenas um caso especial da expansão do arctg que tinha sido dada antes por Gregory. O fato de Leibniz ser virtualmente um autodidata em matemática explica em parte os casos freqüentes de redescoberta que aparecem em sua obra.

9 A grande contribuição de Leibniz à matemática foi o cálculo, mas outros aspectos de sua obra merecem menção. A generalização do teorema binomial ao multinomial — a expansão de expressões como $(x + y + z)^n$ — é atribuída a ele, como também a primeira referência no Ocidente ao método de determinantes. Em cartas de 1693 a L'Hospital, Leibniz escreveu que ocasionalmente usava números indicando linhas e colunas numa coleção de equações simultâneas:

$$\begin{array}{lcl} 10 + 11x + 12y = 0, & & 1_0 + 1_1 x + 1_2 y = 0, \\ 20 + 21x + 22y = 0, & \text{ou} & 2_0 + 2_1 x + 2_2 y = 0, \\ 30 + 31x + 32y = 0; & & 3_0 + 3_1 x + 3_2 y = 0. \end{array}$$

Escreveríamos isso como

$$\begin{aligned} a_1 + b_1 x + c_1 y &= 0, \\ a_2 + b_2 x + c_2 y &= 0, \\ a_3 + b_3 x + c_3 y &= 0. \end{aligned}$$

Se as equações são consistentes então

$$\begin{array}{ccc} 1_0 \cdot 2_1 \cdot 3_2 & & 1_0 \cdot 2_2 \cdot 3_1, \\ + 1_1 \cdot 2_2 \cdot 3_0 & = & + 1_1 \cdot 2_0 \cdot 3_2, \\ + 1_2 \cdot 2_0 \cdot 3_1 & & + 1_2 \cdot 2_1 \cdot 3_0; \end{array}$$

que equivale ao enunciado moderno

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Essa antecipação dos determinantes por Leibniz só foi publicada em 1850 e teve que ser redescoberta mais de meio século depois.

Os comentários de Leibniz na carta mostram que ele tinha consciência do poder na análise de "característica" ou notação que revele adequadamente os elementos de uma dada situação[17]. Evidentemente ele tinha alta opinião dessa contribuição à notação por causa da facilidade de generalização e gabava-se de ter mostrado que "Viète e Descartes não tinham ainda descoberto todos os mistérios" da análise. Leibniz, na verdade, foi um dos maiores formadores de notação, inferior apenas a Euler nesse ponto. Foi o primeiro matemático proeminente a usar sistematicamente o ponto para multiplicação e a escrever proporções na forma $a : b = c : d$. O uso de : para divisão é ainda comum. Além disso foi em grande parte graças a Newton e Leibniz que o sinal = de Recorde triunfou sobre o símbolo $\propto$ de Descartes. Devemos também a Leibniz os símbolos $\sim$ para "é semelhante a" e $\simeq$ para "é congruente a". No entanto, os símbolos de Leibniz para diferenciação e integração são seus maiores triunfos no campo da notação. Leibniz não é responsável pela moderna notação para função, mas é a ele que se deve a palavra "função", praticamente no mesmo sentido em que é usada hoje.

Entre as contribuições relativamente secundárias de Leibniz estão seus comentários sobre números complexos, numa ocasião em que estavam quase esquecidos, e a observação do sistema binário de numeração. Ele fatorou $x^4 + a^4$ em

$$\left(x + a\sqrt{\sqrt{-1}}\right)\left(x - a\sqrt{\sqrt{-1}}\right)\left(x + a\sqrt{-\sqrt{-1}}\right)\left(x - a\sqrt{-\sqrt{-1}}\right)$$

[17]Veja Thomas Muir, *The Theory of Determinants in the Historical Order of Development* (1960), I, 6-10

e mostrou que $\sqrt{6} = \sqrt{1 + \sqrt{-3}} + \sqrt{1 - \sqrt{-3}}$, uma decomposição imaginária de um número real positivo que surpreendeu seus contemporâneos. No entanto, Leibniz não escreveu as raizes quadradas de números complexos na forma complexa padrão, nem conseguiu provar sua conjetura que $f(x + \sqrt{-1}\,y) + f(x - \sqrt{-1}\,y)$ é real se $f(z)$ é um polinômio real. A posição ambivalente dos números complexos é bem exemplificada pela observação de Leibniz, que era também um teólogo eminente, que os números imaginários são uma espécie de anfíbio, a meio caminho entre existência e não-existência, assemelhando-se nisso ao Espírito Santo na teologia cristã. Sua teologia surgiu também na sua idéia sobre o sistema binário em aritmética (em que são usados só dois símbolos, unidade e zero) como um símbolo da criação em que Deus, representado pela unidade, tirou todas as coisas do nada. Ficou tão satisfeito com a idéia que escreveu sobre ela aos jesuitas, que tinham missionários na China, esperando que pudessem usar a analogia para converter o imperador da China, que tinha inclinações científicas, ao cristianismo.

10 Leibniz era tanto filósofo quanto matemático; por isso sua contribuição matemática mais significativa, além do cálculo, foi em lógica. No cálculo foi o elemento de universalidade que o impressionou, e assim foi com seus outros esforços. Ele esperava por ordem em todas as coisas; reduzir as discussões lógicas a forma sistemática, desejava desenvolver uma característica universal que servisse como uma espécie de álgebra da lógica. Seu primeiro artigo de matemática tinha sido uma tese sobre análise combinatória em 1666, e já então ele tinha visões de uma lógica simbólica formal. Símbolos universais ou ideogramas deveriam ser introduzidos para o pequeno número de conceitos fundamentais necessários ao pensamento, e idéias compostas deveriam ser formadas desse "alfabeto" dos pensamentos humanos como as fórmulas são desenvolvidas em matemática. O próprio silogismo deveria ser reduzido a uma espécie de cálculo expresso num simbolismo universal inteligível em todas as línguas. A verdade e o erro seriam apenas questão de cálculo correto ou errado dentro do sistema, e terminariam as controvérsias filosóficas. Além disso, novas descobertas podiam ser feitas por operações corretas, mas mais ou menos rotineiras, sobre os símbolos de acordo com as regras do cálculo lógico. Leibniz tinha orgulho justificado dessa idéia, mas seu entusiasmo não encontrou eco nos demais. Talvez seus contemporâneos a considerassem demasiado metafísica, como as harmonias de suas mônadas no melhor dos mundos possíveis que foram tão impiedosa e eficazmente satirizadas por Voltaire em *Candide*. Leibniz era conhecido em seu tempo por um ilimitado otimismo que continha visões não só de uma linguagem universal mas também de uma igreja universal pela união de católicos e protestantes. Nisso seu otimismo parece hoje ter sido injustificado; mas sua sugestão de uma álgebra da lógica foi reavivada no século dezenove, e desempenhou papel realmente relevante na matemática durante os últimos cem anos.

11 Leibniz era um cientista além de filósofo, e ele e Huygens desenvolveram a noção de energia cinética, que finalmente, no século dezenove, tornou-se parte do conceito mais amplo de energia em geral — conceito que Leibniz teria certamente aplaudido por sua universalidade. No entanto, na ciência as contribuições de Leibniz foram ofuscadas pelas de Newton, que incluiam a maior formulação matemática conseguida até então — a lei da gravitação. Nas secções iniciais dos *Principia* Newton tinha generalizado e esclarecido a tal ponto as idéias de Galileu sobre movimento que a partir daí damos a essa formulação o nome de "leis de movimento de Newton". Newton foi adiante, combinando essas leis com as de Kepler da astronomia e a lei de Huygens da força centripeta no movimento circular para estabelecer o grande princípio unificador que diz que duas partículas quaisquer no universo, sejam dois planetas ou dois grãos de mostarda, ou o Sol e um grão de mostarda, se atraem mutuamente com uma força que varia de modo inversamente proporcional ao quadrado da distância entre elas. No enunciado dessa lei Newton tinha sido antecipado por outros, inclusive Robert Hooke (1638-1703), professor de geometria no Gresham College e sucessor de Oldenburg como secretário da Royal Society. Mas Newton foi o primeiro a convencer o mundo da verdade da lei porque era capaz de manejar a matemática necessária à demonstração.

Para movimentos circulares a lei do inverso do quadrado é fácil de obter das fórmulas $f = ma$, de Newton, $a = v^2/r$ de Huygens, e $T^2 = Kr^3$ de Kepler, simplesmente observando que $T \propto r/v$ e então eliminando T e v das equações para obter $f \propto 1/r^2$. Provar o mesmo para elipses, no entanto, exigia muito mais habilidade matemática. Além disso, provar que a distância deve ser medida entre os centros dos corpos era tarefa tão difícil que evidentemente foi esse problema que levou Newton a deixar de lado o trabalho sobre gravitação durante quase vinte anos em seguida à sua descoberta da lei no ano da peste de 1665-1666. Quando em 1684 seu amigo Edmund Halley (1656-1742) matemático bastante capaz, que havia também adivinhado a lei do inverso do quadrado, insistiu com Newton para que desse uma demonstração, o resultado foi a exposição nos *Principia*. Tão impressionado ficou Halley com a qualidade do livro que o fez imprimir às suas custas.

Os *Principia*, naturalmente, contêm muito mais que o Cálculo, as leis do movimento, e a lei da gravitação. Contêm, em ciência, coisas como os movimentos dos corpos em meios resistentes[8] e a prova de que, para vibrações isotérmicas, a velocidade do som deveria ser a velocidade com que um corpo chegaria à terra se caísse sem resistência de uma altura que é a metade da de uma atmosfera uniforme, tendo a densidade do ar na superfície da terra e exercendo a mesma pressão[9]. De seus cálculos Newton concluiu que a velocidade do som deveria ser de cerca de 979 pés-s, ao passo que ele sabia por resultados experimentais que na verdade está próxima de 1 142 pés/s. Esse enigma nos *Principia* só foi resolvido quase um século depois quando Laplace explicou a discrepância como sendo devida ao fato de que as vibrações do som devem ser consideradas adiabáticas. Outra das conclusões científicas dos *Principia* é uma prova matemática da não-validade do esquema cósmico que então prevalecia — a teoria dos vórtices de Descartes — pois Newton mostrou, no fim do Livro II, que, de acordo com as leis da mecânica, planetas em movimento vorticial se moveriam mais rapidamente no afélio que no periélio, o que contradiz a astronomia de Kepler. No entanto passaram-se cerca de quarenta anos até que a teoria gravitacional newtoniana do universo, popularizada por Maupertuis e Voltaire, derrubasse a cosmologia cartesiana na França.

12 Alguém que leia apenas os titulos dos três livros dos *Principia* ficará com a impressão errônea de que tratam apenas de física e astronomia, pois os livros se intitulam, respectivamente, I O movimento dos corpos, II O movimento dos corpos (em meios resistentes), e III O sistema do mundo. No entanto o tratado contém também muita matemática pura, especialmente referente a secções cônicas. No Lema XIX do Livro I, por exemplo, o autor resolve o problema de Papus das quatro retas, acrescentando que sua solução "não é um cálculo analítico, mas uma composição geométrica, tal como os antigos exigiam", uma referência indireta e pejorativa, aparentemente, ao tratamento dado ao problema por Descartes.

Em todo o tratado Newton deu preferência a métodos geométricos, provavelmente porque em suas mãos forneciam demonstrações elegantes e convincentes de linguagem universalmente familiar; mas vimos que onde achava conveniente fazê-lo, ele não hesitava em apelar para seu método de séries infinitas e para o Cálculo. A maior parte da Sec. II do Livro II, por exemplo, é analítica. De outro lado, o tratamento que Newton dá às propriedades das cônicas é quase exclusivamente sintético, pois aqui Newton não precisava recorrer à análise. Após o problema de Papus ele deu um par de gerações orgânicas de cônicas como intersecções de retas móveis, e depois usou-as em meia dúzia de proposições subseqüentes para mostrar como construir uma cônica satisfazendo a cinco condições — passando por cinco pontos, por exemplo, ou tangente a cinco retas, ou passando por dois pontos e tangente a três retas. As Proposições XIX e XXIX do Livro I formam praticamente um pequeno tratado sobre a descrição orgânica das cônicas e incluem alguns belos teoremas. Na Proposição XXVII, por exemplo, Newton relacionou as propriedades do quadrilátero completo com as cônicas. Usando o fato que os centros das cônicas tangentes a quatro retas jazem sobre uma reta (agora chamada reta de Newton)

[8]Veja, por exemplo, Livro II, Proposições IX-XVIII

[9]Veja Livro II, Proposições XLV-L

passando pelos pontos médios das três diagonais, ele achou a cônica tangente a cinco retas.

13 *Principia* é o maior monumento a Newton, mas de modo nenhum é o único. Newton era tão sensível às críticas que depois dos ataques feitos por Hooke e outros a seu artigo nos *Philosophical Transactions* de 1672 referente à natureza da cor[10] ele decidiu nada mais publicar. Esse artigo foi de grande importância para a física pois foi nele que Newton anunciou o que considerava uma das mais estranhas operações da natureza — que a luz branca era simplesmente uma combinação de raios de diferentes cores, cada cor tendo seu índice característico de refração. Isto é, quando um *spectrum* é formado pela passagem de luz branca por um prisma o papel do prisma é simplesmente o de separar os raios de acordo com os vários graus de refrangibilidade. Não era fácil para seus contemporâneos aceitar uma idéia tão revolucionária, e a controvérsia subseqüente aborreceu Newton. Por quinze anos ele não publicou mais nada, até que a insistência de Halley o levou a escrever e publicar os *Principia*. Enquanto isso, as três versões de seu cálculo que ele tinha escrito entre 1669 e 1676 permaneceram sob forma de manuscritos.

Cerca de quinze anos após o aparecimento dos *Principia* Hooke morreu, e então, finalmente, a aversão de Newton à publicação parece ter diminuído um pouco. *Opticks* apareceu em 1704 e nesse livro tinham sido juntadas duas obras matemáticas: *De quadratura curvarum*, em que finalmente apareceu impressa uma exposição inteligível dos métodos de Newton no Cálculo, e um pequeno tratado chamado *Enumeratio linearum tertii ordinis* (Enumeração de curvas de terceiro grau)[11]. Também *Enumeratio* fora escrito por volta de 1676, e é o mais antigo exemplo de obra dedicada unicamente a gráficos de curvas planas de grau superior. Newton notou setenta e duas espécies de cúbicas (uma meia dúzia é omitida) e uma curva de cada espécie é cuidadosamente traçada. Pela primeira vez são usados sistematicamente dois eixos, e não há hesitação quanto a coordenadas negativas. Entre as propriedades interessantes das cúbicas indicadas nesse tratado estão o fato de uma curva de terceiro grau não poder ter mais de três assintotas (assim como uma cônica não pode ter mais de duas) e que assim como todas as cônicas são projeções do círculo, também todas as cúbicas são projeções de uma "parábola divergente" $y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

14 *Enumeratio* não foi a única contribuição de Newton à geometria analítica. No *Método de fluxos* escrito em latim por volta de 1671 ele tinha sugerido oito tipos novos de sistemas de coordenadas. Um desses, a "Terceira Maneira" de Newton de determinar uma curva, era pelo que hoje chamamos coordenadas bipolares. Se x e y são as distâncias de um ponto variável a dois pontos fixos ou pólos, então as equações $x + y = a$ e $x - y = a$ representam elipses e hipérboles respectivamente e $ax + by = c$ são ovais de Descartes. Esse tipo de sistema de coordenadas é raramente usado hoje, mas o dado por Newton como "Sétima Maneira, Para Espirais" é hoje conhecido como sistema de coordenadas polares. Usando x onde hoje usamos θ ou ϕ e y onde usamos r ou ρ, Newton encontrou a subtangente à espiral de Arquimedes $by = ax$, assim como a outras espirais. Tendo dado a fórmula para o raio de curvatura em coordenadas retangulares, $R = (1 + \dot{y}^2)\sqrt{1 + \dot{y}^2}/\dot{z}$, onde $z = \dot{y}$, ele escreveu a fórmula correspondente em coordenadas polares como

$$R \operatorname{sen} \psi = \frac{y + yzz}{1 + zz - \dot{z}},$$

onde $z = \dot{y}/y$ e ψ é o ângulo entre a tangente e o raio vetor[12]. Newton deu também equações para as transformações de coordenadas retangulares para polares, exprimindo-as como $xx + yy = tt$ e $tv = y$, onde t é o raio vetor e v um segmento representando o seno do ângulo vetorial associado com o ponto (x, y) em coordenadas cartesianas.

15 No *Método dos fluxos* tanto como em *De analysi*, encontramos o "método de Newton" para solução aproximada de equações. Se a equação a ser resolvida é $f(x) = 0$, primeiro se coloca a raiz desejada entre dois valores $x = a_1$ e $x = b_1$ tais que no intervalo (a_1, b_1) nem a primeira nem a segunda derivada se anulam ou deixam de existir. Então para um dos valores, digamos $x = a_1$, $f(x)$ e $f''(x)$ terão o mesmo sinal. Nesse caso o valor $x = a_2$ será uma aproximação melhor se

$$a_2 = a_1 - \frac{f(a_1)}{f'(a_1)}$$

e esse processo pode ser aplicado iterativamente para obter uma aproximação a_n tão precisa quanto se queira. Se $f(x)$ é da forma $x^2 - a^2$, as aproximações sucessivas do método de Newton são as mesmas do antigo algoritmo babilônio para raiz quadrada; por isso este velho processo às vezes é chamado sem razão "algoritmo de Newton". Se $f(x)$ é um polinômio o método de Newton é em essência o mesmo método arábico-chinês que tem o nome de Horner; mas a grande vantagem do método de Newton é que se aplica igualmente a equações envolvendo funções transcendentes.

O *Método dos fluxos* continha também um diagrama que mais tarde se tornou conhecido como "paralelogramo de Newton", útil para desenvolvimentos em séries infinitas e para esboçar curvas. Para uma equação polinomial $f(x, y) = 0$ forma-se um reticulado cujos pontos de intersecção correspondem a termos de todos os graus possíveis na equação $f(x, y) = 0$; sobre este "paralelogramo" ligam-se por segmentos as intersecções que correspondem a termos efetivamente existentes na equação e forma-se então uma parte de um polígono convexo para o ponto de grau zero. Na Fig. 19.2 temos o diagrama para o *folium* de Descartes $x^3 + y^3 - 3axy = 0$. Então as equações que são obtidas igualando a zero sucessivamente a totalidade dos termos da equação dada, cujos pontos no reticulado jazem em cada segmento, serão equações aproximantes para ramos da curva passando pela origem. No caso do *folium* de Descartes as curvas aproximantes são $x^3 - 3axy = 0$ (ou a parábola $x^2 = 3ay$) e $y^3 - 3axy = 0$ (ou a parábola $y^2 = 3ax$); esboçando partes dessas parábolas perto da origem tem-se um bom auxílio para o esboço da equação dada $f(x, y) = 0$.

16 Os três livros de Newton melhor conhecidos hoje são os *Principia*, o *Método dos fluxos* e *Opticks*; há também uma quarta obra que no século dezoito apareceu em um número de edições[13] maior do que as outras três, e também essa continha contribuições valiosas.

Foi a *Arithmetica universalis*, obra composta entre 1673 e 1683, talvez para os cursos de Newton em Cambridge, e publicada pela primeira vez em 1707. Esse influente tratado contém as fórmulas, usualmente conhecidas como "identidades de Newton", para as somas das potências das raízes de um polinômio. Cardano sabia que a soma das raízes de $x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$ é $-a_1$, e Viète tinha levado um tanto mais longe a determinação de relações entre raízes e coeficientes. Girard em 1629 tinha mostrado como achar a soma dos quadrados das raízes, ou a soma dos cubos ou das quartas po-

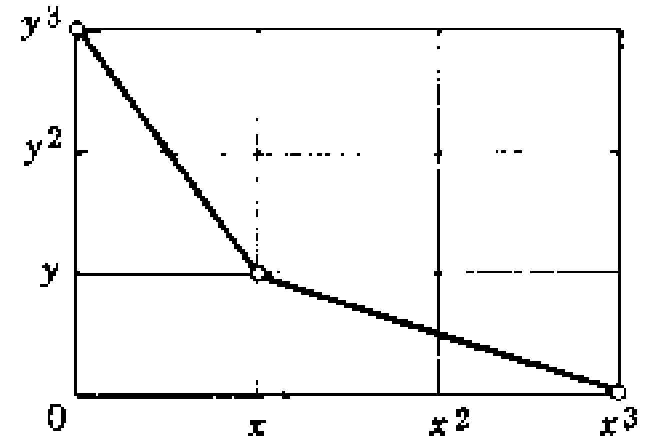


Figura 19.2

[10] Para uma reprodução fac-símile desse artigo, e de outros de Newton veja *Isaac Newton's Papers and Letters on Natural Philosophy*, editado por I. Bernard Cohen (Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1958)

[11] Veja W. W. Rouse Ball, "On Newton's Classification of Cubic Curves" *Proceedings of the London Mathematical Society*, **22** (1890-1891), 104-143, para uma boa exposição sobre essa obra

[12] Para mais detalhes veja C. B. Boyer, "Newton como Originador das Coordenadas Polares", *American Mathematical Monthly*, **16** (1949), 73-78

[13] Houve pelo menos cinco edições em latim (1707, 1722, 1732, 1752, 1761) e três em inglês (1720, 1728, 1769). Uma tradução para o francês apareceu em 1802

tências, mas foi Newton quem generalizou isso para cobrir todas as potências. Se $K \leq n$, as relações

$$S_K + a_1 S_{K-1} + \ldots + a_K K = 0;$$

$$S_K + a_1 S_{K-1} + \ldots + a_K S_0 + a_{K+1} S_{-1} + \ldots + a_n S_{K-n} = 0;$$

valem ambas; se $K > n$, vale a relação

$$S_K + a_1 S_{K-1} + \ldots + a_{n-1} S_{K-n+1} + a_n S_{K-n} = 0;$$

onde S_1 é a soma das i-ésimas potências das raizes. Usando recursivamente essas relações, pode-se achar facilmente a soma de potências das raízes para qualquer potência inteira. Na *Arithmetica Universalis* há também um teorema que generaliza a regra dos sinais de Descartes para determinar o número de raízes imaginárias de um polinômio, bem como uma regra para uma majoração para as raízes positivas. Outro teorema diz que se uma cúbica é cortada por uma reta variável, que se move paralelamente a si mesma, o lugar dos baricentros dos três pontos de intersecção é uma reta.

Apesar de suas contribuições à álgebra, Newton parece ter preferido a análise geométrica dos antigos. Por isso, a secção mais longa na *Arithmetica universalis* é a que trata da resolução de questões geométricas. Aqui a solução de equações cúbicas é feita com a ajuda de uma cônica dada, pois Newton considerava construções geométricas por meio de curvas outras que a reta e o círculo como parte da álgebra e não da geometria:

> Equações são Expressões de Cálculo Aritmético e propriamente não têm lugar na Geometria . . . Por isso as secções cônicas e todas as outras Figuras devem ser tiradas da Geometria plana, exceto a Linha reta e o Círculo. Portanto todas essas descrições das Cônicas *in plano*, de que os Modernos gostam tanto, são estranhas à Geometria.

O conservadorismo de Newton nesse ponto contrasta fortemente com seu ponto de vista radical em análise — e com o ponto de vista pedagógico dos meados do século vinte.

17 *Principia* foi o primeiro tratado de Newton a ser publicado, mas foi o último na ordem de composição. A fama lhe tinha vindo relativamente cedo, pois fora eleito para a Royal Society em 1672, quatro anos antes de ter construído seu telescópio refletor (a idéia desse tinha ocorrido também a Gregory antes ainda). Os *Principia* obtiveram aprovação entusiástica, e em 1689 Newton foi eleito para representar Cambridge no Parlamento Britânico. Apesar do generoso reconhecimento que obteve, em 1692 Newton ficou deprimido e sofreu um esgotamento nervoso. Talvez achando que a pesquisa científica continuada era esgotadora, em 1696 ele aceitou sua nomeação como *Warden of the Mint* (Guardião da casa da moeda), tornando-se *Master of the Mint* três anos depois. Evidentemente Newton sentiu-se bem e bem sucedido nessa posição, em parte, talvez, porque durante boa parte de sua vida ele havia se dedicado à pesquisa em química, com especial interesse pela alquimia. A teologia e a cronologia também lhe chamaram a atenção. Parece que era um cripto-Unitário, embora externamente professando a visão religiosa Trinitária do tempo. Seus *Chronology of Ancient Kingdoms Amended* e *Observations upon the Prophecies of Daniel and the Apocalipse of St. John* foram publicados após sua morte.

Em seus últimos anos as honrarias choveram sobre Newton. Em 1699 foi eleito associado estrangeiro da Académie des Sciences, em 1703 tornou-se presidente da Royal Society, conservando o posto pelo resto de sua vida, e em 1705 recebeu um título de nobreza da Rainha Anne. No entanto, um acontecimento lançou uma nuvem sobre a vida de Newton após 1695. Nesse ano Wallis lhe disse que na Holanda o cálculo era considerado descoberta de Leibniz. Em 1699 Nicolas Fatio de Duillier (1664-1753), um obscuro matemático suíço que vivia na Inglaterra, insinuou num artigo para a Royal Society que Leibniz poderia ter tirado suas idéias sobre o Cálculo de Newton. Ante essa afronta Leibniz em *Acta Eruditorum* de 1704 insistiu em que tinha direito à prioridade na publicação e protestou perante a Royal Society contra a acusação de plágio. Em 1705 a *De quadratura curvarum* de Newton recebeu crítica desfavorável (de Leibniz?) em *Acta*

Eruditorum; e em 1708 John Keill (1671-1721), professor em Oxford, vigorosamente defendeu a pretensão de Newton contra a de Leibniz num artigo na *Philosophical Transactions*. Os repetidos apelos de Leibniz à Royal Society finalmente levaram essa a designar uma comissão para estudar a questão e fazer um relatório. O relatório da comissão, sob o título *Commercium epistolicum*, foi publicado em 1712; mas não melhorou a situação. Tinha chegado à conclusão banal de que Newton fora o primeiro inventor, ponto que não fora seriamente disputado para começar. Implicações de plágio foram apoiadas pela comissão em termos de documentos que supunham que Leibniz tivesse visto, mas que agora se sabe que ele não havia recebido. O azedume do sentimento nacionalista chegou a tal ponto que em 1726, uma década depois da morte de Leibniz, Newton retirou da terceira edição dos *Principia* toda referência ao fato de Leibniz ter tido um método no Cálculo semelhante ao de Newton.

Em conseqüência da deprimente disputa de prioridade, os matemáticos ingleses ficaram até certo ponto afastados dos do Continente durante boa parte do século dezoito.

Assim a geração seguinte de matemáticos na Inglaterra pagou um preço pela injustiça praticada pelos seguidores de Newton em relação a Leibniz pois o resultado foi que a matemática inglesa ficou para trás em relação à da Europa continental. Ao morrer, Newton foi enterrado na Abadia de Westminster com tal pompa que Voltaire, que assistiu aos funerais, disse mais tarde, "Eu vi um professor de matemática, só porque era grande em sua vocação, ser enterrado como um rei que tivesse feito bem a seus súditos". No entanto, apesar do reconhecimento dado ao sucesso matemático na Inglaterra o desenvolvimento matemático lá não acompanhou os passos rápidos dados em outras partes da Europa durante o século dezoito.

BIBLIOGRAFIA

Ball, W. W. Rouse, "On Newton's Classification of Cubic Curves," *Proceedings of the London Mathematical Society*, **22** (1890-1891), 104-143

Boyer, Carl B., *History of Analytic Geometry* (New York: Scripta Mathematica, 1956)

Boyer, Carl B., *History of the Calculus* (New York: Columbia University Press, 1939; edição em brochura, New York: Dover, 1959)

Cajori, Florian, "The History of Notations of the Calculus," *Annals of Mathematics* (2), **25** (1924), 1-46

Cajori, Florian, *A History of Mathematical Notations* (Chicago: Open Court, 1928-1929, 2 volumes)

Child, J. M., ed., *The Early Mathematical Manuscripts of Leibniz*, traduzido por C. I. Gerhardt (Chicago: Open Court, 1920)

De Morgan, Augustus, *Essays on the Life and Work of Newton* (Chicago e Londres: Open Court, 1914)

Gerhardt, C. I., *Die Entdeckung der differentialrechnung durch Leibniz* (Halle, 1848)

Gerhardt, C. I., *Die Geschichte der höheren Analysis*. Parte 1, *Die Entdeckung der höheren Analysis* (Halle, 1855)

Hall, A. R., e M. B. Hall, eds., *Unpublished Scientific Papers of Isaac Newton* (Cambridge: Cambridge University Press, 1962)

Hofmann, J. E., *Die Entwicklungsgeschichte der Leibnizschen Mathematik während des Aufenthaltes in Paris* (1672-76) (Munich: Leibniz Verlag, 1949)

Hofmann, J. E., "Zur Entdeckungsgeschichte der höheren Analysis im 17. Jahrhundert," *Mathematisch-Physikalische Semesterberichte*, **1** (1950)

Leibniz, G. W., *Mathematische Schriften*, editado por C. I. Gerhardt, in *Gesammelte Werke*, editado por G. H. Pertz, 3.ª series, *Mathematik* (Halle, 1849-1863, 7 volumes)

Mahnke, Dietrich, "Neue Einblicke in die Entdeckungsgeschichte der höheren Analysis," *Abhandlungen der Preussische Akademie der Wissenschaften*, Physikalisch-Mathematische Klasse, **1** (1925), 1-64

Mahnke, Dietrich, "Zur Keimesgeschichte der Leibnizschen Differentialrechnung," *Sitzungsberichte der Gesellschaft zur Beförderung der Gesamten Naturwissenschaften zu Marburg*, **47** (1932), 31-69

More, L. T., *Isaac Newton, a Biography* (New York: reimpressão Dover, 1962)

Muir, Thomas, *The Theory of Determinants in the Historical Order of Development* (New York: reimpressão Dover, 1960, 4 volumes)

Newton, Sir Isaac, *Opera quae exstant omnia*, editado por Samuel Harsley (Londres, 1779-1785, 5 volumes)

Newton, Sir Isaac, *Mathematical Principles of Natural Philosophy*, traduzido por Andrew Motte, editado por Florian Cajori (Berkeley, Calif.: University of California Press, 1934)

Newton, Sir Isaac, *Mathematical Works*, editado por D. T. Whiteside (New York: reimpressão Johnson, 1964-1967, 2 volumes)
Newton, Sir Isaac, *Mathematical Papers*, editado por D. T. Whiteside (Cambridge: Cambridge University Press, 1967), Vol. I; Vols. II-VIII
Rosenthal, A., "The History of Calculus," *American Mathematical Monthly*, **58** (1951), 75-86
Sergescu, P., *Les recherches sur l'infini mathématique jusqu'à l'etablissement de l'analyse infinitésimale* (Paris, 1949)
Smith, D. E., ed., *Source Book in Mathematics* (New York: McGraw-Hill, 1929; edição em brochura, New York: Dover, 1959, 2 volumes)
Toeplitz, Otto, *The Calculus, a Genetic Approach* (Chicago: University of Chicago Press, 1963)
Turnbull, H. W., *Mathematical Discoveries of Newton* (Glasgow: Blackie, 1945)
Turnbull, H. W., ed., *Correspondence of Newton* (Cambridge: Cambridge University Press, 1959-1961, 3 volumes)
Wieleitner, H., *Geschichte der Mathematik* (Leipzig: Walter de Gruyter, 1911, 2.ª parte, primeira metade)
Zeuthen, H. G., *Geschichte der Mathematik im* 16. *und* 17. *Jahrhundert*, editado em alemão por Raphael Meyer (Leipzig: B. G. Teubner, 1903)

EXERCÍCIOS

1. Compare as vidas de Newton e Leibniz no que se refere a meios de sustento e oportunidade de viajar.
2. Compare as contribuições de Newton e Leibniz à notação matemática.
3. Newton devia mais a Wallis que a Barrow? Explique.
4. Leibniz devia mais a Pascal que a Barrow? Explique.
5. Os números imaginários estão meio caminho entre existência e não-existência, como Leibniz dizia? Explique.
6. Que vantagens relativas em pesquisa matemática tinha Newton sobre Leibniz?
7. Compare a forma de Newton do teorema binomial com a usada hoje e mostre que as duas formas são equivalentes.
8. Discuta até que ponto a primeira e última razão de Newton é o mesmo que o limite moderno.
9. Use o método de Newton de séries para calcular aproximadamente $\int_0^1 \sqrt[3]{1 - x^3}\, dx$.
10. Ache pelo primeiro método de Newton, usando o, p e q, a inclinação de $y^2 = x^3 + 6x - 6$ no ponto (1, 1).
11. Mostre que se A varia de $A - a/2$ até $A + a/2$ e se B varia de $B - b/2$ até $B + b/2$, então AB varia por $aB + bA$.
12. Mostre como se acha o momento $3aA^2$ de A^3 usando o resultado do Exerc. 11.
13. Mostre como se acha o momento de $1/A$ usando o resultado do Exerc. 11.
14. Escreva os números na diagonal seguinte para os triângulos aritmético e harmônico dados no texto.
15. Verifique que a soma dos números na terceira linha do triângulo harmônico é 1/2.
16. Usando o método de Leibniz ache

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}.$$

17. Usando a fórmula de Leibniz ache a sexta derivada de x^2e^{2x}.
18. Usando a regra de Leibniz ache a envoltória da família a um parâmetro de retas $y = cx + c^2$.
19. Explique o que está errado no argumento de Leibniz de que a soma da série alternada infinita $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \cdots$ é 1/2.
20. Use um equivalente do método de Leibniz dos determinantes para verificar se o sistema de equações $2x - 3y = 6$; $3x + 4y = 7$; $x - 27y = 9$ é consistente.
21. Ache pelo método de Newton até o centésimo mais próximo a raiz da equação $x^3 - 2x - 5 = 0$ que está entre 2 e 3.
22. Ache pelo método de Newton até o décimo mais próximo a raiz da equação $2 \operatorname{sen} x = x$ que está entre $\pi/2$ e π.
23. Mostre graficamente por que o método de Newton pode falhar se $f(a_1)$ e $f''(a_1)$ não têm o mesmo sinal.
24. Descreva a curva dada em coordenadas bipolares pela equação $y = mx$, onde m é uma constante.
25. Verifique a afirmação de Leibniz de que $\sqrt{6} = \sqrt{1 + \sqrt{-3}} + \sqrt{1 - \sqrt{-3}}$.

26. Que altura de atmosfera uniforme Newton assumiu para chegar à velocidade de 979 pés/s para o som?
27. Use o paralelogramo de Newton para achar curvas aproximantes na origem para $y^3 - 2xy + x^4 = 0$, esboçando as curvas de aproximação.
28. Verifique que as fórmulas de Newton para o raio de curvatura são equivalentes às usadas hoje.
29. Usando o método de Newton para reversão de séries ache os quatro primeiros termos na série para e^x partindo de

$$\ln (1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

30. Use as identidades de Newton para achar a soma das quintas potências das raízes de $x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = 0$.

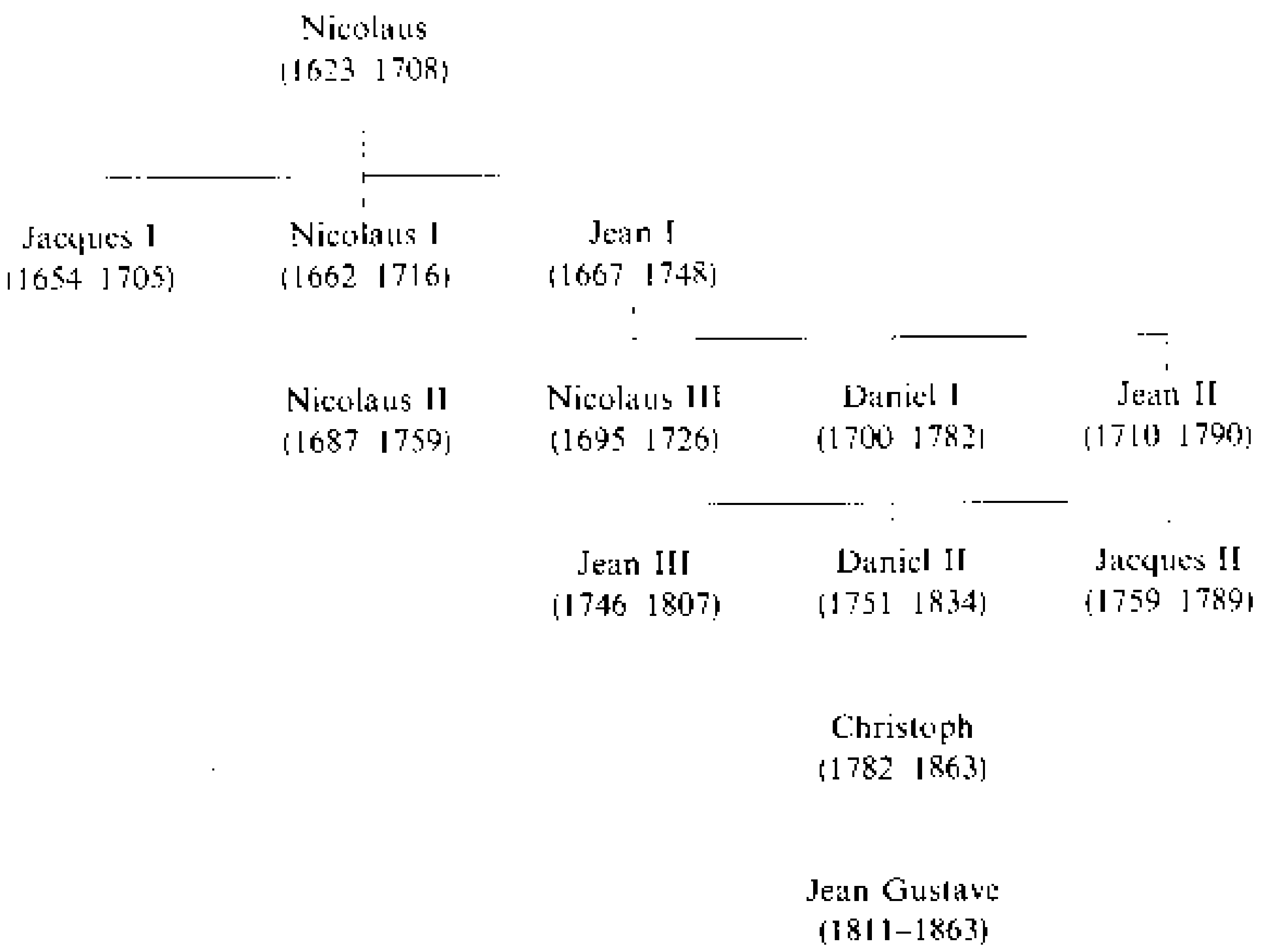
Capítulo **20**

A Era Bernoulli

> Aquele que pode digerir um segundo ou terceiro fluxo, uma segunda ou terceira diferença, não precisa, creio eu, ter relutância em face de qualquer questão sobre a Divindade.
>
> *George Berkeley*

1 As descobertas de um grande matemático, como Newton, não se tornam automaticamente parte da tradição matemática. Podem ficar perdidas para o mundo a menos que outros cientistas as compreendam e se interessem suficientemente para encará-las de vários pontos de vista, esclarecê-las e generalizá-las, e indicar suas implicações. Newton, infelizmente, era demasiadamente sensível e não se comunicava livremente, por isso o método dos fluxos não era bem conhecido fora da Inglaterra. Leibniz, por outro lado, encontrou discípulos dedicados que estavam ansiosos por aprender o cálculo diferencial e integral e transmitir o conhecimento a outros. Na primeira linha desses entusiastas estavam dois irmãos suíços, Jacques Bernoulli (1654-1705) e Jean Bernoulli (1667-1748), freqüentemente conhecidos também pela forma anglicizada de seus nomes, James e John (ou pelos equivalentes alemães, Jakob e Johann), cada um tão disposto a ofender quanto a sentir-se ofendido.

Nenhuma família na história da matemática produziu tantos matemáticos célebres quanto a família Bernoulli, que, assustada com a fúria espanhola em 1576, tinha fugido para Basiléia, vinda dos Países Baixos espanhóis católicos, em 1583. Cerca de uma dúzia de membros da família (ver a árvore genealógica) conseguiu renome na matemática e na física, e quatro deles foram eleitos como sócios estrangeiros da Académie des Sciences. O primeiro a atingir proeminência na matemática foi Jacques Bernoulli. Ele nasceu e morreu em Basiléia, mas viajou muito para encontrar cientistas de outros países. Seu interesse tinha sido dirigido para os infinitésimos pelas obras de Wallis e Barrow, e os



Os Bernoullis matemáticos: árvore genealógica

artigos de Leibniz em 1684-1686 lhe permitiram dominar os novos métodos. Em 1680, quando ele sugeriu a Leibniz o termo "integral", Jacques Bernoulli estava ele próprio contribuindo com artigos sobre o assunto na *Acta Eruditorum*. Entre outras coisas, ele observou que num ponto de máximo ou mínimo a derivada da função não precisa se anular, mas pode tomar um "valor infinito" ou assumir forma indeterminada. Ele logo se interessou por séries infinitas, e em seu primeiro artigo sobre o assunto em 1689 ele apresentou a bem conhecida "desigualdade de Bernoulli" $(1 + x)^n > 1 + nx$, onde x é real e $x > -1$ e $x \neq 0$ e n é um inteiro maior que um; mas esta pode ser encontrada já antes na sétima conferência das *Lectiones geometricae* de Barrow de 1670. A ele é também freqüentemente atribuída a demonstração de que a série harmônica é divergente, pois a maior parte das pessoas não conhecia provas mais antigas de Oresme e Mengoli. Na verdade, Jacques Bernoulli acreditava que seu irmão fora o primeiro a observar a divergência da série harmônica.

Jacques Bernoulli ficou fascinado pela série dos recíprocos dos números figurados, e embora soubesse que a série dos recíprocos dos quadrados perfeitos é convergente, não conseguiu achar sua soma. Como os termos de

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots$$

são, termo a termo, menores ou iguais aos de

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n-1)} + \ldots$$

e sabe-se que essa última série converge para 2, era claro para Bernoulli que a primeira era convergente.

Correspondendo-se freqüentemente com outros matemáticos de seu tempo, Jacques Bernoulli estava a par dos problemas populares, muitos dos quais ele resolveu independentemente. Entre esses estavam os de achar as equações da catenária, da tratriz e da isócrona, todos problemas tratados por Huygens e Leibniz. A isócrona requeria a equação de uma curva plana ao longo da qual um objeto cairia com velocidade vertical uniforme, e Bernoulli mostrou que a curva procurada é a parábola semicúbica. Foi em conexão com tais problemas que os irmãos Bernoulli descobriram o poder do cálculo, e mantiveram comunicação com Leibniz sobre todos os aspectos do novo assunto. Jacques Bernoulli em sua obra sobre a isócrona na *Acta Eruditorum* de 1690 usou a palavra "integral" e poucos anos depois Leibniz concordou que *calculus integralis* seria um nome melhor que *calculus summatorius* para o inverso do *calculus differentialis*. No campo das equações diferenciais Jacques Bernoulli contribuiu com o estudo da "equação de Bernoulli" $y' + P(x)y = Q(x)y^n$ que ele, Leibniz e Jean Bernoulli resolveram — Jean por redução a uma equação linear mediante a substituição $z = y^{1-n}$. Foi especialmente por causa de um problema sobre cálculo de variações que os dois irmãos Bernoulli entraram em forte conflito um com o outro. (Jacques era o quinto filho na família, Jean o décimo; o mais jovem talvez tivesse ressentimentos pelo que considerava como atitude de condescendência do outro.) Leibniz e os Bernoullis estavam procurando uma solução para o problema da braquistocrona — achar uma curva ao longo da qual uma partícula desliza no menor tempo possível de um ponto dado a um segundo ponto dado mais abaixo, mas não diretamente sob o primeiro. Jean achara uma prova incorreta de que a curva é uma ciclóide, e desafiou o irmão a descobrir a curva requerida. Depois que Jacques provou corretamente que a curva é uma ciclóide, Jean tentou substituir sua prova pela do irmão.

2 Jacques Bernoulli tinha fascinação por curvas e pelo cálculo, e uma curva tem seu nome — a "lemniscata de Bernoulli" dada pela equação polar $r^2 = a \cos 2\theta$. A curva foi descrita na *Acta Eruditorum* como semelhante a um oito ou uma fita com laço (lemniscus). Mas a curva que mais lhe prendeu a imaginação foi a espiral logarítmica. Essa curva fora mencionada por Descartes e retificada por Torricelli, mas Bernoulli mostrou que tem várias propriedades notáveis não observadas antes: (1) a evoluta de uma espiral loga-

rítmica é uma espiral logarítmica igual; (2) a curva pedal de uma espiral logarítmica em relação ao seu pólo (isto é, o lugar das projeções do pólo sobre as tangentes da curva dada) é uma espiral logarítmica igual; (3) a cáustica por reflexão para raios emanando do pólo (isto é, a envoltória dos raios refletidos em pontos da curva dada) é uma espiral logarítmica igual; e (4) a cáustica por refração para raios emanando do pólo (isto é, a envoltória de raios refratados em pontos da curva) é uma espiral logarítmica igual. É fácil entender o sentimento que levou Bernoulli a pedir que a *spira mirabilis* fosse gravada em sua pedra tumular juntamente com a inscrição *Eadem mutata resurgo* ("Embora modificada, novamente apareço igual").

Jacques Bernoulli fora levado a espirais de tipo diferente quando repetiu o processo de Cavalieri de enrolar metade da parábola $x^2 = ay$ em torno da origem para produzir uma espiral de Arquimedes; mas ao passo que Cavalieri estudara a transformação por métodos essencialmente sintéticos, Bernoulli usou coordenadas retangulares e polares. Newton usara coordenadas polares antes — talvez desde 1671 — mas a prioridade de publicação parece pertencer a Bernoulli que na *Acta Eruditorum* de 1691 propôs medir abscissas ao longo do arco de um círculo fixo e ordenadas radialmente ao longo das normais. Três anos depois, na mesma revista, ele propôs uma modificação que concordava com o sistema de Newton. A coordenada y agora era o comprimento do raio vetor do ponto, e x era o arco cortado pelos lados do ângulo vetorial sobre um círculo de raio a descrito com centro no pólo. Essas coordenadas eram essencialmente o que agora escreveríamos como $(r, a\theta)$. Bernoulli, como Newton, estava interessado principalmente em aplicações do sistema ao Cálculo; por isso ele também calculou fórmulas para comprimento de arco e raio de curvatura em coordenadas polares. Para sua "espiral parabólica" $r^2 = a\theta$ ele observou que a questão do comprimento de arco leva, através de $ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2}$, à integral da raiz quadrada de um polinômio quártico, o primeiro exemplo específico do que hoje chamamos uma integral elítica.

3 As contribuições matemáticas dos Bernoullis, como as de Leibniz, se encontram principalmente em artigos, em revistas, especialmente a *Acta Eruditorum*; mas Jacques Bernoulli escreveu também um tratado clássico chamado *Ars conjectandi* (ou Arte de Conjeturar), publicado em 1713, oito anos depois da morte do autor. Esse é o mais antigo volume substancial sobre a teoria das probabilidades, pois o *De ludo aleae* de Huygens fora apenas uma breve introdução. O tratado de Huygens, na verdade, é reproduzido como a primeira das quatro partes da *Ars conjectandi*, junto com comentário de Bernoulli. A segunda parte da *Ars conjectandi* contém uma teoria geral de permutações e combinações, facilitada pelos teoremas binomial e multinomial. Aqui achamos a primeira prova adequada do teorema binomial para potências inteiras positivas. A prova é por indução matemática, método que Bernoulli tinha redescoberto enquanto lia a *Arithmetic infinitorum* de Wallis e que ele tinha publicado na *Acta Eruditorum* em 1686. Deu a Pascal o crédito pelo teorema binomial com expoente geral, mas essa atribuição parece gratuita. Newton parece ter sido o primeiro a enunciar o teorema em forma geral para qualquer expoente racional, embora não desse prova, sendo esta fornecida mais tarde por Euler. Em conexão com a expansão de $(1 + 1/n)^n$ Jacques Bernoulli propôs o problema da composição contínua de juros — isto é, de achar $\lim_{n \to \infty} (1 + 1/n)^n$. Como

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \ldots + \frac{1}{1 \cdot 2 \ldots n} < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^{n-1}} < 3,$$

era claro para ele que o limite existia.

A segunda parte da *Ars conjectandi* contém também os "números de Bernoulli". Esses surgiam como coeficientes numa fórmula de recorrência para as somas das potências dos inteiros, e hoje encontram aplicações em outras questões. A fórmula era escrita por

Bernoulli como segue[1]:

$$\int n^c = \frac{1}{c+1} n^{c+1} + \frac{1}{2} n^c + \frac{c}{2} A n^{c-1} + \frac{c(c-1)(c-2)}{2 \cdot 3 \cdot 4} B n^{c-3}$$
$$+ \frac{c(c-1)(c-2)(c-3)(c-4)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} C n^{c-5} \ldots$$

onde $\int n^c$ indica a soma das potências c-ésimas dos n primeiros inteiros positivos e as letras $A, B, C, \ldots$ (os números de Bernoulli) são os coeficientes do termo em n (o último termo) nas expressões correspondentes para $\int n^2, \int n^4, \int n^6, \ldots$ [Os números podem também ser definidos como $n!$ vezes os coeficientes dos termos de expoente par na expansão de Maclaurin da função $x/(e^x - 1)$.] Os números de Bernoulli são úteis para escrever as expansões em série infinita das funções trigonométricas e hiperbólicas. Verifica-se facilmente que os três primeiros números são $A = 1/6$, $B = 1/30$ e $C = 1/42$.

A terceira e a quarta partes da *Ars conjectandi* são dedicadas principalmente a problemas que ilustram a teoria das probabilidades. A quarta e última parte contém o célebre teorema que hoje tem o nome do autor, e sobre o qual Bernoulli e Leibniz tinham trocado correspondência — a chamada "Lei dos grandes números". Essa diz que se p é a probabilidade de um evento, se m é o número de ocorrências do evento em n experiências, se ε é um número positivo arbitrariamente pequeno, e se P é a probabilidade de que a desigualdade $|m/n - p| < \varepsilon$ esteja satisfeita, então $\lim_{n \to \infty} P = 1$.

À *Ars conjectandi* está juntado um longo artigo sobre séries infinitas. Além da série harmônica e da soma dos recíprocos dos quadrados perfeitos, Bernoulli considerou a série

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots$$

Ele sabia (por comparação dos termos com os da série harmônica) que essa diverge, e observou o paradoxo que a razão da "soma" de todos os termos ímpares para a "soma" de todos os termos pares é a de $\sqrt{2} - 1$ para 1, de onde se concluiria que a soma de todos os termos ímpares é menor que a soma de todos os termos pares; mas isto é impossível porque termo por termo a primeira é maior que a segunda.

4 O pai dos famosos irmãos Bernoulli, Nicolaus (1623-1708) tinha tido planos bem definidos para os futuros de seus filhos, e tinha posto obstáculos a tornarem-se matemáticos. Jacques, o mais velho, tinha sido destinado a ser ministro religioso, e Jean deveria tornar-se comerciante ou médico. O mais moço, na verdade, escreveu sua dissertação para doutorado em 1690 sobre efervescência e fermentação, mas no ano seguinte ficou tão interessado pelo Cálculo que durante 1691-1692 ele escreveu dois pequenos livros de texto sobre o cálculo diferencial e integral, embora nenhum dos dois fosse publicado senão muito mais tarde. Enquanto se encontrava em Paris em 1692 ele ensinou a um jovem marquês francês, G. F. A. de L'Hospital (1661-1704) a nova disciplina leibniziana; e Jean Bernoulli assinou um pacto pelo qual, a troco de um salário regular, ele concordava em enviar a L'Hospital suas descobertas matemáticas, para serem usadas como o marquês o desejasse. O resultado foi que uma das mais importantes contribuições de Bernoulli, datada de 1694, a partir daí passou a ser conhecida como regra de L'Hospital sobre formas indeterminadas. Jean Bernoulli descobrira que se $f(x)$ e $g(x)$ são funções diferenciáveis em $x = a$ tais que $f(a) = 0$ e $g(a) = 0$ e

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

[1]Veja D. E. Smith, *Source Book in Mathematics* (1929), pp. 85-90, para uma tradução das páginas de *Ars conjectandi* que tratam de números de Bernoulli. Para referências bibliográficas e mais detalhes sobre a obra de Jacques Bernoulli, ver o artigo sobre Bernoulli por J. E. Hofmann a aparecer no Vol. I do *Dictionary of Scientific Biography* (New York: Scribner's)

existe, então

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Essa regra bem conhecida foi incorporada por L'Hospital no primeiro livro de texto sobre cálculo diferencial a aparecer impresso — *Analyse des infiniment petits*, publicado em Paris em 1696. Esse livro, cuja influência dominou quase todo o século dezoito, se baseia em dois postulados: (1) que duas quantidades que diferem só por uma quantidade infinitamente pequena podem ser consideradas iguais e (2) que uma curva pode ser considerada como formada de segmentos de reta infinitamente pequenos que determinam, pelos ângulos que formam uns com os outros, a curvatura da curva. Esses postulados hoje não seriam considerados aceitáveis, mas L'Hospital os considerava "tão evidentes que não deixavam lugar ao menor escrúpulo quanto à sua validade e certeza na mente de um leitor atento". As fórmulas diferenciais básicas para funções algébricas são obtidas à maneira de Leibniz, e são feitas aplicações a tangentes, máximos e mínimos, pontos de inflexão, curvatura, cáusticas, e formas indeterminadas. O livro termina com um enunciado que diz serem os métodos gerais, podendo ser estendidos também a curvas transcendentes[2]. L'Hospital era um autor excepcionalmente convincente, pois seu *Traité analytique des sections coniques*, publicado postumamente em 1707, fez pela geometria analítica do século dezoito o que a *Analyse* fizera pelo cálculo. O *Traité* não era especialmente original, mas tinha qualidades pedagógicas que o tornaram o tratado padrão sobre cônicas durante a maior parte do século[3].

5 A *Analyse* de L'Hospital teve grande sucesso e apareceu em numerosas edições durante todo o século seguinte. No prefácio o autor admitira dever muito a Leibniz e aos Bernoullis, especialmente ao "jovem professor em Groningen" (onde Jean fora admitido como professor em 1695). Jean Bernoulli escreveu a L'Hospital para agradecer-lhe a menção no livro, mas depois da morte do marquês em 1704 Bernoulli, em cartas a outros, praticamente acusou o autor de plágio. Os contemporâneos consideraram as reivindicações de Bernoulli infundadas, mas a publicação recente da correspondência Bernoulli-L'Hospital[4] indica que muito do trabalho se deve evidentemente a Bernoulli. Bernoulli não publicou seu próprio livro sobre cálculo diferencial (que foi impresso finalmente em 1924) e o texto sobre cálculo integral apareceu cinqüenta anos depois de ter sido escrito — em suas *Opera omnia* de 1742. Durante esse tempo todo Jean escreveu prolificamente sobre vários aspectos avançados da análise — a isócrona, sólidos de resistência mínima, a catenária, a tratriz, trajetórias, curvas cáusticas, problemas isoperimétricos — conquistando uma reputação graças à qual foi chamado a Basiléia em 1705 para ocupar a cadeira que ficara vaga por morte de seu irmão. Sua correspondência com Leibniz foi muito ativa, e ele defendeu a causa de Leibniz contra Newton com agressividade injustificada. Poder-se-ia chamá-lo o cão de fila de Leibniz, pois ele fez para o Cálculo o que Huxley mais tarde realizou para a teoria da evolução de Darwin. Sua falta de tato levou-o a uma amarga controvérsia com seu irmão, e sua natureza ciumenta levou-o a expulsar de casa um filho, Daniel, por ter conquistado um prêmio da Académie des Sciences pelo qual Jean também competira; mas ele era um professor que entusiasmava e um infatigável pesquisador. É freqüentemente considerado como o inventor do cálculo

[2]Para mais ampla descrição da *Analyse* veja C. B. Boyer, "The First Calculus Textbooks", *The Mathematics Teacher*, **39** (1946), 159-167. Parte do material na *Analyse* era certamente trabalho independente de L'Hospital, pois ele era um matemático competente. A retificação da curva logarítmica, por exemplo, parece ter aparecido pela primeira vez em 1692 numa carta de L'Hospital a Leibniz. Uma exposição notavelmente extensa da obra de L'Hospital se encontra em J. L. Coolidge, *The Mathematics of Great Amateurs* (1949), Cap. 12, pp. 147-170

[3]Para uma descrição do conteúdo do *Traité* ver C. B. Boyer, *History of Analytic Geometry* (1956), pp. 150-154

[4]Veja *Der Briefwechsel von Johann Bernoulli*, editado por Otto Spiess, (1955), Vol. I. Cf. Otto Spiess, "Une édition de l'oeuvre des mathématiciens Bernoulli", *Archives Internationales d'Histoire des Sciences*, **1** (1947), 356-362

de variações, por ter proposto em 1696-1697 o problema da braquistocrona; e contribuiu para a geometria diferencial por seu trabalho sobre geodésicas sobre uma superfície. Também a ele é freqüentemente atribuído o cálculo com exponenciais, pois ele estudou não só as curvas exponenciais simples $y = a^x$ mas as exponenciais gerais tais como $y = x^x$. Para a área sob a curva $y = x^x$ de $x = 0$ a $x = 1$ ele achou a notável representação como série infinita

$$\frac{1}{1^1} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \ldots$$

Esse resultado ele obteve escrevendo $x^x = e^{x \ln x}$, expandindo isso na série exponencial e integrando termo a termo, usando integração por partes.

6 Jean e Jacques Bernoulli redescobriram as séries para sen $n\theta$ e cos $n\theta$, em termos de sen θ e cos θ, que Viète conhecia, e estenderam tais séries, sem exame, incluindo valores fracionários de n. Jean percebeu também a relação entre as funções trigonométricas inversas e os logaritmos imaginários, descobrindo em 1702, através de equações diferenciais, a relação

$$\operatorname{arctg} z = \frac{1}{i} \ln \sqrt{\frac{1+iz}{1-iz}}.$$

Ele se correspondeu com outros matemáticos sobre os logaritmos de números negativos, mas aqui ele erradamente acreditava que $\log(-n) = \log n$. Inclinava-se a desenvolver a trigonometria e a teoria dos logaritmos de um ponto de vista analítico, e experimentou várias notações para uma função de x, das quais a mais próxima da moderna foi ϕx. Seu vago conceito de função era expresso como "uma quantidade composta de qualquer modo de uma variável e constantes quaisquer". Entre suas numerosas controvérsias conta-se uma com matemáticos ingleses quanto a ser ou não a bem conhecida série de Brook Taylor (1685-1731), publicada em *Methodus incrementorum* de 1715, um plágio da série de Bernoulli

$$\int y\,dx = yx - \frac{x^2}{2!}\frac{dy}{dx} + \frac{x^3}{3!}\frac{d^2y}{dx^2} - \ldots$$

Nem Bernoulli nem Taylor sabiam que ambos tinham sido antecipados por Gregory na descoberta da "série de Taylor".

7 Jean Bernoulli conservou um zelo pela matemática tão vivo quanto sua persistência em controvérsias. Além disso, foi pai de três filhos, Nicholas (1695-1726), Daniel (1700-1782) e Jean II (1710-1790), todos os quais em alguma ocasião ocuparam postos de professor de matemática: Nicholas e Daniel em S. Petersburgo e Daniel e Jean II em Basiléia. (Outro Nicolaus (1687-1759), primo do já mencionado, durante algum tempo ocupou a cadeira de matemática em Pádua que Galileu ocupara em seu tempo.) Houve ainda outros Bernoullis que conseguiram alguma eminência em matemática[5], mas desses nenhum conseguiu fama comparável à dos dois irmãos, Jacques e Jean. Da geração mais jovem o mais célebre foi Daniel, cujo trabalho em hidrodinâmica é lembrado pelo "princípio de Bernoulli".

Na matemática ele é lembrado principalmente por ter feito a distinção, em teoria das probabilidades, entre esperança matemática e "esperança moral", ou entre "fortuna física" e "fortuna moral". Ele assumiu que um pequeno acréscimo nos meios materiais de uma pessoa causa um aumento de satisfação que é inversamente proporcional aos

[5]Encontra-se alguma referência sobre esses em Smith, *History of Mathematics* (1958), I, 431-433. Entre os Bernoullis menores ainda não mencionados estão três filhos de Jean II: Jean III (1744-1807), Daniel II (1751-1834) e Jacques II (1759-1789). O primeiro desses foi professor de matemática na Academia de Berlim aos dezenove anos. Dois outros membros dignos de menção da família foram Christoph Bernoulli (1782-1863), filho de Daniel II, e Johann Gustav Bernoulli (1811-1863), filho de Christoph. Cf. J. O. Fleckenstein, *L'école mathématique baloise des Bernoulli à l'aube du XVIII^e siècle* (por volta de 1958)

meios. Em forma de equação, $dm = K(dp/p)$, onde m é a fortuna moral, p a fortuna física, e K uma constante de proporcionalidade. Isso leva à conclusão que quando a fortuna física cresce geometricamente a fortuna moral cresce aritmeticamente. Essa hipótese de Bernoulli aparece nos *Commentarii* da Academia de Ciências de S. Petersburgo para 1730-1731 (publicado 1738), pois Daniel Bernoulli passara os anos 1725-1733 na Rússia antes de voltar a Basiléia. Sua obra sobre probabilidades teve vários aspectos, incluindo aplicações a negócios, medicina e astronomia. Em 1734 ele e seu pai repartiram o prêmio oferecido pela Académie des Sciences para um ensaio sobre probabilidades relacionado com as inclinações dos planos orbitais dos planetas; em 1760 ele leu perante a Académie de Paris um artigo sobre a aplicação da teoria das probabilidades à questão das vantagens da inoculação contra varíola.

Quando Daniel Bernoulli foi a S. Petersburgo em 1725, seu irmão mais velho também foi chamado para lá como professor de matemática; nas discussões entre os dois surgiu um problema que veio a ser conhecido como paradoxo de S. Petersburgo, provavelmente porque apareceu pela primeira vez nos *Commentarii* da Academia de lá[6]. O problema é o seguinte: Suponhamos que Pedro e Paulo concordam em jogar um jogo baseado em lançar uma moeda. Se o primeiro lance dá cara, Paulo dará uma moeda a Pedro; se o primeiro lance dá coroa, mas cara aparece no segundo lance, Paulo dará a Pedro duas moedas; se cara aparece pela primeira vez no terceiro lance, Paulo dará a Pedro quatro moedas; e assim por diante, a quantia a ser paga se cara aparece pela primeira vez no n-ésimo lance sendo 2^{n-1} moedas. Quanto deve Pedro pagar a Paulo pelo privilégio de jogar tal jogo? A esperança matemática de Pedro, dada por

$$\frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2^2}\cdot 2 + \frac{1}{2^3}\cdot 2^2 + \ldots + \frac{1}{2^n}\cdot 2^{n-1} + \ldots$$

é evidentemente infinita, no entanto o senso comum sugere uma soma finita muito modesta. Quando Georges Louis Leclerc, Conde de Buffon (1707-1788) fez um teste empírico do caso, achou que em 2 084 jogos Paulo teria pago a Pedro 10 057 moedas. Isso indica que em qualquer jogo a esperança de Paulo, em vez de ser infinita, na verdade é algo inferior a 5 moedas! O paradoxo surgido do problema de S. Petersburgo foi amplamente discutido durante o século dezoito, tendo sido dadas diversas explicações. Daniel Bernoulli procurou resolvê-lo com seu princípio de esperança moral, de acordo com o qual ele substituiu as quantidades $1, 2, 2^2, 2^3, \ldots, 2^n, \ldots$ por $1^{1/2}, 2^{1/4}, 4^{1/8}, 8^{1/16}, \ldots$ Outros preferiram, como solução do paradoxo, observar que o problema é inerentemente impossível pois a fortuna de Paulo é necessariamente finita, portanto ele não poderia pagar as somas ilimitadas que poderiam ser necessárias no caso de uma longa demora no aparecimento de cara[7].

8 A teoria das probabilidades teve numerosos devotos durante o começo do século dezoito, e desses um dos mais importantes foi Abraham De Moivre (1667-1754). Nascera francês huguenote, mas logo depois da revogação do Édito de Nantes foi à Inglaterra, onde conheceu Newton e Halley e tornou-se professor particular de matemática. Em 1697 foi eleito para a Royal Society e subseqüentemente para as Academias de Paris e Berlim[8]. Esperava obter um posto de professor de matemática numa universidade, mas isso ele nunca conseguiu, em parte por não ser inglês de nascimento; e Leibniz tentou em vão obter um posto para ele na Alemanha. No entanto, apesar das longas horas de aulas que precisava dar para se sustentar, De Moivre produziu uma quantidade de pesquisa considerável. Em 1711 publicou em *Philosophical Transactions* um longo trabalho

[6]O título completo é *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*. Essa revista contém muitos artigos dos Bernoullis mais jovens e de seu colega suíço, Euler

[7]Veja I. Todhunter, *A History of the Mathematical Theory of Probability* (Cambridge, 1861) para uma longa discussão do problema

[8]Para uma exposição sobre sua vida, veja Helen M. Walker, "Abraham de Moivre," *Scripta Mathematica*, **2** (1934), 316-333. Veja também o artigo sobre "Moivre, Abraham de (1667-1754)" por Agnes M. Clerke em *Dictionary of National Biography*, **38** (1894), 116-117

sobre as leis do acaso, e esse ele expandiu em um volume célebre, a *Doctrine of Chances*, que apareceu em 1718 (e em edições posteriores). O trabalho e o volume contêm numerosas questões sobre dados, o problema de pontos (com chances diferentes de ganhar), tirar bolas de cores diferentes de um saco, e outros jogos. Alguns dos problemas tinham aparecido na *Ars conjectandi* de Jacques Bernoulli, publicado antes que *Doctrine of Chances* mas depois do trabalho de De Moivre. No prefácio da *Doctrine of Chances* o autor se refere à obra sobre probabilidades de Jacques, Jean e Nicolaus Bernoulli. As várias edições do volume contêm mais de cinqüenta problemas sobre probabilidades, bem como questões referentes a anuidades vitalícias. De modo geral De Moivre derivava a teoria das permutações e combinações dos princípios de probabilidades, ao passo que agora costuma-se fazer o contrário. Por exemplo, para achar o número de arranjos de duas letras escolhidas das seis letras a, b, c, d, e, f ele argumenta que a probabilidade de uma letra particular ser a primeira é 1/6 e a probabilidade de uma outra letra específica ser a segunda é 1/5. Logo a probabilidade de aparecerem essas duas letras nessa ordem é $1/6 \cdot 1/5 = 1/30$, donde se conclui que o número de arranjos possíveis, duas a duas, é 30. Freqüentemente é atribuído a De Moivre o princípio, publicado na *Doctrine of Chances*, que diz que a probabilidade de um evento composto é o produto das probabilidades das componentes, mas esse princípio já aparecia por implicação em trabalhos anteriores.

De Moivre interessava-se particularmente por desenvolver para a teoria das probabilidades processos gerais e notações que ele considerava como uma nova "álgebra"[9]. Uma generalização de um problema dado antes por Huygens é chamada usualmente, e apropriadamente, problema de De Moivre: achar a probabilidade de lançar um número dado num lance de n dados, cada um com m faces. Algumas de suas contribuições em probabilidades foram publicadas num outro volume, *Miscellanea analytica* de 1730. Num suplemento a essa obra De Moivre incluiu alguns resultados que apareciam também em *Methodus differentialis* de James Stirling (1692-1770), publicado no mesmo ano que *Miscellanea analytica*. Entre esses resultados está a aproximação $n! \approx \sqrt{2\pi n}(n/e)^n$, que geralmente é conhecida como fórmula de Stirling, embora De Moivre a conhecesse antes, e uma série, também chamada de Stirling, relacionando $n!$ com os números de Bernoulli.

De Moivre aparentemente foi o primeiro a trabalhar com a fórmula de probabilidades $\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}/2$, resultado que apareceu discretamente num panfleto impresso particularmente em 1733 com o título *Approximatio ad summan terminorum binomii* $(a+b)^n$ *in seriem expansi*. Essa obra, que representa a primeira aparição da lei dos erros ou curva de distribuição, foi traduzida por De Moivre e incluída na segunda edição (1738) de sua *Doctrine of Chances*[10]. Muitos aspectos das probabilidades atraíram De Moivre, inclusive problemas atuariais. Em sua obra sobre *Annuities upon Lives*, que primeiro fazia parte da *Doctrine of Chances* e foi reimpressa separadamente em mais de meia dúzia de edições, ele adotou uma regra de simplificação, conhecida como "hipótese de De Moivre de decréscimos iguais", segundo a qual anuidades podem ser computadas sob a hipótese de que o número de pessoas de um dado grupo que morrem é o mesmo durante cada ano.

9 A *Miscellanea analytica* é importante não só para probabilidades como também no desenvolvimento do lado analítico da trigonometria. O bem conhecido teorema de De Moivre, $(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)^n = \cos n\theta + i\,\mathrm{sen}\,n\theta$, não é dado explicitamente, mas de seu trabalho sobre ciclometria e outros contextos resulta claramente que o autor conhecia bem essa relação, provavelmente desde 1707. Num artigo em *Philosophical Transactions* de 1707 De Moivre escreveu que

$$\tfrac{1}{2}(\mathrm{sen}\,n\theta + \sqrt{-1}\cos n\theta)^{1/n} - \tfrac{1}{2}(\mathrm{sen}\,n\theta - \sqrt{-1}\cos n\theta)^{1/n} = \mathrm{sen}\,\theta$$

e em sua *Miscellanea analytica* de 1730 ele exprimiu o equivalente de

$$(\cos\theta \pm i\,\mathrm{sen}\,\theta)^{1/n} = \cos\frac{2K\pi \pm \theta}{n} \pm i\,\mathrm{sen}\,\frac{2K\pi \pm \theta}{n}.$$

[9]A obra de De Moivre sobre probabilidades está completamente descrita em Todhunter, *A History of the Mathematical Theory of Probability*, Cap. 9, pp. 135-193

[10]Está reimpressa em D. E. Smith, *Source Book in Mathematics*, pp. 566-575

que usou para fatorar $x^{2n} + 2x\cos n\theta + 1$ em fatores quadráticos da forma $x^2 + 2x\cos\theta + 1$. Novamente num artigo em *Philosophical Transactions* de 1739 ele encontrou[11] as raízes n-ésimas do "binômio impossível" $a + \sqrt{-b}$ pelo processo que usamos hoje de tomar a raiz n-ésima do módulo, dividir a amplitude por n, e somar múltiplos de $2\pi/n$.

De Moivre, ao lidar com números imaginários e funções circulares na *Miscellanea analytica* chegou quase a reconhecer as funções hiperbólicas para estender teoremas sobre setores de círculos a resultados análogos sobre setores da hipérbole retangular. Dada a extensão e profundidade de seus resultados era natural que Newton em seus últimos anos dissesse aos que o procuravam com perguntas de matemática, "Procure Mr. De Moivre; ele sabe essas coisas melhor que eu". Não é surpreendente que De Moivre fosse um dos membros não imparciais da comissão que a Royal Society em 1712 designou para fazer um relatório sobre as reivindicações de Newton e Leibniz quanto à invenção do cálculo.

Na *Philosophical Transactions* para 1697-1698 De Moivre tinha escrito sobre "infinitonome" — isto é, um polinômio infinito ou série infinita — incluindo um processo para achar uma raiz de uma tal expressão, e foi em grande parte por mérito desse artigo que ele foi eleito membro da Royal Society. O interesse de De Moivre por séries infinitas e probabilidades faz lembrar os Bernoullis. De Moivre manteve uma extensa e cordial correspondência com Jean Bernoulli durante a década de 1704 a 1714, e foi o primeiro quem propôs o segundo para eleição à Royal Society, em 1712.

10 Um dos motivos que tinham levado De Moivre a ocupar-se da fatoração de $x^{2n} + ax^n + 1$ em fatores quadráticos era o desejo de completar parte do trabalho de Roger Cotes (1682-1716) sobre a integração de frações racionais por decomposições em frações parciais.

A vida de Cotes é outro exemplo trágico de carreira muito promissora interrompida por morte prematura. Como Newton observou, "Se Cotes tivesse vivido, poderíamos saber alguma coisa". Estudante e depois professor em Cambridge, o jovem passou boa parte dos anos de 1709 a 1713 preparando a segunda edição dos *Principia* de Newton e três anos depois morreu deixando uma obra significativa mas incompleta. Muito dessa foi reunido e publicado postumamente em 1722 sob o título *Harmonia mensurarum*. O título deriva do seguinte teorema:

> Se por um ponto fixo O traça-se uma reta variável que corta uma curva algébrica nos pontos $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$, e se se toma um ponto P sobre a curva tal que o recíproco de OP é a média aritmética dos recíprocos de $OQ_1, OQ_2, \ldots, OQ_n$, então o lugar de P é uma reta.

Porém a maior parte do tratado é sobre a integração de frações racionais, incluindo a decomposição de $x^n - 1$ em fatores quadráticos, trabalho mais tarde completado por De Moivre. A *Harmonia mensurarum* está entre os primeiros trabalhos a mencionar a periodicidade das funções trigonométricas, os ciclos da tangente e da secante aparecendo impressos aqui talvez pela primeira vez. É um dos primeiros livros contendo um tratamento completo do cálculo aplicado à função logarítmica e funções circulares, inclusive uma tabela de integrais que dependem dessas. Nesse contexto o autor deu o que os livros de trigonometria chamam de "propriedade de Cotes do círculo", resultado que se relaciona de perto com o teorema de De Moivre e permite escrever expressões como

$$x^{2n} + 1 = \left(x^2 - 2x\cos\frac{\pi}{2n} + 1\right)\left(x^2 - 2x\cos\frac{3\pi}{2n} + 1\right)\ldots \left(x^2 - 2x\cos\frac{(2n-1)\pi}{2n} + 1\right).$$

Esse resultado é fácil de verificar marcando no círculo unitário as raízes de -1 de ordem $2n$ e formando os produtos de pares de imaginários conjugados. Cotes aparentemente foi um dos primeiros matemáticos a perceber a relação $\ln(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta) = i\theta$,

[11]Veja D. E. Smith: *Source Book in Mathematics*, pp. 440-450 para uma exposição completa sobre sua obra

de que deu um equivalente num artigo em *Philosophical Transactions* de 1714 que foi reimpresso em *Harmonia mensurarum*. Esse teorema é usualmente atribuído a Euler, que foi o primeiro a dá-lo em forma exponencial moderna.

11 Durante o começo do século dezoito a matemática inglesa apresentava um número notável de contribuidores significativos, dos quais De Moivre, Cotes e Stirling, em particular, eram amigos de Newton. Stirling publicou em 1717 uma obra intitulada *Lineae tertii ordinis Neutonianae* em que completou a classificação de curvas cúbicas feita por Newton em 1704, acrescentando algumas que Newton deixara escapar e também demonstrações que faltavam na *Enumeratio* original. Entre outras coisas, Stirling mostrou que se o eixo y é uma assíntota de uma curva de ordem n a equação da curva não pode conter termo em y^n e que uma assíntota não pode cortar a curva em mais de $n-2$ pontos. Para gráficos de funções racionais $y = f(x)/g(x)$ ele encontrou as assíntotas verticais igualando $g(x)$ a zero[12]. Para secções cônicas Stirling deu um tratamento completo em que os eixos, vértices e assíntotas são encontrados analiticamente a partir da equação geral de segundo grau em relação a eixos oblíquos de coordenadas.

12 A obra de Newton e Stirling sobre curvas planas foi continuada por Colin Maclaurin (1698-1746), talvez o mais importante matemático britânico da geração posterior a Newton. Nascido na Escócia e educado em Glasgow, onde entrou aos onze anos, tornou-se professor em Aberdeen aos dezenove e meia dúzia de anos depois ensinava na University of Edinburgh. É interessante notar que na Grã-Bretanha, Suíça e Países Baixos os principais matemáticos dos séculos dezessete e dezoito pertenciam a universidades, ao passo que na França, Alemanha e Rússia em geral pertenciam às academias estabelecidas pelos governantes absolutos.

Maclaurin começou a contribuir com artigos em *Philosophical Transactions* antes dos vinte e um anos, e em 1720 ele publicou dois tratados sobre curvas: *Geometria orgânica* e *De linearum geometricarum proprietatibus*. O primeiro em particular foi uma obra bem conhecida que estendeu os resultados de Newton e Stirling sobre cônicas, cúbicas e curvas algébricas de grau superior. Entre as proposições que contém está uma freqüentemente conhecida como teorema de Bézout (em honra do homem que mais tarde deu uma prova imperfeita) — uma curva de ordem m corta uma curva de ordem n em geral em mn pontos. Tratando desse teorema Maclaurin observou uma dificuldade que é usualmente conhecida como paradoxo de Cramer, em honra de um redescobridor posterior. Uma curva de ordem n em geral é determinada, como Stirling tinha indicado, por $n(n+3)/2$ pontos. Assim uma cônica é univocamente determinada por cinco pontos e uma cúbica deveria ser determinada por nove pontos. Mas pelo teorema de Maclaurin-Bézout duas curvas de grau n se cortam em n^2 pontos, de modo que duas cúbicas diferentes se cortam em nove pontos. Logo é evidente que $n(n+3)/2$ pontos nem sempre determinam univocamente uma curva de ordem n. A resposta do paradoxo só apareceu um século depois, quando foi explicado na obra de Plücker (veja a seguir).

A *Geometria orgânica* continha interessantes proposições sobre as cônicas, inclusive várias construções orgânicas semelhantes a algumas dadas por Newton nos *Principia*. Também encontramos aí o teorema de Pascal sobre um hexágono inscrito numa cônica, deduzido das propriedades de um quadrilátero inscrito numa cônica. Estendendo esse tipo de estudo a curvas de grau três, Maclaurin mostrou que se um quadrilátero é inscrito numa cúbica, e se os pontos de intersecção de lados opostos também jazem sobre a curva, as tangentes à cúbica em dois vértices opostos quaisquer do quadrilátero se encontram sobre a curva.

13 Dados os resultados notáveis de Maclaurin em geometria, é irônico pensar que hoje seu nome é lembrado quase exclusivamente por causa de um resultado em análise no qual ele tinha sido antecipado por uma meia dúzia de outros. A chamada série de Maclaurin, que aparece em seu *Treatise of Fluxions* de 1742 é apenas um caso especial da série de Taylor, publicada por Brook Taylor (1683-1731) em 1715 em seu *Methodus incremen-*

[12]Para um sumário maior ver C. Tweedie: *James Stirling, Sketch of His Life and Works* (1922)

torum directa et inversa. Taylor, graduado de Cambridge, era um entusiástico admirador de Newton e secretário da Royal Society. Interessava-se muito por perspectiva; sobre esse assunto publicou dois livros em 1715 e 1719, no segundo dos quais deu o primeiro enunciado geral do princípio dos pontos de desaparecimento[13]. No entanto, seu nome hoje é lembrado quase exclusivamente em conexão com a série

$$f(x + a) = f(a) + f'(a)x + f''(a)\frac{x^2}{2!} + f'''(a)\frac{x^3}{3!} + \ldots + f^{(n)}(a)\frac{x^n}{n!} + \ldots$$

que apareceu em seu *Methodus incrementorum*. Essa série se torna a familiar série de Maclaurin substituindo *a* por zero. A série de Taylor geral era conhecida já por James Gregory muito antes, e em essência também por Jean Bernoulli; mas Taylor não sabia disso. Além disso, a série de Maclaurin tinha aparecido no *Methodus differentialis* de Stirling mais de uma dúzia de anos antes de ser publicada por Maclaurin. Clio, a musa da história, é freqüentemente caprichosa na questão de ligar nomes a teoremas!

14 O *Methodus incrementorum* continha também várias outras partes familiares do Cálculo, tais como fórmulas relacionando a derivada de uma função com a derivada da função inversa — por exemplo $d^2x/dy^2 = -d^2y/dx^2/(dy/dx)^3$ — soluções singulares de equações diferenciais e uma tentativa de achar uma equação para a corda vibrante. Depois de 1719 Taylor abandonou a pesquisa matemática, mas o jovem Maclaurin estava então apenas começando sua fecunda carreira. Seu *Treatise of Fluxions* não era apenas mais um novo livro sobre as técnicas do Cálculo, mas um esforço para dar uma base sólida ao assunto semelhante à da geometria de Arquimedes. O motivo aqui era o desejo de defender o Cálculo de ataques que tinham sido desfechados, especialmente pelo Bispo George Berkeley (1685-1753) num panfleto de 1734 intitulado *The Analyst*. Berkeley não negava a utilidade das técnicas de fluxos nem a validade dos resultados obtidos empregando tais técnicas; mas tinha ficado irritado por um amigo doente ter recusado consolo espiritual, porque Halley o tinha convencido da natureza insustentável da doutrina cristã. Por isso o subtítulo de *The Analyst* diz:

> Ou um Discurso dirigido ao Matemático Infiel [presumivelmente Halley]. Onde se examina se o Objeto, Princípios e Inferências da Análise Moderna são Mais Claramente Concebidos, ou Mais Evidentemente Deduzidos que os Mistérios e Pontos de Fé da Religião. "Primeiro Tira a Tranca de Teu Olho; e Então Verás Claramente Para Tirar o Argueiro do Olho de Teu Irmão".

Berkeley dá uma exposição bastante justa do método dos fluxos, e suas críticas eram procedentes. Ele observava que ao achar sejam fluxos sejam razões de diferenciais, os matemáticos primeiro assumem que são dados incrementos às variáveis e depois retiram esses incrementos supondo que são nulos. O cálculo, tal como era explicado então, parecia a Berkeley ser apenas uma compensação de erros. Assim, "graças a um engano duplo, chegam, embora não à ciência, no entanto à verdade". Mesmo a explicação de Newton dos fluxos em termos de primeira e última razões era condenada por Berkeley, que negava a possibilidade de uma velocidade literalmente "instantânea" em que os incrementos da distância e do tempo desapareceram para deixar o quociente sem sentido 0/0. Como ele dizia,

> E o que são esses fluxos? As velocidades de incrementos evanescentes. E que são esses mesmos incrementos evanescentes? Não são nem quantidades finitas, nem quantidades infinitamente pequenas, nem nada. Não poderíamos chamá-las de fantasmas de quantidades que expiraram?[14].

Foi para responder a tais críticas que Maclaurin escreveu seu *Treatise of Fluxions* à maneira rigorosa dos antigos; mas ao fazê-lo ele usou um método geométrico que é menos

[13]O título da obra de 1715 é *Linear Perspective*, o do tratado de 1719 é *Principles of Linear Perspective*, ambos publicados em Londres

[14]Para discussão mais ampla da controvérsia de *The Analyst* ver Florian Cajori: *A History of the Conceptions of Limits and Fluxions in Great Britain, from Newton to Woodhouse* (1919). Cf. *The Works of George Berkeley*, editado por A. C. Fraser (Oxford, 1901, 4 vols.) especialmente Vol. III

sugestivo que os novos desenvolvimentos que iam aparecer na análise da Europa Continental. Talvez isso tenha alguma relação com o fato de Maclaurin ser quase o último matemático importante da Grã-Bretanha durante o século dezoito, um período em que a análise, e não a geometria, estava em evidência. No entanto, o *Treatise of Fluxions* continha muitos resultados relativamente novos, inclusive o critério da integral para convergência de séries infinitas (dado antes por Euler em 1732 mas geralmente desconhecido).

15 Se hoje o nome de Maclaurin é ligado a uma série de que ele não foi o primeiro descobridor, isso é compensado pelo fato que uma contribuição dele leva o nome de outro que a descobriu e imprimiu mais tarde. A bem conhecida regra de Cramer, publicada em 1750 por Gabriel Cramer (1704-1752) provavelmente era conhecida por Maclaurin desde 1729, quando ele estava escrevendo uma álgebra a título de comentário da *Arithmetica universalis* de Newton. O *Treatise of Algebra* de Maclaurin foi publicado em 1748, dois anos depois da morte do autor, e nele a regra para resolver equações simultâneas por determinantes aparecia, dois anos antes de surgir na *Introduction à l'analyse des lignes courbes algebriques* de Cramer. A solução para *y*, no sistema

$$\begin{cases} ax + by = c, \\ dx + ey = f, \end{cases}$$

é dada como

$$y = \frac{af - dc}{ae - db},$$

e a solução para *z*, no sistema

$$\begin{cases} ax + by + cz = m, \\ dx + ey + fz = n, \\ gx + hy + kz = p, \end{cases}$$

é expressa como

$$z = \frac{aep - ahn + dhm - dbp + gbn - gem}{aek - ahf + dhc - dbk + gbf - gec}.$$

Maclaurin explicava que o denominador consiste, no primeiro caso, da "Diferença dos Produtos dos Coeficientes opostos tirados das Ordens que envolvem as duas Quantidades incógnitas", e, no segundo caso "de todos os Produtos que podem ser formados de três Coeficientes opostos tirados das Ordens que envolvem as três Quantidades desconhecidas". (Ele explicara antes que chamaria quantidades "de mesma ordem as que são ligadas às mesmas Quantidades desconhecidas nas diferentes Equações . . . e aquelas que não afetam Quantidades desconhecidas. Mas são chamados Coeficientes opostos os que são tomados cada um de uma Equação diferente, e de uma Ordem diferente de Coeficientes".) Os numeradores nos esquemas de Maclaurin diferem dos denominadores apenas pela substituição dos coeficientes dos termos na incógnita procurada pelos termos constantes. Maclaurin explicava como escrever de modo semelhante a solução para quatro equações em quatro incógnitas, "antepondo sinais contrários aos que envolvem os Produtos de dois Coeficientes opostos". Esse enunciado mostra que Maclaurin tinha em mente uma regra de alternação de sinais análoga à que hoje é usualmente descrita em termos do princípio de inversão[15].

O *Treatise of Algebra* de Maclaurin teve popularidade ainda maior que suas outras obras, uma sexta edição aparecendo em Londres em 1796. Parece no entanto que o mundo aprendeu a resolver equações simultâneas mais através de Cramer que de Maclaurin,

[15]Para referências veja C. B. Boyer, "Colin Maclaurin and Cramer's Rule", *Scripta Mathematica*, 27 (1966), 377-379. Sobre outros aspectos da obra de Maclaurin ver C. Tweedie, "A Study of the Life and Writings of Colin Maclaurin", *Mathematical Gazette*, 8 (1915-1916) 132-151; 9 (1919), 303-305; e H. W. Turnbull, *Bi-centenary of the Death of Colin Maclaurin* (1951)

principalmente, suspeitamos, por causa da superioridade da notação de Cramer, em que índices eram ligados a coeficientes literais para facilitar a determinação dos sinais. Também, a matemática na Grã-Bretanha estava em declínio quando a *Álgebra* de Maclaurin apareceu, e os matemáticos do Continente davam relativamente pouca atenção aos autores ingleses. Reciprocamente, os matemáticos ingleses mostravam indiferença pelos trabalhos dos analistas do Continente, o que contribuiu para aumentar a disparidade de nível de realizações depois do tempo de Maclaurin.

Maclaurin foi ativo na oposição ao "Bonnie Prince Charlie" quando o Pretendente em 1745 marchou contra Edinburgh com um exército de *Highlanders*. O professor de matemática de quarenta e sete anos escapou quando a cidade foi finalmente tomada; mas a participação na guerra e subseqüente fuga para York foram demais para ele, e morreu em 1746. De Moivre morreu oito anos depois com oitenta e oito anos, e a partir daí a matemática inglesa sofreu um eclipse.

16 A Europa Continental não escapara da controvérsia sobre os fundamentos do Cálculo, mas aí o efeito foi menos sentido que na Inglaterra. Desde os dias de Leibniz tinham surgido objeções à nova análise feitas por um nobre saxônio, Conde Ehrenfried Walter von Tschirnhaus (1651-1708). Seu nome está perpetuado nas "transformações de Tschirnhaus" da álgebra, pelas quais ele esperava achar um método geral para resolver equações de grau superior. Uma transformação de Tschirnhaus de uma equação polinomial $f(x) = 0$ é uma transformação da forma $y = g(x)/h(x)$, onde g e h são polinômios e h não se anula para uma raiz de $f(x) = 0$. As transformações pelas quais Cardan e Viète resolviam a cúbica eram casos especiais de tais transformações. Em *Acta Eruditorum* de 1683 Tschirnhaus (ou Tschirnhausen) mostrava que um polinômio de grau $n > 2$ pode ser reduzido por suas transformações a uma forma em que os coeficientes dos termos de graus $n-1$ e $n-2$ são ambos zero; para a cúbica ele achou uma transformação da forma $y = x^2 + ax + b$ que reduz a cúbica geral à forma $y^3 = K$. Uma outra transformação dessas reduzia a quártica a $y^4 + py^2 + q = 0$, fornecendo assim novos métodos de resolução da cúbica e da quártica.

Tschirnhaus esperava desenvolver algoritmos semelhantes que reduzissem a equação geral de grau n a uma equação "pura" de grau n contendo apenas os termos de grau n e de grau zero. Suas transformações constituíam a contribuição mais prometedora à resolução de equações durante o século dezessete; mas a eliminação que conseguiu do segundo e terceiro coeficientes, por meio de tais transformações, estava longe de bastar para resolver a quíntica. Mesmo quando o matemático sueco E. S. Bring (1736-1798) em 1786 mostrou que pode ser encontrada uma transformação de Tschirnhaus que reduz a quíntica geral à forma $y^5 + py + q = 0$, a solução continuou a fugir. Em 1834 G. B. Jerrard (morreu em 1863), inglês, mostrou que se pode achar uma transformação de Tschirnhaus que elimine os termos de graus $n-1$ e $n-2$ e $n-3$ de qualquer equação polinomial de grau $n > 3$; mas o alcance do método é limitado[16] pelo fato de que equações de grau superior ou igual a cinco em geral não são resolúveis algebricamente. A crença de Jerrard de que podia resolver todas as equações algébricas era ilusória.

Tschirnhaus era homem de interesses variados. Estudara em Leyden e durante algum tempo servira no exército holandês; mais tarde passou algum tempo na Inglaterra. Durante algum tempo teve em sua casa Georg Mohr, o "Euclides Dinamarquês"; visitou Paris várias vezes, e lá em 1682 foi eleito para a Académie des Sciences; também fundou uma indústria de vidro na Itália para suas experiências com a luz. É conhecido pela descoberta de cáusticas por reflexão (catacáusticas) que levam seu nome. Foi sua exposição sobre essas curvas, envoltórias de uma família de raios de uma fonte pontual e refletidos numa curva, que levou à sua eleição para a Academia de Paris; e o interesse por cáusticas e famílias semelhantes continuou em Leibniz, L'Hospital, Jacques e Jean Bernoulli, e outros. Seu nome está também ligado à "cúbica de Tschirnhaus" $a = r\cos^3\theta/3$, forma generalizada mais tarde por Maclaurin a $r^n = a\cos n\theta$ para n racional. Às vezes Tschirnhaus é chamado o "descobridor da porcelana", pois foi um dos homens que ajudaram a esta-

[16]Veja L. E. Dickson, *Modern Algebric Theories* (New York: B. H. Sanborn, 1930) pp. 186-197, para aplicações das transformações de Tschirnhaus

belecer as fábricas de porcelana em Dresden para o Eleitor da Saxônia no começo do século dezoito; mas a porcelana já era produzida na China havia muito tempo.

Tschirnhaus estivera em contato com Oldenberg e Leibniz durante os anos de formação do Cálculo, e também contribuiu com muitos artigos matemáticos na *Acta Eruditorum* depois de sua fundação em 1682. Parte da obra de Tschirnhaus, no entanto, era composta apressadamente e publicada prematuramente, e os irmãos Bernoulli e outros apontaram erros. Num dado momento Tschirnhaus rejeitou os conceitos básicos do cálculo e das séries infinitas, afirmando que bastavam os métodos algébricos. Na Holanda tinham sido feitas objeções ao Cálculo de Leibniz em 1694-1696 pelo médico e geômetra Bernard Nieuwentijt (1654-1718). Em três diferentes tratados publicados durante esses anos em Amsterdam ele admitiu que os resultados eram corretos mas criticou a imprecisão das quantidades evanescentes de Newton e a falta de definição clara nas diferenciais de ordem superior de Leibniz.

17 Leibniz em 1695 tinha-se defendido em *Acta Eruditorum* de seu "crítico demasiado preciso"[17], e em 1701 uma refutação mais detalhada de Nieuwentijt veio da Suíça da pena de Jacob Hermann (1678-1733), um devotado discípulo de Jacques Bernoulli. Exemplificando a mobilidade dos matemáticos durante o início do século dezoito, Hermann ensinou matemática nas Universidades de Pádua, Frankfurt am Oder e S. Petersburgo, antes de terminar sua carreira na Universidade de Basiléia, sua cidade natal. Nos *Commentarii Academiae Petropolitanae* para os anos 1729-1733 Hermann fez contribuições à geometria analítica no espaço e a coordenadas polares continuando resultados dos irmãos Bernoulli mais velhos. Ao passo que Jacques Bernoulli aplicara coordenadas polares a espirais um tanto hesitantemente, Hermann deu equações polares também de curvas algébricas, juntamente com equações de transformação de coordenadas retangulares para polares. O uso que Hermann fez de coordenadas no espaço também foi mais ousado que o de Jean Bernoulli, que desde 1692 se referia ao uso de coordenadas como "geometria cartesiana". Bernoulli tinha um tanto timidamente sugerido uma extensão da geometria cartesiana a três dimensões, mas Hermann aplicou eficazmente coordenadas no espaço a planos e a diferentes tipos de superfícies quadráticas. Deu início ao uso de ângulos de direção mostrando que o seno do ângulo que o plano $az + by + cx = c^2$ faz com o plano xy é dado por $\sqrt{b^2 + c^2}/\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

18 Na França, tanto quanto na Inglaterra, Alemanha e Holanda, havia um grupo na Académie des Sciences, especialmente logo depois de 1700, que questionava a validade dos novos métodos infinitesimais tais como eram apresentados por L'Hospital. Entre esses estava Michel Rolle (1652-1719), cujo nome é lembrado em conexão com o teorema de Rolle, publicado em 1691 num obscuro livro sobre geometria e álgebra intitulado *Méthode pour résoudre les égalitéz*: se uma função é diferenciável no intervalo de a a b, e se $f(a) = f(b) = 0$ então $f'(x) = 0$ tem pelo menos uma raiz entre a e b. O teorema, agora importante para o Cálculo, foi dado apenas incidentalmente por Rolle a propósito de uma resolução aproximada de equações[18].

O ataque de Rolle ao Cálculo, que ele descreveu como uma coleção de falácias engenhosas, foi respondido vigorosamente por Pierre Varignon (1654-1722), o "melhor amigo na França" de Jean Bernoulli, e um que também estivera em correspondência com Leibniz. Bernoulli disse simplesmente a Rolle que ele não entendia o assunto, mas Varignon tentou esclarecer a situação mostrando indiretamente que os métodos infinitesimais podiam ser postos de acordo com a geometria de Euclides. A maior parte dos elementos do grupo que se opunha ao Cálculo era constituída de admiradores da geometria sintética da antiguidade, e a controvérsia na Académie des Sciences faz lembrar a controvérsia literária da mesma época de "antigos vs. modernos".

[17]Para mais detalhes veja C. B. Boyer, *History of the Calculus* (1959) pp. 213-215

[18]Uma tradução para o inglês da secção sobre o teorema de Rolle se encontra em D. E. Smith, *Source Book in Mathematics*, pp. 251-260

Varignon, como os Bernoullis, não tinha tido a intenção de ser matemático, destinando-se à igreja; mas quando acidentalmente deparou com um exemplar de *Os elementos* de Euclides mudou de idéia e ocupou postos de professor de matemática em Paris, tornando-se membro da Académie. Na *Memoires* da Académie des Sciences para 1704 ele continuou e estendeu o uso de coordenadas polares feito por Jacques Bernoulli, incluindo uma elaborada classificação das espirais obtidas de curvas algébricas, tais como parábolas e hipérboles de Fermat, interpretando a ordenada como raio vetor e a abscissa como um arco vetorial. Varignon, um dos primeiros matemáticos franceses a apreciar o Cálculo, tinha preparado um comentário sobre a *Analyse* de L'Hospital, mas esse só apareceu em 1725, depois da morte de ambos, sob o título *Eclaircissemens sur l'analyse des infiniments petits*. Varignon era mais cuidadoso que L'Hospital, e ele avisou que séries infinitas não deviam ser usadas sem antes investigar o resto. Por isso os ataques ao Cálculo o tinham preocupado, e em 1701 ele escreveu a Leibniz sobre suas disputas com Rolle:

> O Padre Galloys, que é quem realmente está por trás de tudo, está difundindo aqui [em Paris] que V. explicou que entende por "diferencial" ou "infinitamente pequeno" uma quantidade muito pequena, mas constante e definida ... Eu, de outro lado, chamei uma coisa de infinitamente pequena, ou diferencial de uma quantidade, se essa quantidade é inexaurível em comparação com a coisa[19].

A idéia que Varignon exprime aqui não é nada clara, mas pelo menos ele percebia que uma diferencial é uma variável, não uma constante. A resposta de Leibniz datada de Hanover em 1702 tenta evitar disputas metafísicas, mas seu uso da frase "quantidades incomparavelmente pequenas" para diferenciais não era mais satisfatório que a explicação de Varignon. No entanto, a defesa feita por Varignon do Cálculo parece ter conquistado a aprovação de Rolle.

Rolle também levantou questões embaraçosas a propósito da geometria analítica, especialmente quanto à solução gráfica de equações de Descartes, tão popular na época. Para resolver $f(x) = 0$, por exemplo, escolhe-se arbitrariamente uma curva $g(x, y) = 0$ e, combinando-a com $f(x) = 0$, obtém-se uma nova curva $h(x, y) = 0$, cujas intersecções com $g(x, y) = 0$ fornecem as soluções de $f(x) = 0$. Rolle percebeu que soluções estranhas podem ser introduzidas por esse processo. Em sua obra mais conhecida, o *Traité d'algèbre* de 1690, Rolle parece ter sido o primeiro a afirmar que existem n valores para a raiz n-ésima de um número, mas só foi capaz de provar isso para $n = 3$, pois morreu antes que os trabalhos nesse sentido de Cotes e De Moivre aparecessem. Rolle foi o matemático mais capaz no grupo da Académie des Sciences que criticava o Cálculo. Quando Varignon o convenceu da validade essencial da nova análise, a oposição se desfez e o assunto entrou num século de rápido desenvolvimento na Europa Continental.

19 Ao tempo que os Bernoullis e seus associados estavam defendendo os desenvolvimentos na geometria analítica, Cálculo e probabilidades, a matemática na Itália fluía mais ou menos sem destaque com alguma preferência pela geometria. Nenhuma figura de relevo apareceu lá, embora vários homens deixassem resultados suficientemente importantes para merecerem menção. Giovanni Ceva (1648-1734) é lembrado hoje pelo teorema que tem seu nome: Uma condição necessária e suficiente para que retas dos vértices A, B, C, de um triângulo para pontos X, Y, Z dos lados opostos sejam concorrentes é que

$$\frac{AZ \cdot BX \cdot CY}{ZB \cdot XC \cdot YA} = 1.$$

Isso se relaciona de perto com o teorema de Menelaus que fora esquecido mas foi redescoberto e publicado também por Ceva em 1678.

Mais próximas dos interesses dos Bernoullis eram as contribuições de Jacopo Riccati (1676-1754) que tornou conhecida na Itália a obra de Newton. Riccati é lembrado especialmente por seu estudo detalhado da equação diferencial $dy/dx = A(x) + B(x)y + C(x)y^2$,

[19]Veja Herbert Meschkowski, *Ways of Thought of Great Mathematicians* (San Francisco, 1964) pp. 57-58

que hoje tem seu nome, embora Jacques Bernoulli tivesse estudado antes o caso especial $dy/dx = x^2 + y^2$. Riccati pode ter conhecido esse estudo, pois Nicolas Bernoulli ensinou em Pádua, onde Riccati fora discípulo de Angeli e onde entrou em contato tanto com Nicolas Bernoulli quanto com Hermann. A obra dos Bernoullis era bem conhecida na Itália. O Conde G. C. Fagnano (1682-1766) continuou o trabalho sobre a lemniscata de Bernoulli mostrando, por volta de 1717-1718, que a retificação dessa curva leva a uma integral elítica, como também o comprimento de arco da elipse, embora certos arcos sejam retificáveis por meios elementares. O nome de Fagnano ainda está ligado à elipse $x^2 + 2y^2 = 1$ que apresenta certas analogias com a hipérbole equilátera ou retangular. A excentricidade dessa elipse, por exemplo, é $1/\sqrt{2}$, ao passo que a excentricidade da hipérbole retangular é $\sqrt{2}$.

20 A matemática italiana durante o século dezoito fez poucas, ou nenhuma, descobertas fundamentais. Quem chegou mais perto de uma descoberta merecendo tal classificação foi Girolamo Saccheri (1667-1733), um jesuíta que ensinava em colégios de sua ordem na Itália. No próprio ano em que morreu ele publicou um livro chamado *Euclides ab omni naevo vindicatus* (Euclides com toda falha retirada) em que fez um elaborado esforço para provar o postulado das paralelas. Saccheri conhecia os esforços de Nasir Eddin para provar o postulado quase meio milênio antes, e decidiu aplicar o método de *reductio ad absurdum* ao problema. Começou com um quadrilátero birretangular isósceles, agora chamado "quadrilátero de Saccheri" — tendo lados AD e BC iguais entre si e ambos perpendiculares à base AB. Sem usar o postulado das paralelas ele mostrou facilmente que os ângulos de "topo" C e D são iguais e que há, portanto, somente três possibilidades quanto a eles, descritas por Saccheri como (1) a hipótese do ângulo agudo, (2) a hipótese do ângulo reto e (3) a hipótese do ângulo obtuso. Mostrando que as hipóteses 1 e 3 levam a absurdos ele pensava estabelecer por raciocínio indireto que a hipótese 2 é uma conseqüência necessária dos postulados de Euclides com o das paralelas excluído. Saccheri teve pouca dificuldade para excluir a hipótese 3, porque ele assumia implicitamente que uma reta é infinitamente longa. Da hipótese 1 ele derivou teorema após teorema sem encontrar dificuldades. Sabemos agora que ele estava construindo uma geometria não-euclidiana perfeitamente consistente; mas Saccheri estava tão completamente convencido de que a geometria de Euclides era a única válida que permitiu que esse preconceito interferisse em sua lógica. Onde não havia contradição ele torceu o raciocínio até pensar que a hipótese 1 levava a um absurdo. Por isso deixou de fazer o que teria sido sem dúvida a descoberta mais importante do século dezoito — a geometria não-euclidiana. Assim seu nome permaneceu desconhecido por mais um século, pois a importância de sua obra não foi reconhecida pelos que o seguiram[20].

21 Saccheri tinha como discípulo outro matemático italiano que talvez mereça uma breve menção — Guido Grandi (1671-1742) cujo nome é lembrado nas curvas em pétala de rosa tão familiares em coordenadas polares pelas equações $r = a \cos n\theta$ e $r = a \operatorname{sen} n\theta$. São chamadas "rosas de Grandi" em reconhecimento do estudo que ele fez delas. Grandi também é lembrado por sua correspondência com Leibniz sobre a questão de saber se se pode ou não tomar como sendo 1/2 a soma da série infinita alternada $1 - 1 + 1 - 1 \ldots$ Esse valor é sugerido não só como média aritmética dos dois valores das somas parciais dos n primeiros termos, mas também como valor quando $x = 1$ da função geradora $1/(1 + x)$ de que se obtém a série $1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots$ por divisão. Nessa correspondência Grandi sugeriu que aqui se tem um paradoxo comparável com os mistérios do cristianismo, pois ao agrupar termos aos pares chega-se ao resultado

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \ldots = 0 + 0 + 0 \ldots = 1/2$$

[20]Exposições sobre a obra de Saccheri se encontram em vários lugares. Uma excelente descrição é dada em Roberto Bonola, *Non-Euclidean Geometry, A Critical and Historical Study of Its Developments* (1955), pp. 22-44. Veja também D. E. Smith, *Source Book in Mathematics* (1929) pp. 351-359

que lembra a criação do mundo a partir do nada. Levando essas idéias nebulosas à integral da função geradora $1/(1+x)$, Leibniz e Jean Bernoulli tinham trocado cartas sobre a natureza dos logaritmos dos números negativos. A série $\ln(1+x) = x - x^2/2 + x^3/3 - x^4/4 \ldots$ no entanto pouco ajuda aqui pois diverge para $x < -1$. Leibniz argumentava que números negativos não têm logaritmos reais; mas Bernoulli, acreditando que a curva logarítmica é simétrica com relação ao eixo de ordenadas, afirmava que $\ln(-x) = \ln(x)$, o que parece confirmado pelo fato que $d/dx \ln(-x) = d/dx \ln(+x) = 1/x$. A questão da natureza dos logaritmos dos números negativos não foi definitivamente resolvida por nenhum dos dois, mas pelo mais brilhante aluno de Bernoulli. Jean Bernoulli continuara a irradiar um entusiasmo inspirador, por meio de sua correspondência, durante a primeira metade do século dezoito, pois sobreviveu a seu irmão mais velho por quarenta e três anos. No entanto, muito antes de sua morte em 1748, já octogenário, sua influência se tornara muito menos forte que a de seu famoso discípulo, Euler, cujas contribuições à análise, inclusive logaritmos de números negativos, foram o núcleo essencial dos desenvolvimentos da matemática durante os meados do século dezoito.

BIBLIOGRAFIA

Berkeley, George, *Works*, editado por A. C. Fraser (Oxford: Clarendon, 1901, 4 volumes)

Bernoulli, Jacques, *Opera* (Genebra, 1744, 2 volumes)

Bernoulli, Jean, *Opera omnia* (Lausanne e Genebra, 1742, 4 volumes)

Bernoulli, Jean, *Die Differentialrechnung aus dem Jahre* 1691 92 (Ostwald's Klassiker, N.º 211, Leipzig: W. Engelmann, 1924)

Bonola, Roberto, *Non-Euclidean Geometry, A Critical and Historical Study of Its Developments* (edição em brochura, New York: Dover, 1955)

Boyer, C. B., *History of Analytic Geometry* (New York: Scripta Mathematica, 1956)

Boyer, C. B., *History of the Calculus* (edição em brochura, New York: Dover, 1959)

Cajori, Florian, *A History of the Conceptions of Limits and Fluxions in Great Britain, from Newton to Woodhouse* (Chicago: Open Court, 1919)

Coolidge, J. L., *The Mathematics of Great Amateurs* (New York: Oxford University Press, 1949; edição em brochura, New York: Dover, 1963)

Edleston, J., *Correspondence of . . . Newton and . . . Cotes* (Cambridge, 1850)

Engel, Fr., e P. Stäckel, *Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss* (Leipzig, 1895, 2 volumes)

Fedel, J., *Der Briefwechsel Johann (I) Bernoulli-Pierre Varignon aus den Jahren* 1692 *bis* 1702 (Heidelberg, 1932)

Fleckenstein, J. O., *L'école mathématique baloise des Bernoulli à l'aube du XVIIIᵉ siècle* (Paris: Palais de la Découverte, ca. 1958)

Hoffmann, J. E., *Classical Mathematics* (New York: Philosophical Library, 1959)

Jurin, James, *Geometry No Friend to Infidelity: or, a Defence of Sir Isaac Newton and the British Mathematicians* (Londres, 1734)

Leibniz, G. W., e Jean Bernoulli, *Commercium philosophicum et mathematicum* (Lausanne et Genebra, 1745, 2 volumes)

Maclaurin, Colin, *A Treatise of Fluxions* (Edimburgo, 1742, 2 volumes)

Meschkowski, Herbert, *Ways of Thought of Great Mathematicians* (San Francisco: Holden-Day, 1964)

Montucla, Etienne. *Histoire des mathématiques*, nova edição (Paris, 1799-1802, 4 volumes)

Reiff, R., *Geschichte der unendlichen Reihen* (Tübingen, 1889)

Smith, D. E., *Source Book in Mathematics* (New York: McGraw-Hill, 1929; edição em brochura, New York; Dover, 1959, 2 volumes)

Smith, D. E., *History of Mathematics* (edição em brochura, New York: Dover, 1958, 2 volumes)

Spiess, Otto, ed., *Der Briefwechsel von Johann Bernoulli* (Basiléia: Birkhäuser, 1955), Vol. I

Struik, D. J., *A Concise History of Mathematics* (3.ª edição, New York: Dover, 1967)

Todhunter, Isaac, *A History of the Mathematical Theory of Probability from the Time of Pascal to that of Laplace* (reimpressão, New York: Chelsea, 1949)

Turnbull, H. W., *Bi-centenary of the Death of Colin Maclaurin* (Aberdeen: Aberdeen University Press, 1951)

Tweedie, Ch., *James Stirling. Sketch of His Life and Works* (Oxford: Clarendon, 1922)

Walker, Helen M., "Abraham de Moivre," *Scripta Mathematica*, **2** (1934). 316-333

Weissenborn, Hermann, *Die Principien der höheren Analysis in ihrer Entwickelung von Leibniz bis auf Lagrange* (Halle, 1856)

Wieleitner, Heinrich, *Geschichte der Mathematik* (Leipzig: Walter de Gruyter, 1911-1921, 2.ª parte, 2 volumes)

EXERCÍCIOS

1. Mencione alguns matemáticos ingleses e suiços que tiveram postos em universidades. Sugira algumas razões possíveis pelas quais poucos matemáticos franceses importantes ocuparam cátedras em universidades.

2. Por que a Rússia não teve nenhum matemático importante nascido lá durante os séculos dezessete e dezoito?

3. Mencione pelo menos quatro revistas do início do século dezoito que publicavam artigos de matemática. Quais eram os ramos da matemática mais populares na época?

4. Quais eram os mais importantes centros matemáticos durante a época dos Bernoullis? Em cada caso, cite um ou mais matemáticos em atividade lá na época.

5. Como deveriam os matemáticos ingleses ter respondido às objeções de Berkeley ao método dos fluxos?

6. Escreva $\cos 11\theta$ em termos de potências de sen θ e $\cos\theta$.

7. Deduza a série de Taylor (por diferenciação sucessiva ou de outro modo).

8. Prove o teorema de De Moivre (por indução matemática ou de outro modo).

9. Fatore $x^6 + a^6$ e $x^6 - a^6$ em fatores quadráticos reais.

10. Exprima d^3x/dy^3 em termos de derivadas de y com relação a x.

11. Exprima as respostas para y nos sistemas de equações lineares simultâneas usados por Maclaurin.

12. Mostre que qualquer das transformações de Tschirnhaus $y = x^2 + 4x + 11$ e $y = x^2 + 7$ reduz a equação $x^3 + 3x^2 + 15x + 13 = 0$ à forma pura em dois termos. (Elimine x do par de equações.)

13. Mostre que a substituição $y = x^2 - 3x$ reduz $x^4 + 12x - 5 = 0$ a $y^4 + 98y^2 - 200 = 0$, portanto resolve a quártica em x.

14. Dê um exemplo de curva contínua para a qual $f(a) = f(b) = 0$ e para a qual $f(x)$ nunca se anula entre $x = a$ e $x = b$. Isso contradiz o teorema de Rolle? Explique.

15. Verifique a afirmação de De Moivre de que as chances contrárias a dar pelo menos dois ases em oito lances de um único dado são de "aproximadamente 3 para 2".

16. Prove que os "ângulos de topo" de um quadrilátero de Saccheri são iguais.

17. Esboce a "rosa de Grandi" dada pela equação $r = \cos 3/2\theta$.

*18. Mostre que a substituição $y = z^{1-n}$ reduz a equação de Bernoulli $y' + P(x)y = Q(x)y^n$ a uma equação diferencial linear.

*19. Mostre que se uma solução particular $f(x)$ da equação de Riccati $y' = A(x) + B(x)y + C(x)y^2$ é conhecida, essa equação pode ser reduzida a uma equação de Bernoulli por meio da substituição $y = z + f$.

*20. Mostre que a excentricidade da elipse de Fagnano $x^2 + 2y^2 = 1$ é o recíproco da excentricidade da hipérbole equilátera $x^2 - y^2 = 1$.

*21. Prove uma das propriedades da espiral logarítmica $r = ae^{b\theta}$ mencionadas em conexão com a obra de Jacques Bernoulli.

*22. Mostre que o comprimento da espiral $r^2 = a\theta$ de $\theta = 0$ a $\theta = a$ é dado por uma integral elítica.

*23. Verifique, por um dos métodos descritos no texto, que os dois primeiros números de Bernoulli são 1/6 e −1/30.

*24. Justifique a regra de L'Hospital.

*25. Use a regra de L'Hospital para achar

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - b^x}{c^x - d^x},$$

onde $c \neq d$.

*26. Exponha todos os detalhes para mostrar que a área sob $y = x^x$ de $x = 0$ a $x = 1$ é dada pela série infinita

$$\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n^n}.$$

*27. Mostre que uma curva de ordem n em geral é determinada por $n(n+3)/2$ pontos.

Capítulo **21**

A Idade de Euler

A álgebra é generosa: freqüentemente ela dá mais do que se lhe pediu.

D'Alembert

1 A história da matemática durante o período moderno difere da história na antiguidade ou no mundo medieval pelo menos num ponto: nenhum grupo nacional conservou a liderança por período longo.

Na antiguidade a Grécia sobrepujava de cabeça e ombros todos os outros povos em desenvolvimento matemático; durante boa parte da Idade Média o nível da matemática no mundo árabe era mais alto que no resto. Do Renascimento ao século dezoito o centro da atividade matemática se deslocou repetidamente — da Alemanha para a Itália para a França para a Holanda para a Inglaterra. Se as perseguições religiosas não tivessem obrigado os Bernoullis a deixar Antuérpia, a Bélgica poderia ter tido sua vez; mas a família emigrou para Basiléia e em conseqüência a Suiça foi a terra natal de muitas das principais figuras da matemática do início do século dezoito. Já mencionamos a obra de quatro dos matemáticos do clã Bernoulli, bem como a de Hermann, um de seus protegidos suíços. Mas o mais importante matemático nascido na Suiça nessa época — ou em qualquer outra — foi Leonhard Euler (1707-1783), que nasceu em Basiléia.

O pai de Euler era um ministro religioso que, como o pai de Jacques Bernoulli, esperava que seu filho seguisse o mesmo caminho. Porém o jovem estudou com Jean Bernoulli e se associou com seus filhos, Nicolaus e Daniel, e através deles descobriu sua vocação. O pai de Leonhard Euler também tinha conhecimentos de matemática, tendo sido aluno de Jacques Bernoulli, e ajudou a instruir seu filho nos rudimentos do assunto, apesar de sua esperança de que Leonhard seguiria a carreira teológica. De qualquer modo o jovem recebeu instrução ampla, pois ao estudo da matemática somou teologia, medicina, astronomia, física e línguas orientais. Essa amplitude lhe foi muito útil quando em 1727 ele ouviu da Rússia que havia um lugar vago em medicina na Academia de S. Petersburgo, para onde os jovens Bernoulli tinham ido como professores de matemática. Essa importante instituição fora fundada poucos anos antes por Catarina I, segundo moldes fixados por seu falecido marido Pedro, o Grande, aconselhado por Leibniz. Por recomendação dos Bernoullis, dois dos mais brilhantes luminares dos primeiros tempos da Academia, Euler foi chamado como membro da secção de medicina e fisiologia; mas no dia em que chegou à Rússia, Catarina morreu. A recém-nascida Academia quase expirou com ela, porque os novos governantes mostraram menos simpatia para com os sábios estrangeiros que Pedro ou Catarina.

A Academia conseguiu sobreviver de algum modo, e Euler, em 1730, veio a ocupar a cadeira de filosofia natural em vez de medicina. Seu amigo Nicolaus Bernoulli tinha morrido, afogado, em S. Petersburgo no ano anterior ao da chegada de Euler, e em 1733 Daniel Bernoulli deixou a Rússia para ocupar a cadeira de matemática em Basiléia. Com isso Euler aos vinte e seis anos tornou-se o principal matemático da Academia. Casou-se e fixou-se a sério na pesquisa matemática e na fundação de uma família que veio a incluir treze filhos. A Academia de S. Petersburgo tinha estabelecido uma revista de matemática, *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*, e quase de saída Euler contribuiu com um jorro de artigos de matemática. Os editores não tinham que se preocupar com falta de material enquanto a pena de Euler trabalhasse. O acadêmico francês François Arago disse que Euler podia calcular sem qualquer esforço aparente, "como os homens respiram, como as águias se sustentam no ar". Em conseqüência, Euler compunha artigos

de matemática enquanto brincava com seus filhos. Em 1735 tinha perdido a visão do olho direito — por excesso de trabalho, ao que se diz — mas esta infelicidade não diminuiu em nada sua produção de pesquisa. Conta-se que ele disse que ao que parecia seu lápis o superava em inteligência, tão facilmente fluíam seus artigos; e ele publicou mais de 500 livros e artigos durante sua vida. Por quase meio século depois de sua morte obras de Euler continuavam a aparecer nas publicações da Academia de S. Petersburgo. Uma lista bibliográfica das obras de Euler, inclusive itens póstumos, contém 886 itens; e avalia-se que a coleção de suas obras, que está sendo publicada sob os auspícios da Suíça, chegará a perto de setenta e cinco volumes substanciais[1]. Sua pesquisa matemática chegava em média a 800 páginas por ano durante toda sua vida; nenhum matemático jamais superou a produção desse homem que Arago caracterizou como "Análise encarnada".

Euler cedo conquistou reputação internacional; já antes de sair de Basiléia tinha recebido menção honrosa da Académie des Sciences de Paris por um ensaio sobre mastros de navios. Mais tarde ele freqüentemente apresentou ensaios em concursos organizados pela Académie, e doze vezes ele ganhou o cobiçado prêmio bienal. Os tópicos variavam amplamente, e em uma ocasião, em 1724, Euler partilhou com Maclaurin e Daniel Bernoulli um prêmio para um ensaio sobre marés[2]. (O prêmio de Paris foi ganho duas vezes por Jean Bernoulli e dez vezes por Daniel Bernoulli.) Euler nunca sofreu de falso orgulho, e escreveu obras em todos os níveis, inclusive material para livros-texto para uso nas escolas russas. Geralmente escrevia em latim, algumas vezes em francês, embora o alemão fosse sua língua nativa. Euler tinha incomum facilidade para línguas, como se esperaria de uma pessoa de origem suíça. Isso era uma sorte, pois uma das características da matemática do século dezoito era a facilidade com que os matemáticos se deslocavam de um país para outro, e nisso Euler não tinha problemas de língua. Em 1741 Euler foi convidado por Frederico, o Grande, para fazer parte da Academia de Berlim, e o convite foi aceito. (Jean e Daniel Bernoulli, que estavam na Suíça, também foram convidados mas não aceitaram.) Euler passou vinte e cinco anos na corte de Frederico, mas durante esse tempo continuou a receber uma pensão da Rússia, e apresentou numerosos artigos à Academia de S. Petersburgo, bem como à Academia da Prússia.

A estada de Euler em Berlim não foi inteiramente feliz, pois Frederico preferia um sábio que brilhasse como Voltaire. O monarca, que dava mais valor a filósofos que a geômetras, se referia ao pouco sofisticado Euler como "cíclope matemático" e as relações na corte tornaram-se intoleráveis para Euler. Catarina, a Grande, estava ansiosa por ver o prolífico matemático reassumir seu lugar na Academia de S. Petersburgo, e em 1766 Euler voltou à Rússia. Durante esse ano Euler soube que estava perdendo a visão do olho que lhe restava devido à catarata, e preparou-se para a cegueira final praticando escrever com giz numa grande lousa e ditando para seus filhos. Uma operação foi feita em 1771, e durante alguns dias Euler enxergou novamente; mas o sucesso não durou e Euler passou quase todos os últimos dezessete anos de sua vida em total cegueira. Mesmo essa tragédia não deteve o fluxo de sua pesquisa e publicações, que continuou sem diminuição até que em 1783, aos setenta e seis anos, ele morreu subitamente enquanto tomava chá com um de seus netos.

2 De 1727 a 1783 a pena de Euler esteve ocupada aumentando os conhecimentos disponíveis em quase todos os ramos da matemática pura e aplicada, dos mais elementares aos mais avançados. Além disso, em quase tudo, Euler escrevia na linguagem e notação que usamos hoje, pois nenhum outro indivíduo foi tão grandemente responsável pela forma da matemática de nível universitário de hoje quanto Euler, o construtor de notação

[1]Veja Gustav Eneström, "Verzeichnis der Schriften Leonhard Eulers", *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Erganzungsband IV*, Leipzig 1910-1913. Veja também N. Fuss, *Lobrede auf Herrn Leonhard Euler* (1786) e Condorcet, *Eloge de M. Euler*, para a Académie des Sciences, 1785. Cf. J. O. Fleckenstein, "L'état actuel de l'edition des oeuvres d'Euler", *XI Congrès International d'Histoire des Sciences*, Varsovia, 1965

[2]Os três ensaios premiados estão incluídos no Vol. III da "edição dos jesuitas" dos *Principia* de Newton publicada em Genebra em 1760

mais bem sucedido de todos os tempos. Quando chegou à Rússia em 1727 ele havia estado ocupado com experiências sobre disparo de canhões; e numa exposição manuscrita de seus resultados, escrita provavelmente em 1727 ou 1728, Euler usava a letra e mais de uma dúzia de vezes para representar a base do sistema de logaritmos naturais. O conceito por trás desse número era bem conhecido desde a invenção dos logaritmos, mais de um século antes; no entanto nenhuma notação padronizada para ele se tornara comum. Numa carta a Goldbach em 1731 Euler novamente usou a letra e para "aquele número cujo logaritmo hiperbólico = 1"; apareceu impresso pela primeira vez na *Mechanica* de Euler de 1736, livro em que a dinâmica de Newton é apresentada pela primeira vez em forma analítica. Essa notação, sugerida talvez pela primeira letra da palavra "exponencial" logo tornou-se padrão[3]. O uso definitivo da letra grega π para a razão da circunferência para o diâmetro num círculo também é em grande parte devido a Euler, embora uma ocorrência anterior se encontre em 1706, um ano antes do nascimento de Euler — na *Synopsis Palmariorum Matheseos, or A New Introduction to the Mathematics*, por William Jones (1675-1749). Foi a adoção do símbolo π por Euler em 1737, e mais tarde em seus muitos e populares livros de texto, que o tornou largamente conhecido e usado. O símbolo i para $\sqrt{-1}$ é outra notação usada primeiro por Euler, embora nesse caso a adoção viesse quase no fim de sua vida, em 1777. Provavelmente esse uso veio tão tarde porque em suas primeiras obras ele usara i para representar um "número infinito", mais ou menos como Wallis usara ∞. Assim Euler escrevia $e^x = (1 + x/i)^i$ onde escreveríamos $e^x = \lim_{h \to \infty} (1 + x/h)^h$. Na verdade, embora Euler usasse i para $\sqrt{-1}$ num manuscrito datado de 1777, esse só foi publicado em 1794. Foi por Gauss ter adotado esse símbolo em seu clássico *Disquisitiones arithmeticae* de 1801 que seu lugar ficou assegurado entre as notações matemáticas. Os três símbolos e, π, i, pelos quais Euler em grande parte é responsável, podem ser combinados com os dois inteiros mais importantes, 0 e 1, na célebre igualdade $e^{\pi i} + 1 = 0$ que contém os cinco números mais significativos (bem como a mais importante relação e a mais importante operação) em toda a matemática. O equivalente dessa igualdade, em forma generalizada, fora incluída por Euler em 1748 em seu livro-texto mais conhecido, *Introductio in Analysin infinitorum*; mas o nome de Euler hoje não é ligado geralmente a nenhum dos símbolos nessa relação. A chamada "constante de Euler", freqüentemente representada pela letra grega γ, é uma sexta constante matemática importante[4], o número definido como $\lim_{n \to \infty} (1 + 1/2 + 1/3 + \ldots + 1/n - \ln n)$, número bem conhecido que foi calculado com centenas de casas decimais, as dez primeiras sendo 0,5772156649.

Não é só para designação de números importantes que usamos hoje notações introduzidas por Euler. Em geometria, álgebra, trigonometria e análise encontramos em toda parte símbolos de Euler, bem como terminologia e idéias. O uso das letras minúsculas a, b, c para os lados de um triângulo e das maiúsculas correspondentes A, B, C para os ângulos opostos vem de Euler, como a aplicação das letras r, R e s para o raio dos círculos inscrito e circunscrito e o semiperímetro do triângulo respectivamente. A bela fórmula $4rRs = abc$ relacionando os seis comprimentos é também um dos numerosos resultados elementares que lhe são atribuídos, embora coisas equivalentes a esse resultado estejam contidas por implicação na geometria da antiguidade. A designação lx para logaritmo de x, o uso de letra agora familiar Σ para indicar adição, e talvez a mais importante de todas, a notação $f(x)$ para uma função de x (usada nos *Comentários* de Petersburgo para 1734-1735) são outras notações de Euler aparentadas às nossas. Nossas notações são hoje assim mais por causa de Euler do que de qualquer outro matemático.

3 Ao avaliar desenvolvimentos da matemática devemos sempre ter em mente que as idéias atrás das notações são de longe a melhor metade; quanto a isso também a obra

[3] Veja D. E. Smith, *Source Book in Mathematics* (New York: McGraw-Hill, 1929), pp. 95-98 quanto aos primeiros empregos da notação e de Euler

[4] Veja J. W. L. Glaisher, "On the History of Euler's Constant", *Messenger of Mathematics*, **1** (1871), 25-30

de Euler marcou época. Pode ser dito com justiça que Euler fez pela análise infinita de Newton e Leibniz o que Euclides fizera pela geometria de Eudoxo e Teaetetus, ou o que Viète fizera pela álgebra de al-Khowarizmi e Cardano. Euler tomou o cálculo diferencial e o método dos fluxos e tornou-os parte de um ramo mais geral da matemática que a partir daí é chamado "análise" — o estudo de processos infinitos. Se os antigos *Os elementos* constituem a pedra angular da geometria a *Al jabr wa'l muqābalah* medieval a pedra fundamental da álgebra, então a *Introductio in analysin infinitorum* de Euler pode ser considerada como chave de abóbada da análise. Esse importante tratado em dois volumes de 1748 serviu como fonte para os florescentes desenvolvimentos da matemática durante toda a segunda metade do século dezoito. Dessa época em diante a idéia de "função" tornou-se fundamental na análise. Fora prenunciada pela latitude de formas medieval, e estava implícita na geometria analítica de Fermat e Descartes, bem como no Cálculo de Newton e Leibniz. O quarto parágrafo da *Introductio* define função de uma quantidade variável como "qualquer expressão analítica formada daquela quantidade variável e de números ou quantidades constantes". (Às vezes Euler pensava em função menos formalmente e mais geralmente como a relação entre as duas coordenadas de pontos sobre uma curva traçada à mão livre sobre um plano.) Hoje tal definição é inaceitável, pois não explica o que é "expressão analítica". Euler presumivelmente tinha em mente primariamente as funções algébricas e as funções transcendentes elementares; o tratamento estritamente analítico das funções trigonométricas foi, na verdade, em larga medida estabelecido pela *Introductio*. O seno, por exemplo, já não era um segmento de reta; era simplesmente um número ou uma razão — a ordenada de um ponto sobre um círculo unitário, ou o número definido pela série $z - z^3/3! + z^5/5! - \ldots$ para um valor de z. Das séries infinitas para e^x, sen x e cos x passava-se facilmente às "identidades de Euler"

$$\text{sen } x = \frac{e^{\sqrt{-1}x} - e^{-\sqrt{-1}x}}{2\sqrt{-1}},$$

$$\cos x = \frac{e^{\sqrt{-1}x} + e^{-\sqrt{-1}x}}{2}$$

e

$$e^{\sqrt{-1}x} = \cos x + \sqrt{-1}\,\text{sen } x,$$

relações que em essência eram conhecidas por Cotes e De Moivre mas que nas mãos de Euler tornaram-se instrumentos familiares da análise.

Euler usara expoentes imaginários em 1740 numa carta a Jean Bernoulli em que escreveu $e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}} = 2\cos x$; as familiares identidades de Euler apareceram na influente *Introductio* de 1748. As funções transcendentes elementares — trigonométricas, logarítmica, trigonométricas inversas e exponencial — eram escritas e pensadas praticamente na forma em que são tratadas hoje. As abreviações sin, cos, tang, cot, sec e cosec, que foram usadas por Euler na *Introductio* em latim, são mais próximas das formas atuais em inglês do que as abreviações correspondentes das línguas latinas. Além disso, Euler foi dos primeiros a tratar dos logaritmos como expoentes, do modo hoje tão familiar.

4 O primeiro volume de *Introductio* versa de princípio a fim sobre processos infinitos — produtos infinitos e frações contínuas infinitas, bem como inúmeras séries infinitas. Quanto a isso a obra é generalização natural das idéias de Newton, Leibniz e Bernoullis, todos os quais gostavam de séries infinitas. No entanto Euler era muito pouco cuidadoso em seu uso de tais séries. Embora ocasionalmente prevenisse contra o risco de trabalhar com séries divergentes, ele próprio usou a série binomial $1/(1-x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$ para valores de $x \geq 1$. Na verdade, combinando as duas séries $x/(1-x) = x + x^2 + x^3 + \ldots$ e $x/(x-1) = 1 + 1/x + 1/x^2 + \ldots$ Euler concluiu que $\ldots 1/x^2 + 1/x + 1 + x + x^2 + x^3 \ldots = 0$.

Apesar de sua audácia, por manipulações de séries infinitas Euler obteve resultados que tinham fugido de seus predecessores. Entre esses está a somação dos recíprocos dos quadrados perfeitos — $1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 + 1/4^2 + \ldots$ Oldenburg, numa carta a Leibniz de 1673 tinha perguntado qual a soma dessa série, mas Leibniz não deu resposta;

em 1689 Jacques Bernoulli confessou sua própria incapacidade de achar a soma. Euler começou com a série familiar $\operatorname{sen} z = z - z^3/3! + z^5/5! - z^7/7! + \ldots$ Então pode-se pensar em $\operatorname{sen} z - 0$ como uma equação polinomial infinita $0 = 1 - z^2/3! + z^4/5! - z^6/7! + \ldots$ (obtida dividindo tudo por z), ou, se z^2 é substituído por w, como a equação $0 = 1 - w/3! + w^2/5! - \ldots$ Da teoria das equações algébricas sabe-se que, se o termo constante é 1, a soma dos recíprocos das raízes é o oposto do coeficiente do termo linear — nesse caso 1/3! Além disso, as raízes da equação em z sabe-se que são $\pm\pi$, $\pm 2\pi$, $\pm 3\pi$, e assim por diante; logo as raízes da equação em w são π^2, $(2\pi)^2$, $(3\pi)^2$, e assim por diante. Logo

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{(2\pi)^2} + \frac{1}{(3\pi)^2} + \ldots \quad \text{ou} \quad \frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots$$

Com essa despreocupada aplicação a polinômios de grau infinito de regras algébricas válidas no caso finito Euler conseguiu um resultado que desafiara os irmãos Bernoulli mais velhos; mais tarde Euler repetidamente fez descobertas de modo semelhante. Quando Jean Bernoulli soube do triunfo de Euler, escreveu:

> E assim está satisfeito o ardente desejo de meu irmão, que, percebendo que a investigação da soma era mais difícil do que qualquer um teria imaginado, abertamente confessou que todo seu zelo acabara em fracasso. Quem dera que meu irmão estivesse vivo agora.

O resultado de Euler sobre a soma dos recíprocos dos quadrados dos inteiros parece datar de cerca de 1736, e é provável que fosse a Daniel Bernoulli que ele imediatamente comunicou o resultado[5]. Seu interesse por tais séries sempre foi forte, e mais tarde ele publicou a soma dos recíprocos de outras potências dos inteiros. Usando a série do co-seno em vez da do seno, Euler achou analogamente o resultado

$$\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots$$

donde como corolário

$$\frac{\pi^2}{12} = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \ldots$$

Muitos desses resultados apareceram também na *Introductio* de 1748, inclusive a soma dos recíprocos de potências pares desde $n = 2$ até $n = 26$. As séries de recíprocos de potências ímpares são tão intratáveis que ainda não se sabe se a soma dos recíprocos dos cubos dos inteiros positivos é ou não um múltiplo racional de π^3, ao passo que Euler sabia que para a 26.ª potência a soma dos recíprocos é

$$\frac{2^{24} \cdot 76977927\pi^{26}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 27}.$$

5 O tratamento imaginativo que Euler deu às séries levou-o a algumas notáveis relações entre a análise e a teoria dos números. Mostrou, com prova relativamente simples, que a divergência da série harmônica implica o teorema de Euclides sobre a existência de infinitos primos. Se existissem somente K primos — $p_1, p_2, \ldots, p_K$ — então todo número n seria da forma $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_K^{\alpha_K}$. Seja α o maior dos expoentes α_i para o número n e formemos o produto

$$P = \left(1 + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_1^2} + \ldots + \frac{1}{p_1^\alpha}\right)\left(1 + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_2^2} + \ldots \frac{1}{p_2^\alpha}\right) \ldots \left(1 + \frac{1}{p_K} + \frac{1}{p_K^2} + \ldots + \frac{1}{p_K^\alpha}\right).$$

[5]Veja Paul Stäckel, "Eine vergessene Abhandlung Leonhard Eulers über die Summe der reziproken Quadrate der natürlichen Zahlen" *Bibliotheca Mathematica* (3), 8 (1907-1908), 37-60

Nesse produto os termos $1/1, 1/2, \ldots, 1/n$ forçosamente aparecem, bem como outros, portanto o produto P não pode ser menor que $1/1 + 1/2 + \ldots + 1/n$. Da fórmula para a soma de uma progressão geométrica vemos que os fatores no produto são respectivamente menores que

$$\frac{1}{1 - 1/p_1}, \quad \frac{1}{1 - 1/p_2}, \quad \frac{1}{1 - 1/p_3}$$

e assim por diante. Logo

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} < \frac{p_1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2}{p_2 - 1} \cdot \frac{p_3}{p_3 - 1} \cdots \frac{p_K}{p_K - 1}$$

para todos os valores de n. Então, se K, o número de primos, fosse finito, a série harmônica seria necessariamente convergente[6]. Com uma análise bem mais elaborada Euler mostrou que a série infinita formada com os recíprocos dos primos é ela própria divergente, a soma S_n sendo assintótica a $\ln \ln n$ para valores crescentes do inteiro n.

Euler se deliciava com as relações entre a teoria dos números e sua desleixada manipulação de séries infinitas. Sem se preocupar com os perigos que espreitam atrás das séries alternadas, ele obteve resultados como $\pi = 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 - 1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8 + 1/9 - 1/10 + \ldots$ Aqui o sinal de um termo, depois dos dois primeiros, é determinado como segue: se o denominador é um primo da forma $4m + 1$, usa-se um sinal menos, se o denominador é um primo da forma $4m - 1$, um sinal mais, e se o denominador é um número composto usa-se o sinal dado pelo produto dos sinais das componentes. As operações com séries infinitas eram tratadas com grande ligeireza. Do resultado $\ln 1/(1-x) = x + x^2/2 + x^3/3 + x^4/4 + \ldots$ Euler concluiu que $\ln \infty = 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + \ldots$ portanto que $1/\ln \infty = 0 = 1 - 1/2 - 1/3 - 1/5 + 1/6 - 1/7 + 1/10 - \ldots$, onde a última série é formada de todos os recíprocos de primos (com sinal menos) e recíprocos de produtos de dois primos distintos (com sinal mais). A *Introductio* está repleta de tais séries e de produtos infinitos a elas relacionados, tais como $0 = 1/2 \cdot 2/3 \cdot 4/5 \cdot 6/7 \cdot 10/11 \cdot 12/13 \cdot 16/17 \cdot 18/19 \ldots$ e $\infty = 2/1 \cdot 3/2 \cdot 5/4 \cdot 7/6 \cdot 11/10 \cdot 13/12 \cdot 17/16 \cdot 19/18 \ldots$ O símbolo ∞ é livremente considerado[7] como denotando o recíproco do número 0.

6 Para a teoria dos logaritmos Euler contribuiu não só com a definição em termos de expoentes que usamos hoje, mas também com a idéia correta quanto aos logaritmos de números negativos. A idéia de ser $\log(-x) = \log(+x)$ era defendida pelo principal matemático da França durante os meados do século dezoito, o qual morreu no mesmo ano que Euler — Jean Le Rond d'Alembert (1717-1783). O cognome de d'Alembert era tirado da igreja de St. Jean Baptiste le Rond, perto de Notre-Dame de Paris, em cujos degraus ele tinha sido abandonado, em pequeno. Mais tarde descobriu-se que sua mãe era a aristocrática e vivaz Madame de Tencin, escritora eloqüente e irmã de um cardeal, e seu pai era o Chevalier Destouches, general da artilharia. A criança abandonada foi criada pela mulher de um vidreiro; mais tarde quando se tornou célebre como matemático d'Alembert desprezou as tentativas de aproximação de sua mãe, preferindo ser reconhecido como filho de seus humildes pais adotivos. O sobrenome d'Alembert foi adotado, por razões desconhecidas, quando era jovem ainda.

Como Euler e os Bernoullis, d'Alembert também tinha instrução ampla — em direito, medicina, ciência e matemática — o que lhe foi útil quando, entre 1751 e 1772, ele colaborou com Denis Diderot (1713-1784) nos vinte e oito volumes da célebre *Encyclopédie* ou *Dictionnaire raisonné des sciences, des arts, et des métiers*. Para a *Encyclopédie* d'Alembert escreveu o muito admirado "Discours préliminaire" bem como a maior parte dos artigos matemáticos e científicos. A *Encyclopédie*, apesar da educação jansenista de d'Alembert, mostrava fortes tendências à secularização da cultura tão característica do *Enlightenment*, e sofreu fortes ataques dos jesuítas. Devido à sua defesa do projeto,

[6]Essa prova, e outros trabalhos de Euler e dos Bernoullis, aparecem em Gerhard Kowalewski, *Die klassischen Probleme der Analysis des Unendlichen* (1910)

[7]Veja especialmente *Introductio* (nova edição Lyon, 1797), 1, 229 e seguintes

d'Alembert veio a ser conhecido como "a raposa da Enciclopédia" e incidentalmente teve um papel de relevo na expulsão da ordem jesuíta da França. Em conseqüência de suas atividades, e de sua amizade por Voltaire e outros "philosophes" tornou-se um dos que abriram o caminho à Revolução Francesa[8]. Com apenas vinte e quatro anos foi eleito para a Académie des Sciences, e em 1754 tornou-se seu *secrétaire perpetuel*, e nessa qualidade talvez o cientista mais influente da França. Pelo fim da estada de Euler em Berlim Frederico, o Grande, da Prússia convidou d'Alembert a presidir a Academia da Prússia; d'Alembert recusou, argüindo que seria muito impróprio colocar qualquer contemporâneo em posição de superioridade acadêmica sobre o grande Euler. D'Alembert foi convidado também por Catarina, a Grande, da Rússia a servir como tutor de seu filho, mas também esse oferecimento ele recusou, apesar do salário principesco que era oferecido.

Enquanto Euler se ocupava de pesquisa matemática em Berlim, d'Alembert estava ativo em Paris; até 1757, quando controvérsias sobre o problema das cordas vibrantes ocasionaram um afastamento, a correspondência entre os dois era freqüente e cordial[9], pois seus interesses eram quase os mesmos. Enunciados como $\log(-1)^2 = \log(+1)^2$, equivalentes a $2\log(-1) = 2\log(+1)$ ou a $\log(-1) = \log(+1)$ tinham intrigado os melhores matemáticos do começo do século dezoito, mas em 1747 Euler pode escrever a d'Alembert explicando corretamente a questão dos logaritmos dos números negativos. O resultado na verdade deveria ter sido claro para Jean Bernoulli e outros que conheciam mais ou menos bem a fórmula $e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta$ mesmo antes de Euler enunciá-la claramente. Essa identidade vale para todos os ângulos (medidos em radianos); em particular, para $\theta = \pi$, leva a $e^{i\pi} = -1$ — isto é, à afirmação $\ln(-1) = \pi i$. Portanto os logaritmos dos números negativos não são reais, como Jean Bernoulli e d'Alembert tinham acreditado, mas imaginários puros.

Euler chamou a atenção também para outra propriedade dos logaritmos que resultava claramente de sua identidade. Qualquer número, positivo ou negativo, tem não um só logaritmo mas uma infinidade. Da relação $e^{i(\theta \pm 2K\pi)} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta$ vê-se que se $\ln a = c$, então $c \pm 2K\pi i$ também são logaritmos naturais de a. Além disso, da identidade de Euler vê-se que os logaritmos de números complexos, reais ou imaginários, também são números complexos. Se por exemplo queremos um logaritmo natural de $a + bi$, escrevemos $a + bi = e^{x+iy}$. Obtém-se $e^x \cdot e^{iy} = a + bi = e^x(\cos y + i\,\mathrm{sen}\,y)$. Resolvendo as equações simultâneas $e^x \cos y = a$ e $e^x \mathrm{sen}\,y = b$ (obtidas igualando as partes reais e as partes imaginárias na equação complexa) obtemos os valores $y = \mathrm{arc\,tg}\,b/a$ e $x = \ln\,(b\,\mathrm{cossec}\,\mathrm{arctg}\,b/a)$ [ou $x = \ln\,(a\sec\mathrm{arctg}\,b/a)$].

7 D'Alembert gastou muito tempo e esforço tentando provar o teorema conjeturado por Girard e conhecido hoje como teorema fundamental da álgebra — que toda equação polinomial $f(x) = 0$ a coeficientes complexos e grau $n \geq 1$ tem pelo menos uma raiz complexa. Tão intensos foram seus esforços para provar o teorema (especialmente num ensaio sobre "A causa geral dos ventos" publicado nas *Memórias* da Academia de Berlim para 1746) que na França hoje o teorema é conhecido freqüentemente como teorema de d'Alembert. Se pensamos na resolução de uma tal equação polinomial como uma generalização das operações algébricas explícitas, podemos dizer que em essência d'Alembert queria provar que o resultado de qualquer operação algébrica efetuada sobre um número complexo é por sua vez um número complexo. Num certo sentido, então, Euler fez para as operações transcendentes elementares o que d'Alembert tentara fazer para operações algébricas. Com as identidades de Euler não é difícil achar, por exemplo, quantidades como $\mathrm{sen}\,(1+i)$ ou $\mathrm{arccos}\,i$, expressas na forma padrão para números complexos. No primeiro caso escreve-se

$$\mathrm{sen}\,(1+i) = \frac{e^{i(1+i)} - e^{-i(1+i)}}{2i},$$

[8]Para uma excelente exposição não matemática de sua vida e obra veja Ronald Grimsley, *Jean d'Alembert* (1717-1783) (1963)

[9]Veja R. E. Langer, "The Life of Leonard Euler", *Scripta Mathematica* **3** (1935), 61-66, 131-138

de onde se acha que $\mathrm{sen}\,(1+i) = a + bi$ onde $a = [(1+e^2)\,\mathrm{sen}\,1]/2e$ e $b = [(e^2-1)\cos 1]/2e$. No segundo caso escreve-se $\mathrm{arccos}\,i = x + iy$ ou $i = \cos(x+iy)$ ou

$$i = \frac{e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)}}{2} = \frac{1+e^{2y}}{2e^y}\cos x + i\,\frac{(1-e^{2y})}{2e^y}\,\mathrm{sen}\,x.$$

Igualando as partes reais e imaginárias vê-se que $\cos x = 0$ e $x = \pm\pi/2$. Logo

$$\frac{1-e^{2y}}{2e^y} = \pm 1 \qquad \text{ou} \qquad e^y = \mp 1 \pm \sqrt{2}.$$

Como tanto x quanto y devem ser reais, vemos que $x = \pm\pi/2$ e $y = \ln(\mp 1 + \sqrt{2})$. De modo semelhante podemos efetuar outras operações transcendentes elementares sobre números complexos, os resultados sendo números complexos. Isto é, Euler mostrara que o sistema dos números complexos é fechado sob as operações transcendentes elementares, ao passo que d'Alembert sugerira que o sistema de números complexos é algebricamente fechado.

Euler mostrou também que, surpreendentemente, uma potência imaginária de um número imaginário pode ser um número real. Numa carta a Christian Goldbach (1690-1764) em 1746 ele deu o resultado notável $i^i = e^{-\pi/2}$. De $e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta$ temos, para $\theta = \pi/2$, $e^{\pi i/2} = i$; logo

$$(e^{\pi i/2})^i = e^{\pi i^2/2} = e^{-\pi/2} = i^i.$$

Na verdade, há infinitos valores reais para i^i, como Euler mais tarde mostrou, dados por $e^{-\pi/2 \pm 2K\pi}$, onde K é um inteiro. Nas *Memórias* da Academia de Berlim para 1749 Euler mostrou que toda potência complexa de um número complexo, $(a+bi)^{c+di}$ pode ser escrita[10] como um número complexo $p + qi$. Esse aspecto da obra de Euler não chamou a atenção, e o valor real de i^i teve que ser redescoberto no século dezenove.

D'Alembert também considerou a expressão $(a+bi)^{c+di}$ e num dado momento ele tomou a base $a + bi$ nessa combinação como sendo uma variável e diferenciou a função — uma antecipação da teoria das variáveis complexas que foi desenvolvida no século dezenove. D'Alembert assumiu que um Cálculo de variáveis complexas seguiria um esquema semelhante ao do Cálculo para combinações algébricas de variáveis reais, de modo que a expressão $f(x+iy)d(x+iy)$ sempre poderia ser expressa na forma $dp + i\,dq$ em que as partes real e imaginária estão separadas, resultado que não conseguiu provar. Num artigo de 1752 sobre a resistência dos fluidos ele chegou às chamadas equações de Cauchy-Riemann que tanta importância têm na análise complexa. Se a função analítica $f(x+iy) = u + iv$, então $\partial u/\partial x = \partial v/\partial y$ e $\partial u/\partial y = -\partial v/\partial x$.

8 Em sua atitude com relação aos desenvolvimentos da matemática d'Alembert era uma mistura pouco comum de cautela e ousadia. Ele considerava discutível o uso que Euler fazia de séries divergentes (1768) apesar dos sucessos conseguidos. Além disso, d'Alembert fazia objeções a Euler por esse assumir que diferenciais são símbolos para quantidades que são zero mas no entanto são qualitativamente diferentes. Como Euler se restringia a funções bem comportadas, ele não se envolvera nas dificuldades sutis que mais tarde tornariam insustentável sua atitude ingênua. Enquanto isso, d'Alembert achava que a "verdadeira metafísica" do Cálculo se encontraria na idéia de limite. No artigo sobre a "diferencial" que ele escreveu para a *Encyclopédie*, d'Alembert afirmou que "a diferenciação de equações consiste simplesmente em achar os limites da razão de diferenças finitas de duas variáveis contidas na equação". Opondo-se aos pontos de vista de Leibniz e Euler, d'Alembert insistia que "uma quantidade é alguma coisa ou é nada: se é alguma coisa, não desapareceu ainda; se é nada, ela literalmente desapareceu. A suposição de que há um estado intermediário entre esses dois é uma quimera"[11].

[10]Veja artigos sobre i^i por H. S. Uhler e R. C. Archibald em *American Mathematical Monthly*, **28** (1921), 114-121

[11]Veja seu *Mélanges de littérature, d'histoire et de philosophie* (1767), pp. 249-250

Esse ponto de vista excluiria a vaga noção de diferenciais como grandezas infinitamente pequenas, e d'Alembert mantinha que a notação diferencial é apenas uma maneira conveniente de falar que depende para sua justificação da linguagem de limites. Seu artigo na *Encyclopédie* sobre a diferencial se referia à *De quadratura curvarum* de Newton mas d'Alembert interpretava a frase de Newton "primeira e última razão" como um limite em vez de uma primeira ou última razão de duas quantidades que estão apenas surgindo. No artigo sobre "Limite" que ele escreveu para a *Encyclopédie* ele chamou uma quantidade o limite de uma segunda quantidade [variável] se a segunda pode se aproximar da primeira de mais perto que por qualquer quantidade dada (sem coincidir com ela)[12]. A imprecisão nessa definição foi removida nas obras de matemáticos do século dezenove.

Euler pensava numa quantidade infinitamente grande como o recíproco de uma quantidade infinitamente pequena; mas d'Alembert, tendo posto fora da lei o infinitésimo, definiu o infinitamente grande em termos de limites. Uma linha, por exemplo, se diz ser infinita em relação a outra se sua razão é maior que qualquer número dado. Prosseguiu definindo quantidades infinitamente grandes de ordem superior de modo semelhante ao usado por matemáticos hoje ao falar de ordens de infinito em relação a funções. D'Alembert negava a existência do infinito atual, pois pensava em grandezas geométricas e não na teoria dos conjuntos proposta um século depois. A formulação de d'Alembert do conceito de limite não tinha a fraseologia clara que seria necessária para torná-la aceitável a seus contemporâneos. Por isso os autores de textos do Continente no fim do século dezoito em geral continuaram a usar a linguagem e concepções de Leibniz e Euler, de preferência às de d'Alembert.

9 D'Alembert, homem de interesses variados, hoje talvez seja melhor conhecido pelo que se chama o princípio de d'Alembert — as ações e reações internas de um sistema de corpos rígidos em movimento estão em equilíbrio. Esse princípio apareceu em 1743 em seu célebre tratado, *Traité de dynamique*. Outros tratados de d'Alembert versavam sobre música, o problema dos três corpos, a precessão dos equinócios, movimento em meios resistentes e perturbações lunares. Ao estudar o problema das cordas vibrantes ele foi levado à equação diferencial parcial $\partial^2 u/\partial t^2 = \partial^2 u/\partial x^2$, para a qual em 1747 ele deu (nas *Memórias* da Academia de Berlim) a solução $u = f(x+t) + g(x-t)$, onde f e g são funções arbitrárias. A teoria das equações diferenciais ordinárias tinha sido já bastante desenvolvida mas o assunto mais difícil da resolução de equações diferenciais parciais era então um campo para pioneiros. Euler fez outros progressos nesse ramo da análise dando para a equação mais geral $\partial^2 u/\partial t^2 = a^2(\partial^2 u/\partial x^2)$ a solução $u = f(x+at) + g(x-at)$.

A resolução de equações diferenciais ordinárias num certo sentido tinha começado assim que a relação inversa entre diferenciação e integração tinha sido percebida. Mas a maior parte das equações diferenciais não pode ser facilmente reduzida a simples quadraturas, exigindo em vez disso engenhosas substituições ou algoritmos para sua resolução. Uma das realizações do século dezoito foi a descoberta de grupos de equações diferenciais que são resolúveis por artifícios bastante simples. As equações de Bernoulli, mencionadas no capítulo precedente, formam um tal grupo. Outro tipo foi identificado pelo precoce matemático Alexis Claude Clairaut (1713-1765) e tem seu nome — a família de equações da forma $y = xy' + f(y')$. Nesse caso a substituição $p = y'$ seguida de diferenciação dos termos da equação em relação a x leva a uma equação em x, p e dp/dx que é resolúvel, a solução geral sendo $y = cx + f(c)$. A equação diferencial de Clairaut tem também uma solução singular, uma das primeiras desse tipo a serem descobertas, Taylor tendo anteriormente dado uma tal solução. D'Alembert achou a solução singular do tipo um pouco mais geral de equação diferencial $y = xf(y') + f(y')$ por isso essa é conhecida como equação de d'Alembert.

10 Alexis Claude Clairaut foi um dos matemáticos mais precoces, superando até Blaise Pascal nesse ponto. Aos dez anos ele lia os textos de L'Hospital sobre cônicas e Cálculo, aos treze ele leu para a Académie des Sciences um artigo sobre geometria, e quando

[12]Veja A. Robinson, *Non-standard Analysis* (Amsterdam: North Holland, 1966), pp. 267-268

tinha apenas dezoito anos foi aceito, com dispensa especial em relação às exigências de idade, como membro da Académie. (D'Alembert foi eleito para a Académie aos vinte e quatro.) No ano em que foi eleito Clairaut publicou um tratado célebre, *Recherches sur les courbes à double courbure*, cuja substância ele tinha apresentado à Academia dois anos antes. Como a *Géométrie* de Descartes, as *Recherches* de Clairaut apareceram sem nome de autor na página de título, embora também nesse caso a autoria fosse bem conhecida. O tratado de Clairaut realizava para as curvas no espaço o programa que Descartes tinha sugerido quase um século antes — seu estudo por meio de projeções em dois planos coordenados. Na verdade foi esse método que sugeriu o nome dado por Clairaut a curvas *gauches* ou reversas pois sua curvatura é determinada pelas curvaturas das duas projeções. Em *Recherches* numerosas curvas no espaço são determinadas como intersecções de várias superfícies, são dadas explicitamente fórmulas para distância em duas e três dimensões, uma forma da equação do plano por interseptos está incluída, e são determinadas tangentes a curvas no espaço. Esse livro do jovem Clairaut é o primeiro tratado sobre geometria analítica no espaço[13]. Clairaut, de uma família de vinte filhos da qual só um sobreviveu ao pai, deu outras importantes contribuições na análise. Observou que as derivadas mistas de segunda ordem f_{xy} e f_{yx} de uma função $f(x, y)$ são em geral iguais (sabemos que isso vale com hipóteses de continuidade das derivadas no ponto em questão) e usou esse fato no critério $M_y \equiv N_x$, familiar em equações diferenciais, para que a expressão diferencial $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy$ seja exata. Em obras célebres sobre matemática aplicada, tais como *Théorie de la figure de la terre* (1743) e *Théorie de la lune* (1752) ele usou a teoria do potencial. Seus textos *Eléments de géométrie* (1741) e *Eléments d'algèbre* (1746), o primeiro escrito para a Marquise du Châtelet, eram parte de um plano, que lembra os de hoje, para aperfeiçoar o ensino da matemática.

Incidentalmente Clairaut tinha um irmão mais moço que se rivalizava com ele em precocidade, pois aos quinze anos, o irmão, conhecido apenas como "le cadet Clairaut" publicou em 1731 (o ano em que apareceram também as *Recherches* do irmão mais velho) um livro sobre Cálculo chamado *Traité de quadratures circulares et hyperboliques*. Esse gênio quase desconhecido morreu tragicamente de varíola no ano seguinte[14]. O pai dos dois irmãos Clairaut era ele próprio um matemático competente, mas hoje é lembrado principalmente através da obra de seus dois filhos, dois dos mais precoces matemáticos de todos os tempos.

11 Uma das equações diferenciais interessantes estudadas no século dezoito é a que d'Alembert chamou equação de Riccati — $y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x)$. Essa equação fora estudada por numerosos matemáticos, inclusive vários dos Bernoullis, bem como por Jacopo Riccati (1676-1754) e seu filho Vincenzo (1707-1775). Mas Euler foi o primeiro a chamar a atenção para o fato de que quando se conhece uma solução particular $v = f(x)$ então a substituição $y = v + 1/z$ transforma a equação de Riccati numa equação diferencial linear em z, de modo que se pode encontrar a solução geral. Em *Commentarii* de Petersburgo para 1760-1763, Euler observou também que se duas soluções particulares são conhecidas então uma solução geral pode ser expressa em termos de uma simples quadratura.

Euler foi, sem dúvida, o maior responsável pelos métodos de resolução usados hoje nos cursos introdutórios sobre equações diferenciais, e até muitos dos problemas específicos que aparecem em livros de texto de hoje remontam aos grandes tratados que Euler escreveu sobre o Cálculo — *Institutiones calculi differentialis* (Petersburgo, 1755) e *Institutiones calculi integralis* (Petersburgo, 1768-1770, 3 volumes). O uso de fatores integrantes, os métodos sistemáticos para resolver equações lineares de ordem superior

[13]Uma excelente fonte de informação sobre Clairaut se encontra em Pierre Brunet, "La vie et l'oeuvre de Clairaut", *Revue d'Histoire des Sciences et de leurs Applications*, **4** (1951), 13-40, 109-153; **5** (1952), 334-349; **6** (1953), 1-17. Veja também C. B. Boyer, "Clairaut and the Origin of the Distance Formula", *American Mathematical Monthly*, **55** (1948), 556-557

[14]Veja C. B. Boyer, "Clairaut le Cadet and a Theorem of Thabit ibn-Qurra", *Isis*, **55** (1964), 68-70. Cf. *Isis*, **57** (1966), 56-66

a coeficientes constantes, e a distinção entre equações lineares homogêneas e não-homogêneas, e entre solução particular e solução geral, estão entre suas contribuições ao assunto, embora em alguns pontos o crédito deve ser partilhado com outros. Daniel Bernoulli, por exemplo, tinha resolvido a equação $y'' + Ky = f(x)$ independentemente de Euler e mais ou menos ao mesmo tempo em 1739-1740, e d'Alembert tanto quanto Euler tinha métodos gerais, por volta de 1747, para resolver equações lineares completas. Até certo ponto a ubiqüidade da dívida que temos para com Euler no campo das equações diferenciais está indicada no fato de que um tipo de equação linear a coeficientes variáveis tem seu nome. A equação de Euler $x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_n y^{(0)} = f(x)$ (onde expoentes entre parênteses indicam ordens de derivação) se reduz facilmente, pela substituição $x = e^t$, a uma equação linear a coeficientes constantes.

Os quatro volumes de *Institutiones* de Euler contêm de longe o tratamento mais completo do Cálculo dado até então. Além dos elementos do assunto e da resolução de equações diferenciais, encontramos coisas como o "teorema de Euler sobre funções homogêneas" — se $f(x, y)$ é homogênea de ordem n, então $xf_x + yf_y = nf$ — um desenvolvimento do cálculo de diferenças finitas, formas padrão para integrais elíticas (campo em que d'Alembert também trabalhara) e a teoria das funções beta e gama (ou fatorial) baseada nas "integrais eulerianas" $\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}\,dx$ e $B(m, n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx$ e relacionadas por fórmulas como $B(m, n) = \Gamma(m)\,\Gamma(n)/\Gamma(m+n)$. Wallis já conhecia algumas das propriedades dessas integrais mas graças à organização dada por Euler essas funções transcendentes superiores se tornaram parte integrante do cálculo avançado e da matemática aplicada. Cerca de um século depois a função beta foi generalizada por Pafnuti L. Tchebycheff (1821-1894) que provou que a "integral de Tchebycheff" $\int x^p(1-x)^q\,dx$ é uma função transcendente superior a menos que p ou q ou $p + q$ seja um inteiro.

12 Um dos aspectos característicos da época era uma tendência a aplicar a todos os aspectos da sociedade os métodos quantitativos que tinham tanto sucesso nas ciências físicas. Não é então surpreendente ver tanto Euler quanto d'Alembert escrevendo sobre problemas de expectativa de vida, o valor de uma anuidade, loterias, e outros aspectos da ciência social. As probabilidades, afinal, tinham sido um dos interesses principais dos amigos de Euler, Daniel e Nicolaus Bernoulli. Segundo os cálculos de Euler, publicados nas *Memórias* da Academia de Berlim para 1751, um pagamento de 350 coroas deveria comprar para um recém-nascido uma anuidade de 100 coroas a começar dos vinte anos e continuando pelo resto da vida. Entre os problemas de loteria que ele publicou na mesma revista do ano de 1765, o seguinte é o mais simples. Suponha que n bilhetes são numerados consecutivamente de 1 a n e que três bilhetes são tirados ao acaso. Então a probabilidade que três números consecutivos sejam tirados é

$$\frac{2 \cdot 3}{n(n-1)},$$

a probabilidade que dois números consecutivos (mas não três) sejam tirados é

$$\frac{2 \cdot 3(n-3)}{n(n-1)},$$

e a probabilidade que não sejam tirados números consecutivos é

$$\frac{(n-3)\,(n-4)}{n(n-1)}.$$

Para a solução não são necessários conceitos novos, mas, como era de prever, Euler aqui contribuiu com notações, como fizera em outros assuntos. Escreveu que achava útil representar a expressão

$$\frac{p(p-1)\ldots(p-q+1)}{1 \cdot 2 \ldots q}$$

por

$$\left[\frac{p}{q}\right],$$

o que é essencialmente equivalente à notação moderna

$$\binom{p}{q}.$$

D'Alembert, ao contrário de Euler, é conhecido na história da teoria das probabilidades principalmente por sua oposição às idéias geralmente aceitas. Por exemplo, no artigo sobre "Croix ou Pile" publicado em 1754 na *Encyclopédie* d'Alembert sugere que a probabilidade de lançar cara em dois lances de uma moeda deveria ser 2/3 e não 3/4 como é usualmente aceito, pois o jogo termina se cara aparece no primeiro lance. Um matemático de Genebra fez notar a d'Alembert que seus três casos (H, TH, TT) não são igualmente prováveis, mas d'Alembert conservou seu ceticismo quanto ao argumento comum. No artigo acima ele se referia ao status do paradoxo de Petersburgo como um escândalo; evidentemente isso o encorajou a considerar os princípios básicos das probabilidades como pouco firmes. Em vista da situação ele sugeriu que quando possível as probabilidades deveriam ser determinadas experimentalmente. Nisso ele teve a aprovação do Comte de Buffon (1707-1788), autor de uma célebre *Histoire naturelle* em vários volumes.

Os cientistas em geral consideram Buffon como um iconoclasta que propôs uma avaliação de cerca de 75 000 anos para a idade da terra, em vez da de 6 000 anos então comumente aceita. Os matemáticos conhecem Buffon por duas contribuições — uma tradução para o francês do *Método dos fluxos* de Newton e o "problema da agulha de Buffon" na teoria das probabilidades. Buffon também ficara impressionado com o "paradoxo de Petersburgo" e num "Essai d'arithmétique morale", publicado em 1777 no quarto volume de um suplemento de sua *Histoire naturelle* ele deu várias razões para considerar o jogo como inerentemente impossível. Buffon sugeriu também, no mesmo "Essai", o que era essencialmente um novo ramo da teoria das probabilidades — problemas envolvendo considerações geométricas. Propôs que sobre uma grande área plana se traçassem retas paralelas equidistantes e que uma agulha fina fosse lançada ao acaso sobre a área plana[15]. A probabilidade de a agulha cair cortando uma das retas ele deu corretamente como sendo $2l/\pi d$, onde d é a distância entre as retas e l o comprimento da agulha e $l < d$. O "Essai" continha também uma coleção de tabelas, cobrindo os anos de 1709 a 1766 em Paris, sobre nascimentos, casamentos e mortes, bem como resultados sobre expectativa de vida que d'Alembert disputou.

Foi durante o século dezoito que o costume de variolação — inoculação com uma forma enfraquecida da varíola a fim de desenvolver imunidade contra a doença — foi introduzida na Europa vinda do Levante; isso provocou uma controvérsia entre aqueles que procuravam aplicar a teoria das probabilidades aos assuntos da vida. Em 1760 Daniel Bernoulli leu perante a Académie des Sciences de Paris um ensaio sobre as vantagens da inoculação, mas antes que o "Essai" fosse publicado nas *Memórias* da Académie d'Alembert já tinha levantado objeções. D'Alembert não negava as vantagens mas dizia que Bernoulli as tinha exagerado. Parte do argumento estava centrado na distinção que d'Alembert insistia ser preciso fazer entre "vida média" e a "vida provável" de um indivíduo. A "vida provável" de um recém-nascido era de cerca de oito anos (isto é, metade dos recém-nascidos da época morriam antes de chegar aos oito anos) ao passo que sua "vida média" ou extensão média de vida era de cerca de vinte e seis anos. (Uma comparação desses números com os dados correspondentes de hoje mostra vividamente o nível terrivelmente baixo da pesquisa médica em séculos passados.) As controvérsias sobre

[15]Uma exposição disso se encontra em Isaac Todhunter, *History of the Mathematical Theory of Probability from the Time of Pascal to that of Laplace* (1865). Veja também N. T. Gridgeman, "Geometric Probability and the Number π", *Scripta Mathematica*, 25 (1960), 183-195

a probabilidade de que a variolação fosse vantajosa terminaram de vez no fim do século quando a vacina contra a varíola foi descoberta pelo Dr. Edward Jenner.

13 D'Alembert partilhava com Euler o interesse por muitos aspectos da matemática, especialmente em análise e matemática aplicada, mas numa direção Euler deu grandes contribuições sem encontrar rivalidade da parte de d'Alembert. Isso foi na teoria dos números, assunto que tem atraído fortemente muitos dos maiores matemáticos, tais como Fermat e Euler, mas não interessou a outros, inclusive Newton e d'Alembert. Euler não publicou tratado sobre o assunto, mas escreveu cartas e artigos sobre vários aspectos da teoria dos números. Lembremos que Fermat afirmara, entre outras coisas, que (1) números da forma $2^{2^n}+1$ aparentemente são sempre primos e (2) se p é primo e a um inteiro então $a^p - a$ é divisível por p. A primeira dessas conjeturas Euler derrubou em 1732 graças à sua incrível facilidade em computação, mostrando que $2^{2^5}+1 = 4\,294\,967\,297$ é fatorável em $6\,700\,417 \times 641$. Hoje a conjetura de Fermat foi tão completamente esvaziada que os matemáticos se inclinam à opinião contrária — que não há outros números de Fermat primos maiores que o número 65 537 que corresponde a $n = 4$.

Do mesmo modo pelo qual Euler, por meio de um contra-exemplo, provou ser falsa uma das conjeturas de Fermat, no século vinte verificou-se ser falsa uma sugestão de Euler. Se n é maior que dois, Euler acreditava, pelo menos n potências n-ésimas são necessárias para fornecer uma soma que seja ela própria uma potência n-ésima[16]; mas em 1966 mostrou-se que a soma de apenas quatro quintas potências pode ser uma quinta potência[17]: pois $27^5 + 84^5 + 110^5 + 135^5 = 144^5$. Mas deve-se notar que nesse caso foram necessários dois séculos e os serviços de um computador para detetar a falha.

Para a segunda conjetura, conhecida como pequeno teorema de Fermat, Euler foi o primeiro a publicar uma prova (embora Leibniz tivesse deixado uma mais antiga em manuscrito). A prova de Euler, que apareceu em *Commentarii* de Petersburgo para 1736, é tão surpreendentemente elementar que a descrevemos aqui. A prova é feita por indução sobre a. Se $a = 1$ o teorema vale evidentemente. Agora mostramos que se o teorema vale para qualquer valor inteiro positivo de a, seja $a = k$, então vale para $a = k + 1$. Para isso, usamos o teorema binomial para escrever $(k+1)^p$ como $k^p + mp + 1$, onde m é um inteiro. Subtraindo $k + 1$ de ambos os lados, vemos que $(k+1)^p - (k+1) = mp + (k^p - k)$. Como o último termo do segundo membro por hipótese é divisível por p, resulta que o segundo membro é divisível por p, e portanto o primeiro membro da equação também; o teorema portanto vale, por indução matemática, para todos os valores de a.

Tendo provado o pequeno teorema de Fermat, Euler demonstrou uma afirmação um pouco mais geral, em que usava o que veio a chamar-se a "função ϕ de Euler"[18]. Se m é um inteiro positivo maior que um, a função $\phi(m)$ é definida como o número de inteiros menores que m que são primos com m (mas incluindo o inteiro um em cada caso). Costuma-se definir $\phi(1)$ como 1; para $n = 2, 3$ e 4 por exemplo, os valores de $\phi(n)$ são 1, 2 e 2 respectivamente. Se p é um primo então claramente $\phi(p) = p - 1$. Pode-se provar que

$$\phi(m) = m\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_r}\right)$$

onde $p_1, p_2, \ldots, p_r$ são os fatores primos distintos de m. Usando esse resultado Euler mostrou que $a^{\phi(m)} - 1$ é divisível por m se a é primo com m.

Euler decidiu duas conjeturas de Fermat, mas não o "último teorema de Fermat", embora provasse a impossibilidade de soluções inteiras de $x^n + y^n = z^n$ para $n = 3$. Em 1747 Euler ajuntou aos três pares de números amigáveis conhecidos por Fermat mais vinte e sete; mais tarde aumentou esses trinta para mais de sessenta. Euler também provou

[16] L. E. Dickson. *History of the Theory of Numbers* (1952), II, 648

[17] L. J. Lander e T. R. Parkin, "Counterexample to Euler's Conjecture on Sums of Like Powers", *Bulletin of the American Mathematical Society*, 72 (1966), 1079

[18] Uma boa exposição disso está incluída em Oystein Ore, *Number Theory and its History* (1948)

que todos os números perfeitos pares são da forma dada por Euclides — $2^{n-1}(2^n - 1)$, onde $2^n - 1$ é primo. Se existe ou não número ímpar perfeito é ainda uma questão aberta. Também não está resolvida até hoje uma questão levantada em correspondência entre Euler e Christian Goldbach (1690-1764). Escrevendo a Euler em 1742 Goldbach disse que todo inteiro par (>2) é a soma de dois primos. Esse assim chamado teorema de Goldbach apareceu impresso (sem prova) em 1770 na Inglaterra nas *Meditationes algebraicae* de Edward Waring (1734-1793). Waring era "*senior wrangler*" em Cambridge em 1757 e "Lucasian professor" de matemática também lá a partir de 1760. Suas obras contêm muitos resultados importantes. Porém eram mal escritas e não muito lidas, de modo que o familiar critério da razão para a convergência de séries é mais freqüentemente conhecido como critério de Cauchy, apesar de ter sido dado por Waring em 1776. As *Meditationes algebraicae* contêm não só a conjetura de Goldbach mas também uma conjetura complementar — que todo inteiro ímpar é um primo ou a soma de três primos. Entre outras asserções não provadas está uma que é conhecida como teorema de Waring ou problema de Waring. Euler tinha provado que todo inteiro positivo é a soma de não mais que quatro quadrados; Waring conjeturou que todo inteiro positivo é soma de não mais que nove cubos, ou a soma de não mais que dezenove quartas potências. A primeira metade dessa ousada conjetura foi provada no começo do século vinte; a segunda parte ainda não foi provada, apenas em 1909 Hilbert provou que todo inteiro positivo pode ser expresso como soma de não mais que N potências n-ésimas positivas, onde N é alguma função de n. Waring publicou também nas *Meditationes algebraicae* um teorema com o nome de seu amigo e discípulo, John Wilson (1741-1793) — se p é um primo, então $(p-1)! + 1$ é um múltiplo de p. Wilson também foi *senior wrangler** em Cambridge mas abandonou a matemática pelo estudo de direito e foi juiz e *knight***.

14 Os principais matemáticos do Continente nos meados do século dezoito eram primariamente analistas, mas vimos que suas contribuições não se limitavam à análise. D'Alembert dera uma prova, imperfeita, do teorema fundamental da álgebra, e Clairaut em 1740 tinha publicado um livro, *Élémens d'algèbre*, tão popular que uma sexta edição saiu em 1801. Euler não só contribuiu para a teoria dos números como também escreveu um popular texto de álgebra que apareceu em edições alemãs e russas em S. Petersburgo em 1770-1772, em francês (sob os auspícios de d'Alembert) em 1774, e em numerosas outras versões, inclusive edições americanas em inglês. As qualidades excepcionalmente didáticas da *Álgebra* de Euler são atribuídas ao fato de ter sido ditada pelo autor cego a pessoa relativamente despreparada. Os textos de Clairaut e Euler não foram muito usados na Inglaterra, em parte por causa do isolacionismo matemático lá reinante durante o fim do século dezoito e em parte porque Maclaurin e outros tinham escrito bons livros de nível elementar. O *Treatise of Algebra* de Maclaurin teve meia dúzia de edições entre 1748 e 1796. Um rival *Treatise of Algebra* por Thomas Simpson (1710-1761) teve pelo menos oito edições em Londres de 1745 a 1809; outro, *Elements of Algebra*, por Nicholas Saunderson (1682-1739), cinco edições entre 1740 e 1792. Simpson era um gênio autodidata que foi eleito para a Royal Society, em 1745, mas cuja vida turbulenta terminou em fracasso meia dúzia de anos depois. Porém seu nome se preserva na regra de Simpson, publicada em sua *Mathematical Dissertations on Physical and Analytical Subjects* (1743), para quadraturas aproximadas usando arcos parabólicos; mas esse resultado aparecera em forma um tanto diferente em 1668 nas *Exercitationes geometricae* de James Gregory. A vida de Saunderson, ao contrário, foi um exemplo de triunfo pessoal sobre um enorme obstáculo físico — cegueira total a partir da idade de um ano, após um ataque de varíola.

Os textos de álgebra do século dezoito ilustram uma tendência a dar ênfase crescente a algoritmos, ao passo que ao mesmo tempo perdurava uma considerável incerteza quanto à base lógica do assunto. A maior parte dos autores achava necessário demorar-se longamente sobre as regras que governam a multiplicação de números negativos, e alguns

*Estudante que obteve distinção em matemática. N. do R.

**Título imediatamente abaixo de baronete na Inglaterra. N. do R.

rejeitavam categoricamente a possibilidade de multiplicar dois números negativos. Foi, por excelência, uma era de livros-texto de matemática, e nunca antes houveram aparecido tantos livros em tantas edições. A *Álgebra* de Simpson era acompanhada de outro volume, *Elements of Plane Geometry*, com cinco edições de 1747 a 1800, mas entre a multidão de textos poucos conseguiram o sucesso da edição por Robert Simson (1687-1768) dos *Elements of Euclid*. Essa obra, de um homem que estudara medicina e tornou-se professor de matemática na University of Glasgow, apareceu pela primeira vez em 1756, e em 1834 estava na vigésima quarta edição inglesa, para não falar nas traduções em outras línguas ou em geometrias mais ou menos inspiradas nela, pois a maior parte das versões modernas em inglês de Euclides tem dívida pesada para com ela.

15 Simson tentou reviver a antiga geometria grega, e para isso publicou "restaurações" de obras perdidas, tais como os *Porismas* de Euclides e *Secções Determinadas* de Apolônio. Em parte como resultado do entusiasmo de Simson pela antiguidade, a Inglaterra durante o século dezoito foi um forte centro de geometria sintética, e os métodos analíticos não avançaram muito pela geometria. Pode ser essa uma das razões pelas quais o progresso da análise na Inglaterra foi muito inferior ao do Continente. É costume atribuir a responsabilidade por esse atraso ao método dos fluxos supostamente incômodo se comparado com o do cálculo diferencial, mas essa idéia não é fácil de justificar. As notações fluxionais são usadas até hoje comodamente pelos físicos, e são facilmente adaptáveis à geometria analítica; mas nenhum Cálculo, diferencial ou fluxional, se casa bem com a geometria sintética. Por isso a predileção inglesa pela geometria pura pode ter sido um obstáculo muito mais eficaz para a pesquisa em análise do que a notação dos fluxos. Nem é justo culpar Newton pelo conservadorismo geométrico inglês. Afinal, o *Method of Fluxions* de Newton estava repleto de geometria analítica, e mesmo os *Principia* continham mais análise do que se diz em geral. Talvez fosse uma insistência excessiva por precisão lógica que levou os ingleses a uma visão geométrica estreita. Assinalamos antes os argumentos de Berkeley contra os matemáticos, e Maclaurin sentira que o método mais eficaz para enfrentá-los em bases racionais era voltar ao rigor da geometria clássica. Quase 2 000 anos antes, na Grécia, uma insistência sobre o rigor parece ter prejudicado o desenvolvimento de uma álgebra numérica; na Inglaterra no século dezoito a situação era mais ou menos semelhante. Por outro lado, no Continente o sentimento dominante era o expresso no conselho que se diz ter d'Alembert dado a um amigo matemático hesitante: "Vá adiante, e a fé lhe virá". É fácil criticar a lógica de Euler e d'Alembert, mas não se pode pensar em discutir o papel imensamente significativo que desempenharam no desenvolvimento da matemática.

A geometria sintética não fora inteiramente esquecida no Continente, pois em 1741 Clairaut publicou um *Élémens de géométrie* que também teve uma meia dúzia de edições, mas tratava-se de um insípido livro-texto de pouca solidez e menos rigor. Euler e d'Alembert pouco contribuíram nesse campo, apesar do fato de hoje a reta que contém o circuncentro, o ortocentro e o baricentro de um triângulo, ser chamada a reta de Euler do triângulo. Que esses centros de um triângulo são colineares parece ter sido sabido antes por Simson, cujo nome está ligado a outra reta relacionada a um triângulo[19]. Essas pequenas adições à geometria pura, no entanto, parecem insignificantes se comparadas com as contribuições do Continente à geometria analítica durante os meados do século dezoito.

Descrevemos a geometria analítica de Clairaut, especialmente em relação aos desenvolvimentos em três dimensões, mas o material contido no segundo volume da *Introductio* de Euler era mais extenso, mais sistemático e mais eficaz. Desde 1728 Euler contribuiu com artigos no *Commentarii* de Petersburgo sobre o uso de geometria de coordenadas no espaço, dando equações gerais para três grandes classes de superfícies — cilindros, cones e superfícies de revolução. Percebeu que a equação de um cone com vértice na origem é necessariamente homogênea. Mostrou também que o arco mais curto (geodésica)

[19]Veja, por exemplo, R. A. Johnson, *Modern Geometry* (Boston: Houghton Mifflin, 1929); reimpresso como *Advanced Euclidean Geometry* (New York: brochura Dover, 1960), pp. 137 e seguintes, 206 e seguintes

entre dois pontos de uma superfície cônica se transformaria num segmento de reta se a superfície fosse estendida sobre um plano — um dos mais antigos teoremas sobre superfícies desenvolvíveis. Vê-se como Euler percebia o significado de trabalhar da maneira mais geral possível especialmente no segundo volume de *Introductio*. Esse livro fez mais do que qualquer outro para tornar o uso de coordenadas, tanto em duas quanto em três dimensões, a base para um estudo sistemático das curvas e superfícies. Em vez de se concentrar em secções cônicas, Euler deu uma teoria geral de curvas, baseada no conceito de função que era central no primeiro volume. As curvas transcendentes não eram desprezadas como de costume, de modo que aqui, praticamente pela primeira vez, o estudo gráfico das funções trigonométricas tornava-se parte da geometria analítica. As outras curvas transcendentes comuns também estão incluídas, bem como algumas não tão comuns, como $y = x^x$, $y^x = x^y$ e $y = (-1)^x$.

16 A *Introductio* contém também duas exposições sobre coordenadas polares que são tão completas e sistemáticas que freqüentemente, mas erroneamente, esse sistema de coordenadas é atribuído a Euler. Classes completas de curvas, tanto algébricas como transcendentes, são consideradas; pela primeira vez as equações para as transformações de coordenadas polares para retangulares são dadas em forma trigonométrica estritamente moderna. Além disso, Euler fez uso do ângulo vetorial geral e de valores negativos para o raio vetor, de modo que a espiral de Arquimedes, por exemplo, aparecia em sua forma dual, simétrica com relação ao eixo a 90°. D'Alembert evidentemente fora influenciado por essa obra quando escreveu o artigo sobre "Géométrie" para a *Encyclopédie*. A *Introductio* de Euler foi também a grande responsável pelo uso sistemático do que se chama a representação paramétrica de curvas — isto é, a expressão de cada uma das coordenadas cartesianas como uma função de uma variável independente auxiliar. Para a ciclóide, por exemplo, Euler usou a forma

$$\begin{cases} x = b - b \cos \dfrac{z}{a} \\[2ex] y = z + b \operatorname{sen} \dfrac{z}{a} \end{cases}$$

Um longo e sistemático apêndice à *Introductio* é talvez a mais significativa contribuição de Euler à geometria, pois representa praticamente a primeira exposição em livro-texto da geometria analítica no espaço. As superfícies, tanto algébricas como transcendentes, são consideradas em geral e são subdivididas em categorias. Aqui encontramos, evidentemente pela primeira vez, a noção de que as superfícies de segundo grau constituem uma família de quádricas no espaço análoga à família das secções cônicas na geometria plana. Partindo da equação quadrática geral com dez termos $f(x, y, z) = 0$, Euler observa que a coleção dos termos de segundo grau, quando igualada a zero, dá a equação do cone assintótico, real ou imaginário. E, o que é mais importante, ele usou as equações de translação e rotação de eixos (na forma que, incidentalmente, leva ainda o nome de Euler) para reduzir a equação de uma superfície quádrica não-singular a uma das formas canônicas correspondentes aos cinco tipos fundamentais — o elipsóide real, os hiperbolóides de uma e duas folhas, e os parabolóides elítico e hiperbólico.

Um aspecto dos cursos atuais de geometria analítica que não se encontra na *Introductio* (ou em outros textos da época) é o estudo sistemático dos lugares da geometria elementar, a reta e o círculo, o plano e a esfera. No entanto, a obra de Euler está mais próxima dos textos modernos que qualquer outro livro anterior à Revolução Francesa.

17 Muitos matemáticos de todos os tempos também se consideraram filósofos. Euler e d'Alembert estavam entre esses, mas ambos perderam a oportunidade que outro matemático de inclinações filosóficas tentou explorar. Era Johann Heinrich Lambert (1728-1777) um suíço alemão, autor em uma variedade de temas matemáticos e não-matemáticos, que durante um par de anos foi associado de Euler no Academia de Berlim. Diz-se que quando Frederico, o Grande, lhe perguntou em que ciência ele era mais competente,

Lambert respondeu brevemente, "Todas". Ele poderia ser mais conhecido hoje se não tivesse tentado, pouco modestamente, dominar todos os ramos da ciência, pois era de fato homem de excepcionais dotes.

Vimos que Saccheri acreditava ter derrubado as possibilidades de que a soma dos ângulos de um triângulo fosse maior ou menor que dois ângulos retos. Lambert chamou a atenção sobre o fato bem conhecido de sobre a superfície de uma esfera a soma dos ângulos de um triângulo ser maior que dois retos, e sugeriu que se poderia achar uma superfície tal que a soma dos ângulos de um triângulo sobre ela fosse menor que dois retos. Tentando completar o que Saccheri pensara fazer — uma prova de que negar o postulado das paralelas de Euclides leva a uma contradição — Lambert em 1766 escreveu *Die Theorie der Parallellinien*, embora isto só aparecesse, postumamente, em 1786. Em vez de começar com um quadrilátero de Saccheri, ele adotou como ponto de partida um quadrilátero tendo três ângulos retos (agora conhecido como quadrilátero de Lambert) e então considerou as três possibilidades para o quarto ângulo, ou seja, que fosse agudo, reto ou obtuso. Correspondendo a esses três casos ele mostrou, à maneira de Saccheri, que a soma dos ângulos de um triângulo seria respectivamente menor que, igual a ou maior que dois ângulos retos. Indo além de Saccheri ele provou que o quanto a soma é menor que, ou excede, dois retos é proporcional à área do triângulo. No caso do ângulo obtuso essa situação é semelhante a um teorema clássico de geometria esférica — que a área de um triângulo é proporcional ao seu excesso esférico — e Lambert especulou que a hipótese do ângulo poderia corresponder a uma geometria sobre uma superfície nova, tal como uma esfera de raio imaginário. Em 1868 Eugênio Beltrami (1835-1900) mostrou que Lambert estava certo em sua conjetura sobre a existência de uma superfície assim. Mas tal superfície não é uma esfera de raio imaginário e sim uma superfície real chamada uma pseudoesfera — uma superfície de curvatura constante negativa gerada revolvendo uma tratriz sobre seu eixo[20].

Embora Lambert, como Saccheri, tentasse provar o postulado das paralelas, ele parece ter tido consciência de não ter conseguido. Escreveu:

> Provas do postulado de Euclides podem ser levadas até um ponto tal que aparentemente só falta uma bagatela. Mas uma análise cuidadosa mostra que nessa aparente bagatela está o cerne da questão; usualmente ela contém ou a proposição que se quer provar ou um postulado equivalente a ele.

Ninguém mais chegou tão perto da verdade sem descobrir as geometrias não-euclidianas.

Lambert é conhecido hoje também por outras contribuições. Uma dessas é a primeira prova, apresentada à Academia de Berlim em 1761, de que π é um número irracional. (Euler em 1737 tinha mostrado que e é irracional.) Lambert mostrou que se x é um número racional não-nulo então tg x não pode ser racional. Como tg $\pi/4 = 1$, um número racional, segue-se que $\pi/4$ não pode ser racional, portanto, π tão pouco. Isso, é claro, não resolvia a questão da quadratura do círculo, pois irracionalidades quadráticas são construtíveis; por essa época os quadradores de círculo eram tão numerosos que a Academia em Paris em 1775 aprovou uma resolução no sentido de não examinar oficialmente nenhuma pretensa solução do problema da quadratura. Como outra contribuição de Lambert à matemática devemos lembrar que ele fez para as funções hiperbólicas o que Euler fizera para as circulares, fornecendo o conceito e notação modernos. Comparações entre as ordenadas do círculo $x^2 + y^2 = 1$ e da hipérbole $x^2 - y^2 = 1$ tinham fascinado os matemáticos por um século, e por volta de 1757 Vicenzo Riccati, um italiano, sugeriu um desenvolvimento das funções hiperbólicas. Coube a Lambert introduzir as notações senh x, cosh x e tgh x para os equivalentes hiperbólicos das funções circulares da trigonometria e popularizar a muito útil trigonometria hiperbólica. Em correspondência com as três identidades de Euler para sen x, cos x e e^{ix} há três relações semelhantes para as

[20] A obra de Lambert sobre geometria não-euclidiana está completamente descrita em F. Engel e P. Stäckel: *Die Theorie der Parallelinien von Euklid bis auf Gauss* (1895). Uma exposição mais breve se encontra, por exemplo, em Roberto Bonola, *Non-Euclidean Geometry* (1912)

funções hiperbólicas, expressas pelas equações

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

e

$$e^x = \cosh x + \operatorname{senh} x.$$

Lambert também escreveu sobre cosmografia, geometria descritiva, cartografia, lógica e a filosofia da matemática, mas sua influência não se compara às de Euler ou d'Alembert.

18 Euler e d'Alembert morreram no mesmo ano, 1783; esse foi também o ano da morte de Etienne Bézout (1730-1783), um matemático que representa um aspecto característico da matemática da época. Mencionamos já que o século dezoito produziu muitos livros-texto de enorme sucesso; poderíamos acrescentar que foi a segunda metade do século que produziu também o gênero freqüentemente conhecido como *Cours d'Analyse* — uma obra em vários volumes cobrindo todo a matemática do nível mais elementar ao mais alto. Um dos de mais sucesso entre esses foi o *Cours de mathématique* de Bézout, obra em seis volumes que apareceu pela primeira vez em 1764-1769, que quase imediatamente, em 1770-1772, teve uma nova edição, e teve ainda muitas outras versões em francês e outras línguas. (O primeiro livro de texto americano sobre geometria analítica, incidentalmente, derivou, em 1826, do *Cours* de Bézout.) Foi através de tais compilações, mais do que através das obras originais dos próprios autores, que os progressos matemáticos de Euler e d'Alembert se tornaram amplamente conhecidos. O próprio Bézout não era um mero compilador, e seu nome é hoje familiar em conexão com o uso de determinantes na eliminação algébrica. Numa memória para a Academia de Paris em 1764, e mais extensamente num tratado de 1779 intitulado *Théorie générale des équations algébriques*, Bézout deu regras artificiais, semelhantes às de Cramer, para resolver n equações lineares simultâneas em n incógnitas. Ele é melhor conhecido pela extensão dessas a um sistema de equações em uma ou mais incógnitas em que se quer achar a condição sobre os coeficientes necessária para que as equações tenham uma solução comum. Para considerar um caso muito simples, pode-se perguntar qual a condição para que as equações $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$, $a_3x + b_3y + c_3 = 0$ tenham uma solução comum. A condição necessária é que o eliminante

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

aqui um caso especial do "Bezoutiante", seja 0. Eliminantes um pouco mais complicados aparecem quando são procuradas condições para que duas equações polinomiais de graus diferentes tenham uma solução comum. Bézout foi também o primeiro a dar uma prova satisfatória do teorema, conhecido por Maclaurin e Cramer, que diz que duas curvas algébricas de graus m e n respectivamente se cortam em geral em $m \cdot n$ pontos; por isso esse teorema é freqüentemente chamado "de Bézout". Euler também tinha contribuído para a teoria da eliminação, mas menos extensamente que Bézout.

Durante o século dezoito as universidades francesas não eram importantes na matemática. As academias e escolas militares é que produziam número substancial de matemáticos, e um *Cours de mathématique* como o de Bézout seria provavelmente usado em tais instituições. O próprio Bézout ensinava numa escola militar e era examinador para a marinha, por isso tinha contato com os currículos da época. No entanto, poucos anos depois da morte dos matemáticos que figuram neste capítulo (Buffon morreu só um ano antes da queda da Bastilha em 1789) o sistema de educação superior na França devia sofrer uma revisão drástica como conseqüência das disrupções produzidas pela Revolução Francesa. Durante esse período curto mas significativo a França tornou-se mais uma vez o centro matemático do mundo, como o fora nos meados do século dezessete. O capítulo seguinte é dedicado a um grupo de matemáticos que viveram e trabalharam na cidade de Paris durante esses tempos de provação para ela.

BIBLIOGRAFIA

Bell, E. T., *Men of Mathematics* (New York: Simon & Schuster, 1937)

Bell, E. T., *Development of Mathematics*, 2.ª ed. (New York: Mc-Graw-Hill, 1945)

Bonola, Roberto, *Non-Euclidean Geometry* (New York, 1912; reimpresso, New York: Dover, 1955)

Boyer, C. B., *History of Analytic Geometry* (New York: Scripta Mathematica, 1956)

Boyer, C. B., *History of the Calculus* (edição em brochura, New York: Dover, 1959)

Brunet, Pierre, "La vie et l'oeuvre de Clairaut," *Revue d'Histoire des Sciences et de leurs Applications*, **4** (1951), 13-40, 109-153; **5** (1952), 334-349; **6** (1953), 1-17

Cajori, Florian, *History of Mathematical Notations* (Chicago: Open Court, 1928-1929, 2 volumes)

Coolidge, J. L., *History of the Conic Sections and Quadric Surfaces* (Oxford: Clarendon, 1945)

D'Alembert, J., *Encyclopédie* (Paris, 1751-1765)

D'Alembert, J., *Mélanges de littérature, d'historie, et de philosophie*, 4.ª edição (Amsterdam, 1767, 5 volumes)

Dickson, L. E., *History of the Theory of Numbers* (New York: reimpressão Chelsea, 1952, 3 volumes)

Dugas, René, *A History of Mechanics* (New York: Central Book Co., por volta de 1955)

Engel, F., e P. Stackel, *Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss* (Leipzig, 1895, 2 volumes)

Eneström, Gustav, "Verzeichnis der Schriften Leonhard Eulers," *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Ergänzungsband IV*, Leipzig, 1910-1913

Euler, Leonhard, *Opera omnia*, ed. por F. Rudio e outros (Leipzig e Lausanne: B. G. Teubner, 1911)

Fuss, N., *Lobrede auf Herrn Leonhard Euler* (Basiléia, 1786)

Grimsley, Ronald, *Jean d'Alembert* (1717-83) (Oxford: Clarendon, 1963)

Hofmann, J. E., *Classical Mathematics. A Concise History of the Classical Era in Mathematics*, traduzido por Henrietta O. Midonick (New York: Philosophical Library, 1959)

Kowalewski, Gerhard, *Die klassischen Probleme der Analysis des Unendlichen* (Leipzig: W. Engelmann, 1910)

Ore, Oystein, *Number Theory and its History* (New York: McGraw-Hill, 1948)

Reiff, R., *Geschichte der unendlichen Reihen* (Tübingen, 1889)

Stäckel, Paul, "Eine vergessene Abhandlung Leonhard Eulers über die Summe der reziproken Quadrate der natürlichen Zahlen," *Bibliotheca Mathematica* (3), **8** (1907-1908), 37-60

Struik, D. J., *Concise History of Mathematics*, 3.ª edição (New York: Dover, 1967)

Todhunter, Isaac, *History of the Mathematical Theory of Probability from the Time of Pascal to that of Laplace* (Cambridge, 1865)

Toeplitz, Otto, *The Calculus, a Genetic Approach* (Chicago: University of Chicago Press, 1963)

Truesdell, C., *The Rational Mechanics of Flexible or Elastic Bodies*. Introduction to *Leonhardi Euleri Opera Omnia* (Zurich: Orell Füssli, 1960, 2.ª série, Vols. X-XI)

Wieleitner, Heinrich, *Geschichte der Mathematik* (Berlin e Leipzig: Walter de Gruyter, 1921, Vol. II, 2.ª metade)

EXERCÍCIOS

1. Descreva as fontes principais de recursos para os matemáticos durante o século dezoito, dando exemplos específicos.

2. Quais ramos da matemática foram mais ativamente desenvolvidos durante os meados do século dezoito? Dê exemplos para apoiar sua resposta.

3. Cite quatro revistas que publicavam artigos de matemática durante o século dezoito mencionando ao menos um autor publicado em cada caso.

4. Que tratado matemático de meados do século dezoito você considera como tendo sido mais influente? Dê razões para sua resposta.

5. Como explica o fato de ser a Rússia pela primeira vez um centro matemático importante no século dezoito?

6. No século dezoito muitos matemáticos conhecidos mudaram de um país para outro. Mencione vários deles, indicando as circunstâncias que cercaram a mudança.

7. Descreva as mais importantes contribuições feitas por Euler às notações matemáticas.

8. Prove as três identidades de Euler

$$\operatorname{sen} x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i},$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

e

$$e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x.$$

9. Use as identidades de Euler para achar, na forma $a + bi$, um logaritmo natural de $1 + i$.

10. Escreva sen $(1 + i)$ como número complexo na forma $a + bi$.

11. Escreva $e^{\pi - i}$ como número complexo na forma $a + bi$.

12. Escreva um valor de i^i como número complexo na forma $a + bi$, tanto exatamente quanto em termos de aproximação decimal.

13. Verifique que somando as três probabilidades de Euler dadas acima no problema da loteria obtém-se a soma um, e explique por que deve ser assim.

14. Esboce a curva de Euler $y = (-1)^x$.

15. Ache o ponto mínimo da curva $y = x^x$ e esboce a curva.

16. Esboce a espiral de Arquimedes $r = a\theta$ como Euler o fez — isto é, para valores positivos e negativos de θ.

17. Identifique, com relação aos cinco tipos fundamentais de superfícies quádricas de Euler, as seguintes: $a^2x^2 + b^2y^2 = 2z$; $a^2x^2 - b^2y^2 = 2z$; $a^2x^2 - b^2y^2 + c^2z^2 = d^2$; $a^2x^2 - b^2y^2 - c^2z^2 = d^2$; $a^2x^2 - b^2y^2 - c^2z^2 = d^2$.

18. Obtenha, à maneira de Euler, a soma dos termos da série

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)^2} + \cdots$$

19. Verifique a identidade sobre funções hiperbólicas $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$.

20. Verifique que senh $ix = i$ sen x e cosh $ix = \cos x$.

21. Se a tangente hiperbólica e a co-tangente hiperbólica são definidas por

$$\operatorname{tgh} x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} \quad \text{e} \quad \operatorname{ctgh} x = \frac{\cosh x}{\operatorname{senh} x}$$

esboce as curvas $y = \operatorname{tgh} x$ e $y = \operatorname{ctgh} x$.

22. Mostre que senh x é uma função monótona crescente.

23. Use o critério de Clairaut para ver se são diferenciais exatas as seguintes: $(\operatorname{sen} y - y \operatorname{sen} x)\, dx + (x \cos y + \cos x)\, dy$ e $2xy^3\, dx - 3x^2y^2\, dy$.

*24. Ache a solução singular da equação diferencial de Clairaut $y = xy' + (y')^2$ e esboce essa solução bem como algumas soluções particulares sobre o mesmo sistema de eixos.

*25. Mostre que se $v = f(x)$ é uma solução particular da equação de Riccati $y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x)$, então a substituição $y = v + z$ transforma a equação de Riccati numa equação de Bernoulli e a substituição $y = v + 1/z$ transforma a equação numa equação linear.

*26. Resolva a equação de Euler $x^2y'' + 4xy' + 2y = 0$.

*27. Mostre que $\int x^p(1-x)^q\, dx$ é uma função elementar se p ou q ou $p + q$ é um inteiro.

*28. Numa carta a Goldbach em 1741 Euler observou que $2^{\sqrt{-1}} + 2^{-\sqrt{-1}}$ é quase igual a 10/13. Verifique essa aproximação.

*29. Mostre que se m é uma potência de um primo p (isto é, $m = p^a$), então $\phi(m) = p^a(1 - 1/p)$ onde ϕ é a "função ϕ de Euler".

Capítulo 22

Matemáticos da Revolução Francesa

O progresso e aperfeiçoamento da matemática estão intimamente ligados com a prosperidade do Estado.

Napoleão I

1 O século dezoito teve a infelicidade de vir depois do dezessete e antes do dezenove. Como poderia qualquer período que seguisse o "Século do Gênio" e precedesse a "Idade Áurea" da matemática ser considerado como outra coisa senão um interlúdio?

A geometria analítica e o cálculo foram inventados no século dezessete; o surgimento do rigor matemático e o florescimento da geometria estão associados ao dezenove. Existe uma erudita história da matemática dos séculos dezesseis e dezessete e uma (incompleta) para o século dezenove[1]; mas não existe uma comparável para o século dezoito, nem é para o século dezoito que olhamos quando queremos observar as tendências significativas na matemática. Isso está em contraste marcante com o que ocorre em outros campos. Para os americanos a data 1776 foi decisiva; na França o ano de 1789 foi crucial. E a Era da Revolução não se confinou à política. A Revolução Industrial mudou toda a estrutura social do Ocidente, e a revolução termótica dos mesmos anos lançou os fundamentos da moderna química. Estaria a matemática durante esses acontecimentos excitantes gozando uma sesta? Este capítulo mostrará que os matemáticos da França na época da Revolução não só contribuíram bastante para a reserva de conhecimentos como foram em grande medida responsáveis pelas linhas principais do desenvolvimento na proliferação explosiva da matemática no século seguinte. Ficamos até tentados a acrescentar à já notável lista de revoluções da época mais duas: uma "revolução geométrica" e uma "revolução analítica"[2].

Toda era se inclina a pensar em si mesma como sendo de revolução — um período de tremendas modificações. Mas quase toda era de rápidas mudanças foi precedida por um longo período em que foram feitos os preparativos para a revolução, às vezes conscientemente, mais freqüentemente inconscientemente. Entre os arautos da Revolução Francesa estavam Voltaire, Rousseau e d'Alembert e Diderot — nenhum dos quais viveu bastante para ver a queda da Bastilha (Voltaire e Rousseau morreram em 1778, d'Alembert em 1783 e Diderot um ano depois) — e seu colega Condorcet, que caiu vítima do holocausto que ajudou a gerar. Na matemática seis homens que iriam indicar os novos caminhos — Monge, Lagrange, Laplace, Legendre, Carnot e Condorcet — estavam no meio do torvelinho e é desses homens que este capítulo se ocupa principalmente.

Nossa meia dúzia de matemáticos era quase da mesma idade: Lagrange, o mais velho, nasceu em 1736; Condorcet em 1743; Monge em 1746; Laplace em 1749; Legendre em 1752; Carnot, o mais jovem, nasceu em 1753. Com a exceção de Condorcet, que se suicidou na prisão, todos esses matemáticos viveram para ser septuagenários, e um, Legendre, um octogenário.

[1]Veja H. G. Zeuthen, *Geschichte der Mathematik im XVI und XVII. Jahrhundert* (edição alemã. Leipzig, 1903) e Felix Klein, *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im* 19. *Jahrhundert* (Berlim. 1926-1927), 2 vols. Esse último e metade de *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* de Moritz Cantor (4 volumes, Leipzig, 1880-1908) juntos constituiriam uma ampla história da matemática do século dezoito

[2]No desenvolvimento desse argumento muito uso é feito de Niels Nielsen, *Géomètres français sous la révolution* (Copenhagen, 1929); mas ao passo que Nielsen catalogou alfabeticamente as contribuições de cerca de oitenta matemáticos franceses, o objetivo deste capítulo é fornecer uma síntese do meio matemático da época com ênfase em apenas um punhado de indivíduos. O capítulo é uma ampliação de um artigo sobre "Matemáticos da Revolução Francesa" que apareceu em *Scripta Mathematica*. **25** (1960). 11-31

2 Na França do século dezoito as universidades não eram os centros matemáticos que são hoje, e é difícil citar um matemático sequer que fosse, por exemplo, da Universidade de Paris. Durante o século quatorze esta fora um dos centros científicos do mundo (o outro em Oxford) mas havia muito tempo que perdera essa posição. Estava atrasada: quando a Europa se voltou para o cartesianismo. Paris se conservou presa aos escolasticismo peripatético; e quando a maior parte do mundo científico se voltou para o newtonianismo, Paris manteve uma luta de retaguarda pelo cartesianismo. A maior parte dos matemáticos franceses do século dezoito estava associada não a universidades mas à igreja ou à classe militar; outros conseguiam proteção do rei ou se tornavam professores particulares. Lagrange (1736-1813), o único de nosso grupo que não era propriamente francês, nasceu em Turim, de pais que tinham sido abastados e de ascendência francesa e italiana. Joseph-Louis, o mais jovem de onze filhos e o único que não morreu na infância, foi educado lá e tornou-se cedo professor de matemática na academia militar de Turim; mas mais tarde ele encontrou sucessivos patronos em Frederico, o Grande, da Prússia e Luís XVI da França. A família de Condorcet (1743-1794) incluía membros influentes na cavalaria e na igreja, por isso sua educação não apresentou problemas. Em escolas jesuítas e depois no Collège de Navarre ele conquistou uma invejável reputação em matemática; mas em vez de tornar-se capitão de cavalaria como sua família esperava, ele viveu a vida de um estudioso no mesmo sentido que Voltaire, Diderot e d'Alembert. O terceiro de nosso sexteto, Gaspard Monge (1746-1818) era filho de um pobre negociante. No entanto, pela influência de um tenente coronel que ficara impressionado com a inteligência do jovem, Monge teve autorização para assistir a alguns cursos na École Militaire de Mézières; as autoridades lá admiraram tanto sua capacidade que ele logo veio a ser professor, talvez o mais influente professor de matemática desde os dias de Euclides. Laplace (1749-1827) também nasceu pobre; como Monge, encontrou amigos influentes que lhe proporcionaram educação — também numa academia militar. Legendre (1752-1833) não teve dificuldade para garantir sua educação; mas mesmo ele não foi estritamente professor de universidade embora ensinasse durante cinco anos na École Militaire de Paris. O mais jovem do grupo, Lazare Carnot (1753-1823) estava suficientemente acima do status burguês para ter licença de entrar na École Militaire em Mézières, onde Monge foi um de seus professores. Ao graduar-se Carnot entrou para o exército, embora, não tendo título de nobreza, não pudesse, sob o *ancien régime* aspirar a um posto acima do de capitão[3]. Isso deve ter sido motivo de amargura — como para tantos outros que surgiu o provérbio "os competentes não eram nobres e os nobres não eram competentes". O desperdício econômico da parte dos governantes pode ter sido a causa imediata da Revolução Francesa mas nem de longe foi a única. O enorme desperdício de recursos humanos também foi um fator importante, e sintomático disso foi que a princípio os homens de nosso grupo não conquistaram posições na medida de suas capacidades; nenhum dos seis mais tarde lamentou o desaparecimento da velha ordem.

Das enciclopédias matemáticas do fim do século dezoito a que teve mais sucesso, a julgar pelas edições sucessivas, foi a de Bézout, que ensinava na escola em Mézières em que Monge e Carnot estudaram. O *Cours de mathématique* de Bézout ainda era durante o primeiro terço do século dezenove um texto muito influente, especialmente na América onde partes dele apareceram em tradução para o inglês em West Point e outras academias. A parte quatro do *Cours* de Bézout — os princípios da mecânica — é a *raison d'être* do programa. A ênfase dada à mecânica e à secção final sobre navegação está de acordo com o uso do *Cours de mathématique* como texto numa academia militar. A proeminência matemática da França (na verdade da Europa Continental como um todo) no século dezoito se baseou grandemente na aplicação da análise à mecânica no ensino

[3]Para mais detalhes sobre sua vida veja C. B. Boyer, "The Great Carnot", *The Mathematics Teacher*, **49** (1956), 7-14

em escolas técnicas, e foi sob essa influência que os matemáticos da Revolução Francesa se formaram, em marcado contraste com a situação na Inglaterra. Seria naturalmente de se esperar que o contraste no espirito da matemática se tornasse ainda maior durante a Revolução, pois a França tinha maior necessidade de preparo técnico, e a Inglaterra ficou mais completamente isolada do Continente.

3 Cada um dos seis homens que assinalamos como líderes na matemática durante a Revolução tinha já produzido abundantemente antes de 1789. Lagrange tinha publicado sua *Mécanique analytique* (1788) bem como freqüentes artigos sobre álgebra, análise e geometria. Condorcet, talvez o mais interessante dos seis pela amplitude de seus interesses tinha publicado *De calcul intégral* já em 1765 e *Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix* em 1785. Acreditando firmemente na perfectibilidade do homem, o que era um artigo de fé básico dos *Philosophes*, Condorcet foi o único dos seis de que se pode dizer que teve um papel de antecipação nos acontecimentos que levaram a 1789. (É irônico observar que de nosso sexteto matemático aquele que mais fez para que se chegasse à Revolução foi o único a perder a vida por causa dela, embora dois outros, Carnot e Monge, nem sempre estivessem totalmente a salvo da ameaça da guilhotina.) Monge tinha contribuído com numerosos artigos matemáticos para as *Mémoires de l'Académie des Sciences*. Tendo sucedido a Bézout como examinador para a Escola de Marinha, as autoridades insistiram com Monge para que fizesse o mesmo que Bézout — escrever um *Cours de mathématiques* para uso dos candidatos. Monge, porém, estava interessado no ensino e pesquisa mais do que em escrever textos, e só completou um volume do projeto — *Traité élémentaire de statique* (Paris, 1788). Ele se interessava não só por matemática pura e aplicada como por química e física. Em particular, participou junto com Lavoisier de experiências, inclusive as sobre a composição da água, que conduziram à revolução de 1789 na química. Por suas numerosas atividades Monge se tornara, na época da revolução, um dos cientistas franceses mais conhecidos. Na verdade, sua reputação como físico e químico era talvez maior que a de matemático, pois sua geometria não fora devidamente apreciada. Sua obra principal, *Géométrie descriptive*, não tinha sido publicada porque seus superiores achavam que era do interesse da defesa nacional conservá-la secreta. (Material classificado como secreto não é monopólio do século vinte.) Laplace e Legendre contribuíam regularmente para revistas científicas e Carnot em 1786 tinha publicado uma segunda edição de seu *Essai sur les machines en général*, bem como alguns versos e uma obra sobre fortificações.

4 Olhando a obra desses seis homens observa-se a falta de motivação utilitária. O *Essai* de Carnot pareceria, julgando pelo título, ser voltado para a técnica, mas uma olhada ao livro mostra que trata de princípios gerais, não de tecnologia. A *Mécanique* de Lagrange semelhantemente se ocupa de um tratamento postulacional do assunto, muito afastado de critérios de aplicabilidade prática.

A beleza da obra de Lagrange é evidente não para o engenheiro mas para o matemático puro; mesmo nas partes mais elementares de sua obra há uma qualidade estética. É primariamente a ele que devemos, embora expressas diferentemente, formas compactas como

$$\frac{1}{2!}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad \frac{1}{3!}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix},$$

para a área de um triângulo e para o volume de um tetraedro, respectivamente, resultados que apareceram num artigo, "Solutions analytiques de quelques problèmes sur les pyramides triangulaires", entregue em 1773 e publicado em 1775[4]. Um trabalho assim parece bonito mas sem importância; no entanto continha uma idéia que se tornaria muito importante através das reformas educacionais da Revolução. Como Lagrange a expressou,

[4]Veja suas *Oeuvres*, III, 658-692

"parece-me que as soluções que vou apresentar serão de interesse para os geômetras tanto pelos métodos quanto pelos resultados. Essas soluções são puramente analíticas e podem ser entendidas mesmo sem figuras". Fiel à sua promessa, não há um único diagrama no trabalho. Monge também, embora usasse diagramas e modelos em geometria descritiva e diferencial, parece de algum modo ter chegado à conclusão de que se deve evitar o uso de diagramas na geometria analítica elementar. Talvez Carnot pensasse o mesmo, pois seu *Essai*, anterior à *Mécanique* de Lagrange não contém diagrama algum.

Laplace, de todos os membros do sexteto, é o que chega mais perto de ser um matemático aplicado, mas mesmo no caso dele devemos interpretar a designação em sentido muito lato. Afinal, quão "prática" era naqueles dias a teoria das probabilidades ou a mecânica celeste? Podemos concluir com segurança que, apesar de terem estudado em escolas predominantemente técnicas, as grandes figuras da matemática logo antes da Revolução tinham mostrado notável "pureza" de interesses.

5 A queda da Bastilha em 1789 encontrou nossos seis homens divididos em duas categorias: os três "eles" (Lagrange, Laplace e Legendre) não tomaram parte significativa no desenrolar dos acontecimentos políticos que se seguiriam; os outros três (Carnot, Condorcet e Monge) receberam bem a mudança e desempenharam papéis definidos nas atividades revolucionárias. Mas homens de ambos os grupos participaram ao menos em um projeto matemático durante a Revolução.

A reforma do sistema de pesos e medidas é um exemplo especialmente apropriado da maneira pela qual os matemáticos pacientemente perseveraram em seus esforços apesar da confusão e das dificuldades políticas. Já em 1790 Talleyrand propôs a reforma dos pesos e medidas. O problema foi enviado à Académie des Sciences, na qual uma comissão, de que Lagrange e Condorcet faziam parte, foi indicada para redigir uma proposta. Legendre devia ter sido membro da comissão, pois tinha conquistado grande reputação por sua triangulação da França; a política revolucionária parece ter sido responsável pelo fato de ele não ser escolhido. A comissão concordou em recomendar um sistema decimal, embora pareça ter havido um grupo de defensores de um sistema duodecimal. Lagrange apoiou firmemente os decimalistas contra os duodecimalistas, pois o argumento sobre a divisibilidade não o impressionou muito. (Diz-se que ele quase lamentou não adotar como base para o sistema algum número *primo*, como onze, mas sugeriu-se que ele pode ter feito isso apenas como obstrução aos duodecimalistas.)

Como é bem sabido, a comissão considerou duas alternativas para o comprimento básico no novo sistema. Uma seria o comprimento de um pêndulo que marcasse segundos. A equação para o pêndulo sendo $T = 2\pi\sqrt{l/g}$, isso daria como comprimento padrão g/π^2. Mas a comissão ficou tão impressionada com a exatidão com que Legendre e outros tinham medido o comprimento de um meridiano terrestre que no fim o metro foi definido como a décima milionésima parte da distância entre o equador e o pólo. O resultante sistema métrico estava praticamente pronto em 1791, mas houve confusão e demora para estabelecê-lo. A Convenção Nacional em 1793 suprimiu a Académie des Sciences, enquanto que o Jardin des Plantes foi grandemente expandido. Essa inconsistência parece ter resultado de forças políticas. A Académie era liderada por homens mais velhos e conservadores, o Jardin por cientistas mais jovens que apoiavam fortemente o novo governo. Além disso, havia um culto de Robespierre que representava uma atitude de volta à natureza derivada em parte de Rousseau. Evidentemente havia na França uma atitude em relação à ciência física um tanto semelhante à beligerância de Goethe para com a física newtoniana. O Jardin des Plantes representava a ciência "segura", a da Académie era suspeita.

A supressão da Académie foi um golpe para a matemática; mas a Convenção manteve o Comitê de Pesos e Medidas, embora o expurgasse de alguns membros, como Lavoisier, e o aumentasse acrescentando outros, inclusive Monge. Num dado momento a comissão quase perdeu Lagrange, pois a provinciana Convenção tinha banido da França os estrangeiros; mas Lagrange foi especificamente excluído do decreto e permaneceu para servir como chefe da comissão. Mais tarde ainda a comissão ficou ligada ao Institut

National que tinha substituido a Académie des Sciences; Lagrange, Laplace, Legendre e Monge pertenciam todos à comissão a essa altura. Por 1799 o trabalho da comissão estava pronto e o sistema métrico como o temos hoje se tornou uma realidade. Note-se que cinco de nosso grupo de seis matemáticos revolucionários tomou parte ativa nesse projeto, somente Carnot não tendo ligação com ele; mas veremos que Carnot estava empenhado em muitas outras atividades essenciais, tanto políticas quanto matemáticas. O sistema métrico, é claro, é um dos resultados matemáticos mais tangíveis da Revolução, mas em termos do desenvolvimento da matemática não se compara em significado com outras contribuições.

6 Condorcet, um fisiocrata, filósofo e enciclopedista, pertencia ao círculo de Voltaire e d'Alembert. Ele era um bom matemático que publicara livros sobre probabilidades e cálculo integral, mas era também um visionário e idealista inquieto que se interessava por tudo que se relaciona com o bem estar da humanidade. Como Voltaire, tinha ódio ferrenho pela injustiça; embora tivesse o título de marquês, ele via tantas desigualdades no *ancien régime* que escreveu e trabalhou em prol da reforma. Com fé implícita na perfectibilidade humana e acreditando que a instrução eliminaria o vício, ele defendeu a instrução pública gratuita, uma idéia admiravelmente avançada, especialmente naqueles dias[5]. Condorcet é talvez mais lembrado matematicamente como pioneiro em matemática social, especialmente pela aplicação de probabilidades e estatística a problemas sociais. Quando, por exemplo, elementos conservadores (inclusive a Faculdade de Medicina e a de Teologia) atacaram os que advogavam a inoculação contra a varíola, Condorcet (juntamente com Voltaire e Daniel Bernoulli) defendeu a variolização.

Com o início da Revolução os pensamentos de Condorcet se voltaram para problemas administrativos e políticos. O sistema educacional entrara em colapso sob a efervescência da Revolução, e Condorcet viu que era o momento para tentar introduzir as reformas que tinha em mente. Ele apresentou seu plano à Assembléia Legislativa, de que se tornou Presidente, mas a agitação quanto a outras questões não permitiu discussão séria do assunto. Condorcet publicou seu plano em 1792, mas a idéia de instrução gratuita foi alvo de ataques. Somente anos depois de sua morte a França realizou o ideal de Condorcet de instrução pública gratuita.

Condorcet tinha depositado grandes esperanças na Revolução — até que extremistas assumissem o controle. Atacou então ousadamente os setembristas, e por isso sua prisão foi decretada. Escondeu-se então, e durante longos meses em que esteve oculto compôs o célebre *Esboço de um quadro histórico do progresso da mente humana*[6], indicando nove passos na elevação da humanidade do estágio tribal até a fundação da República Francesa, com uma predição de um brilhante décimo estágio que, ele acreditava, a Revolução produziria. Logo depois de completar esta obra (em 1794), e acreditando que sua presença era um risco para os que o abrigavam, ele deixou seu esconderijo. Reconhecido imediatamente como um aristocrata, ele foi preso; na manhã seguinte foi encontrado morto no chão de sua cela, presumivelmente por suicídio.

7 Condorcet simpatizava com a ala moderada Girondina da Revolução. Monge era plebeu e um membro importante do Clube Jacobino, mais radical; mas ele, também, teve dificuldades, apesar de ser um partidário entusiasta da Revolução e de pertencer a organizações patrióticas. Foi-lhe atribuido um papel na reforma dos pesos e medidas decidida pela Assembléia Constituinte em 1790, mas seu posto de examinador da marinha o conservara afastado de Paris durante um par de anos. Ao voltar à cidade em 1792 ele foi nomeado Ministro da Marinha, aparentemente por sugestão de Condorcet, e foi na

[5]A extensão de sua influência pode ser avaliada pelo fato de um importante volume de 891 páginas ter sido publicado por Franck Alengry em 1904 com o título *Condorcet: Guide de la révolution française*. Esse livro, porém, trata de sua filosofia social e legal, não de sua matemática. Veja também G. G. Granger. *La mathématique sociale du Marquis de Condorcet* (1956)

[6]Uma conveniente tradução para o inglês por June Barraclough apareceu em 1955 (New York: Noonday Press)

qualidade de Ministro que lhe coube assinar o relatório oficial do julgamento e execução do Rei. Mas a armada francesa era tão mal organizada e ineficiente que Monge nada pode realizar de significativo, e dentro de um ano ele pediu para ser substituído. Permaneceu ativo no entanto em operações políticas e governamentais, e empregou uma enorme dose de energia para satisfazer a necessidade de pólvora do arsenal revolucionário. A instâncias da Comissão de Segurança Pública ele publicou também uma *Description de l'art de fabriquer les canons*. Durante toda a Revolução Monge se viu em posição precária, pois era demasiado liberal para os conservadores e demasiado conservador para os extremistas.

Mais importantes para o futuro da matemática foram os esforços de Monge, uma vez passada a crise da invasão estrangeira, para estabelecer uma escola de preparação de engenheiros. Assim como Condorcet fora o guia na Comissão de Instrução, Monge foi o principal advogado de instituições de ensino mais avançadas. O resultado foi a formação em 1794 de uma Comissão de Obras Públicas, de que Monge era membro ativo, encarregada de estabelecer uma instituição apropriada. A escola foi a famosa École Polytechnique, que tomou forma tão rapidamente que já no ano seguinte foram admitidos estudantes. Em todos os estágios de sua criação o papel de Monge foi essencial, tanto como administrador quanto como professor. É agradável notar que as duas funções não são incompatíveis, pois Monge foi eminentemente bem sucedido em ambas. Conseguiu até vencer sua relutância em escrever textos, pois com a reforma do currículo de matemática a necessidade de dispor de livros adequados se tornou aguda.

Monge se viu ensinando dois assuntos, ambos essencialmente novos em curriculos universitários. O primeiro desses era chamado estereotomia, hoje geometria descritiva. Monge deu um curso concentrado sobre esse tema a 400 estudantes, e um esboço manuscrito do curso se preservou. Esse mostra que o curso tinha alcance mais amplo, tanto do lado puro quanto do aplicado, do que é usual hoje. Além do estudo de sombra, perspectiva e topografia, dava atenção a propriedades das superfícies, incluindo retas normais e planos tangentes, e à teoria das máquinas. Entre os problemas propostos por Monge, por exemplo, estava o de determinar a curva de intersecção de duas superfícies cada uma das quais é gerada por uma reta que se move de modo a cortar três retas reversas no espaço. Outro era o de determinar um ponto no espaço equidistante de quatro retas. Tais problemas assinalam uma mudança no ensino da matemática que foi promovido primariamente pela Revolução Francesa. Já na Idade Áurea da Grécia Platão dissera que o estado da geometria no espaço era deplorável, e o declínio da matemática na Idade Média atingira a geometria sólida mais fortemente que a plana. Quem não podia atravessar a *pons asinorum* dificilmente podia chegar ao estudo de três dimensões. Os inventores da geometria analítica, Descartes e Fermat, tinham percebido bem o princípio fundamental da geometria analítica no espaço — que uma equação em três incógnitas representa uma superfície e reciprocamente — mas não o tinham desenvolvido. Pode-se dizer que enquanto o século dezessete foi o século das curvas — a ciclóide, o limaçon, a catenária, a lemniscata, a espiral equiangular, as hipérboles, parábolas e espirais de Fermat, as pérolas de Sluse, e muitas outras — o século dezoito foi o que realmente iniciou o estudo de superfícies[7]. Foi Euler (veja anteriormente) quem chamou a atenção sobre as quádricas como formando uma família análoga à das cônicas, e sua *Introductio* num certo sentido deu a base da geometria analítica no espaço (embora devamos mencionar Clairaut como precursor); mas Euler não era dado a proselitismo, por isso o assunto não tomou lugar no currículo escolar. Uma razão para isso pode ter sido que, como Descartes, ele não começou com os casos retilíneos mais simples. Lagrange, talvez influenciado por seu cálculo de variações, mostrou interesse por problemas em três dimensões e deu

[7]J. L. Coolidge, "The Beginnings of Analytic Geometry in Three Dimensions", *American Mathematical Monthly*, 55 (1948), 76-86, chamou a atenção para o lento progresso que se fez em geometria analítica no espaço antes dos dias de Euler

ênfase à resolução analítica. Foi o primeiro, por exemplo, a dar a fórmula

$$D = \frac{ap + bq + cr - d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

para a distância D de um ponto (p, q, r) ao plano $ax + by + cz = d$. Mas Lagrange não tinha alma de geômetra, nem discípulos entusiásticos. Monge, ao contrário, era especialista em geometria — quase o primeiro desde Apolônio — além de excelente professor e formador de currículos. (Entre parênteses pode-se mencionar que Monge tinha dois irmãos que eram também professores de matemática, o que põe o nome de Monge na classe do dos Bernoullis, Cassinis, Clairauts e Pascals, como designando uma família de matemáticos.) O ressurgimento da geometria no espaço portanto deveu-se em parte às atividades matemáticas e revolucionárias de Gaspard Monge. Se ele não fosse politicamente ativo a École Polytechnique talvez não tivesse sido fundada; se não fosse professor notável, talvez esse ressurgimento não tivesse lugar.

A École Polytechnique não foi a única escola criada na época. A École Normale fora apressadamente aberta a uns 1 400 ou 1 500 estudantes, menos cuidadosamente selecionados que na École Polytechnique, e tinha um corpo de professores de matemática de alto nível, Monge, Lagrange, Legendre e Laplace estando entre os instrutores. Foram as aulas de Monge na École Normale em 1794-1795 que foram finalmente publicadas como sua *Géométrie descriptive*[8]; mas dificuldades administrativas fizeram com que a escola tivesse vida curta. A idéia por trás da nova geometria descritiva, ou método da dupla projeção, é muito fácil. Simplesmente toma-se dois planos perpendiculares entre si, um vertical outro horizontal e projeta-se a figura a ser representada ortogonalmente sobre esses planos, indicando claramente as projeções de todas as arestas e vértices. A projeção no plano vertical chama-se "elevação" a outra é chamada o "plano". Finalmente, o plano vertical é dobrado ou revolvido em torno da reta intersecção dos dois até estar também em posição horizontal. A elevação e o plano fornecem assim um diagrama em duas dimensões do objeto tridimensional. Esse simples processo, agora tão comum em desenho mecânico, produziu nos dias de Monge quase uma revolução na engenharia militar.

8 A geometria descritiva não foi a única contribuição de Monge à geometria, pois na École Polytechnique ele ministrou também um curso sobre "aplicação da análise à geometria". Assim como o título abreviado "geometria analítica" não estava ainda em uso geral, também não havia "geometria diferencial", mas o curso dado por Monge era essencialmente uma introdução a esse campo. Aqui, também, não havia texto disponível, e assim Monge se viu compelido a escrever e imprimir suas *Feuilles d'analyse* (1795) para uso dos estudantes. Aqui a geometria analítica de três dimensões realmente tomou forma; foi esse curso, exigido aos estudantes da Polytechnique, que formou o protótipo dos programas de geometria analítica no espaço. Porém os estudantes achavam o curso difícil, pois as aulas passavam rapidamente sobre as formas elementares da reta e do plano, o grosso do material versando sobre as aplicações do Cálculo ao estudo de curvas e superfícies em três dimensões. Monge sempre relutava em escrever textos de nível elementar, ou em organizar material que não fosse primariamente dele. Porém ele encontrou colaboradores dispostos a redigir o que ele incluía em seu curso; e assim em 1802 apareceu no *Journal de l'École Polytechnique* um longo artigo por Monge e Jean-Nicolas-Pierre Hachette (1769-1834) sobre *Application d'algèbre à la géométrie*. Seu primeiro teorema é típico de uma exposição mais elementar do assunto. É a bem conhecida generalização do teorema de Pitágoras do século dezoito: A soma dos quadrados das projeções de uma figura plana sobre três planos perpendiculares dois a dois é igual ao quadrado da figura. Monge e Hachette provaram o teorema tal como os cursos modernos; na verdade todo o volume

[8]Uma exposição dos métodos nessa obra é dada em W. H. Roever, *The Mongean Method of Descriptive Geometry* (1933); uma história dos métodos é dada em Gino Loria, *Storia della geometria descrittiva* (1921)

poderia ser usado sem dificuldade como texto no século vinte. São tratadas completamente as equações para transformação de eixos, as retas e os planos, a determinação dos planos principais de uma quádrica. É na geometria analítica de Monge mais do que na de Clairaut ou Euler que primeiro encontramos um estudo sistemático da reta em três dimensões. Monge mostrou que se, por exemplo, a reta é dada pela intersecção dos planos $ax + by + cz + d = 0$ e $a'x + b'y + c'z + d' = 0$, um plano por um ponto (x', y', z') que seja ortogonal à reta tem a forma $A(x - x') + B(y - y') + C(z - z') = 0$ onde A, B, C são respectivamente as expressões (hoje chamadas números direcionais da reta) $bc' - b'c$, $ca' - c'a$ e $ab' - a'b$. Outras fórmulas dão a distância de um ponto a uma reta e a distância mínima entre duas retas reversas. Para essa última Monge escreveu as retas dadas sob a forma de projeções

$$\begin{cases} y = Ax + B \\ z = Cx + D \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} y = A'x + B' \\ z = C'x + D', \end{cases}$$

e as equações da normal comum desejada como

$$\begin{cases} y = \alpha x + \beta, \\ z = \gamma x + \delta. \end{cases}$$

Como a normal comum corta as duas retas sabemos que $(\gamma - C)(\beta - B) = (\alpha - A)(\delta - D)$ e $(\gamma - C')(\beta - B') = (\alpha - A')(\delta - D')$. Do fato que a normal comum é perpendicular a cada uma das retas dadas temos $1 + A\alpha + C\gamma = 0$ e $1 + A'\alpha + C'\gamma = 0$. Resolvendo as quatro equações simultâneas para α, β, γ, e δ, as equações da normal procurada ficam conhecidas.

A maior parte dos resultados de Monge sobre geometria analítica da reta e do plano aparece em artigos datando de 1771 em diante. Em seu arranjo sistemático do material nas *Feuilles d'analyse* de 1795 e especialmente no artigo com Hachette de 1802 achamos a maior parte da geometria analítica no espaço e da geometria diferencial elementar que é incluída em textos de cursos universitários. Uma coisa que falta é o uso explícito de determinantes, pois esse é trabalho do século dezenove. Mas, como no caso de Lagrange, podemos considerar o uso por Monge de notações simétricas como uma antecipação dos determinantes mas sem o arranjo agora usual (devido a Cayley).

Entre os novos resultados dados por Monge estão os dois teoremas seguintes que têm seu nome. (1) Os planos traçados pelos pontos médios das arestas de um tetraedro perpendicularmente às arestas opostas se encontram num ponto M (que é chamado "ponto de Monge" do tetraedro). Verifica-se que M é o ponto do médio do segmento que une o centróide e o circuncentro. (2) O lugar dos vértices do ângulo tri-retângulo cujas faces são tangentes a uma dada quádrica é uma esfera, chamada a "esfera de Monge" ou esfera diretora da quádrica. O equivalente desse lugar em duas dimensões leva ao chamado "círculo de Monge" de uma cônica, embora esse lugar tivesse sido achado um século antes em forma sintética por Lahire. Em 1809 Monge provou de várias maneiras que o centróide de um tetraedro é o ponto de concorrência das retas que unem os pontos médios de arestas opostas; deu também o análogo da reta de Euler no espaço, mostrando que para o tetraedro ortocêntrico o centróide está duas vezes mais longe do ortocentro que do circuncentro. Lagrange ficou tão impressionado com o trabalho de Monge que diz-se ter exclamado: "Com sua aplicação da análise à geometria o diabo do homem se tornará imortal"[9].

9 Como já indicamos Monge possuía uma combinação de talentos incomum, pois era ao mesmo tempo um administrador capaz, um pesquisador imaginativo e um professor que sabia inspirar entusiasmo. O único traço de pedagogo que poderia ter tido mas lhe faltava é o de compilador de textos. Mas se Monge mostrou deficiência nisso ela foi mais que compensada por seus jovens estudantes. Podemos dizer sem receio de contradição que os alunos de Monge produziram uma quantidade de textos elementares sobre geo-

[9]Para uma excelente e completa exposição da obra de Monge, veja René Taton, *L'oeuvre scientifique de Monge* (1951)

metria analítica jamais igualada — nem mesmo hoje, inundados como estamos com novos livros. Se julgarmos pela súbita aparição de tantas geometrias analíticas a partir de 1798, uma revolução tivera lugar no ensino da matemática. A geometria analítica, que por um século ou mais fora posta na sombra pelo Cálculo conquistou um lugar nas escolas; o crédito por isto cabe primeiramente a Monge. Entre os anos de 1798 e 1802 quatro geometrias analíticas elementares apareceram, das penas de Sylvestre François Lacroix (1765-1843), Jean-Baptiste Biot (1774-1862), Louis Puissant (1769-1843) e F. L. Lefrançais, todas inspiradas diretamente pelos cursos na École Polytechnique: politécnicos foram responsáveis por igual número de livros na década seguinte. A maior parte desses foram textos muito bem sucedidos, que apareceram em numerosas edições. O volume de Biot teve uma quinta edição em menos de doze anos; o de Lacroix, aluno e colega de Monge, apareceu em vinte e cinco edições em noventa e nove anos! Talvez devêssemos falar em "revolução dos livros de texto" pois os outros textos de Lacroix tiveram sucesso quase igualmente espetacular, sua *Arithmetica* e sua *Geometria* aparecendo em 1848 em vigésima e décima sexta edições respectivamente. A vigésima edição de sua *Álgebra* foi publicada em 1859 e a nona edição de seu *Cálculo* em 1881. Esses números não incluem traduções em outras línguas.

10 Monge é conhecido pela maioria dos leitores como um fundador da geometria *pura* moderna. De fato através de Poncelet e outros *anciens élèves* da Polytechnique a geometria pura ou *sintética* teve um glorioso renascimento, em grande parte por inspiração de Monge; mas há um aspecto da obra de Monge que é menos bem conhecido. Quase sem exceção os autores de textos de geometria *analítica* atribuem a Monge a inspiração para sua obra, embora também Lagrange seja ocasionalmente mencionado. Lacroix exprimiu claramente esse ponto de vista assim:

> Evitando cuidadosamente todas as construções geométricas, eu desejaria que o leitor percebesse que existe um modo de encarar a geometria que se poderia chamar de *geometria analítica*, e que consiste em deduzir as propriedades de extensão a partir do menor número possível de princípios por métodos puramente analíticos, como Lagrange o fez em sua mecânica em relação às propriedades de equilíbrio e movimento[10].

Lacroix mantinha que a álgebra e a geometria "deveriam ser tratadas separadamente, tão longe quanto possível uma da outra; e que os resultados em ambas deveriam servir para mútua iluminação, correspondendo, por assim dizer, ao texto de um livro e sua tradução". Lacroix apontou a obra de Lagrange sobre o tetraedro como um exemplo desse ponto de vista, mas ele acreditava que Monge "foi o primeiro a pensar em apresentar nesta forma a aplicação da álgebra à geometria". (O historiador da astronomia J. B. L. Delambre também atribuiu a Monge a "ressurreição da aliança entre álgebra e geometria".) A parte de sua obra relativa à geometria analítica no espaço Lacroix reconhece ser quase inteiramente obra de Monge. Talvez os professores de hoje possam tirar satisfação do fato que a geometria analítica tal como foi apresentada por Fermat e Descartes, um advogado e um filósofo, não teve eficácia, e só quando genuínos pedagogos — Monge e seus discípulos que por sua vez se tornaram professores da École Polytechnique — lhe deram uma nova forma é que ela mostrou vitalidade.

É interessante notar que Lacroix não quis usar o nome "geometria analítica" como título para seu texto, e edição sobre edição levou o longo título *Traité élémentaire de trigonométrie rectiligne et sphérique et application de l'algèbre à la géométrie*.

Embora a expressão "geometria analítica" tenha aparecido aqui e ali durante o século dezoito, parece ter usado pela primeira vez como título de um texto por Lefrançais numa edição de seus *Essais de géométrie* de 1804 e por Biot numa edição de 1805 de seus *Essais de géométrie analytique*, o segundo dos quais, traduzido para o inglês e para outras línguas, foi usado durante muitos anos em West Point. Não precisamos olhar muito o conteúdo dos textos de Lacroix, Lefrançais, Biot e outros; parecem-se muito com livros do começo do século vinte.

[10]Veja o prefácio de seu *Traité de calcul* (Paris, 1797)

11 Monge foi uma figura notável da Revolução; mas o matemático que todos os franceses conheciam de nome durante a Revolução não foi Monge, mas Carnot. Foi Lazare Carnot quem, quando o sucesso da Revolução estava ameaçado pela confusão interna e pela invasão do exterior, organizou os exércitos e conduziu-os à vitória. Republicano tão ardente quanto Monge, ele no entanto evitou todos os grupelhos políticos; tendo um alto sentimento de honestidade intelectual, ele tentou ser imparcial em suas decisões. Após investigação ele absolveu os monarquistas da infame acusação de terem misturado vidro moído na farinha destinada aos exércitos da Revolução, mas sentiu-se obrigado pela consciência a votar pela morte do rei. (O americano Tom Paine, às vezes considerado em seu país como perigosamente radical, votou *contra* a execução do rei.) Porém uma imparcialidade racional é difícil de se manter em tempos de crise, e Robespierre, a quem Carnot tinha feito oposição, advertiu que Carnot perderia a cabeça ao primeiro desastre militar. Se Carnot fosse apenas um matemático e um político, como Monge e Condorcet, poderia muito bem ter terminado na guilhotina. Porém Carnot conquistara a admiração de seus concidadãos por seus notáveis sucessos militares; e quando uma voz na Convenção propôs sua prisão, os deputados espontaneamente se ergueram em sua defesa, aclamando-o como "Organizador da Vitória". Por isso foi a cabeça de Robespierre que caiu, e Carnot sobreviveu para tomar parte ativa na formação da École Polytechnique. Carnot se interessava grandemente pelo ensino em todos os níveis, embora aparentemente nunca tenha dado uma aula. Seu filho Hippolyte foi ministro da instrução pública em 1848. (Outro filho, Sadi, tornou-se físico célebre; e um neto, também chamado Sadi, tornou-se o quarto presidente da Terceira República Francesa. Veja a árvore genealógica.)

Carnot levou uma vida política mágica até 1797. Passou da Assembléia Nacional à Assembléia Legislativa, à Convenção Nacional, ao poderoso Comitê de Segurança Pública, ao Conselho dos Quinhentos e ao Diretório. Em 1797, no entanto, ele recusou

Lazare Carnot
(1753-1823)
Matemático, Organizador da Vitória

Sadi Carnot
(1796-1832)
Físico
(Ciclo de Carnot)

Hippolyte Carnot
(1801-1888)
Membro da Assembléia,
Senador vitalício

Sadi Carnot
(1837-1894)
Presidente da França
(1887-1894)

Adolphe Carnot
(1839-1920)
Químico
Académie des Sciences 1895

Os Carnots famosos: árvore genealógica

tomar parte num *coup d'état* e foi imediatamente banido. Seu nome foi riscado do rol do Institut e sua cátedra de geometria por voto unânime passou ao General Bonaparte. Até Monge, colega na matemática e republicanismo, aprovou o ultraje intelectual. Quase a única coisa que se pode dizer como atenuante de seu ato é que Monge parece ter ficado hipnotizado por Napoleão. Monge seguiu seu ídolo em tudo e por tudo, sua devoção sendo tal que ele ficava literalmente doente cada vez que Napoleão perdia uma batalha. Isso contrasta com a atitude de Carnot que, responsável inicialmente pela ascenção de Bonaparte ao poder por tê-lo indicado para a campanha na Itália, não hesitou em se opor ao monstro que havia criado, embora isso quase lhe custasse a vida.

Matematicamente o banimento de Carnot foi uma boa coisa, pois lhe deu a oportunidade, enquanto no exílio, de completar uma obra que estava na sua mente há tempos. É de se esperar que um homem empenhado em questões de enorme exigência prática, como estava Carnot, tenda a pensar em termos de utilidade imediata. Trajetórias pareceriam um tema de estudo mais provável que reflexões metafísicas abstratas. Mas a obra que Carnot estivera planejando durante seus dias de atividade política era, *mirabile dictu*, a *Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitesimal*[11], que apareceu em 1797. Não era uma obra de matemática aplicada; estava mais perto da filosofia que da física, e nisso anunciava o rigor e preocupação com fundamentos tão típicos do século seguinte. As *Réflexions* de Carnot se tornaram muito populares e tiveram numerosas edições em várias línguas, provando que mesmo em épocas de provação a matemática pura acha muitos devotos.

12 Durante toda a segunda metade do século dezoito houve entusiasmo pelos resultados do Cálculo mas confusão quanto a seus princípios básicos. Nenhum dos métodos de ataque usuais, quer os fluxos segundo Newton quer as diferenciais de Leibniz ou os limites de d'Alembert, parecia satisfatório. Por isso Carnot, considerando as interpretações conflitantes, tentou mostrar "em que o verdadeiro espírito" da nova análise consistia. Sua escolha do princípio unificador, porém, foi deplorável. Ele concluiu que "os verdadeiros princípios metafísicos" são "os princípios da compensação dos erros". Os infinitésimos, ele argüia, são *quantités inappréciables* que, como os números imaginários, são introduzidos somente para facilitar a computação, e são eliminados quando se chega ao resultado final. "Equações imperfeitas" se tornam "perfeitamente exatas", no Cálculo, pela eliminação de quantidades tais como os infinitésimos de ordem superior, cuja presença causava erros. À objeção de que quantidades em desaparecimento ou são ou não são zero, Carnot respondia que "as quantidades chamadas infinitamente pequenas não são simplesmente quaisquer quantidades nulas, mas sim quantidades nulas designadas por uma lei de continuidade que determina a relação", — um argumento que lembra fortemente Leibniz. Os diversos tratamentos do Cálculo, ele dizia, eram apenas simplificações do antigo método de exaustão, que o reduziam de várias maneiras a um algoritmo conveniente.

As *Réflexions* de Carnot tiveram grande popularidade, aparecendo em muitas línguas e edições. Embora tão mal sucedida, sua síntese dos diversos pontos de vista sem dúvida ajudou a fazer com que os matemáticos se sentissem insatisfeitos com os "abomináveis zerinhos" do século dezoito e a fazer surgir a era do rigor no século dezenove. A reputação de Carnot hoje, no entanto, depende de outras obras. Em 1801 ele publicou *De la corrélation des figures de géométrie*, novamente uma obra caracterizada por um alto grau de generalidade. Nela Carnot procurou estabelecer para a geometria pura uma universalidade comparável à da geometria analítica. Mostrou que vários teoremas de Euclides podem ser considerados como exemplos específicos de um teorema mais amplo para o qual basta uma única demonstração. Por exemplo, encontramos em *Os elementos* o teorema que diz que se duas cordas AD e BC de um círculo se cortam num ponto K, o produto de AK por KD é igual ao produto de BK por KC (Fig. 22.1). Mais tarde encontramos o teorema que diz que se KDA e KCB são secantes a um círculo então o produto de AK por KD é igual ao produto de BK por KC. Esses dois teoremas Carnot consideraria simplesmente como casos especiais, que podem ser relacionados usando quantidades negativas, de uma propriedade geral das retas e círculos.

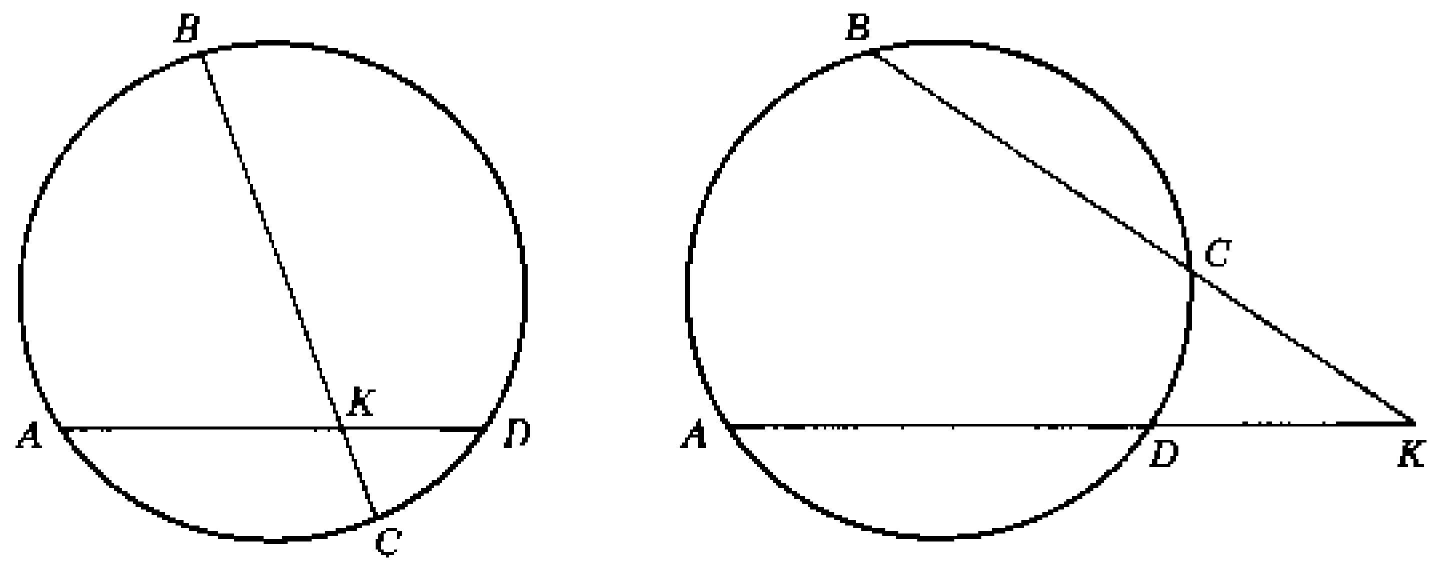


Figura 22.1

[11]Duas traduções em inglês foram publicadas. Uma apareceu com o título "Reflections on the Theory of the Infinitesimal Calculus", traduzido por W. Dickson, *Philosophical Magazine*, **8** (1800), 222-240, 335-352; **9** (1801), 39-56. A outra foi publicada como *Reflexions on the Metaphysical Principles of the Infinitesimal Analysis*, traduzido por W. R. Browell (Oxford, 1832)

Se observarmos que para as cordas $CK = CB - BK$, enquanto que para as secantes $CK = BK - CB$, a relação $AK \cdot KD = CK \cdot KB$ pode ser transportada de um caso para outro simplesmente por uma mudança de sinal. E a tangência é simplesmente um outro caso, em que B e C, digamos, coincidem, de modo que $BC = 0$. Embora a representação gráfica dos números complexos ainda não fosse de uso geral, Carnot não hesitou em sugerir também uma correlação de figuras através de números imaginários. Citou como exemplo o fato de ser o círculo $y^2 = a^2 - x^2$ relacionado com a hipérbole $y^2 = x^2 - a^2$ através da identidade $x^2 - a^2 = (\sqrt{-1})^2(a^2 - x^2)$.

13 Carnot ampliou grandemente sua correlação de figuras em sua *Géométrie de position* de 1803, livro que o colocou ao lado de Monge como fundador da moderna geometria pura. O desenvolvimento da matemática tem se caracterizado por uma busca de graus de generalidade cada vez mais altos, e é essa qualidade que torna significativa a obra de Carnot. Seu gosto pela generalização levou-o a belos análogos de teoremas bem conhecidos da geometria plana. O equivalente da familiar lei dos co-senos da trigonometria, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ era conhecido pelo menos desde os tempos de Euclides; Carnot estendeu esse antigo teorema a uma forma para o tetraedro, $a^2 = b^2 + c^2 + d^2 - 2cd \cos B - 2bd \cos C - 2bc \cos D$, onde a, b, c, d são as áreas das quatro faces e B, C, D são os ângulos entre as faces de áreas c e d, b e d, e b e c respectivamente. A preocupação de generalidade que se encontra em sua obra tem sido a força propulsora da matemática moderna, especialmente no século vinte. A topologia em particular, tratando de propriedades de figuras que permanecem invariantes por deformação contínua, entusiasmaria Carnot se pudesse voltar à vida hoje, pois a reconheceria como enorme avanço sobre sua correlação de figuras.

A *Géométrie de position* é um clássico da geometria pura, mas contém também contribuições significativas à análise. Embora a geometria analítica tivesse feito passar completamente a segundo plano a geometria sintética durante mais de um século, sua supremacia tinha sido obtida em termos de dois sistemas de coordenadas, retangulares e polares. No sistema retangular as coordenadas de um ponto P de um plano são as distâncias de P a duas retas ou eixos perpendiculares entre si; no sistema polar uma das coordenadas de P é a distância de P a um ponto fixo O (o pólo) e a outra o ângulo formado pela reta OP com uma reta fixa (eixo polar) passando por O. Carnot viu que os sistemas de coordenadas podiam ser modificados de vários modos. Por exemplo, as coordenadas de P podem ser as distâncias de P a dois pontos fixos O e Q; ou uma coordenada pode ser a distância OP e a outra a área do triângulo OPQ. Em tais generalizações Carnot simplesmente redescobriu e estendeu uma sugestão feita por Newton, que tinha porém sido esquecida; mas, caracteristicamente, a idéia de Carnot levou-o mais longe. Em todos os casos considerados até então, a equação de uma curva depende do particular sistema de referência que se usa; no entanto as propriedades da curva não estão ligadas a nenhuma escolha do pólo ou eixos. Deveria ser possível, Carnot argumentou, achar coordenadas que não "dependem de qualquer hipótese particular ou de qualquer base de comparação tomada no espaço absoluto". Assim ele deu início à busca do que hoje se chamam coordenadas intrínsecas. Uma dessas ele encontrou no familiar raio de curvatura de uma curva num ponto. Como outra coordenada ele introduziu uma quantidade a que não deu nome mas que veio a chamar-se aberrância ou ângulo de desvio. Trata-se de uma extensão das idéias de tangência e curvatura. A tangente a uma curva num ponto P é a posição limite de uma secante PQ quando Q se aproxima de P ao longo da

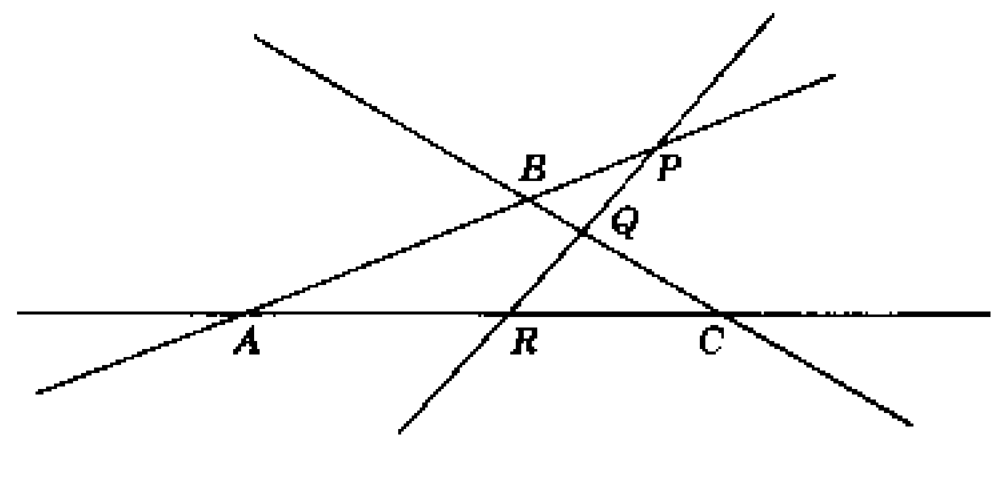


Figura 22.2

curva; o círculo de curvatura é a posição limite de um círculo pelos pontos P, Q e R quando Q e R se aproximam de P ao longo da curva. Se agora fazemos passar uma parábola pelos pontos P, Q, R e S e achamos a posição limite dela quando Q, R e S se aproximam de P ao longo da curva, a aberrância em P é o ângulo entre o eixo dessa parábola e a normal à curva. A aberrância depende da terceira derivada de uma função assim como a inclinação e a curvatura da primeira e segunda derivadas respectivamente; e verifica-se que assim como a inclinação de uma reta e a curvatura de um círculo são constantes, também a aberrância de uma secção cônica é a mesma em todos os pontos[12].

14 O nome de Carnot é conhecido entre os matemáticos por um teorema que tem seu nome e apareceu em 1806 em um *Essai sur la théorie des transversales*. Esse é novamente uma extensão de um resultado antigo. Menelaus de Alexandria tinha mostrado que se uma reta corta os lados AB, BC e CA de um triângulo (ou os prolongamentos desses lados) nos pontos P, Q e R respectivamente, e se $a' = AP$, $b' = BQ$, $c' = CR$ e $a'' = AR$, $b'' = BP$, $c'' = CQ$, então $a'b'c' = a''b''c''$ (Fig. 22.2). Carnot mostrou que se a reta no teorema de Menelaus é substituída por uma curva de ordem n que corta AB nos pontos (reais ou imaginários) $P_1, P_2, \ldots, P_n$, BC nos pontos $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ e CA nos pontos $R_1, R_2, \ldots, R_n$ então o teorema de Menelaus vale se tomarmos a' como o produto das n distâncias $AP_1, AP_2, \ldots, AP_n$, com definições semelhantes para b' e c' e definições análogas para a'', b'' e c'' (Fig. 22.3). A teoria das transversais é apenas uma pequena parte de uma obra que contém outras generalizações interessantes. Da fórmula familiar de Heron de Alexandria para a área de um triângulo em termos de seus três lados, Carnot passou a um resultado correspondente para o volume do tetraedro em termos de suas seis arestas; finalmente ele obteve uma fórmula contendo 130 termos para achar o décimo de dez segmentos unindo cinco pontos arbitrários no espaço quando os outros nove são conhecidos.

Carnot era um soldado, um político e um geômetra; mas era também um especulador. O fracasso de empreendimentos coloniais, em que ele investira demasiado pesadamente, levou-o à ruína financeira em 1809, quando então o imperador magnanimamente lhe deu um posto[13].

15 Carnot não foi o único de nosso grupo revolucionário a sentir a necessidade de maior rigor na matemática. Mencionamos o estado lamentável da geometria retratado pelo *Cours de mathematiques* de Bézout. Isso levou Legendre, que afinal era principalmente um analista, a reviver algo da qualidade intelectual de Euclides. O resultado foram os *Éléments de géométrie* que apareceram em 1794, o ano do terror. Aqui também vemos a verdadeira antítese daquilo que em geral se considera como prático. Como Legendre diz no prefácio, seu objetivo é apresentar uma geometria que satisfaça ao *espirito*. O resultado dos esforços de Legendre foi um texto notavelmente bem sucedido — um dos produtos da Revolução a ter influência persistente, pois vinte edições apareceram em vida do autor. Legendre escreveu que sua intenção era "fazer um livro muito rigoroso", mas isso não o levou a exagerar no rigor às expensas da clareza.

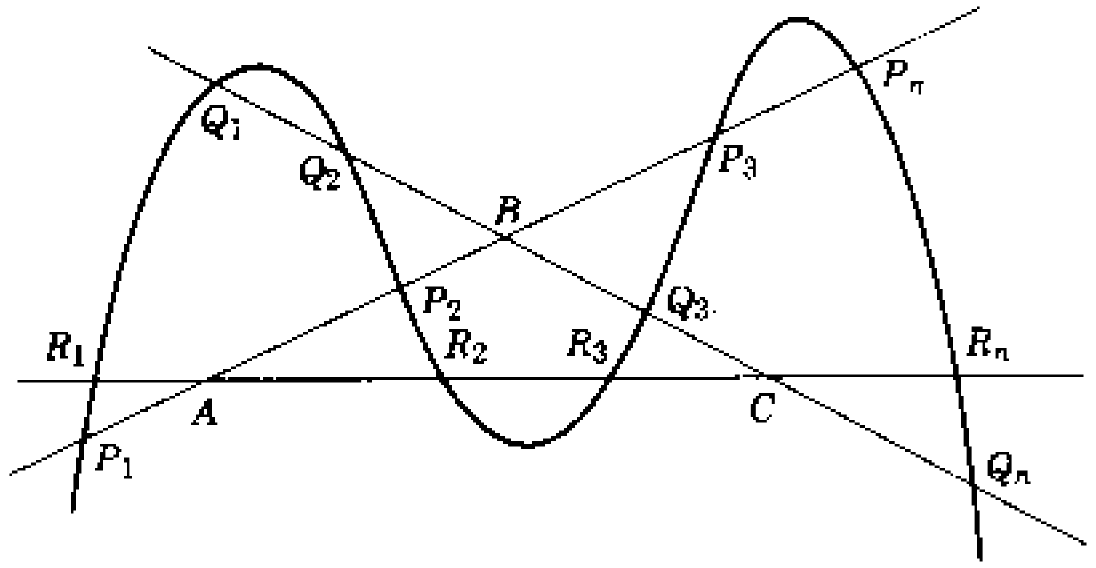


Figura 22.3

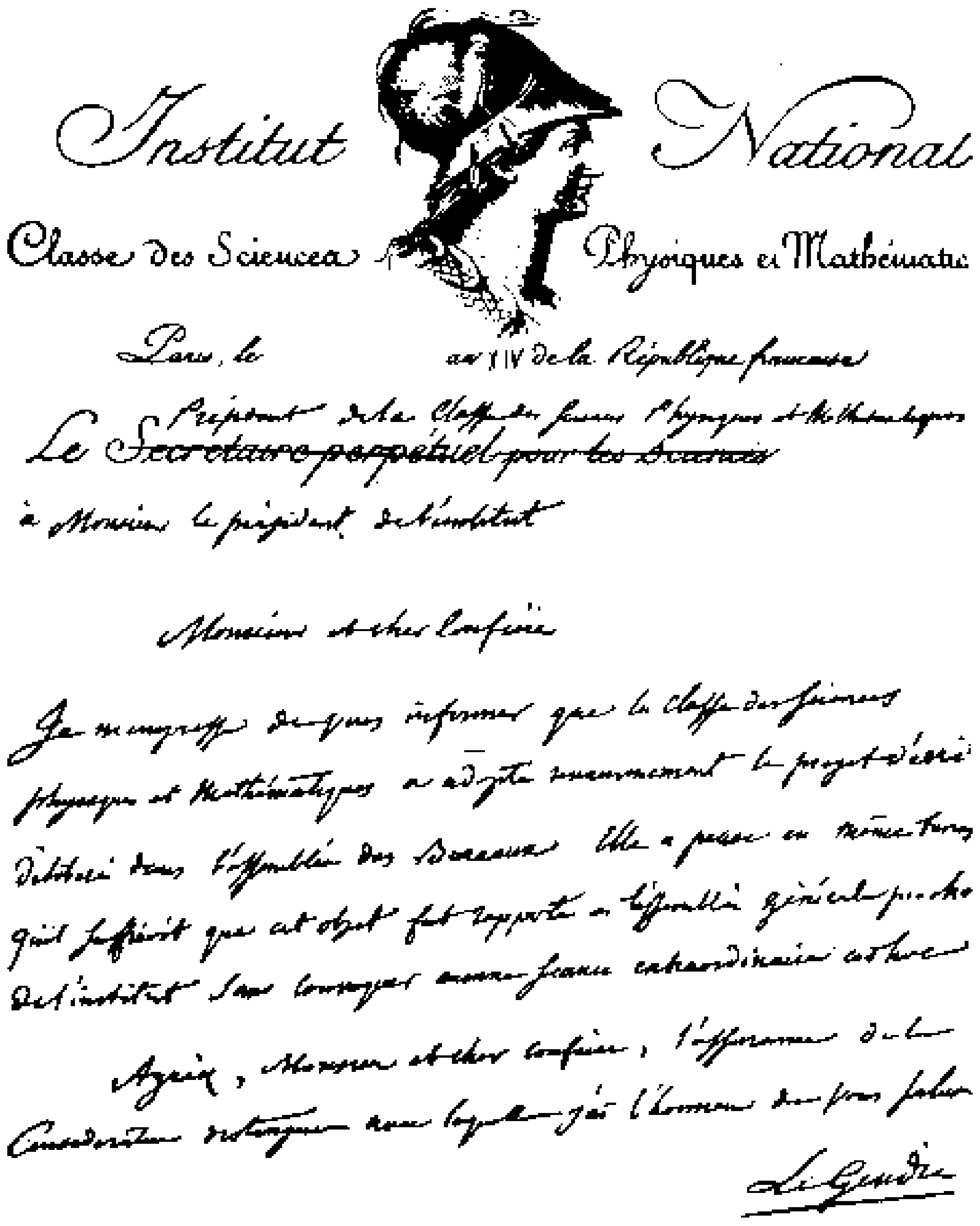
[12]Para mais detalhes veja C. B. Boyer, "Carnot and the Concept of Deviation", *American Mathematical Monthly*, **61** (1954), 459-463

[13]Há vários livros sobre a vida de Carnot. Veja, por exemplo, Marcel Reinhard, *Le grand Carnot* (1950-1952) e S. J. Watson, *Carnot* (1954)

Pensamos freqüentemente na matemática americana como influenciada principalmente pela ciência alemã, pois há uma geração os americanos iam a Göttingen para entrar em contato com os maiores expoentes no assunto. Tendemos a esquecer que durante boa parte do século dezenove foi a matemática francesa que dominou o ensino na América, e isso se deveu principalmente à obra dos homens que estamos considerando. Textos por Lacroix, Biot e Lagrange foram publicados para uso nas escolas americanas, mas talvez o mais influente de todos tenha sido a geometria de Legendre. *Davies' Legendre* tornou-se quase um sinônimo para geometria nos Estados Unidos. Em 1885 ainda o Dean Van Amringe de Columbia escrevia no prefácio de mais uma edição:

> Acredita-se que em clareza e precisão de definição, simplicidade geral e rigor de demonstração, no desenvolvimento ordenado e lógico do assunto, e na concisão da forma, *Davies' Legendre* é superior a qualquer obra de seu nivel para estimular a capacidade lógica dos alunos, e para instruí-los no grande corpo da verdade geométrica elementar.

16 O sucesso dos *Éléments* de Legendre não deve levar-nos a pensar no autor como geômetra. Os campos em que Legendre fez contribuições significativas foram numerosos, mas em geral não geométricos — equações diferenciais, Cálculo, teoria das funções, teoria dos números, e matemática aplicada. Compôs um tratado em três volumes, *Exercices du calcul intégral* (1811-1819) que rivalizava com o de Euler em alcance e autoridade; mais tarde ele expandiu aspectos destes em outros três volumes formando o *Traité des fonctions elliptiques et des intégrales euleriennes* (1825-1832). Nesses importantes tratados, bem como em artigos anteriores, Legendre introduziu o nome "integrais eulerianas" para as funções beta e gama. E, o que é mais importante, ele forneceu alguns instrumentos básicos da análise, tão úteis para os físicos matemáticos, que levam seu


Institut National
Classe des Sciences Physiques et Mathématiques
Paris, le an XIV de la République française
~~Le Secrétaire perpétuel pour les Sciences~~
à Monsieur le président de l'Institut
Monsieur et cher Confrère
Agréez, Monsieur et cher confrère, l'assurance
Le Gendre

Carta autografa de Legendre. Em algumas de suas cartas aparece a forma "Le Gendre", como nesse caso. Em geral o nome é escrito Legendre nome. Entre esses estão as funções de Legendre, que são soluções da equação diferencial de Legendre $(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$. As soluções polinomiais para valores inteiros positivos de n são chamadas polinômios de Legendre.

Legendre gastou muito esforço para reduzir as integrais elíticas (quadraturas da forma $\int R(x, s)dx$, onde R é uma função racional e s é a raiz quadrada de um polinômio de terceiro ou quarto grau) a três formas-padrão que a partir daí levam seu nome. As integrais elíticas de primeira e segunda espécie na forma de Legendre são

$$F(K, \phi) = \int_0^{\phi} \frac{dt}{\sqrt{1 - K^2 \operatorname{sen}^2 t}}$$

e

$$E(K, \phi) = \int_0^{\phi} \sqrt{1 - K^2 \operatorname{sen}^2 t}\, dt$$

respectivamente, onde $K^2 < 1$; as de terceira forma são um pouco mais complicadas. Tabelas de tais integrais, tabuladas para K dado e valores variáveis de ϕ podem ser achadas em grande número de textos, pois essas integrais aparecem em muitos problemas. A integral elítica de Legendre de primeira espécie aparece naturalmente na resolução da equação diferencial do movimento de um pêndulo simples; a de segunda espécie aparece quando se procura o comprimento de arco da elipse. As integrais elíticas apareceram também nos trabalhos anteriores de Legendre, especialmente um de 1785 sobre a atração gravitacional de um elipsóide, problema em conexão com o qual apareceram os chamados "coeficientes de Legendre" ou harmônicos zonais — funções usadas eficazmente por Laplace em teoria do potencial.

Legendre foi uma figura importante em geodésia, e em conexão com isso ele desenvolveu o método estatístico dos mínimos quadrados. Um caso simples do método dos mínimos quadrados pode ser descrito como segue. Se observações levaram a *três* ou mais equações em duas variáveis — digamos $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ e $a_3x + b_3y + c_3 = 0$ — toma-se como "melhores" valores de x e y a solução das *duas* equações simultâneas

$$(a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2)x + (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)y + (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) = 0;$$
$$(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)x + (b_1{}^2 + b_2{}^2 + b_3{}^2)y + (b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3) = 0.$$

17 As *Mémoires* do Institut contêm também uma das tentativas de Legendre de provar o postulado das paralelas, mas de todas as suas contribuições à matemática as que mais agradavam a Legendre eram os trabalhos sobre integrais elíticas e sobre teoria dos números. Publicou um *Essai sur la théorie des nombres* (1797-1798) em dois volumes, o primeiro tratado a ser dedicado exclusivamente ao assunto. O famoso "último teorema de Fermat" o atraiu, e por volta de 1825 ele deu uma prova de sua insolubilidade para $n = 5$. Quase igualmente famoso é um teorema sobre congruências que Legendre publicou no tratado de 1797-1798. Se, dados inteiros p e q, existe um inteiro x tal que $x^2 - q$ é divisível por p, então q é chamado um resto quadrático de p; escrevemos agora (segundo uma notação introduzida por Gauss $x^2 \equiv q \pmod{p}$, e lemos isso como "x^2 é congruente a q módulo p". Legendre redescobriu um belo teorema, dado antes em forma menos moderna por Euler, conhecido como lei da reciprocidade quadrática: se p e q são primos, então as congruências $x^2 = q \pmod{p}$ e $x^2 = p \pmod{q}$ são ou *ambas* resolúveis ou *ambas* não-resolúveis, a menos que p e q sejam ambos da forma $4n + 3$, e nesse caso uma é resolúvel e a outra não. Por exemplo, $x^2 \equiv 13 \pmod{17}$ tem a solução $x = 8$, e $x^2 \equiv 17 \pmod{13}$ tem a solução $x = 11$; e pode-se mostrar que $x^2 \equiv 5 \pmod{13}$ e $x^2 \equiv 13 \pmod{5}$ não têm solução. De outro lado, $x^2 \equiv 19 \pmod{11}$ não tem solução, enquanto que $x^2 \equiv 11 \pmod{19}$ tem a solução $x = 7$. O teorema na exposição de Legendre tem a forma

$$(p/q)\,(q/p) = (-1)^{(p-1)(q-1)/4},$$

onde o símbolo de Legendre (p/q) denota 1 ou -1 conforme $x^2 \equiv p \pmod{q}$ tenha ou não solução em x.

Desde os dias de Euclides sabe-se que o número de primos é infinito; mas é evidente que a densidade dos números primos decresce quando avançamos para inteiros sempre maiores. Tornou-se então um dos problemas mais famosos descrever a distribuição de primos entre os números naturais. Os matemáticos procuravam uma regra, conhecida como teorema dos números primos[14], que exprimisse o número de primos menores que um dado inteiro n como uma função de n, usualmente denotada por $\pi(n)$. Em seu conhecido tratado de 1797-1798 Legendre conjeturou, baseado numa contagem de um grande número de primos, que $\pi(n)$ se avizinha de $n/(\ln n - 1{,}08366)$ quando n cresce indefinidamente. Essa conjetura está perto da verdade, mas um enunciado preciso do teorema, que $\pi(n) \to n/\ln n$, sugerido várias vezes durante o século seguinte, só foi provado em 1896. Legendre mostrou que não existe função algébrica racional que sempre forneça primos, mas ele observou que $n^2 + n + 17$ é primo para todos os valores de n de 1 a 16, e $2n^2 + 29$ é primo para valores de n de 1 a 28. (Euler tinha mostrado antes que $n^2 - n + 41$ é primo para valores de n de 1 a 40.)

18 Se Carnot e Legendre eram discípulos do culto ao pensamento claro e rigoroso, Lagrange era o sumo sacerdote. No auge do terror, Lagrange pensou seriamente em deixar a França; mas nesse momento crítico a École Normale e a École Polytechnique foram fundadas, e Lagrange foi convidado a ensinar análise. Lagrange parece ter gostado dessa oportunidade de ensinar, embora muitos anos tivessem passado desde que ensinara em Turim. No entretempo ele estivera sob a proteção de soberanos, mas durante a Revolução ele não tomou partido nem a favor nem contra o rei ou o segundo estado. Talvez isto resultasse de apatia política, possivelmente da depressão mental em que Lagrange se encontrava na época[15]. De qualquer forma, sua nomeação para as escolas recém-fundadas fez com que despertasse da letargia. O novo currículo exigia novas notas de curso, e essas Lagrange forneceu em vários níveis. Para os estudantes da École Normale em 1795 ele preparou e ministrou aulas que hoje seriam adequadas para uma classe colegial, em álgebra avançada, ou para um curso pré-universitário; o material nessas notas de aula gozou de uma popularidade que se estendeu à América do Norte, onde foram publicadas como *Lectures on Elementary Mathematics*[16]. Para os estudantes no nível mais avançado da École Polytechnique Lagrange deu cursos de análise e preparou o que a partir daí foi considerado um clássico da matemática. Os resultados, em sua *Theorie des fonctions analytiques*, apareceram no mesmo ano que as *Réflexions* de Carnot, e juntos eles fazem de 1797 um ano marcante no ressurgimento do rigor.

A teoria das funções de Lagrange, que desenvolvia algumas idéias que ele apresentara num artigo cerca de vinte e cinco anos antes, certamente não era útil num sentido estreito, pois a notação da diferencial era muito mais cômoda e sugestiva que a "função derivada" de Lagrange, de que vem nosso nome "derivada". Toda a motivação da obra era não tornar o cálculo mais utilitário, mas mais logicamente satisfatório. A idéia chave é fácil de descrever. A função $f(x) = 1/(1-x)$, quando expandida por divisão, fornece a série infinita $1 + 1x + 1x^2 + 1x^3 + \ldots 1x^n \ldots$ Se o coeficiente de x^n é multiplicado por $n!$, Lagrange chamava o resultado a derivada n-ésima da função $f(x)$ no ponto $x = 0$ — com modificações adequadas para as expansões de funções em outros pontos. A essa obra de Lagrange devemos a notação usual para derivadas de várias ordens, $f'(x), f''(x), \ldots, f^{n}(x), \ldots$. Lagrange pensava que com esse artifício tinha eliminado a necessidade de limites ou infinitésimos, embora continuasse a usar esses últimos lado a lado com suas funções derivadas; mas, infelizmente, há falhas em seu belo esquema.

[14]Para um esboço histórico dessas tentativas veja dois livros por Edmund Landau, *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen* (Leipzig, 1909) e *Vorlesungen über Zahlentheorie* (Leipzig, 1927)

[15]Veja George Sarton, "Lagrange's Personality", *Proceedings of the American Philosophical Society*, **88** (1944), 457-496; também E. T. Bell, *Men of Mathematics* (1937), Cap. 10

[16]Traduzido por T. J. McCormack (1901). O texto francês se encontra no Vol. VII das *Oeuvres* de Lagrange

Nem toda função pode ser assim expandida, pois havia lapsos na pretensa prova de Lagrange da expansibilidade; além disso, a questão da convergência da série infinita faz reaparecer a necessidade do conceito de limite. Mas pode-se dizer que a obra de Lagrange durante a Revolução teve uma influência ampla por iniciar um assunto que a partir daí foi um centro de atenção na matemática — a teoria das funções de variável real.

19 Lagrange é em geral considerado o mais notável matemático do século dezoito, sendo somente Euler um sério rival, e há aspectos de sua obra que não são fáceis de descrever numa exposição histórica elementar. Entre esses está a primeira e talvez a maior contribuição de Lagrange — o cálculo de variações. Esse era um ramo novo da matemática, cujo nome se origina de notações usadas por Lagrange aproximadamente a partir de 1760. Em sua forma mais simples o cálculo de variações trata de determinar uma relação funcional $y = f(x)$ tal que uma integral $\int_a^b g(x,y)dx$ seja máxima ou mínima. Problemas de isoperimetria ou de mais rápida queda eram casos especiais no cálculo de variações. Em 1755 Lagrange tinha escrito a Euler sobre os métodos gerais que tinha desenvolvido para tratar de problemas desse tipo, e Euler generosamente retardou a publicação de um trabalho seu sobre tema semelhante a fim de que o autor mais jovem recebesse todo o crédito pelos novos métodos que Euler considerava superiores[17].

A partir de suas primeiras publicações na *Miscellanea* da Academia de Turim em 1759-1761 a reputação de Lagrange estava firmada. Quando em 1766 Euler e d'Alembert aconselharam Frederico, o Grande, na escolha do sucessor de Euler na Academia de Berlim ambos insistiram em que Lagrange fosse indicado. Frederico então presunçosamente escreveu a Lagrange que era necessário que o maior geômetra da Europa vivesse perto do maior dos reis. Lagrange concordou; permaneceu em Berlim durante vinte anos, partindo somente depois da morte de Frederico, três anos depois do começo da Revolução Francesa.

Foi durante sua estada em Berlim que Lagrange publicou importantes memórias sobre mecânica, o problema dos três corpos, suas primeiras idéias sobre funções derivadas, e importantes trabalhos sobre a teoria das equações. Em 1767 ele publicou um artigo sobre a aproximação de raízes de equações polinomiais por meio de frações contínuas; em outro artigo em 1770 ele considerou a resolubilidade de equações em termos de permutações de suas raízes. Foi esse último trabalho que levou à enormemente bem sucedida teoria dos grupos e às provas por Galois e Abel da impossibilidade de resolver, em termos usuais, as equações de grau maior que quatro. O nome de Lagrange é ligado hoje ao teorema da teoria dos grupos — se o é a ordem de um subgrupo g de um grupo G de ordem O, então o é um fator de O. Ao descobrir que a resolvente de uma quíntica, longe de ser de grau menor que cinco, como se esperaria, era de grau seis, Lagrange conjeturou que equações polinomiais de grau superior a quatro não são em geral resolúveis no sentido usual.

20 Estando sempre à procura de generalidade e elegância no tratamento de problemas, Lagrange foi o inventor do método da variação de parâmetros na resolução de equações diferenciais lineares não-homogêneas. Isto é, se $c_1u_1 + c_2u_2$ é a solução geral de $y'' + a_1y' + a_2y = 0$ (onde u_1 e u_2 são funções de x) ele substituía os parâmetros c_1 e c_2 por variáveis a determinar v_1 e v_2 (funções de x) e determinava-as de modo que $v_1u_1 + v_2u_2$ fosse uma solução de $y'' + a_1y' + a_2y = f(x)$. Na determinação de máximos e mínimos de uma função como $f(x, y, z, w)$ sujeita a vínculos $g(x, y, z, w) = 0$ e $h(x, y, z, w) = 0$ ele sugeriu o uso dos multiplicadores de Lagrange para fornecer um algoritmo elegante e simétrico. Para empregar esse método introduzimos duas constantes a determinar λ e μ, formamos a função $F = f + \lambda g + \mu h$, das seis equações $F_x = 0$, $F_y = 0$, $F_z = 0$, $F_w = 0$, $g = 0$ e $h = 0$ eliminamos os multiplicadores λ e μ, e resolvemos para obter os valores procurados de x, y, z e w.

[17]Veja C. Carathéodory, "The Beginning of Research in the Calculus of Variations", *Osiris*, 3 (1938) 224-240; também Robert Woodhouse, *A History of the Calculus of Variations in the Eighteenth Century* (reimpresso, New York: Chelsea, s. d.)

Como tantos dos maiores matemáticos modernos Lagrange tinha um profundo interesse pela teoria dos números. Embora não usasse a linguagem das congruências, Lagrange provou, em 1768, o equivalente do enunciado que para um módulo primo p a congruência $f(x) \equiv 0$ não pode ter mais que n soluções distintas, onde n é o grau (exceto no caso trivial em que todos os coeficientes de $f(x)$ são divisíveis por p). Dois anos depois ele publicou uma demonstração do teorema, para o qual Fermat dissera ter uma prova, que diz que todo inteiro positivo é a soma de no máximo quatro quadrados perfeitos; por isso esse teorema é freqüentemente chamado o teorema de Lagrange dos quatro quadrados. Ao mesmo tempo ele deu também a primeira prova de um resultado conhecido como teorema de Wilson, que aparecera nas *Meditationes algebraicae* de Waring no mesmo ano[18] — para qualquer primo p, o inteiro $(p-1)! + 1$ é divisível por p. Lagrange contribuiu também para a teoria das probabilidades, mas nesse campo ele ficou abaixo de Laplace.

21 Até agora dissemos muito pouco sobre Laplace, que em seu tempo foi considerado matemático tão grande quanto Lagrange. Há duas razões para o relativo silêncio. Primeiro Laplace quase não tomou parte nas atividades revolucionárias. Parece ter tido um forte sentimento de honestidade intelectual na ciência, mas em política não tinha convicções. Isso não significa que fosse medroso, pois parece que se associou livremente àqueles seus colegas científicos, que eram suspeitos durante o período de crise. Diz-se que ele também teria corrido o risco de ser guilhotinado se não fossem suas contribuições à ciência, mas essa asserção parece discutível, pois freqüentemente ele apareceu como um oportunista inescrupuloso. Desempenhou um papel no Comitê de Pesos e Medidas, mas não muito significativo. Foi naturalmente professor da École Normale e da École Polytechnique, mas, ao contrário de Monge e Lagrange, não publicou notas de curso. Suas publicações diziam respeito principalmente à mecânica celeste, em que é figura proeminente no período após Newton. Laplace teve um posto na administração política alguns anos depois, quando Napoleão, grande admirador de homens de ciência, o nomeou Ministro do Interior — posto que Carnot também ocupou durante algum tempo sob Napoleão. Mas é bem sabido que Laplace, ao contrário de Carnot, não mostrou nenhuma aptidão para o cargo, e Napoleão disse que "ele transportava o espírito do infinitamente pequeno à direção dos negócios de sua pasta". Uma segunda razão para não termos dado mais ênfase ao trabalho de Laplace é que não teve a influência imediata e persistente que tiveram outros de nosso grupo. Suas compilações num certo sentido representam mais o fim de uma era que o começo de um novo período — embora devamos fazer uma exceção no caso de sua obra em probabilidades e teoria do potencial.

A teoria das probabilidades deve mais a Laplace que a qualquer outro matemático. A partir de 1774 ele escreveu muitos artigos sobre o assunto, cujos resultados ele incorporou no clássico *Théorie analytique des probabilités* de 1812. Ele considerou a teoria em todos os aspectos e em todos os níveis[19], e seu *Essai philosophique des probabilités* de 1814 é uma exposição introdutória para o leitor comum. Laplace escreveu que "no fundo a teoria das probabilidades é apenas o senso comum expresso em números"; mas sua *Théorie analytique* mostra a mão de um mestre da análise que conhece seu cálculo avançado. Está cheio de integrais envolvendo funções beta e gama; e Laplace foi um dos primeiros a mostrar que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx$, a área sob a curva de probabilidade, é $\sqrt{\pi}$. O método pelo qual obteve esse resultado era um tanto artificial, mas não está longe do artifício hoje usado de transformar

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx \cdot \int_0^\infty e^{-y^2}dy = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}dxdy$$

[18]Para a história desse e de outros teoremas de teoria dos números veja L. E. Dickson, *History of the Theory of Numbers* (1919-1923)

[19]O capítulo de longe mais longo de Isaac Todhunter, *A History of the Mathematical Theory of Probability* (1949) é dedicado inteiramente à obra de Laplace

para coordenadas polares como

$$\int_0^{\pi/2}\int_0^{\infty} re^{-r^2}\,dr\,d\theta,$$

que se calcula facilmente e leva a

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}/2,$$

Entre as muitas coisas a que Laplace chamou a atenção em sua *Théorie analytique* foi o cálculo de π através do problema da agulha de Buffon que tinha sido praticamente esquecido por trinta e cinco anos. Esse é conhecido às vezes como problema da agulha de Buffon-Laplace[20], pois Laplace estendeu o problema original a um reticulado de duas coleções perpendiculares entre si de retas paralelas equidistantes. Se as distâncias são a e b, a probabilidade de que uma agulha de comprimento l (menor que a e b) caia sobre uma das retas é

$$p = \frac{2l(a+b) - l^2}{\pi ab}.$$

Laplace também retirou do esquecimento o trabalho do Rev. Thomas Bayes (morreu em 1761) sobre probabilidade inversa. Achamos também no livro a teoria dos quadrados mínimos, inventada por Legendre, juntamente com uma prova formal que Legendre não dera. A *Théorie Analytique* contém também a transformada de Laplace que é tão útil em equações diferenciais. Se $f(x) = \int_0^{\infty} e^{-xt} g(t)dt$, diz-se que a função $f(x)$ é a transformada de Laplace da função $g(x)$.

22 Na obra de Laplace é feita aplicação considerável de análise matemática avançada. É típico seu estudo das condições de equilíbrio de uma massa fluida em rotação, assunto que ele considerou em conexão com a hipótese nebular da origem do sistema solar. A hipótese fora apresentada em forma popular em 1796 em *Exposition du système du monde*, livro que está para a *Mécanique céleste* (1799-1825, 5 vols.) na mesma relação que *Essai philosophique des probabilités* está para a *Théorie analytique*. De acordo com a teoria de Laplace o sistema solar se originou de um gás incandescente girando em torno de um eixo. Ao esfriar, o gás se contraiu, causando rotação cada vez mais rápida, de acordo com a conservação do momento angular, até que anéis sucessivos se desprenderam da camada externa condensando-se e formando planetas. O Sol em rotação constitui o cerne restante da nébula. A idéia atrás dessa hipótese não era inteiramente original de Laplace, pois fora proposta em forma qualitativa e esquemática por Thomas Wright e Immanuel Kant, mas o revestimento quantitativo da teoria faz parte da *Mécanique céleste*. É também nesse clássico que achamos, em conexão com a atração de um esferóide sobre uma partícula, o uso da idéia de potencial e a equação de Laplace. Num artigo altamente técnico de 1782 sobre "Théorie des attractions des sphéroïdes et de la figure des planètes", incluído também na *Mécanique céleste*, Laplace desenvolveu o muito útil conceito de potencial — uma função cuja derivada direcional em cada ponto é igual à componente da intensidade de campo na direção dada. Também de importância fundamental na astronomia e na física matemática é o chamado laplaciano de uma função $u = f(x, y, z)$. Esse é simplesmente a soma das derivadas parciais não-mistas de segunda ordem $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$ — freqüentemente abreviada $\nabla^2 u$ (leia-se "del-quadrado de u") onde ∇^2 chama-se o operador de Laplace. A função $\nabla^2 u$ não depende do particular sistema de coordenadas usado; sob certas condições potenciais gravitacionais, elétricos e outros satisfazem à equação de Laplace $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$. Euler tinha esbarrado

[20]Para uma boa exposição veja N. T. Gridgman, "Geometric Probability and the Number π", *Scripta Mathematica*, **25** (1960), 183-195

com essa equação mais ou menos incidentalmente em 1752 em estudos de hidrodinâmica, mas Laplace fez dela uma parte standard da física matemática.

A publicação da *Mécanique céleste* de Laplace é considerada comumente como marcando a culminação do ponto de vista newtoniano sobre a gravitação. Explicando todas as perturbações do sistema solar, Laplace mostrou que os movimentos são seculares, de modo que o sistema pode ser considerado estável. Não parecia mais ser necessário admitir ocasional intervenção divina. Diz-se que Napoleão comentou com Laplace o fato deste não mencionar Deus em sua obra monumental, ao que se conta que Laplace respondeu "Não preciso dessa hipótese". Quando contaram isso a Lagrange, este teria dito "Ah, mas é uma bela hipótese".

Laplace completou não só a parte gravitacional dos *Principia* de Newton, mas também alguns pontos de física. Newton tinha computado a velocidade do som em bases puramente teóricas, mas viu que isso lhe dava um valor demasiadamente pequeno. Laplace foi o primeiro a observar, em 1816, que a discrepância entre o valor calculado e o observado se devia a que os cálculos em *Principia* eram baseados na hipótese de compressões e expansões isotérmicas, ao passo que na realidade as oscilações para o som são tão rápidas que as compressões são adiabáticas, aumentando assim a elasticidade do ar e a velocidade do som.

As mentes de Laplace e Lagrange, os dois principais matemáticos da revolução, em muitos pontos eram diametralmente opostas. Para Laplace a natureza era a essência, e a matemática apenas uma coleção de instrumentos que ele manejava com extraordinária habilidade; para Lagrange a matemática era uma arte sublime que era sua própria razão para existir. A matemática da *Mécanique céleste* freqüentemente é descrita como difícil, mas ninguém diz que é bela; a *Mécanique analytique* de outro lado tem sido admirada como um "poema científico" na perfeição e grandeza de sua estrutura.

23 Num certo sentido esse capítulo deveria terminar com a data de 1799, pois a esse tempo Bonaparte se apoderou do poder e pode-se considerar terminado o período da Revolução. No entanto sob Napoleão as condições favoráveis para o desenvolvimento da matemática persistiram. Além disso, essa data de modo nenhum corresponde ao fim das atividades dos cinco sobreviventes em nosso grupo, pois todos eles continuaram, como vimos, a dar contribuições à matemática, e alguns à política também. Honrarias vieram a todos eles, Monge, Carnot, e Lagrange sendo nomeados condes do império e Laplace obtendo o título de marquês. De nosso grupo de seis, somente Legendre parece nunca ter tido um título. Matematicamente o capítulo tem um final feliz, pois nossos sábios puderam continuar sua obra até o fim. Politicamente, porém, dois deveriam sofrer derrota. Carnot e Monge tinham fortes convicções políticas, e ambos tinham votado pela morte de Luiz XVI. Carnot, o mais coerente dos dois, sempre se opôs a ditadores, e em 1804 ele foi o único tribuno com coragem e convicção suficientes para votar contra a nomeação de Napoleão como imperador. No entanto mais tarde, quando achou que o bem da França o exigia, Carnot de boa vontade serviu sob Napoleão, tanto no exército quanto na administração governamental. Monge, de outro lado, apoiou seu ídolo de cabo revolucionário a imperador despótico. Ele e Fourier acompanharam Bonaparte nas campanhas na Itália e no Egito, e a Monge coube a execução da delicada tarefa de determinar quais obras de arte deveriam ser trazidas a Paris como presa de guerra.

Após a restauração da monarquia na França Carnot foi obrigado a se exilar em Magdeburg, Monge foi banido e todas as honrarias lhe foram retiradas, inclusive seu lugar na École Polytechnique e no Institut National. A reviravolta nos acontecimentos foi aceita corajosamente por Carnot, que continuou com suas atividades científicas, mas quebrou o ânimo de Monge que morreu pouco depois. Lagrange havia morrido alguns anos antes da crise napoleônica. Legendre parece ter ficado politicamente neutro através das mudanças, pois era tímido e reservado; mas produziu um fluxo constante de publicações sobre integrais elíticas e teoria dos números, assim como contribuições a outras partes da matemática. No fim de sua vida ele também sofreu politicamente. Porque resistira à intenção do governo de ditar ordens à Académie des Sciences, foi privado de sua pensão. Laplace, de outro lado, fez as pazes com cada regime que apareceu, incluindo em edições de suas obras elogios fervorosos ao lado que estivesse no poder. A posteridade, em conseqüência, admirou Laplace por sua matemática ao mesmo tempo que desprezou suas manobras políticas.

Mais de um século e meio se passou desde os dias de que estivemos falando, e podemos olhar para o período sem paixão. Uma lição que se pode tirar é que as coisas que realmente contam na matemática e que têm influência duradoura não são as que se inspiram em utilitarismo imediatista. Mesmo em tempos de crise são as coisas do "espírito" (no sentido francês) que mais contam, e essas são talvez melhor transmitidas pelos grandes mestres. Mas talvez mais importante seja a moral: como Carnot, não se deve perder a coragem, por mais desanimadora que seja a perspectiva política ou intelectual.

BIBLIOGRAFIA

Alengry, Franck, *Condorcet: Guide de la révolution française* (Paris: Giard & E. Brière, 1904)

Arago, François, "Biographies of Distinguished Scientific Men" (sobre Laplace), *Smithsonian Institution, Annual Report*, 1874, pp. 129-168

Bell, E. T., *Men of Mathematics* (New York: Simon and Schuster, 1937)

Boyer, C. B., "Carnot and the Concept of Deviation," *American Mathematical Monthly*, **61** (1954),459-463

Boyer, C. B., "The Great Carnot", *The Mathematics Teacher*, **49** (1956), 7-14

Burlingame, Anne E., *Condorcet, the Torch Bearer of the French Revolution* (Boston: Stratford, 1930)

Cajori, Florian, *A History of Mathematics*, edição revista (New York: Macmillan, 1919)

Cantor, Moritz, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* (Leipzig: B. G. Teubner, 1880-1908, 4 volumes)

Carnot, Hippolyte, *Mémories sur Carnot par son fils* (Paris, 1861-1863, 2 volumes)

Carnot, L. N. M., "Reflections on the Theory of the Infinitesimal Calculus," traduzido por W. Dickson, *Philosophical Magazine*, **8** (1800), 222-240, 335-352; **9** (1801), 39-56

Carnot, L. N. M., *Reflexions on the Metaphysical Principles of the Infinitesimal Analysis*, traduzido por W. R. Browell (Oxford, 1832)

Chasles, Michel, *Aperçu historique sur l'origine et de développement des méthods en géométrie* (Bruxelas, 1837; 2.ª edição, Paris, 1875)

Condorcet, M. J. A. N. C. de, *Oeuvres* (Paris, 1847-1849, 12 volumes)

Condorcet, M. J. A. N. C. de, *Sketch for a Historical Picture of the Progress of the Human Mind*, traduzido por June Barraclough (New York: Noonday Press, 1955)

Dickson, L. E., *History of the Theory of Numbers* (Washington, D. C.: Carnegie Institution, 1919-1923, 3 volumes)

École Polytechnique, *Livre du centenaire*, 1794-1894 (Paris, 1894-1897, 3 volumes)

École Normale, *Le centenaire de l'École Normale*, 1795-1895 (Paris, 1895)

Granger, G. G., *La mathématique sociale du Marquis de Condorcet* (Paris: Presses Universitaires de France, 1956)

Lagrange, J. L., *Oeuvres* (Paris, 1867-1892, 14 volumes)

Lagrange, J. L., *Lectures on Elementary Mathematics*, traduzido por T. J. McCormack, 2.ª edição (Chicago; Open Court, 1901)

Laplace, P. S., *The System of the World*, traduzido por H. H. Harte (Londres: Longmans-Green, 1830, 2 volumes)

Laplace, P. S., *Oeuvres complètes* (Paris: Gauthier-Villars, 1878-1912, 14 volumes em 15)

Laplace, P. S., *A Philosophical Essay on Probabilities* (New York: Wiley, 1902)

Legendre, A. M., *Essai sur la théorie des nombres*, 2.ª ed. (Paris: Courcier, 1808)

Legendre, A. M., *Elements of Geometry and Trigonometry*, traduzido por David Brewster, revisto por Charles Davies (New York: A. S. Barnes, 1851)

Loria, Gino, *Storia della geometria descrittiva* (Milão: Hoepli, 1921)

Loria, Gino, *Storia delle matematiche* (Turin: Sten, 1929-1933, 3 volumes)

Muir, T. P., *The Theory of Determinants in the Historical Order of Development* (Londres, 1906-1923, 4 volumes; reimpresso, New York: Dover, 1960)

Nielsen, Niels, *Géomètres français sous la révolution* (Copenhagen: Levin & Munksgaard, 1929)

Reinhard, Marcel, *Le grand Carnot* (Paris: Hachette, 1950-1952, 2 volumes)

Roever, W. H., *The Mongean Method of Descriptive Geometry* (New York: Macmillan, 1933)

Sarton, George, "Lagrange's Personality," *Proceedings of the American Philosophical Society*, **88** (1944), 457-496

Smith, D. E., *A Source Book in Mathematics* (New York: McGraw-Hill, 1929)

Smith, D. E., *The Poetry of Mathematics and Other Essays* (New York: Scripta Mathematic, 1934)

Taton, René, *L'oeuvre scientifique de Monge* (Paris: Presses Universitaires de France, 1951)

Todnunter, Isaac, *A History of the Mathematical Theory of Probability from the Time of Pascal to that of Laplace* (New York: Chelsea, reimpressão, 1949)

Watson, S. J., *Carnot* (Londres: Bodley Head, 1954)

EXERCÍCIOS

1. As exigências da Revolução Francesa levaram a um aumento da ênfase na matemática aplicada de preferência à pura? Explique, citando exemplos específicos.

2. Quais eram os principais meios de sustento dos matemáticos franceses antes da Revolução? Depois da Revolução? Explique, citando casos específicos.

3. Mencione três matemáticos de renome na França que apoiaram a Revolução e descreva suas atividades nessa direção.

4. Que alternativas considerou o Comitê de Pesos e Medidas na determinação do comprimento do metro? Quais matemáticos conhecidos serviram no Comitê?

5. Mencione cinco famílias dos séculos dezessete e dezoito cada uma das quais tenha produzido vários matemáticos. No caso de cada uma de três dessas famílias descreva as principais contribuições do membro de mais distinção na família.

6. Descreva o livro que, dentre todos os publicados durante a Revolução Francesa, exerceu mais influência na América.

7. Prove os dois teoremas de geometria elementar associados com os diagramas da Fig. 22.1.

8. Prove que a área de um triângulo com vértices (x_1, y_1), (x_2, y_2) e (x_3, y_3) é igual a

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

9. Usando o método de geometria descritiva de Monge trace a "elevação" e o "plano" do segmento de reta do ponto (1, 2, 3) ao ponto (4, 1, 7). Ache os comprimentos do segmento e de cada uma de suas projeções.

10. Mostre, usando a forma paramétrica $x = a \cos \theta$, $y = b \operatorname{sen} \theta$, que a circunferência da elipse é dada por uma integral elítica.

11. Usando divisão, determine a expansão da função $1/(1-2x)$ em série de Taylor até cinco termos; daí, sem derivação, ache a derivada quarta dessa função para $x = 0$.

12. Verifique a afirmação de Legendre de que $n^2 + n + 17$ é primo para valores inteiros positivos de n menores que 17.

13. Use o método dos mínimos quadrados para achar os "melhores" valores de x e y que satisfazem o sistema

$$x - y + 1 = 0;$$
$$2x - y = 0;$$
$$3x - 2y - 2 = 0.$$

14. Ache $\pi(n)$ para $n = 100$ e compare o resultado com $n/(\ln n - 1)$.

15. Verifique para $p = 11$ que $(p-1)! + 1$ é divisível por p se p é primo.

16. Mostre que a integral

$$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-K^2x^2)}}$$

se reduz a uma das formas de Legendre pela substituição $x = \operatorname{sen} t$.

17. Mostre que a fórmula de probabilidade para o problema da agulha de Buffon (Cap. 21) pode ser obtida da de Laplace (veja o texto) fazendo uma das distâncias, digamos b, tender a infinito.

*18. Prove que o centróide de um tetraedro é o ponto de concorrência das retas que unem os pontos médios de arestas opostas.

*19. Prove o seguinte teorema de Monge: os planos traçados pelos pontos médios das arestas perpendicularmente às arestas opostas se encontram num ponto que é o ponto médio do segmento que une o centróide do tetraedro ao circuncentro do tetraedro.

*20. Ache a equação do plano que passa pelo ponto (1, 2, 3) e é perpendicular à reta $x + 2y - 2z - 6 = 0 = 2x - y + 2z$.

*21. Ache a distância perpendicular do ponto à reta na questão precedente.

*22. Prove a fórmula de Lagrange,

$$D = \frac{ap + bq + cr - d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},$$

para a distância perpendicular do ponto (p, q, r) ao plano $ax + by + cz = d$.

*23. Prove que a soma dos quadrados das projeções de um triângulo sobre três planos perpendiculares dois a dois é igual ao quadrado da área do triângulo.

*24. Prove que o volume do tetraedro de vértices (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) e (x_4, y_4, z_4) é igual a

$$\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}.$$

*25. Complete os detalhes na prova de que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

*26. Use o método dos multiplicadores de Lagrange para provar que o maior paralelepípedo retângulo com uma superfície de área dada é o cubo.

*27. Use o método de Lagrange de variação de parâmetros para resolver a equação $y'' + a^2y = \sec x$, sabendo que $\operatorname{sen} ax$ e $\cos ax$ são soluções da equação reduzida.

Capítulo 23

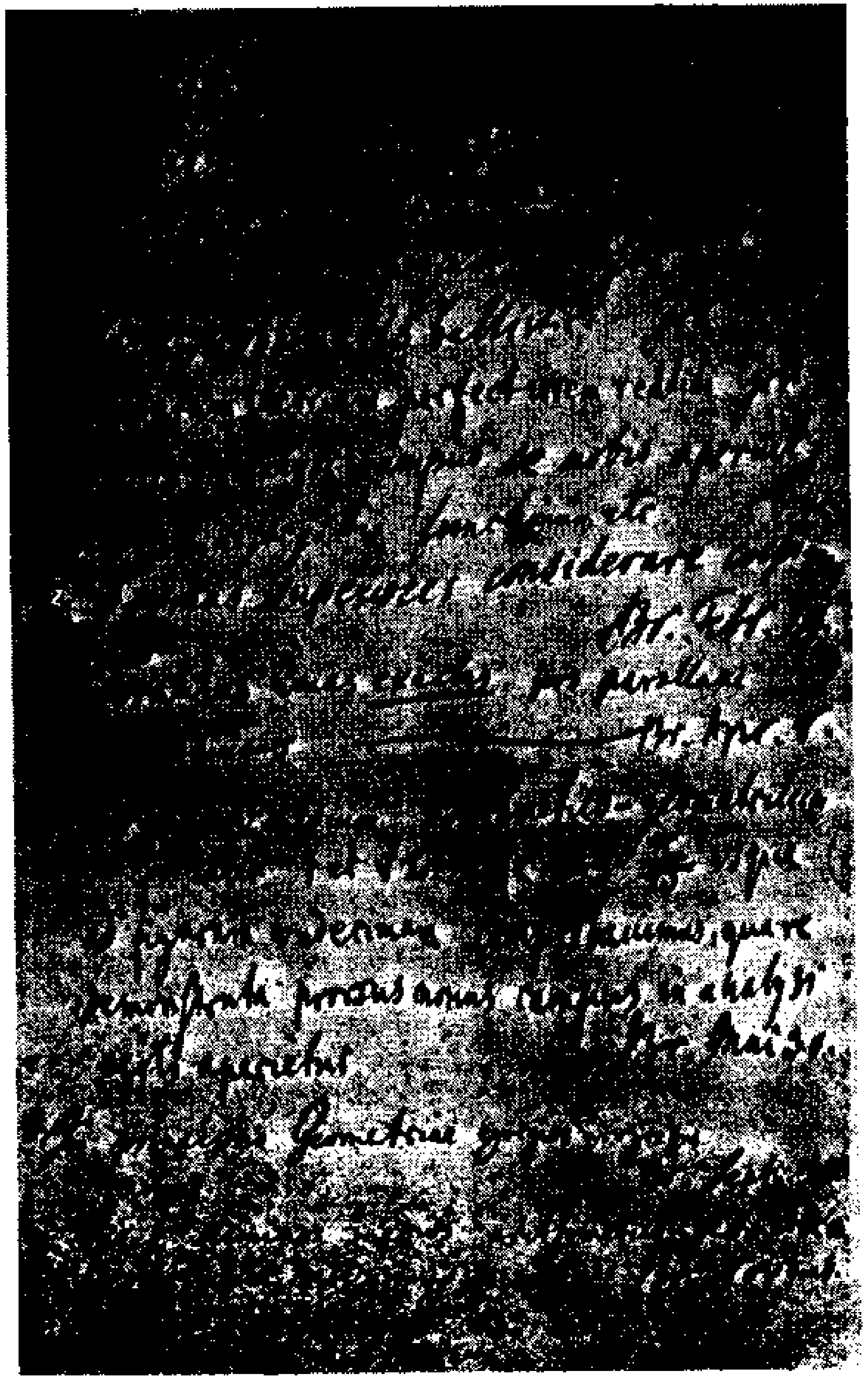
O tempo de Gauss e Cauchy

A matemática é a rainha das ciências e a teoria dos números é a rainha das matemáticas.

Gauss

1 Os principais matemáticos durante a Revolução Francesa tinham sido, quase sem exceção, franceses, mas com o início do século dezenove a França novamente teve que partilhar as honras com outros países. O maior matemático da época — talvez de todos os tempos — era tão alemão que nunca deixou a Alemanha, nem sequer para uma visita. Carl Friedrich Gauss (1777-1855), diferentemente dos homens discutidos no capítulo precedente, foi criança prodígio. Seu pai era um laborioso trabalhador de Brunswick, teimoso em seus pontos de vista, que tentou evitar que seu filho recebesse instrução adequada; mas sua mãe, ela própria sem instrução, encorajou o filho nos seus estudos e orgulhou-se grandemente de seu sucesso até sua morte aos noventa e sete anos. Carl freqüentou a escola local, onde o professor era tido como exigente. Um dia, para manter a classe ocupada, o professor mandou que os alunos somassem todos os números de um a cem, com instruções a cada um para colocar sua lousa sobre uma mesa logo que completasse a tarefa. Quase imediatamente Carl colocou sua lousa sobre a mesa, dizendo, "Aí está"; o professor olhou para ele com pouco caso enquanto os outros trabalhavam diligentemente. Quando o mestre finalmente olhou os resultados, a lousa de Gauss era a única a exibir a resposta correta, 5 050, sem nenhum cálculo. O menino de dez anos evidentemente calculara de cabeça a soma da progressão aritmética $1 + 2 + 3 + \ldots + 99 + 100$, presumivelmente por meio da fórmula $m(m+1)/2$. Aos quinze anos Gauss freqüentou o colégio de Brunswick, graças à ajuda do duque de Brunswick, e em 1795, sempre com a ajuda do duque, entrou em Göttingen. Não tinha decidido ainda se se tornaria filólogo ou matemático, embora já tivesse descoberto e justificado o método dos mínimos quadrados — uma década antes de Legendre publicar o processo. Em 30 de março de 1796 ele se decidiu em favor da matemática, porque nesse dia, quando faltava um mês para completar dezenove anos, fez uma brilhante descoberta. Havia mais de 2 000 anos que os homens sabiam construir, com régua e compasso, o triângulo equilátero e o pentágono regular (assim como outros polígonos regulares, cujo número de lados seja múltiplo de dois, três e cinco), mas nenhum outro polígono com número primo de lados. Nesse dia crítico em 1796, Gauss construiu segundo as regras euclidianas o polígono regular de dezessete lados. No mesmo dia começou um diário em que registrava algumas de suas maiores descobertas, sendo o primeiro registro sobre o polígono regular de dezessete lados.

Em 10 de julho de 1796 Gauss confiou a seu diário a descoberta de que todo inteiro é soma de no máximo três números triangulares. Esse diário de apenas dezenove páginas é talvez o mais precioso documento em toda a história da matemática, pois nele estão registrados 146 breves enunciados de resultados, o último datado de 9 de julho de 1814. Pelo diário é possível verificar a prioridade de descoberta de Gauss em casos de disputa bem como acompanhar o desenvolvimento de seu gênio, pois alguns de seus pensamentos mais originais nunca foram publicados durante sua vida. (Sua relutância em publicar só era comparável à de seu rival moderno em fama matemática — Isaac Newton.) O diário, formando um livrinho de dezenove páginas, ficara escondido entre papéis da família até ser achado em 1898, pertencendo a um neto em Hamlin. Em 1901 seu conteúdo foi publicado pelo matemático Felix Klein num volume celebrando o ses-



Facsimile da página 13 do famoso diário de Gauss

quicentenário da Sociedade Científica de Göttingen[1], e o neto concordou em que o diário ficasse conservado entre os arquivos de Gauss, que se encontram principalmente em Brunswick e Göttingen.

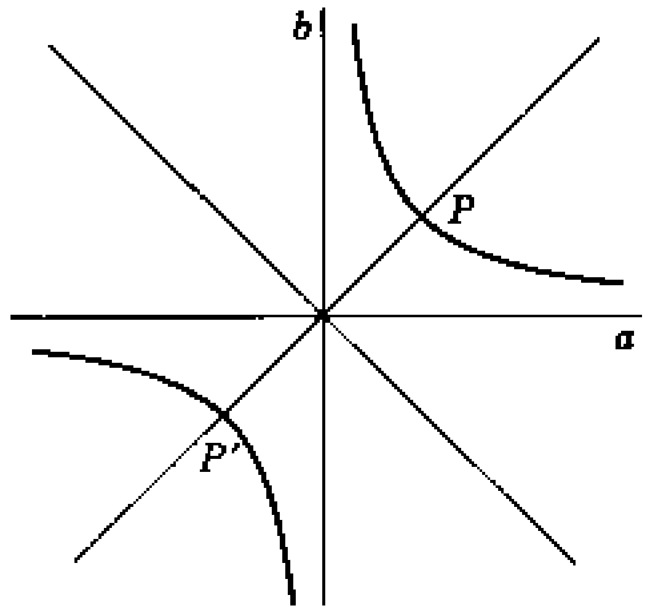
[1] Felix Klein, "Gauss' wissenschaftliches Tagebuch 1796-1814". *Festschrift zur Feier des Hundertfünfzigjährigen Bestehens der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen* (Berlim, 1901), pp. 1-44. O conteúdo apareceu novamente em *Mathematische Annalen*, **57** (1903), 1-34, e com notas extensas, em Gauss, *Werke* (1917), Vol. X, pp. 483-574. Há uma tradução para o francês por P. Eymard e J. P. Lafon, "Le journal mathématique de Gauss", *Revue d'Histoire des Sciences et de leurs Applications*, **9** (1956), 21-51

Carl Friedrich Gauss, O retrato de corpo inteiro, de R. Wimmer no Deutsches Museum, Munich, RFA (1925).

2 O sinete de Gauss tinha a divisa, *pauca sed matura* — "pouco, mas maduro" — e sua mente fervilhava a tal ponto com idéias originais que ele não tinha tempo para ver que amadurecessem até o ponto de perfeição em que insistia antes de publicar. Sua descoberta decisiva de 30 de março de 1796, no entanto, ele anunciou publicamente numa revista literária; ficou tão orgulhoso dela que, como Arquimedes, um antigo rival em grandeza, ele exprimiu o desejo de que um polígono regular de dezessete lados fosse esculpido em sua lápide. Esse desejo nunca foi realizado porque o escultor em pedra afirmou que a figura resultante se confundiria com um círculo; mas num monumento a Gauss em Brunswick o egrégio polígono está esculpido[2].

Durante curtos períodos Gauss deixou Göttingen pela Universidade de Helmstädt, e foi dessa última instituição que ele recebeu seu doutorado em 1798. A tese, publicada em Helmstädt em 1799, tem em latim o pomposo título, "Nova demonstração do teorema que toda função algébrica racional inteira em uma variável pode ser decomposta em fatores reais de primeiro ou segundo grau". Esse enunciado, a que Gauss mais tarde se referiu como "o teorema fundamental da álgebra", é essencialmente a proposição conhecida na França como teorema de d'Alembert; mas Gauss mostrou que todas as demonstrações tentadas anteriormente, incluindo algumas de Euler e Lagrange, eram inadequadas. A representação gráfica de números complexos já fora descoberta em 1797 por Caspar Wessel (1745-1818) e publicada na revista da Academia Dinamarquesa de 1798; mas a obra de Wessel ficou quase desconhecida, por isso o plano de números complexos é hoje chamado usualmente plano de Gauss, embora Gauss não publicasse suas idéias senão cerca de trinta anos depois. Desde os dias de Girard sabia-se que os números reais — positivos, negativos e zero — podem ser representados por pontos de uma reta. Wallis tinha até sugerido que os imaginários puros poderiam ser representados por uma reta perpendicular ao eixo dos números reais. Porém, curiosamente, ninguém antes de Wessel e Gauss deu o passo óbvio de pensar nas partes real e imaginária de um número complexo $a + bi$ como coordenadas retangulares de pontos de um plano. Dar esse simples passo fez com que os matemáticos se sentissem muito melhor a respeito dos números imaginários, pois esses agora podiam ser visualizados no sentido que cada ponto do plano correspondente a um número complexo e vice-versa. Ver é crer, e as antigas idéias sobre a não-existência de números imaginários foram geralmente abandonadas[3].

3 A tese de doutoramento de Gauss provou que toda equação polinomial $f(x) = 0$ tem pelo menos uma raiz, quer os coeficientes sejam reais ou imaginários. Não podemos aqui entrar nos detalhes da prova, mas uma ilustração indicará ao menos a linha do pensamento. Resolveremos a equação $z^2 - 4i = 0$ graficamente, mostrando que existe um valor complexo de $z = a + bi$ que satisfaz à equação. Substituindo z por $a + bi$ e separando as partes real e imaginária na equação temos $a^2 - b^2 = 0$ e $ab - 2 = 0$. Interpretando a e b como quantidades variáveis e esboçando essas equações no mesmo sistema de eixos, um para a parte real a, outro para a parte imaginária b, temos duas curvas; uma consiste das retas $a + b = 0$ e $a - b = 0$, a outra é a hipérbole retangular $ab = 2$ (Fig. 23.1). É claro que as curvas têm um ponto de intersecção P no primeiro quadrante (e, incidentalmente, outro P' no terceiro). Devemos notar em particular que um ramo da primeira curva se afasta da origem ao longo das direções $\theta = 1\pi/4$ e $\theta = 3\pi/4$ e que



[2]Detalhes sobre sua vida, mais do que sobre sua obra, se encontram em G. Waldo Dunnington. *Carl Friedrich Gauss, Titan of Science; A Study of His Life and Work* (1955). Uma exposição menos substancial mas eminentemente agradável de ler se encontra em William L. Schaaf, *Carl Friedrich Gauss* (1964)

[3]Veja Ernest Nagel, "Impossible Numbers", *Studies in the History of Ideas* (editado pelo Departamento de Filosofia, Columbia University), **3** (1935), 427-474; e Hermann Hankel, *Theorie der complexen Zahlensysteme* (Leipzig, 1867)

um ramo da segunda curva se aproxima assintoticamente das direções $\theta = 0\pi/4$ e $\theta = 2\pi/4$; o ponto de intersecção se encontra entre as duas últimas direções $\theta = 0$ e $\theta = \pi/2$. As coordenadas a e b desse ponto de intersecção são a parte real e a parte imaginária do número complexo que é uma solução da equação $z^2 - 4i = 0$. Se nossa equação polinomial original fosse de terceiro grau, em vez de ser de segundo grau, haveria um ramo de uma curva aproximando-se das direções $\theta = 1\pi/6$ e $\theta = 3\pi/6$ e a outra se avizinharia das direções $\theta = 0\pi/6$ e $\theta = 2\pi/6$. Os ramos em cada caso são contínuos; por isso têm que se cortar em algum lugar entre $\theta = 0$ e $\theta = \pi/3$. Para uma equação de grau n haverá um ramo de uma curva tendo como direções assintóticas $\theta = 1\pi/2n$ e $\theta = 3\pi/2n$, enquanto que um ramo da outra curva terá direções assintóticas $\theta = 0\pi/2n$ e $\theta = 2\pi/2n$; esses ramos necessariamente se cortarão no intervalo entre $\theta = 0$ e $\theta = \pi/n$, e as coordenadas a e b do ponto de intersecção serão a parte real e a parte imaginária de um número complexo que satisfaz à equação. Portanto vemos que, qualquer que seja o grau da equação polinomial, ela tem que ter ao menos uma raiz complexa. Com esse resultado demonstra-se facilmente a tese de Gauss, que o polinômio pode ser fatorado em fatores lineares e quadráticos.

A prova do teorema fundamental da álgebra dada por Gauss em sua tese baseia-se em parte em considerações geométricas. Anos depois, em 1816, Gauss publicou duas novas demonstrações, bem como outra em 1850, esforçando-se por encontrar uma prova inteiramente algébrica[4].

4 Dois anos apenas depois do aparecimento de sua tese Gauss publicou seu livro mais conhecido, um tratado em latim sobre a teoria dos números com o título *Disquisitiones arithmeticae* dedicado ao seu patrono, o Duque de Brunswick. Essa obra célebre[5] é a principal responsável pelo desenvolvimento da linguagem e notação do ramo da teoria dos números conhecido como álgebra das congruências que fornece um exemplo de classes de equivalência. A exposição começa com a definição:

> Se um número a divide a diferença entre dois números b e c então b e c dizem-se congruentes, de outra forma incongruentes; e a chama-se o módulo. Qualquer dos números diz-se um resíduo do outro, no primeiro caso, um não-resíduo no segundo caso.

A notação que Gauss adotou foi a que se usa hoje — $b \equiv c \pmod a$ — e ele passou a construir uma álgebra para a relação denotada por $\equiv$ semelhante à familiar álgebra comum expressa na linguagem de igualdade. Algumas, mas não todas, das regras da álgebra ordinária se transportam para a nova. Por exemplo, na álgebra ordinária se $ax = ay$, onde $a \neq 0$, então $x = y$. Que essa lei de cancelamento não vale para congruências fica claro com um exemplo: se $a = 3$, $x = 4$ e $y = 7$, é de fato verdade que $3 \cdot 4 \equiv 3 \cdot 7 \pmod 9$ mas não é verdade que $4 \equiv 7 \pmod 9$. O divisor a, na lei de cancelamento, deve ser primo com o módulo para que a lei se aplique a congruências. Também se $x \cdot y = 0$ podemos concluir na álgebra ordinária que ou x ou y (ou ambos) deve ser zero. Que isso não ocorre com congruências fica evidente com o exemplo $6 \cdot 5 \equiv 0 \pmod{15}$, em que nem 6 nem 5 é côngruo a zero módulo 15. Para que essa regra seja válida no caso de congruências, o módulo e os inteiros x e y não devem ter fator comum. Ainda na álgebra ordinária a equação linear $ax = b$ (onde a, b e x são inteiros e $a \neq 0$) não pode ter mais de uma solução. A congruência linear, de outro lado, pode ter várias soluções distintas, como vemos do fato que $x = 1$, $x = 4$ e $x = 7$ são soluções da congruência $6x \equiv 15 \pmod 9$. Somente se a e m são primos entre si podemos ter certeza que $ax \equiv b \pmod m$ terá uma e uma só solução positiva menor que m. De

[4]As provas estão reunidas no Vol. III de seu *Werke* (1870-1930). Uma tradução para o inglês da segunda prova se encontra em *Source Book in Mathematics*, editado por D. E. Smith (1958), pp. 292-306. Acredita-se agora que o teorema fundamental da álgebra depende essencialmente de considerações topológicas. Veja Hans Zassenhaus, "On the Fundamental Theorem of Algebra", *American Mathematical Monthly*, 74 (1967), 485-497

[5]Uma tradução para o inglês de A. A. Clarke apareceu em 1966 (Yale University Press). Uma tradução francesa aparecera bem mais depressa em Paris, em 1807

outro lado a relação $\equiv$ tem as três propriedades simples de reflexividade, simetria e transitividade que tem a relação $=$: (1) $a \equiv a \pmod m$; (2) se $a \equiv b \pmod m$, então $b \equiv a \pmod m$; e (3) se $a \equiv b \pmod m$ e $b \equiv c \pmod m$, então $a \equiv c \pmod m$. Isto é, $=$ e $\equiv$ são ambas relações de equivalência.

5 Em vários pontos o trabalho de Gauss se superpunha ao de Legendre, e esse veio a ter inveja do rival mais jovem e brilhante. Nas *Disquisitiones*, por exemplo, aparece a lei de reciprocidade quadrática que Legendre tinha publicado um par de anos antes. Gauss chamou a essa lei o *theorema aureum* ou a jóia da aritmética. Em obra posterior Gauss procurou teoremas comparáveis para congruências $x^n = p \pmod q$ para $n = 3$ e 4; mas para esses casos ele achou necessário estender o significado da palavra inteiro de modo a incluir os chamados inteiros de Gauss — isto é, números da forma $a + bi$, em que a e b são inteiros. Os inteiros de Gauss formam um domínio de integridade como o dos inteiros reais, mas mais geral. Os problemas de divisibilidade ficam mais complicados, pois 5 já não é um primo, podendo fatorar-se no produto de dois "primos" $1 + 2i$ e $1 - 2i$. Na verdade, nenhum primo real da forma $4n + 1$ é um "primo gaussiano", ao passo que os primos reais da forma $4n - 1$ permanecem primos no novo sentido. Nas *Disquisitiones* Gauss inclui o Teorema Fundamental da Aritmética, um dos princípios básicos que permanecem válidos no domínio de integridade dos inteiros de Gauss. Na verdade, todo domínio de integridade em que a fatoração é única chama-se hoje um domínio de integridade de Gauss. Uma das contribuições de *Disquisitiones* foi uma prova rigorosa do teorema, conhecido desde os dias de Euclides, que diz que todo inteiro positivo pode ser representado de uma e uma só maneira (exceto pela ordem dos fatores) como produto de primos.

Nem tudo que Gauss descobriu sobre números primos está contido em *Disquisitiones*. No verso de uma tabela de logaritmos que conseguira quando menino de quatorze anos está escrito enigmaticamente em alemão:

$$\text{Primzahlen unter } a \; (= \infty) \; \frac{a}{la}.$$

Isso é um enunciado do célebre teorema dos números primos — o número de primos menores que um inteiro dado a se aproxima assintoticamente do quociente $a/\ln a$ quando a tende a infinito[6].

Legendre chegara perto de antecipar esse teorema, como vimos; mas o curioso é que, se Gauss escreveu isso, como presumimos, ele conservou para si esse belo resultado. Não sabemos se ele tinha ou não uma prova desse teorema, ou mesmo quando a afirmação foi escrita. A distribuição dos primos tem fascinado os matemáticos. Em 1845, quando Gauss era velho, um professor parisiense, Joseph L. F. Bertrand (1822-1900) teve a idéia que se $n > 3$, existe sempre um primo ao menos entre n e $2n$ (ou, mais precisamente, $2n - 2$) inclusive. Essa conjetura, chamada postulado de Bertrand, foi provada em 1850 por Pafnuti Tchebycheff (ou Chebychev ou Chebichev ou Tschebytschew) da Universidade de S. Petersburgo. Tchebycheff era rival de Lobachevsky como mais importante matemático russo de seu tempo e tornou-se associado estrangeiro do Institut de France e da Royal Society de Londres. Tchebycheff, evidentemente sem conhecer o trabalho de Gauss sobre primos, conseguiu mostrar que se $\pi(n)(\ln n)/n$ tende a algum limite quando n cresce indefinidamente, esse limite tem que ser um; mas não conseguiu mostrar a existência de limite. Somente dois anos depois da morte de Tchebycheff veio a ser conhecida uma prova; então, em 1896, dois matemáticos, trabalhando independentemente, conseguiram demonstrações no mesmo ano. Um foi o matemático belga C. J. de la Vallée-Poussin (1866-1962) que viveu quase até os noventa e seis anos; o outro foi um francês, Jacques Hadamard (1865-1963)que morreu com quase noventa e oito anos.

6 Problemas sobre o número e distribuição de primos fascinaram muitos matemáticos desde os dias de Euclides até os nossos. O que se pode considerar como um profundo e difícil corolário do teorema de Euclides sobre a infinidade de números primos foi provado por um amigo de Gauss que iria suceder-lhe em Göttingen em 1855. Foi Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859), o homem que fez mais do que qualquer outro para estender as *Disquisitiones*. O teorema de Dirichlet diz não só que o número de números primos é infinito, mas que se consideramos somente os inteiros de uma progressão aritmética a, $a + b$, $a + 2b, \ldots$, $a + nb, \ldots$ em que a e b são primos entre si, então mesmo nesse conjunto menos abundante de inteiros haverá ainda uma infinidade de primos. A prova dada por Dirichlet exigia complicados instrumentos da análise, onde o nome de Dirichlet é ainda preservado no critério de Dirichlet para convergência uniforme de séries. Entre outras contribuições de Dirichlet está a primeira prova do teorema conhecido como postulado de Bertrand. Não podemos entrar nesses resultados cada vez mais difíceis da teoria dos números do século dezenove, mas devemos observar que o teorema de Dirichlet mostrou que o domínio discreto da teoria dos números não pode ser estudado isoladamente, separado do ramo da matemática que trata de variáveis contínuas — isto é, a teoria dos números precisava da ajuda da análise. O próprio Gauss, nas *Disquisitiones*, dera um exemplo notável do fato que propriedades dos números primos se intrometem das maneiras mais inesperadas mesmo no reino da geometria.

Quase no fim de *Disquisitiones* Gauss incluiu a primeira descoberta importante que fizera em matemática — a construção do polígono regular de dezessete lados; ele levou o tópico à sua conclusão lógica mostrando quais dos infinitos polígonos regulares possíveis podem ser construídos e quais não. Teoremas gerais, como o que Gauss provou então, são sempre de valor muito maior que um único caso, por espetacular que esse seja. Lembremos que Fermat acreditava que os números da forma $2^{2^n} + 1$ são primos, conjetura que Euler provara ser falsa. O número $2^{2^2} + 1 = 17$ é primo, como também $2^{2^3} + 1 = 257$ e $2^{2^4} + 1 = 65\,537$. Gauss já mostrara que o polígono de dezessete lados é construtível, e surgia naturalmente a questão de saber se um polígono regular de 257 ou 65 537 pode ser construído com os instrumentos euclidianos. Nas *Disquisitiones* Gauss respondeu à questão afirmativamente, mostrando que um polígono regular de N lados pode ser construído com instrumentos euclidianos se, e só se, o número N é da forma $N = 2^m p_1 p_2 p_3 \ldots p_r$ onde m é qualquer inteiro ≥ 0 e os ps são primos de Fermat distintos. Resta um aspecto do problema a que Gauss não respondeu, e que ainda não foi respondido. O número de primos de Fermat é finito ou infinito? Para $n = 5, 6, 7, 8$ e 9 sabe-se que os números de Fermat *não* são primos, e parece possível que haja cinco e somente cinco polígonos regulares construtíveis com número primo de lados, dois que já eram conhecidos na antiguidade e os três que Gauss descobriu. Um amigo a quem Gauss muito admirava, Ferdinand Gotthold Eisenstein (1823-1852), professor de matemática em Berlim, acrescentou uma nova conjetura sobre números primos quando arriscou a idéia, não verificada até hoje, de que números da forma $2^2 + 1$, $2^{2^2} + 1$, $2^{2^{2^2}} + 1$ e assim por diante, são primos. A Gauss é atribuída a frase "Só houve três matemáticos que marcaram época, Arquimedes, Newton e Eisenstein". Se, com uma extensão de vida normal, Eisenstein corresponderia a essa predição, é tema de conjetura, pois o jovem morreu com menos de trinta anos, tendo permanecido um *Privatdozent*.

7 Gauss planejara as *Disquisitiones* como obra em dois volumes, mas nunca chegou a escrever o segundo volume. Descreveu uma vez a matemática como a rainha das ciências e a aritmética (isto é, teoria dos números) como a rainha da matemática; mas Gauss no começo do século dezenove praticamente abandonou sua "Rainha da Matemática", sendo sua atenção atraída por outros assuntos. Mais tarde ele exprimiu seu arrependimento por ter abandonado seu primeiro amor. Entre os outros campos que o atraíram estava a astronomia, a que foi levado quase por acaso. No primeiro dia do século dezenove um novo planeta ou asteróide, Ceres, fora descoberto, mas poucas semanas depois o pequeno corpo celeste fora perdido de vista. Gauss percebia que tinha habilidade excepcional para computações, além da vantagem adicional do método dos quadrados mínimos, e aceitou o desafio de calcular, a partir das poucas observações do planeta registradas a órbita em que se movia. Para a tarefa de calcular órbitas a partir de um número

[6]Veja Hans Reichardt, ed., *C. F. Gauss. Leben und Werk* (1960)

limitado de observações ele inventou um processo, chamado método de Gauss, que ainda é usado para acompanhar satélites. O resultado foi um sucesso estrondoso, o planeta sendo redescoberto no fim do ano quase na posição indicada por seus cálculos. Essa atividade parece estar em desacordo com a opinião que Gauss exprimira "Todas as medidas do mundo não valem um único teorema que produza um progresso significativo em nossa maior ciência". No entanto, sua reputação estava agora claramente firmada na astronomia tanto como na matemática; em 1807 ele foi nomeado diretor do Observatório de Göttingen, posto que conservou durante cerca de quarenta anos. Poderia ter tido um posto de professor de matemática, e é provável que tenha escolhido o posto no observatório menos por preferir a astronomia que por não gostar de ensinar. Ele gostava de ajudar uns poucos discípulos brilhantes, mas o ensino a classes parece ter-lhe sido desagradável[7].

8 A posição de Gauss no observatório não o impediu de fazer outras importantes contribuições à matemática. Em 1811 ele informou um amigo astrônomo, F. W. Bessel (1784-1846) de uma descoberta que fizera no que logo se tornaria um novo assunto nas mãos do maior matemático francês de então, Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) e que hoje tem o nome deste último. A teoria das funções de variável real fora desenvolvida por Lagrange, mas a teoria das funções de variável complexa esperava os esforços de Cauchy; no entanto Gauss percebeu um teorema de fundamental importância no campo ainda não explorado. Se no plano complexo ou de Gauss traçamos uma curva fechada simples, e se uma função $f(z)$ da variável complexa $z = x + iy$ é analítica (isto é, tem derivada) em cada ponto da curva e dentro da curva, então a integral curvilinea de $f(z)$ tomada ao longo da curva é zero.

Os memorandos não publicados de Gauss ficavam suspensos como espadas de Damocles sobre a matemática da primeira metade do século dezenove. Quando um importante desenvolvimento novo era anunciado por outros freqüentemente acontecia que Gauss tinha tido a idéia antes, mas não a tinha publicado. Entre os exemplos notáveis dessa situação está a teoria das funções elíticas, descoberta em que estão envolvidas quatro figuras notáveis. Uma delas, é claro, era Legendre, que passara uns quarenta anos estudando integrais elíticas quase sozinho. Tinha desenvolvido muitas fórmulas, algumas semelhantes a relações entre funções trigonométricas inversas (muitas das quais eram conhecidas muito antes por Euler). Isso não era surpreendente porque a integral elítica

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-K^2x^2)(1-x^2)}}$$

inclui

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

como caso especial, para o qual $K = 0$. No entanto coube a Gauss e a dois outros contemporâneos mais jovens usar a fundo um ponto de vista que facilita grandemente o estudo de integrais elíticas. Se

$$u = \int_0^v \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

então u = arcsen v. Aqui u é expressa como função da variável independente v (x sendo apenas a variável de integração) mas verifica-se que é preferível inverter os papéis de u e v, escolhendo u como variável independente. Nesse caso temos $v = f(u)$, ou, na linguagem da trigonometria, v = sen u. A função v = sen u é mais fácil de manipular, e tem uma propriedade notável que u = arcsen v não tem — é periódica. Os papéis particulares de Gauss mostram que talvez já em 1800 ele tivesse descoberto a dupla periodicidade das funções elíticas (ou lemniscáticas). Porém só em 1827-1828 essa propriedade foi

[7]Para um excelente sumário geral das idéias de Gauss veja o capítulo sobre "The Prince of Mathematicians" em E. T. Bell, *Men of Mathematics* (1937). Esse capítulo está reimpresso em James Newman, *The World of Mathematics* (New York: Simon and Schuster, 1956, 4 volumes)

revelada por um dos mais brilhantes matemáticos de todos os tempos, Niels Henrik Abel (1802-1829) numa memória no *Journal* de Crelle. O jovem Abel morreu quando tinha apenas vinte e seis anos, deixando resultados profundos em álgebra e teoria das funções, alguns dos quais descreveremos antes de voltar a Gauss.

9 A vida de Abel ilustra vivamente quanto a pobreza pode estar relacionada de perto com a tragédia. Nasceu em uma família numerosa, filho do pastor da pequena aldeia de Findö na Noruega. Quando tinha dezesseis anos, seu professor insistiu para que lesse as grandes obras de matemática, inclusive as *Disquisitiones* de Gauss. Nessa leitura Abel observou que Euler provara o teorema binomial para potências racionais apenas, e por isso preencheu a lacuna fornecendo uma prova válida para o caso geral. Quando Abel tinha dezoito anos seu pai morreu e muito da responsabilidade pela família caiu sobre seus ombros; no entanto no ano seguinte fez uma descoberta matemática notável. Desde que as equações cúbicas e quárticas foram resolvidas no século dezesseis, as quínticas vinham sendo estudadas. Abel a princípio pensou ter uma solução; mas em 1824 ele publicou um artigo, "Sobre a resolução algébrica de equações" em que ele chegava à conclusão oposta: deu a primeira prova de que não é possível a resolução, dando fim desse modo à longa procura. Não pode haver fórmula geral, expressa em operações algébricas explícitas sobre os coeficientes de uma equação polinomial, para as raízes da equação se o grau da equação é maior que quatro. Uma prova anterior, menos satisfatória e que passara quase despercebida, da insolubilidade da quíntica fora publicada em 1799 por Paolo Ruffini (1765-1822) e por isso o resultado agora leva o nome de "teorema de Abel-Ruffini".

A prova da impossibilidade sobre a quíntica, um dos mais célebres teoremas da matemática, foi produzida por Abel quando tinha apenas dezenove anos; no entanto em 1826, quando ele visitou Legendre, Cauchy e outros matemáticos em Paris, não lhe foi oferecido um posto acadêmico adequado. Sobre essa visita a Paris Abel escreveu a um amigo: "Todo principiante tem muita dificuldade em se fazer notar aqui. Acabei um extenso tratado sobre certas classes de funções transcendentes ... mas M. Cauchy não se dignou a olhá-lo". Nessa época, ao contrário do século dezoito, a maior parte das possibilidades de carreira para matemáticos era em universidades, como professores, e Abel esperava obter um posto desses. Por isso deixou sua memória com Cauchy para que esse a examinasse. Continha resultados novos de extraordinária generalidade, mas Cauchy logo o perdeu, com o resultado de que não foi impresso senão quando era tarde demais.

Abel em 1829 morreu de tuberculose, e supõe-se que a causa disso fosse sua pobreza e suas responsabilidades para com sua família, que dependia dele. Dois dias depois de sua morte foi-lhe escrita uma carta para informá-lo de que tinha sido nomeado professor de matemática na Universidade de Berlim, posto que Crelle tinha obtido para ele. No mesmo ano o matemático alemão Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851) escreveu a Legendre para perguntar sobre o artigo que Abel deixara com Cauchy, pois Jacobi tinha indicações de que ele dizia respeito a sua notável descoberta. Verificando a questão Cauchy em 1830 achou o manuscrito, que Legendre mais tarde descreveu como "um monumento mais durável que o bronze", e foi publicado em 1841 pelo Institut francês entre as memórias apresentadas por estrangeiros. Continha uma importante generalização da obra de Abel sobre funções elíticas. Se

$$u = \int_0^v \frac{dx}{\sqrt{(1-K^2x^2)(1-x^2)}}$$

u é uma função de v, $u = f(v)$, cujas propriedades tinham sido longamente descritas por Legendre em seu tratado sobre integrais elíticas. O que Legendre não vira, e Gauss, Abel e Jacobi viram, é que invertendo a relação funcional entre u e v obtém-se uma função mais bela e útil, $v = f(u)$. Essa função, escrita em geral v = sn u (leia-se "v é a seno amplitude de u''), mais outras, definidas de modo um tanto semelhante, são as chamadas funções elíticas [8].

A propriedade mais notável dessas novas funções transcendentes superiores era que, como seus três descobridores independentes perceberam, na teoria das variáveis complexas elas têm *dupla* periodicidade, isto é, existem dois números complexos m e n tais que $v = f(u) = f(u + m) = f(u + n)$. Ao passo que as funções trigonométricas têm somente um período real (um período de 2π) e a função e^x tem um período imaginário apenas ($2\pi i$), as funções elíticas têm dois períodos distintos. Tão impressionado ficou Jacobi com a simplicidade que resultava da simples inversão da relação funcional em integrais elíticas que ele considerava o conselho, "Deve-se sempre inverter" como o segredo do sucesso na matemática.

Não é fácil estabelecer-se a prioridade da descoberta da dupla periodicidade. O tratado clássico de Jacobi, *Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum*, apareceu em 1829, o ano da morte de Abel, e o trabalho de Abel foi publicado em 1827-1828. Mas Gauss parece ter sido de longe o primeiro a fazer a descoberta, que ficara repousando entre seus papéis por um quarto de século antes que Abel e Jacobi também dessem com ela. Jacobi merece crédito também por vários teoremas centrais relacionados com funções elíticas. Em 1834 ele provou que se uma função unívoca de uma variável é duplamente periódica, a razão dos períodos não pode ser real, e que é impossível que uma função unívoca de uma única variável independente tenha mais que dois períodos distintos. A ele devemos também um estudo das "funções theta de Jacobi" uma classe de funções inteiras quase duplamente periódicas, de que as funções elíticas são quocientes.

10 A malsinada memória extraviada de Abel continha uma indicação de algo ainda mais geral que as funções elíticas. Se substituímos a integral elítica por

$$u = \int_0^v \frac{dx}{\sqrt{P(x)}},$$

onde $P(x)$ é um polinômio cujo grau pode ser maior que quatro, e se novamente invertemos a relação entre u e v para obter $v = f(u)$, essa função é um caso especial do que se chama "função abeliana". Mas foi Jacobi quem, em 1832, primeiro demonstrou que a inversão pode ser feita não só para uma única variável mas para funções de várias variáveis.

O nome de Abel está também perpetuado nos grupos abelianos, isto é, comutativos. O nome de Jacobi é também conhecido hoje, mas principalmente numa conexão inteiramente diferente. A história dos determinantes é estranhamente confusa, com pedaços do assunto aparecendo esporadicamente, na China antiga, em trabalhos de Leibniz, numa regra de Cramer, e alguns resultados simétricos de Lagrange. Só no século dezenove é que um desenvolvimento continuado teve lugar, iniciado em grande parte, ao menos no Continente europeu, por Cauchy e Jacobi. Esse é um dos poucos ramos em que o papel de Gauss foi pequeno, embora fosse da terminologia de Gauss em um contexto um pouco diferente que Cauchy tirou o nome "determinante" para o que ele descrevia como uma classe de funções simétricas alternadas — como $a_1b_2 - b_1a_2$. Seria possível dar uma boa justificação para dizer que a história definitiva dos determinantes começou em 1812, quando Cauchy leu perante o Institut uma longa memória sobre o assunto[9] embora com isso não se faça justiça a trabalhos pioneiros datando de 1772 de Laplace e Vandermonde. Cauchy era na época engenheiro militar com Ponts et Chaussées. Nascera em Paris umas poucas semanas depois da queda da Bastilha, e

[8] Alguma confusão histórica surgiu porque Legendre usou a frase "fonctions elliptiques" no título de seu tratado sobre integrais elíticas. Mas como Legendre a usava, a frase se refere a integrais elíticas, e não ao que chamamos funções elíticas

[9] No mesmo ano uma memória mais curta e menos definitiva foi lida perante o Institut por Binet. Para exposições completas sobre esse e outros trabalhos sobre determinantes, veja Thomas Muir, *The Theory of Determinants in the Historical Order of Development*. Os primeiros quatro volumes, cobrindo os trabalhos até 1900, foram reimpressos por Dover Publications, New York, 1960

estudara na École Polytechnique, onde Lagrange e Laplace se tinham interessado por seus progressos. Incidentalmente, foi Cauchy quem tomou o lugar de Monge na Academia quando na restauração de 1816 Carnot e Monge foram expulsos. Ao mesmo tempo Cauchy foi feito professor na École Polytechnique; mas com a revolução de 1830 houve uma reviravolta. Cauchy durante toda a sua vida permaneceu um católico devoto e um reacionário convicto. Conseqüentemente ele defendeu vigorosamente a Ordem Jesuíta que d'Alembert atacara; e quando "seu rei", Carlos X, foi para o exílio, Cauchy também deixou Paris, para só voltar em 1838. Porém, onde quer que estivesse, em Turim ou em Praga, e sob qualquer governo Cauchy continuou a produzir uma torrente de livros e memórias, sendo inferior apenas a Euler em quantidade de produção. Mas ao passo que Euler estava sempre disposto a escrever com lógica discutível sobre quase qualquer aspecto da matemática, pura ou aplicada, Cauchy seguia a tradição de Lagrange em sua preferência por matemática pura em forma elegante com a devida atenção a provas rigorosas. Seu artigo de 1812 sobre determinantes, a ser seguido por muitos outros dele sobre o mesmo tópico, estava nessa tradição ao dar ênfase às simetrias de notação de que está cheio.

Na apresentação pedagógica hoje é costume começar com o arranjo quadrado e dar então um sentido ou valor a ele por uma expansão em termos de transposições ou permutações. Na memória de Cauchy o autor faz o oposto. Começa com os n elementos ou números $a_1, a_2, \ldots, a_n$ e forma o produto desses por todas as diferenças de elementos distintos — $a_1a_2a_3 \ldots a_n(a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \ldots (a_n - a_1)(a_3 - a_2) \ldots (a_n - a_2) \ldots \ldots (a_n - a_{n-1})$. Define então o determinante como a expressão obtida transformando toda potência indicada em índice, de modo que a_r^s fica $a_{r,s}$; ele escrevia isso como $S(\pm a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} \ldots a_{n,n})$. Dispunha então as n^2 quantidades diferentes nesse determinante num arranjo quadrado semelhante ao usado hoje

$$\begin{array}{l} a_{1,1}, a_{1,2}, a_{1,3}, \ldots a_{1,n}; \\ a_{2,1}, a_{2,2}, a_{2,3}, \ldots a_{2,n}; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n,1}, a_{n,2}, a_{n,3}, \ldots a_{n,n}. \end{array}$$

Arranjadas assim, as n^2 quantidades nesse determinante formavam "um sistema simétrico de ordem n". Definia termos conjugados como elementos cuja ordem dos índices está invertida, e chamava termos que são autoconjugados de termos principais; o produto dos termos no que chamamos a diagonal principal ele chamava o produto principal. Mais adiante na memória Cauchy dava regras para determinar o sinal de um termo na expansão, usando substituições circulares.

A memória de oitenta e quatro páginas de Cauchy de 1812 não foi seu único trabalho sobre o assunto dos determinantes; a partir daí ele encontrou muitas oportunidades para usá-los numa variedade de situações. Numa memória de 1815, sobre a propagação de ondas, ele aplicou a linguagem dos determinantes a um problema de geometria e também a um de física. Cauchy afirmava que se A, B, C são os comprimentos de três arestas de um paralelepípedo, e se as projeções delas sobre os eixos x, y e z de um sistema de coordenadas retangulares são

$$\begin{array}{l} A_1, B_1, C_1; \\ A_2, B_2, C_2; \\ A_3, B_3, C_3; \end{array}$$

então o volume do paralelepípedo será $A_1B_2C_3 - A_1B_3C_2 + A_2B_3C_1 - A_2B_1C_3 + A_3B_1C_2 - A_3B_2C_1 = S(\pm A_1B_2C_3)$. Na mesma memória, a propósito da propagação das ondas, ele aplicou sua notação de determinantes a derivadas parciais, substituindo uma condição que ocupava duas linhas pela simples abreviação

$$S\left(\pm\frac{dx}{da}\frac{dy}{db}\frac{dz}{dc}\right) = 1.$$

O primeiro membro disso é obviamente o que hoje se chama o "Jacobiano" de *x, y, z* em relação a *a, b, c*. O nome de Jacobi está ligado a determinantes dessa forma, não porque ele fosse o primeiro a usá-los, mas porque ele era um construtor de algoritmos que tinha entusiasmo especial pelas possibilidades inerentes à notação de determinantes. Somente em 1829 Jacobi usou pela primeira vez os determinantes que levam seu nome.

11 Os primeiros anos de vida de Jacobi num certo sentido foram a antítese dos de Abel, pois o pai de Jacobi era um próspero banqueiro, a cujos filhos nunca faltou nada. C. G. J. Jacobi, o segundo filho, obteve uma boa instrução na Universidade de Berlim, concentrando-se em filologia e matemática. Como Gauss ele finalmente se decidiu pela segunda, mas ao contrário de Gauss Jacobi era um professor nato que gostava de ensinar aos outros. Os resultados mais célebres de sua pesquisa foram os referentes a funções elíticas, publicados em 1829, pelos quais obteve o louvor de Legendre. Por meio dessa nova análise Jacobi mais tarde provou novamente o teorema dos quatro quadrados de Fermat e Lagrange. Em 1829 Jacobi publicou também um artigo em que fazia uso amplo e geral dos jacobianos, exprimindo-os em forma mais moderna do que Cauchy:

$$\begin{array}{ccccc}
\dfrac{\partial u}{\partial x}, & \dfrac{\partial u}{\partial x_1}, & \dfrac{\partial u}{\partial x_2}, & \cdots & \dfrac{\partial u}{\partial x_{n-1}}; \\
\dfrac{\partial u_1}{\partial x}, & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}, & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2}, & \cdots & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_{n-1}}; \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\dfrac{\partial u_{n-1}}{\partial x}, & \dfrac{\partial u_{n-1}}{\partial x_1}, & \dfrac{\partial u_{n-1}}{\partial x_2}, & \cdots & \dfrac{\partial u_{n-1}}{\partial x_{n-1}}.
\end{array}$$

Jacobi ficou tão enamorado pelos determinantes funcionais que insistia em pensar nos determinantes ordinários numéricos como jacobianos de *n* funções lineares em *n* incógnitas.

O uso feito por Jacobi de determinantes funcionais num artigo sobre álgebra em 1829 era apenas incidental, como o de Cauchy. Se isso fosse tudo o que Jacobi fez, seu nome não estaria ligado ao particular determinante que estamos considerando. Em 1841, porém, ele publicou uma longa memória "De determinantibus functionalibus", especificamente dedicado aos jacobianos. Ele observou, entre outras coisas, que esse determinante funcional é em muitos pontos o análogo, para funções de várias variáveis, do quociente diferencial de uma função de uma variável; e naturalmente ele chamou a atenção para seu papel na questão de saber se uma coleção de funções ou equações é independente. Mostrou que se *n* funções em *n* variáveis são funcionalmente relacionadas, o jacobiano deve anular-se identicamente; se as funções são mutuamente independentes, o jacobiano não pode ser identicamente zero.

12 Os artigos de Jacobi que mencionamos, bem como muitos outros de Jacobi, Abel e Dirichlet apareceram no que geralmente se chama *Journal de Crelle*. Esse foi um dos periódicos especificamente matemáticos que foram uma característica do século dezenove. Antes de 1794 havia revistas científicas, mas nenhuma dedicada primariamente a matemática séria. A iniciativa para a fundação de periódicos de matemática veio da École Polytechnique quando começou a publicar seu *Journal*. Pouco depois, em 1810, o primeiro periódico de matemática fundado por particular foi iniciado por um oficial de artilharia que era um *ancien élève* da École Polytechnique. Foi o *Annales de Mathématiques Pures et Appliquées*, editado por Joseph-Diaz Gergonne (1771-1859). O editor era um matemático muito competente que contribuiu com artigos para sua revista, mas esses serão descritos no próximo capítulo. Na Alemanha um periódico semelhante aos *Annales* de Gergonne, e que teve ainda mais sucesso, foi iniciado em 1826 por August Leopold Crelle (1780-1855) sob o título *Journal für die reine und angewandte Mathematik*. Novamente o editor era primariamente um engenheiro, mas os artigos sobre matemática pura (*reine*) eram tão favorecidos (notadamente os de Abel, cinco dos quais apareceram logo no primeiro volume) que caçoistas sugeriram que o título seria mais

apropriado se as duas palavras alemãs *und angewandte* ("e aplicada") fossem substituídas por uma só, *unangewandte* ("não-aplicada"). Os *Annales* de Gergonne não duraram muito, mas em 1836 a lacuna foi preenchida por um periódico francês semelhante ao de Crelle em motivação e em título — *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, fundado e editado por Joseph Liouville (1809-1882). Liouville era um ativo pesquisador em matemática cuja obra será descrita no capítulo sobre aritmetização da análise. Os editores tanto do *Journal* francês quanto do alemão mudaram freqüentemente a partir daí, mas esses periódicos, publicados até hoje, são ainda comumente conhecidos como *Journal* de Crelle e *Journal* de Liouville. Esses dois veneráveis periódicos naturalmente foram seguidos de uma quantidade de outros, especialmente nos últimos cem anos, alguns deles ligados a organizações matemáticas. Antes de 1865 um bom número de sociedades científicas tinha sido fundado, mas não havia nenhuma grande organização dedicada primariamente à matemática. Nesse ano foi fundada a London Mathematical Society, e começou a publicação de seus *Proceedings*. A partir daí quase cada país grande passou a ter uma ou mais organizações matemáticas, algumas publicando várias revistas. Tão grande é a publicação de pesquisa matemática hoje que um volume de uma revista de sumários como a *Mathematical Reviews*, publicada pela American Mathematical Society (organizada em 1888) tem várias vezes o tamanho dos do Crelle e Liouville juntos[10].

13 Gauss é às vezes descrito como o último matemático a saber tudo sobre seu campo. Uma tal generalização é necessariamente inexata, mas ressalta a amplitude de interesses que Gauss mostrou. Em 1809 ele publicou uma exposição de seus métodos em astronomia num livro com o título *Theoria motus*, onde ele se refere à sua descoberta do princípio dos mínimos quadrados. Legendre acreditava que esse princípio era propriedade sua e virtualmente acusou Gauss de plágio, partilhando sua indignação com Jacobi. Sabemos agora que Gauss estava certo, mas não podemos deixar de desejar que ele publicasse mais rapidamente suas descobertas, ou fosse mais delicado ao dar a má notícia a redescobridores posteriores. Gauss, como Newton, tentava ser escrupulosamente justo com os outros, mas às vezes não parecia muito cordial para com a obra de outros, especialmente Cauchy, seu rival mais próximo em realizações matemáticas, a cuja obra Gauss nem uma vez se referiu.

Cauchy num ponto diferia muito de Gauss: corria a publicar assim que conseguia qualquer resultado. Talvez seja essa uma das razões pelas quais a principal característica da matemática do século dezenove — a introdução do rigor — é atribuída a Cauchy mais do que a Gauss, apesar do alto nível de precisão lógica que Gauss exigiu de si mesmo. Talvez também fosse a tradição pedagógica da École Polytechnique que desempenhou um papel aqui, pois Cauchy gostava de ensinar, ao contrário de Gauss que detestava fazê-lo. Gauss tinha teoremas latentes sobre variáveis complexas escritos aqui e ali num diário ou em memorandos, mas Cauchy é que estava sempre enchendo o *Journal* da École Polytechnique e os *Comptes Rendus* da Academia com memórias cada vez mais longas. Essas versavam sobre uma variedade de tópicos, mas especialmente sobre a teoria das funções de variável complexa, campo de que, a partir de 1814, Cauchy tornou-se fundador para todos os efeitos. Em 1806 Jean Robert Argand (1768-1822) de Genebra tinha publicado uma exposição da representação gráfica dos números complexos. Embora a princípio esta quase passasse tão desapercebida quanto o trabalho de Wessel, pelo fim da segunda década do século dezenove a maior parte da Europa conhecia, através de Cauchy, não só o diagrama de Wessel-Argand-Gauss para um número complexo, mas também as propriedades fundamentais das funções complexas. No século dezoito tinham surgido ocasionalmente problemas em variáveis complexas em conexão com a física de Euler e d'Alembert, mas agora eles se tornaram parte da matemática pura. Como são necessárias duas dimensões para uma representação gráfica da variável independente apenas, seriam necessárias quatro dimensões para representar

[10]Para as datas de fundação de algumas sociedades matemáticas, veja George Sarton, *The Study of the History of Mathematics* (1936), p. 62

graficamente uma relação funcional entre duas variáveis complexas, $w = f(z)$. Por isso a teoria de variáveis complexas traz necessariamente um grau mais alto de abstração que a de funções de uma variável real. As definições e regras de diferenciação, por exemplo, não podem ser transportadas imediatamente, e a derivada no caso complexo não é mais interpretada como inclinação da tangente a uma curva. Sem o apoio da visualização, sente-se a necessidade de definições mais precisas e cuidadosas dos conceitos. Suprir essa necessidade foi uma das contribuições de Cauchy ao Cálculo — tanto para variáveis reais quanto para complexas.

14 Os primeiros professores da École Polytechnique tinham estabelecido um precedente segundo o qual mesmo os maiores matemáticos não desdenham escrever textos em todos os níveis, e Cauchy seguiu essa tradição. Em três livros — *Cours d'analyse de l'École Polytechnique* (1821), *Résumé des leçons sur le calcul infinitésimal* (1823) e *Leçons sur le calcul différentiel* (1829) — ele deu ao Cálculo elementar o caráter que tem hoje. Rejeitando o caminho de Lagrange pelo teorema de Taylor, ele tornou fundamental o conceito de limite de d'Alembert, mas deu-lhe um caráter aritmético de maior precisão. Dispensando a geometria e infinitésimos ou velocidades, ele deu uma definição relativamente precisa de limite:

> Quando os valores sucessivos atribuídos a uma variável se aproximam indefinidamente de um valor fixo de modo a finalmente diferir deste de tão pouco quanto se queira, esse último chama-se o limite de todos os outros[11].

Ao passo que muitos matemáticos anteriores tinham pensado em infinitésimo como um *número* fixo muito pequeno, Cauchy definiu-o claramente como uma *variável* dependente:

> Diz-se que uma quantidade variável se torna infinitamente pequena quando seu valor numérico decresce indefinidamente de modo a convergir para o limite zero.

No Cálculo de Cauchy os conceitos de função e de limite de função eram fundamentais. Ao definir a derivada de $y = f(x)$ com relação a x, ele deu à variável x um incremento $\Delta x = i$ e formou a razão

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i) - f(x)}{i}.$$

O limite desse quociente de diferenças quando i se avizinha de zero ele definiu como derivada $f'(x)$ de y com relação a x. A diferencial ele relegou a um papel subsidiário, embora percebesse sua simplicidade operacional. Se dx é uma quantidade finita, a diferencial dy de $y = f(x)$ é definida simplesmente como $f'(x)dx$. Cauchy deu também uma definição satisfatória de função contínua. A função $f(x)$ é contínua entre limites dados se entre esses limites um incremento infinitamente pequeno i da variável x produz sempre um incremento infinitamente pequeno $f(x+i) - f(x)$ da própria função. Tendo em mente a definição de Cauchy de quantidades infinitamente pequenas em termos de limites, sua definição de continuidade é parecida com a de hoje.

Durante o século dezoito a integração fora tratada como inversa da diferenciação. A definição de Cauchy da derivada torna claro que a derivada não existe num ponto em que a função seja descontínua; no entanto a integral pode não causar dificuldades. Mesmo curvas descontínuas podem determinar uma área bem definida. Por isso Cauchy definiu a integral definida em termos do limite de somas integrais de modo não muito diferente do usado em textos elementares hoje, só que tomou sempre o valor da função na extremidade esquerda do intervalo. Se $S_n = (x_1 - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \cdots + (X - x_{n-1})f(x_{n-1})$ então o limite S dessa soma S_n, quando os comprimentos dos intervalos $x_i - x_{i-1}$ decrescem indefinidamente é a integral definida da função $f(x)$ no

[11]Essa e outras definições se encontram no Vol. III das *Oeuvres complètes* de Cauchy (Paris 1882-1932, 25 vols.) Veja também C. B. Boyer, *Concepts of the Calculus* (New York: Dover, 1959), pp. 271 e seguintes e A. Robinson, *Non-Standard Analysis* (Amsterdam: North-Holland, 1966), pp. 269 e seguintes

intervalo de $x = x_0$ a $x = X$. Foi do conceito de Cauchy de integral como limite de uma soma, não da antiderivação, que as muitas generalizações modernas frutíferas da integral provieram.

Tendo definido a integral independentemente da diferenciação, Cauchy precisava provar a relação usual entre a integral e a antiderivada, e isso ele fez usando o teorema do valor médio. Se $f(x)$ é contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e diferenciável no intervalo aberto (a, b) então existirá algum valor x_0 tal que $a < x_0 < b$ e $f(b) - f(a) = (b - a)f'(x_0)$. Essa é uma generalização bastante evidente do teorema de Rolle, que era conhecido um século antes. O teorema do valor médio, no entanto, não chamou muito a atenção até os dias de Cauchy, mas a partir daí desempenhou um papel básico na análise. É com justiça, portanto, que uma forma ainda mais geral

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)},$$

válida com restrições adequadas sobre $f(x)$ e $g(x)$, é conhecida como teorema do valor médio de Cauchy.

15 A história da matemática está recheada de casos de simultaneidade e quase simultaneidade de descobertas, alguns dos quais já registramos. A obra de Cauchy que acabamos de descrever é outro exemplo, pois idéias semelhantes foram desenvolvidas quase ao mesmo tempo por Bernhard Bolzano (1781-1848) um padre tcheco cujas opiniões teológicas desagradavam a sua igreja e cuja obra matemática foi muito injustamente desconsiderada por seus contemporâneos, leigos ou não. Cauchy, durante seu exílio, viveu, durante algum tempo, em Praga onde Bolzano nasceu e morreu; no entanto não há indicação de que se tenham encontrado. A semelhança de suas aritmetizações do Cálculo, de suas definições de limite, derivada, continuidade e convergência foi simples coincidência. Bolzano em 1817 publicara um livro, *Rein analytischer Beweis*, devotado a uma prova puramente aritmética do teorema de locação em álgebra, e isso exigia um conceito não geométrico de continuidade de uma curva ou função. Indo bem mais longe em suas idéias pouco ortodoxas, ele enunciou algumas propriedades importantes dos conjuntos infinitos em uma obra postuma de 1850, *Paradoxien des Unendlichen*[12].

Do paradoxo de Galileu sobre a correspondência um a um entre inteiros e quadrados perfeitos, Bolzano passou a mostrar que correspondências semelhantes entre os elementos de um conjunto infinito e um subconjunto próprio são comuns. Por exemplo, uma simples equação linear, tal como $y = 2x$, estabelece uma correspondência um a um entre os números reais y no intervalo de 0 a 2, por exemplo, e os números reais x na metade desse intervalo. Isto é, há tantos números reais entre 0 e 1 quanto entre 0 e 2, ou tantos em um segmento de reta de 1 centímetro quanto em um segmento de reta de 2 centímetros. Bolzano parece ter percebido até, por volta de 1840, que a infinidade de números reais é de tipo diferente da infinidade dos inteiros, sendo não enumerável. Em tais especulações sobre conjuntos infinitos o filósofo da Boêmia chegou mais perto de partes da matemática moderna do que seus contemporâneos mais célebres. Tanto Gauss quanto Cauchy parecem ter tido uma espécie de *horror infiniti*, insistindo em que não podia haver algo como um infinito completado na matemática. A obra deles sobre "ordens de infinito" estava muito afastada dos conceitos de Bolzano, pois dizer como Cauchy dizia em essência, que uma função y é infinita de ordem n com relação a x se $\lim_{x \to \infty} y/x^n = K \neq 0$ é muito diferente de fazer afirmações quanto a correspondências entre conjuntos.

16 Bolzano era uma "voz clamando no deserto" e muitos de seus resultados tiveram que ser redescobertos depois. Entre esses estava a percepção de que há funções patológicas que não se comportam como os matemáticos costumavam esperar que se comportassem. Newton, por exemplo, tinha assumido que curvas são geradas por movimentos lisos e contínuos. Poderia haver ocasionalmente uma mudança abrupta na di-

[12]Uma boa tradução para o inglês apareceu um século depois. Veja Bernhard Bolzano, *Paradoxes of the Infinite*, editado por D. A. Steele (1950)

reção ou mesmo algumas descontinuidade em pontos isolados; mas durante a primeira metade do século dezenove supunha-se em geral que uma função real contínua deve ter derivada em quase todos os pontos. Mas em 1834 Bolzano tinha imaginado uma função contínua num intervalo que, apesar da intuição física em contrário, não tinha derivada em nenhum ponto do intervalo[13]. O exemplo dado por Bolzano infelizmente não ficou conhecido; por isso o crédito por construir a primeira função contínua mas não derivável em nenhum ponto vai em geral para Weierstrass, cerca de um terço de século depois. Semelhantemente é o nome de Cauchy, e não o de Bolzano, que está ligado a um importante critério para a convergência de uma série ou seqüência infinita. Ocasionalmente antes disso tinham sido dado avisos de que era necessário verificar a convergência de séries. Gauss desde 1812, por exemplo, usava o critério da razão para provar que sua série hipergeométrica

$$1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma}x + \frac{\alpha\beta(\alpha+1)(\beta+1)}{1\cdot 2\gamma(\gamma+1)}x^2 + \cdots$$
$$+ \frac{\alpha\beta(\alpha+1)(\beta+1)\cdots(\alpha+n-1)(\beta+n-1)}{1\cdot 2\cdots(n-1)\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}x^n + \cdots$$

converge para $|x| < 1$ e diverge para $|x| > 1$. Esse critério parece ter sido usado muito antes na Inglaterra por Edward Waring embora em geral tenha o nome de d'Alembert ou, mais ocasionalmente, o de Cauchy.

O nome de Cauchy aparece hoje ligado a muitos teoremas sobre séries infinitas, pois, apesar de alguns esforços da parte de Gauss e Abel, foi em grande parte através de Cauchy que foi despertada a consciência dos matemáticos para a necessidade de vigilância com relação à convergência. Tendo definido uma série como convergente se, para valores crescentes de n, a soma S_n dos n primeiros termos se aproxima de um limite S, chamado a soma da série. Cauchy provou que uma condição necessária e suficiente para que uma série infinita seja convergente é que, para n suficientemente grande e dado p qualquer, o valor da diferença entre S_n e S_{n+p} se torne menor que qualquer número dado. Essa condição para "convergência em si" se tornou conhecida como critério de Cauchy mas Bolzano a conhecia antes (e talvez Euler ainda antes.)

Cauchy também anunciou em 1831 o teorema que diz que uma função analítica de uma variável complexa $w = f(z)$ pode ser expandida em volta de um ponto $z = z_0$ numa série de potências que converge para todos os valores de z dentro de um círculo tendo z_0 como centro e passando pelo ponto singular de $f(z)$ mais próximo de z_0. Daí por diante o uso de séries infinitas tornou-se parte essencial da teoria das funções tanto de variáveis reais quanto complexas. Vários critérios de convergência têm o nome de Cauchy, como uma forma particular do resto na série de Taylor de uma função, a forma mais usual sendo atribuída a Lagrange. O período do rigor em matemática se estava firmando rapidamente. Diz-se que quando Cauchy leu para a Académie seu primeiro artigo sobre a convergência de séries, Laplace foi depressa para casa para verificar se não teria usado alguma série divergente em sua *Mécanique celeste*. Perto do fim de sua vida Cauchy tomou conhecimento do importante conceito de "convergência uniforme", mas aqui também ele não estava só, tendo sido antecipado pelo físico G. G. Stokes (1819-1903).

O prolífico Cauchy contribuiu para quase tantos campos quanto seu contemporâneo Gauss. Embora em teoria dos números sua obra seja menos conhecida que a de Legendre ou Gauss, é a Cauchy que devemos a primeira prova geral de um dos mais belos e difíceis teoremas de Fermat — que todo inteiro positivo é a soma de no máximo três números triangulares ou quatro números quadrados ou cinco números pentagonais ou seis hexagonais e assim por diante indefinidamente. Essa prova é um clímax apropriado para o estudo de números figurados iniciado pelos pitagóricos cerca de 2 300 anos antes.

[13]Para uma descrição completa da função veja Gerhard Kowalewski, "Über Bolzanos nichtdifferenzierbare stetige Funktion", *Acta Mathematica*, 44 (1923), 315-319. Uma exposição breve se encontra em C. B. Boyer, *Concepts of the Calculus* (1959), pp. 269-270

17 Cauchy evidentemente não era muito atraído pela geometria em suas várias formas. No entanto em 1811, em uma de suas primeiras memórias, ele apresentou uma generalização da fórmula poliedral de Descartes-Euler $A + 2 = F + V$, onde A, F e V são respectivamente o número de arestas, de faces e de vértices de um poliedro; já assinalamos que ele aplicou determinantes ao cálculo do volume do tetraedro. Gauss também não tinha gosto especial pela geometria, no entanto pensou o suficiente no assunto para fazer duas coisas: *chegar*, por volta de 1824, a uma importante conclusão, não publicada, sobre o postulado das paralelas e *publicar* em 1827 um tratado clássico que é considerado em geral a pedra angular de um novo ramo da geometria. Gauss, quando ainda estudante em Göttingen, tinha tentado provar o postulado das paralelas, como o fizera também seu amigo íntimo Wolfgang (ou Farkas) Bolyai (1775-1856). Ambos continuaram a procurar uma prova, o segundo desistindo em desespero, o primeiro eventualmente chegando à convicção de que não só não era possível provar, como que uma geometria diferente da de Euclides podia ser desenvolvida. Se Gauss tivesse desenvolvido e publicado suas idéias sobre o postulado das paralelas, ele seria saudado como o inventor da geometria não-euclidiana, mas seu silêncio sobre o assunto teve como resultado que o crédito coube a outros, como veremos no próximo capítulo.

O novo ramo da geometria que Gauss iniciou em 1827 é conhecido como geometria diferencial, e pertence talvez mais à análise que ao campo tradicional da geometria. Desde os dias de Newton e Leibniz os matemáticos tinham aplicado o cálculo ao estudo de curvas em duas dimensões, e num certo sentido isso constitui um protótipo da geometria diferencial. Euler e Monge tinham estendido isso de modo a incluir o estudo analítico de superfícies; por isso são às vezes considerados os pais da geometria diferencial. Porém só depois do aparecimento do tratado clássico de Gauss, *Disquisitiones circa superficies curvas*[14], é que se teve um volume importante inteiramente dedicado ao assunto. De modo informal, a geometria ordinária se interessa pela totalidade de um dado diagrama ou figura, enquanto que a geometria diferencial se concentra primeiro nas propriedades de uma curva ou superfície nas vizinhanças de um ponto sobre a curva ou a superfície. Quanto a isso, Gauss estendeu a obra de Huygens e Clairaut sobre a curvatura de uma curva plana ou reversa num ponto, definindo a curvatura de uma superfície num ponto — a "curvatura de Gauss" ou "curvatura total".

Se num ponto P de uma superfície bem comportada S tomamos a normal N a S, o feixe de planos por N cortará S numa família de curvas planas cada uma das quais terá um raio de curvatura. As direções das curvas com raios de curvatura máximo e mínimo, R e r, são chamadas direções principais sobre S e P, e acontece que são sempre perpendiculares uma à outra. R e r chamam-se raios de curvatura principais de S em P, e a curvatura de Gauss de S em P é definida como $K = 1/rR$. ($K_m = 1/2(1/r + 1/R)$ chama-se a curvatura média de S em P e é também útil.) Gauss deu fórmulas para K em termos das derivadas parciais da superfície com relação a vários sistemas de coordenadas, curvilíneas bem como cartesianas; também descobriu o que até ele considerou como "teoremas notáveis" sobre propriedades de famílias de curvas, tais como geodésicas, traçadas sobre a superfície. Foi prosseguindo em estudos como esses sobre geometria diferencial que os matemáticos do século dezenove abriram caminho para as teorias científicas do século vinte.

18 Este capítulo, concentrando-se na matemática pura de Gauss e Cauchy, pode dar ao leitor uma falsa impressão sobre a obra deles como um todo. Ambos contribuíram muito mais do que indicamos para as ciências físicas. Gauss, por exemplo, publicou obras sobre astronomia e geodésia, sobre capilaridade e cristalografia. Tão significativas foram suas realizações no magnetismo terrestre que a unidade padrão de intensidade magnética hoje é chamada gauss. (Por isso de um navio que foi preparado com proteção contra minas magnéticas, em linguagem naval diz-se que foi degaussado.) Foi Gauss o matemático que em 1833-1834 colaborou com Wilhelm Weber na produção do pri-

[14]Uma tradução para o inglês se encontra em *General Investigations of Curved Surfaces*, traduzido por Adam Hiltebeitel e James Morehead (1965)

meiro telégrafo eletromagnético bem sucedido. Ao passo que a maior parte da obra não matemática de Gauss provém do fim de sua vida, no caso de Cauchy é principalmente de seus primeiros anos de atividade. O tratado de Gauss sobre refração (*Dioptrische Untersuchungen*) foi publicado em 1840; a memória sobre propagação de ondas ópticas (*Mémoire sur la théorie des ondes*) de Cauchy, que era mais jovem que Gauss, apareceu em 1815, exatamente quando a teoria ondulatória da luz estava sendo estabelecida por Young e Fresnel. Cauchy fundou também a teoria matemática da elasticidade e contribuiu para a mecânica celeste, campos em que um contemporâneo menos célebre, Siméon-Denis Poisson (1781-1840) também estava trabalhando na época.

Poisson era filho do administrador de uma pequena cidade, que tomou conta da administração local quando começou a Revolução, e a criança foi educada sob princípios republicanos; porém mais tarde tornou-se um convicto legitimista e em 1825 foi recompensado com o título de barão. Em 1837, sob Louis Philippe, ele se tornou par de França. Seus parentes a princípio esperaram que o jovem se tornasse médico, mas seu forte interesse pela matemática levou-o em 1798 a entrar na École Politechnique, onde ao se formar foi sucessivamente instrutor, professor e examinador. Diz-se que ele uma vez declarou que a vida serve só para duas coisas: para fazer matemática e para ensiná-la. Conseqüentemente ele publicou quase 400 trabalhos e teve a reputação de excelente instrutor. A direção de sua pesquisa é indicada em parte por uma sentença de uma carta escrita em 1826 por Abel tratando dos matemáticos de Paris: "Cauchy é o único que se ocupa da matemática pura; Poisson, Fourier, Ampère, etc., se ocupam exclusivamente de magnetismo e outros assuntos da física"[15]. Isso não deve ser tomado muito literalmente, mas Poisson, em memórias de 1812, ajudou a fazer da eletricidade e magnetismo um ramo da física matemática, como o fizeram Gauss, Cauchy e Green. Poisson foi também um digno sucessor de Laplace no estudo da mecânica celeste e da atração de esferóides. A integral de Poisson na teoria do potencial, o colchete de Poisson nas equações diferenciais, a razão de Poisson na elasticidade, e a constante de Poisson na eletricidade indicam a importância de suas contribuições a vários campos da matemática aplicada. Dois de seus tratados mais conhecidos foram *Traité de mécanique* (2 volumes, 1811, 1833) e *Recherches sur la probabilité des jugements* (1837). Nesse último aparece a familiar distribuição de Poisson ou a lei de Poisson dos grandes números. Na distribuição binomial $f(x) = (p + q)^n$ (onde $p + q = 1$ e n é o número de tentativas), quando n cresce indefinidamente ordinariamente a distribuição binomial tende para uma distribuição normal; mas se, quando n cresce, p se aproxima de zero e o produto np permanece constante, então o caso limite da distribuição binomial é a distribuição de Poisson.

Gauss e Cauchy morreram num intervalo de dois anos, o primeiro em 1855, o segundo em 1857. Honrarias de várias formas tinham sido largamente conferidas a ambos, como também ocorrera com Lagrange, Carnot e Laplace. Lagrange e Carnot haviam recebido o título de conde, e a Laplace o imperador dera o título de marquês. Carlos X deu a Cauchy, como recompensa por sua fidelidade, o título de barão. Gauss nunca teve um título de nobreza num sentido legal, mas por consenso comum a posteridade o saudou como o Príncipe dos Matemáticos.

BIBLIOGRAFIA

Bell, E. T., *Men of Mathematics* (New York: Simon and Schuster, 1937)

Bolzano, Bernhard, *Paradoxes of the Infinite*, traduzido por D. A. Steele (Londres: Routledge and Kegan Paul, 1950)

Bonconpagni, B., "La Vie et les travaux du Baron Cauchy . . . par C.-A. Valson." *Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze Matematiche e Fisiche*, 2 (1896, 1-95)

Boyer, C. B., *Concepts of the Calculus* (New York: brochura Dover, 1959)

Brill, A., e M. Noether, "Die Entwickelung der Theorie der algebraischen Funktionen in älterer and neurer Zeit", *Jahresbericht, Deutsche Mathematiker-Vereinigung*, 3 (1892-1893), 107-566

[15]Veja E. T. Bell, *Men of Mathematics* (1937), p. 318. Veja também Maximilien Marie, *Histoire des sciences mathématiques et physiques* (Paris, 1883-1888, 12 volumes) XI, 174-191

Dunnington, G. Waldo, *Carl Friedrich Gauss, Titan of Science; A Study of His Life and Work* (New York: Exposition Press, 1955)

Gauss, C. F., *Werke* (Leipzig, 1866-1933, 12 volumes)

Gauss, C. F., *Inaugural Lecture on Astronomy and Papers on the Foundations of Mathematics*, traduzido por G. W. Dunnington (Baton Rouge, La.: Louisiana State University, 1937)

Gauss, C. F., *Theory of the Motion of Heavenly Bodies* (New York: reimpressão Dover, 1963)

Gauss, C. F., *General Investigations of Curved Surfaces*, traduzido por Adam Hiltebeitel e James Morehead (New York: Raven Press, 1965)

Gauss, C. F., *Disquisitiones arithmeticae*, traduzido para o inglês por A. A. Clarke (New Haven, Conn.: Yale University Press, 1966)

Jourdain, P. E. B., "The Theory of Functions with Cauchy and Gauss," *Bibliotheca Mathematica* (3), 6 (1905), 190-207

Jourdain, P. E. B., "The Origin of Cauchy's Conceptions of a Definite Integral and of the Continuity of a Function", *Isis*, 1 (1913), 661-703

Klein, Felix, *Vorlesungen uber die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert* (Berlin: Springer, 1926--1927, 2 volumes)

Merz, J. T., *A History of European Thought in the Nineteenth Century* (Edinburgh e Londres, 1896-1914, 4 volumes; New York: brochura Dover, 1965)

Muir, Thomas, *The Theory of Determinants in the Historical Order of Development* (Londres, 1906-1930, 4 volumes e Suplemento: reimpressão, New York: Dover, 1960)

Pierpont, James, "Mathematical Rigor, Past and Present", *Bulletin, American Mathematical Society*, 34 (1928), 23-53

Pringsheim, A., e J. Molk, "Principes fondamentaux de la théorie des fonctions", *Encyclopédie des Sciences Mathématiques*, Vol. II, Parte 1, Fasc. 1

Reichardt, Hans, ed., *C. F. Gauss, Leben und Werk* (Gauss Gedenkband, Berlin: Haude & Spener, 1960)

Sarton, George, *The Study of the History of Mathematics* (Cambridge, Mass., 1936; New York: brochura Dover, 1957)

Schaaf, William L., *Carl Friedrich Gauss* (New York: Watts, 1964)

Smith, D. E., *Source Book in Mathematics* (New York: reimpressão Dover, 1958, 2 volumes)

Stolz, Otto, "B. Bolzanos Bedeutung in der Geschichte der Infinitesimalrechnung," *Mathematische Annalen*, 18 (1881), 255-279

Valson, C.-A., *La Vie et les travaux du baron Cauchy*, com um prefácio por M. Hermite (Paris, 1868), Vol. I

EXERCÍCIOS

1. O que apareceu antes, organizações matemáticas ou revistas matemáticas? Dê exemplos em apoio a sua resposta.

2. Descreva vários aspectos em que a matemática de Gauss e Cauchy se afastou da tradição do século dezoito.

3. Foi Cauchy ou Gauss a ter mais influência, ao contribuir para a matemática de nível universitário de hoje? Explique.

4. Explique claramente por que Gauss foi chamado de Príncipe dos Matemáticos.

5. Que são funções elíticas? Por que são assim chamadas e em que diferem das funções circulares (trigonométricas) e hiperbólicas?

6. Descreva algumas diferenças na origem familiar, temperamento e interesses, entre Gauss e Cauchy.

7. Descreva dois aspectos em que a álgebra de congruências se parece com a da igualdade e dois em que difere da da igualdade, dando ilustrações em cada caso.

8. Marque os pontos $1 - i$, $3i$ e $i + 7$ num diagrama de Gauss.

9. Para os cinqüenta polígonos regulares de não mais que cinqüenta e dois lados, diga quais são construtíveis com régua e compasso.

10. O polígono regular de 26 214 lados, ou o de 17 990, é construtível só com régua e compasso? Explique.

11. Mostre que a equação $x^2 + 2ix + i = 0$ tem uma raiz da forma $a + bi$.

12. Ache um valor x_0 que satisfaça ao teorema do valor médio $f(b) - f(a) = (b - a)f'(x_0)$ para $f(x) = x^3$, $a = -1$ e $b = 2$.

13. Se $f(x) = x^{2/3}$, $a = -1$ e $b = 2$, existe um valor x_0 que satisfaça ao teorema do valor médio do Exerc. 12? Explique.

15. Se $f(x) = x^3$, $g(x) = x^2$, $a = 1$ e $b = 3$ ache um valor x_0 que satisfaça ao teorema do valor médio generalizado de Cauchy

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

16. Use o teorema do valor médio generalizado de Cauchy para provar a regra de L'Hospital para formas indeterminadas.

17. Mostre que o jacobiano das funções sen xy e cos xy é identicamente zero e ache uma relação funcional entre as duas funções.

18. Mostre que as funções e^{xy} e $e^x e^y$ não são funcionalmente dependentes.

19. Compare o valor de $\pi(n)$ com o de $n/\ln n$ para $n = 100$.

20. Verifique o postulado de Bertrand para $n = 42$.

*21. Resolva graficamente a equação $ix^3 + 8 = 0$ fazendo a substituição $x = u + iv$, então igualando as partes reais e as partes imaginárias dos dois lados da equação e esboçando sobre o mesmo sistema de eixos as equações resultantes em u e v. Verifique a solução resolvendo $ix^3 + 8 = 0$ pelo teorema de De Moivre.

*22. Mostre que $4 \cdot 5 \equiv 4 \cdot 8 \pmod{12}$ e que $5 \not\equiv 8 \pmod{12}$.

*23. Ache três soluções, cada uma menor que 9, da congruência $3x \equiv 51 \pmod 9$.

*24. Prove que se $a \equiv b \pmod m$ e $b \equiv c \pmod m$ então $a \equiv c \pmod m$.

*25. Fatore 13 no produto de dois primos de Gauss.

*26. Use o princípio de Cauchy e as singularidades de arctg x e sua derivada para mostrar que a expansão de arctg x em termos de potências de x converge para $|x| < 1$.

Capítulo **24**

A Idade Heróica na geometria

Não há ramo da matemática, por abstrato que seja, que não possa um dia vir a ser aplicado aos fenômenos do mundo real.

Lobachevsky

1 Dentre todos os ramos da matemática, a geometria tem sido o mais sujeito a mudanças de gosto, de uma época para outra. Na Grécia clássica subiu ao zênite, para cair ao nadir ao tempo da queda de Roma. Tinha recuperado parte do terreno perdido na Arábia e na Europa da Renascença; no século dezessete esteve no limiar de uma nova era mas novamente foi esquecida, ao menos pelos pesquisadores em matemática, por quase mais dois séculos, permanecendo à sombra dos ramos prolíficos da nova análise. A Inglaterra, especialmente durante o fim do século dezoito, travara uma batalha perdida para devolver a *Os elementos* de Euclides sua posição outrora gloriosa, mas pouco fizera para desenvolver a pesquisa no assunto. Através dos esforços de Monge e Carnot houve alguns sintomas de reavivamento da geometria pura durante o período da Revolução Francesa, mas a redescoberta quase explosiva da geometria como um ramo vivo da matemática veio principalmente no início do século dezenove. Como seria de prever, a École Polytechnique teve um papel nesse movimento, pois ali foi descoberto por um estudante o bem conhecido teorema de Brianchon, que foi publicado em 1806 no Journal de l'École Polytechnique. Charles Julien Brianchon (1785-1864) tinha entrado na escola um ano antes apenas, quando estudou com Monge e leu a *Géométrie de position* de Carnot. O estudante de vinte e um anos, mais tarde oficial de artilharia e professor, primeiro retomou o teorema de Pascal, há muito esquecido, que Brianchon exprimiu em forma moderna: em todo hexágono inscrito numa secção cônica, os três pontos de intersecção dos lados opostos sempre estão sobre uma reta. Continuando com mais algumas demonstrações chegou à que tem seu nome: "Em todo hexágono circunscrito a uma secção cônica as três diagonais se cortam num mesmo ponto". Assim como Pascal ficara impressionado com o número de corolários que podia tirar de seu teorema, também Brianchon observou que seu próprio teorema "está prenhe de conseqüências curiosas"[1]. Os teoremas de Pascal e Brianchon são, na verdade, fundamentais no estudo projetivo das cônicas. Formam, além disso, o primeiro exemplo claro de um par de teoremas "duais" significativos na geometria, isto é, teoremas que se mantêm quando (em geometria plana) as palavras ponto e reta são permutadas.

Se lemos a frase "uma reta é tangente a cônica" como "uma reta está sobre uma cônica" os dois teoremas podem ser expressos na seguinte forma combinada:

$$\text{Os seis}\left\{\begin{matrix}\text{vértices}\\ \text{lados}\end{matrix}\right. \text{de um hexágono estão sobre uma cônica}$$

$$\text{se, e somente se, os três}\left\{\begin{matrix}\text{pontos}\\ \text{retas}\end{matrix}\right. \text{comuns aos três pares de}$$

$$\left\{\begin{matrix}\text{lados}\\ \text{vértices}\end{matrix}\right. \text{opostos têm}\left\{\begin{matrix}\text{reta}\\ \text{ponto}\end{matrix}\right. \text{comum.}$$

Tais relações entre pontos e retas sobre cônicas foram mais tarde exploradas eficazmente por outro graduado da École Polytechnique, o homem que se tornou o verdadeiro fundador da geometria projetiva. Foi Jean-Victor Poncelet (1788-1867), que também estudou com Monge, entrou no corpo de engenheiros do exército bem a tempo para tomar parte na malfadada campanha de Napoleão na Rússia em 1812, e que passou

[1] Veja *Source Book in Mathematics*, editado por D. E. Smith (1959), pp. 331-336

vários anos numa prisão em Moscou. Ao voltar para a França ele se tornou talvez a figura mais importante no renascimento da geometria pura. Entre suas primeiras descobertas estava uma que compartilhou com Brianchon, e os dois publicaram um artigo em colaboração sobre ela nos *Annales* de Gergonne para 1820-1821. O título do artigo, "Recherches sur la détermination d'une hyperbole équilatère" não dá idéia alguma do belo teorema que contém — o referente ao agora bem conhecido círculo de nove pontos. Aqui Brianchon e Poncelet deram uma prova elementar de que

> O círculo que passa pelos pés das perpendiculares traçadas dos vértices de qualquer triângulo sobre os lados opostos passa também pelos pontos médios desses lados bem como pelos pontos médios dos segmentos que unem os vértices ao ponto de intersecção das perpendiculares[2].

Esse teorema em geral não leva o nome de Brianchon ou de Poncelet, mas o de um matemático, Karl Wilhelm Feuerbach (1800-1834) que, trabalhando independentemente, em 1822 publicou esse teorema e outros a ele relacionados num pequeno livro em alemão com um longo e difuso título. Que o círculo de nove pontos seja chamado círculo de Feuerbach se justifica não por prioridade de publicação mas por outras propriedades descobertas por Feuerbach. Ele mostrou que o centro do círculo de nove pontos está sobre a reta de Euler a meia distância entre o ortocentro e o circuncentro. Mais notável ainda é a propriedade contida no que se chama teorema de Feuerbach: o círculo de nove pontos de qualquer triângulo é tangente internamente ao circulo inscrito e tangente externamente aos três círculos excritos, talvez "o mais belo teorema da geometria elementar que tenha sido descoberto desde o tempo de Euclides"[3]. Em conexão com a prova Feuerbach usou o fato de que os raios dos círculos inscrito e excritos são dados por

$$\frac{2K}{\pm a \pm b \pm c}.$$

onde não mais de um sinal menos é usado.

2 O trabalho de Feuerbach, que morreu quando tinha apenas trinta e quatro anos é típico dos numerosos resultados novos na geometria dos triângulos e círculos que estavam sendo descobertos no século dezenove. Nenhum país tinha o monopólio desse desenvolvimento mas a Alemanha teve talvez o papel maior, pois lá viveu Jakob Steiner (1796-1863) um dos muitos redescobridores independentes do círculo de nove pontos e, o que é mais importante, o homem que é considerado como sendo para os tempos modernos o que Apolônio foi na antiguidade. Steiner nasceu na Suíça mas estudou em Heidelberg e Berlin, e através de Jacobi obteve um posto de professor em Berlin que conservou até morrer. Em suas mãos a geometria sintética teve progressos comparáveis aos que tivera antes a análise, e rivalizou com Abel no número de artigos que publicou no *Journal* de Crelle. Seu nome é lembrado por muitas razões, inclusive as propriedades dos pontos de Steiner: unindo de todos os modos possíveis os seis pontos sobre uma cônica no hexagrama místico de Pascal, obtêm-se sessenta retas de Pascal que se cortam três a três em vinte pontos de Steiner. Steiner provou também que todas as construções euclidianas podem ser efetuadas só com uma régua, desde que seja dado um circulo fixo. Ele detestava intensamente a geometria analítica e provou só com métodos sintéticos, num artigo no *Journal* de Crelle, um teorema notável que parece pertencer à análise — que uma superfície de terceira ordem contém somente vinte e sete retas.

[2]A prova por Brianchon e Poncelet está incluída em *Source Book in Mathematics*, editado por D. E. Smith, pp. 337-338. Sabe-se que algumas propriedades do círculo de nove pontos eram já conhecidas antes por Euler. Veja N. A. Court, *College Geometry*, 2.ª edição (New York: Barnes and Noble, 1952), p. 299

[3]Veja J. L. Coolidge, "The Heroic Age of Geometry". *Bulletin of the American Mathematical Society*, **35** (1929), 19-37, especialmente p. 21. Para a história desse teorema ver John S. Mackay, "History of the Nine-point Circle", *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, **11** (1892), 19; veja também **5** (1886-1887), 62. O teorema está contido, em tradução, em *Source Book in Mathematics*, editado por D. E. Smith, pp. 339-345

A história da geometria no século dezenove está repleta de casos de redescoberta independente, e Steiner esteve envolvido em vários deles. Em 1822 Poncelet, inspirado pelo trabalho de Mascheroni, sugerira que todas as construções euclidianas planas podem ser efetuadas com uma régua se se dá além disso no plano um único círculo e seu centro, teorema provado em 1833 por Steiner. Isto é, o teorema de Poncelet-Steiner mostra que não se pode, na geometria euclidiana, dispensar inteiramente o compasso, mas tendo usado esse para traçar um círculo, pôde-se daí por diante dispensá-lo em favor da régua apenas, mais ou menos como Mascheroni usara compasso apenas[4].

Steiner lembra Gauss no fato de idéias e descobertas se multiplicarem de tal forma em sua mente que ele mal podia pô-las em ordem no papel. Já em 1824 ele tinha descoberto a útil transformação chamada geometria inversiva[5]. Se dois pontos P e P' jazem sobre um raio do centro O de um círculo C de raio $r \neq 0$ e se o produto das distâncias OP e OP' é r^2, então P e P' se dizem inversos um do outro com relação a C. A cada ponto P fora do círculo corresponde um ponto dentro do círculo. Como não há ponto externo P' correspondendo a P quando P coincide com o centro O, tem-se que o interior de qualquer círculo por essa transformação tem um ponto extra que não corresponde a nenhum do exterior. De modo exatamente análogo define-se o inverso de um ponto no espaço tridimensional com relação a uma esfera.

Uma quantidade de teoremas na geometria inversiva plana ou no espaço pode ser facilmente provada por métodos analíticos ou sintéticos. Em particular, é fácil mostrar que um círculo que não passa pelo centro de inversão se transforma, por inversão plana, num círculo, enquanto que um círculo que passe pelo centro de inversão se transforma numa reta que não passa pelo centro de inversão (resultados análogos valendo para esferas e planos na geometria inversiva tridimensional). Um pouco mais difícil de provar é o resultado mais significativo que diz que a inversão é uma transformação conforme — isto é, nessa geometria os ângulos entre curvas são preservados. Que tais transformações, que preservam ângulos, não são nada comuns no espaço, se vê por um teorema de Joseph Liouville segundo o qual no espaço as únicas transformações conformes são as inversões e as transformações de semelhança e congruência[6]. Steiner não publicou suas idéias sobre inversão, e a transformação foi redescoberta várias vezes por outros matemáticos do século, inclusive Lord Kelvin (ou William Thompson, 1824-1907) que em 1845 chegou a ela pela física e que a aplicou a problemas de eletrostática.

Se o centro O do círculo de inversão de raio a está na origem de um sistema de coordenadas cartesianas no plano, as coordenadas x' e y' do inverso P' de um ponto $P(x, y)$ são dadas pelas equações

$$x' = \frac{a^2x}{x^2 + y^2}, \qquad y' = \frac{a^2y}{x^2 + y^2}.$$

Essas equações mais tarde sugeriram a Luigi Cremona (1830-1903), professor de geometria sucessivamente em Bolonha, Milão e Roma, o estudo da transformação muito mais geral $x' = R_1(x, y)$, $y' = R_2(x, y)$, onde R_1 e R_2 são funções algébricas racionais. Tais transformações, de que as de inversão são um caso particular, são chamadas transformações de Cremona, em honra daquele que em 1863 publicou uma exposição sobre elas e mais tarde generalizou-as à dimensão três.

3 Uma característica importante da geometria da segunda metade do século dezenove era o entusiasmo com que eram estudadas transformações de tipos variados. Um dos mais populares dentre esses era um grupo de transformações formando o que agora se chama geometria projetiva. Esta fora anunciada na obra de Pascal e Desargues, mas só no começo do século dezenove é que foi sistematicamente desenvolvida, especialmente

[4]Mais detalhes são dados em Howard Eves, *An Introduction to the History of Mathematics*, edição revista (New York: Holt, 1964), pp. 99-100

[5]Veja N. A. Court, "Notes on Inversion" *The Mathematics Teacher*, **55** (1962), 655-657

[6]D. J. Struik, "Outline of a History of Differential Geometry", *Isis*, **19** (1933), 92-120; **20** (1933), 161-191

por Poncelet. Durante os anos de 1813-1814, quando prisioneiro na Rússia, Poncelet compusera um tratado de geometria analítica, *Applications d'analyse et de géométrie*, baseado nos princípios que aprendera na École Polytechnique. Essa obra, porém, só foi publicada cerca de meio século depois (2 volumes, 1862-1864), apesar de originalmente, na intenção do autor, dever servir de introdução ao seu muito mais célebre *Traité des propriétés projectives des figures* de 1822. Essa última obra diferia muito da primeira pois de forma sintética em vez de analítica. Os gostos de Poncelet tinham mudado ao voltar para Paris, a partir daí ele se tornara um firme defensor dos métodos sintéticos. Percebia que a vantagem, que a geometria analítica parecia ter, residia em sua generalidade, e por isso tentou tornar seus enunciados de geometria sintética os mais gerais possíveis. Para isso ele formulou o que chamou "princípio de continuidade" ou o "princípio da permanência das relações matemáticas". Este ele descrevia como segue:

> As propriedades métricas descobertas para uma figura primitiva permanecem aplicáveis, sem modificações além de mudança de sinal, a todas as figuras correlatas que podem ser consideradas como provindo da primeira.

Como exemplo do princípio, Poncelet citou o teorema da igualdade dos produtos dos segmentos de cordas de um círculo que se cortam, que se transforma, quando o ponto de intersecção está fora do círculo, em igualdade dos produtos de segmentos de secantes.

Se uma das retas é tangente ao círculo, o teorema ainda assim permanece válido, substituindo o produto dos segmentos da secante pelo quadrado da tangente. Cauchy se inclinava a caçoar do princípio de continuidade de Poncelet, pois ele lhe parecia ser apenas uma ousada indução. Num certo sentido o princípio se aproxima das idéias de Carnot, mas Poncelet levou-o adiante, incluindo os pontos no infinito que Kepler e Desargues tinham sugerido. Assim se poderia dizer que duas retas sempre se cortam — seja num ponto ordinário seja (no caso de retas paralelas) num ponto no infinito, chamado um ponto ideal. Para chegar à generalidade Poncelet achou necessário introduzir na geometria sintética não só pontos ideais, mas também pontos imaginários, pois só assim ele podia dizer que um círculo e uma reta sempre se cortam. Entre suas descobertas notáveis está a de que todos os círculos de um plano têm dois pontos em comum. Esses são dois pontos ideais imaginários, chamados os pontos circulares no infinito e usualmente denotados por I e J (ou, mais informalmente, Isaac e Jacob).

Poncelet achava que seu princípio de continuidade, que presumivelmente fora sugerido pela geometria analítica, era propriamente um desenvolvimento da geometria sintética e rapidamente se tornou um defensor desta contra os analistas. Durante a segunda metade do século dezoito tinha havido alguma controvérsia, especialmente na Alemanha, sobre os méritos relativos da análise e da síntese. Em 1759 o matemático e historiador A. G. Kaestner (1719-1800), professor em Leipzig e Göttingen, tinha sustentado que a análise era superior para o tratamento heurístico de problemas, proporcionando força e economia de pensamento; um de seus estudantes, G. S. Klügel (1739-1818) em 1767 escreveu que suspeitava que os ingleses procuravam aumentar suas reputações graças à dificuldade de suas provas sintéticas. Durante o começo do século dezenove o interesse pelas metodologias rivais era tal na França que um prêmio foi oferecido em 1813 pela Sociedade Científica de Bordeaux para o melhor ensaio caracterizando a síntese e a análise e a influência exercida por cada uma. O ensaio premiado, por um professor em Versailles[7], acabava exprimindo a esperança de que houvesse uma reconciliação entre os dois campos; mas meia dúzia de anos depois a controvérsia recomeçou e tornou-se cada vez mais amarga. Os dois rivais principais, curiosamente, eram Poncelet e Gergonne, ambos estudantes de Monge, este igualmente adepto da geometria sintética e da analítica. A princípio a rivalidade foi amigável, e ambos em 1818, o ano da morte de Monge, publicaram artigos nos *Annales* de Gergonne, Poncelet defendendo a superioridade da geometria sintética e Gergonne a dos métodos analíticos. Mas em 1826 surgiu uma controvérsia de prioridade sobre o recém-descoberto princípio de dualidade. Vimos já como os teoremas de Pascal e Brianchon se relacionavam por uma simples permuta das palavras ponto e reta, e Gergonne se convencera de que os métodos analíticos mostrariam que tal permuta é universalmente válida. Isto é, para todo teorema de geometria plana envolvendo pontos e retas, Gergonne supunha com muita confiança que o dual do teorema, obtido permutando as palavras ponto e reta, também fosse verdadeiro, e começou a publicar pares de teoremas duais em colunas paralelas de seus *Annales*. Poncelet dizia que ele fora o primeiro a descobrir a dualidade, e que o princípio era uma conseqüência das relações na geometria pura entre um pólo e sua reta polar com relação a uma cônica.

[7] Para mais detalhes veja C. B. Boyer, "Analysis: Notes on the Evolution of a Subject and a Name", *The Mathematics Teacher*, 47 (1954), 450-462, especialmente p. 459. Uma discussão extensa se encontra em G. Fano e S. Carrus, "Exposé parallèle du développement de la géométrie synthétique et de la géométrie analytique pendant le 19ième siècle", *Encyclopédie des sciences mathématiques*, III, 3, 185-259

4 Não é fácil decidir quem tem a prioridade na percepção do princípio de dualidade, mas em 1829 a justificação lógica do princípio foi solidamente estabelecida por Julius Plücker (1801-1868) através de um novo e importante ponto de vista na geometria analítica. Assim como Monge fora talvez o primeiro especialista moderno em geometria em geral, Plücker tornou-se o primeiro especialista em geometria analítica em particular. Suas primeiras publicações nos *Annales* de Gergonne em 1826 tinham sido principalmente sintéticas, mas inadvertidamente ele ficou tão empenhado em controvérsia com Poncelet que abandonou o campo dos sintetistas e tornou-se o mais prolífico dos geômetras analíticos. Os métodos algébricos, ele veio a crer firmemente, eram muito preferíveis aos puramente geométricos de Poncelet e Steiner. Que seu nome sobreviva na geometria de coordenadas no que se chama notação abreviada de Plücker é um tributo a sua influência, embora nesse caso a frase lhe dê mais do que é justo. Durante o começo do século dezenove muitos, Gergonne inclusive, tinham percebido que a geometria analítica estava sobrecarregada por cálculos algébricos incômodos; por isso começaram a abreviar drasticamente as notações. Por exemplo, a família de todos os círculos, que passam pela intersecção dos dois círculos $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ e $x^2 + y^2 + a'x + b'y + c' = 0$, era denotada por Gabriel Lamé (1795-1870) em 1818 simplesmente por $mC + m'C' = 0$, usando dois parâmetros ou multiplicadores m e m'. Gergonne e Plücker preferiram um único multiplicador designado por uma letra grega, o primeiro escrevendo $C + \lambda C' = 0$, de onde temos a palavra "lambdalizar" e o segundo usando $C + \mu C' = 0$, o que deu a expressão "μ de Plücker". Lamé parece ter sido o primeiro a estudar na geometria analítica famílias a um parâmetro por meio de notação abreviada, mas foi Plücker quem, especialmente durante os anos de 1827-1829, levou mais longe esse estudo. Incidentalmente, que o feixe linear de círculos $C + \mu C' = 0$ forma uma "família radical" interessante, quer $C = 0$ e $C' = 0$ se cortem ou não tinha sido percebido cerca de quinze anos antes por L. Gaultier em estudos de geometria pura; por isso o eixo radical (a reta que pertence à família $C + \mu C' = 0$) às vezes é chamado "reta de Gaultier". Essa reta tem a propriedade que as tangentes de qualquer ponto dela a membros da família radical de círculos são iguais — ou, na linguagem de Steiner, a "potência" de um ponto do eixo radical com relação a membros da família é a mesma para todos os círculos da família.

Entre os muitos usos que Plücker fez de notação abreviada está um de 1828, nos *Annales* de Gergonne, em que explicou o paradoxo de Cramer-Euler. Se por exemplo tomamos quatorze pontos ao acaso num plano, a curva quártica por eles pode ser escrita $Q + \mu Q' = 0$, onde $Q = 0$ e $Q' = 0$ são quárticas distintas passando pelos mesmos treze pontos dentre os quatorze dados. Determinemos μ de modo que as coordenadas do décimo quarto ponto satisfaçam $Q + \mu Q' = 0$. Então $Q = 0$, $Q' = 0$ e $Q + \mu Q' = 0$ têm em comum não só os *treze* pontos iniciais mas todos os *dezesseis* pontos de intersecção de $Q = 0$ e $Q' = 0$. Portanto associados a qualquer coleção de treze pontos há três pontos adicionais, dependendo dos treze iniciais, e nenhuma coleção de quatorze pontos ou mais extraídos da coleção total de dezesseis determinará uma quártica única, apesar do fato que quatorze pontos arbitrários em geral determinam univocamente uma quártica. Mais geralmente, todo conjunto dado de

$$n(n+3)/2-1$$

pontos arbitrários determinará uma coleção associada de

$$n^2-[n(n+3)/2-1]=(n-1)(n-2)/2$$

pontos "dependentes" adicionais, tal que qualquer curva de grau n passando por todos os pontos dados passará também pelos pontos dependentes[8]. Plücker deu também um dual desse teorema sobre o paradoxo, bem como generalizações a superfícies em três dimensões.

5 Plücker, no primeiro volume de *Analytisch-geometrische Entwicklungen* (1828) elevou à categoria de princípio a notação abreviada de Lamé e Gergonne; no segundo volume dessa influente obra (1831) ele redescobriu um novo sistema de coordenadas que já tinha sido inventado independentemente três vezes. Era o que chamamos coordenadas homogêneas, de que Feuerbach foi um inventor[9]. Outro descobridor foi A. F. Möbius (1790-1860) que publicou seu sistema em 1827 numa obra com o título *Barycentrische Calcul*. O autor deste clássico é mais conhecido, no entanto, pela superfície de um só lado que tem seu nome — a faixa de Möbius obtida unindo as extremidades de uma fita depois de dar uma volta a uma delas. Ainda outro inventor das coordenadas homogêneas foi Étienne Bobillier (1797-1832) um graduado da École Polytechnique que publicou seu novo sistema de coordenadas nos *Annales* de Gergonne de 1827-1828. As notações e linhas de raciocínio dos quatro inventores diferiam[10], mas todos tinham uma coisa em comum — usavam *três* coordenadas em vez de duas para determinar um ponto do plano. Os sistemas eram equivalentes ao que também chamamos coordenadas trilineares. Plücker, na verdade, a princípio tomou especificamente suas três coordenadas x, y e t de um ponto P de um plano como sendo as três distâncias de P aos lados de um triângulo de referência. Mais tarde no Vol. II de *Analytisch-geometrische Entwicklungen* ele deu a definição mais usual de coordenadas homogêneas como coleção de triplas ordenadas de números (x, y, t) relacionadas como as coordenadas cartesianas (X, Y) de P por $x = Xt$ e $y = Yt$. É evidente que as coordenadas homogêneas de um ponto P não são únicas, pois a tripla (x, y, t) e a tripla (kx, ky, kt), $k \neq 0$, correspondem ao mesmo par $(x/t, y/t)$. Porém a falta de unicidade não causa mais dificuldade que a falta de unicidade em coordenadas polares ou a falta de unicidade de forma no caso de frações. O nome homogênea provém, é claro, do fato de que quando usamos as equações de transformação para passar da equação $f(X, Y) = 0$ de uma curva em coordenadas cartesianas para a forma $f(x/t, y/t) = 0$ a nova equação conterá termos todos de mesmo grau nas variáveis x, y e t. E, o que é mais importante, deve-se notar que não há no sistema de coordenadas cartesianas um par que corresponda a uma tripla numérica homogênea da forma $(x, y, 0)$. Uma tal tripla (se x e y não são ambos nulos) designa um ponto ideal, ou "ponto no infinito". Finalmente se tinha conseguido ligar os elementos infinitos de Kepler, Desargues e Poncelet a um sistema de coordenadas de números ordinários. Além disso, assim como toda tripla ordenada de números reais (não todos nulos) em coordenadas homogêneas corresponde a um ponto num plano, também toda equação linear $ax + by + ct = 0$ (desde que a, b e c não sejam todos nulos) corresponde a uma reta no plano. Em particular todos os "pontos no infinito" no plano estão evidentemente sobre a reta dada pela equação $t = 0$, chamada reta no infinito ou reta ideal no plano. É evidente que esse novo sistema de coordenadas é o ideal para o estudo da geometria projetiva, que até então fora estudada quase exclusivamente do ponto de vista da geometria pura.

[8]Veja Charlotte A. Scott, "On the Intersections of Plane Curves", *Bulletin of the American Mathematical Society*, 4 (1897-1898), 260-273

[9]Veja Albert Keifer. *Die Einführung der homogenen Koordinaten durch* K. W. Feuerbach, M. D. Schauberg (Strassburg, 1910)

[10]Para mais detalhes e referências veja C. B. Boyer, *History of Analytic Geometry* (1956), pp. 241-244, 249-252

6 As coordenadas homogêneas representaram um grande passo na direção da aritmetização da geometria, mas em 1829 Plücker publicou no *Journal* de Crelle um artigo com um ponto de vista revolucionário, que era uma completa ruptura com o conceito cartesiano de coordenadas como segmentos de reta. A equação de uma reta em coordenadas homogêneas tem a forma $ax + by + ct = 0$. Os três coeficientes ou parâmetros (a, b, c) determinam uma única reta no plano, exatamente como as três coordenadas homogêneas (x, y, t) correspondem a um único ponto do plano. Como as coordenadas são números, portanto não diferentes dos coeficientes, Plücker viu que se podia modificar a linguagem usual e chamar (a, b, c) as *coordenadas* homogêneas de uma reta. Se, finalmente, invertermos a convenção cartesiana de modo que as primeiras letras do alfabeto designem variáveis e as do fim do alfabeto constantes, a equação $ax + by + ct = 0$ representará um feixe de retas passando pelo ponto fixo (x, y, t), em lugar do feixe de pontos sobre a reta fixa (a, b, c). Considerando agora a equação descomprometida $pu + qv + rw = 0$, é claro que ela pode ser olhada indiferentemente como representando a totalidade dos pontos (u, v, w) que jazem sobre a reta fixa (p, q, r) ou a totalidade das retas (p, q, r) passando pelo ponto fixo (u, v, w).

Plücker havia descoberto o correspondente analítico imediato do princípio geométrico de dualidade, a respeito do qual Gergonne e Poncelet haviam brigado; ficou claro agora que a justificação que a geometria pura havia buscado em vão era aqui fornecida pelo ponto de vista algébrico. A permuta das palavras "ponto" e "reta" corresponde apenas à permuta das palavras "constante" e "variável" em relação às quantidades p, q, r e u, v, w. Da simetria da situação algébrica resulta claramente que todo teorema que diz respeito a $pu + qv + rw = 0$ aparece imediatamente em duas formas, duais uma da outra. Além disso, Plücker mostrou que toda curva pode ser encarada como tendo origem dual: é um lugar gerado por um ponto móvel e é envolvida por uma reta móvel, o ponto movendo-se continuamente ao longo da reta enquanto a reta gira com centro no ponto. E, o que é estranho, o grau de uma curva em coordenadas de ponto (a "ordem" da curva) não precisa ser igual ao grau da curva em coordenadas de reta (a "classe" da curva) e um dos grandes sucessos de Plücker, publicado no *Journal* de Crelle de 1834, foi a descoberta de quatro equações, que têm seu nome, relacionando a classe e a ordem de uma curva com as singularidades da curva:

$$m = n(n-1) - 2\delta - 3\kappa \quad \text{e} \quad n = m(m-1) - 2\tau - 3\iota;$$
$$\iota = 3n(n-2) - 6\delta - 8\kappa \quad \text{e} \quad \kappa = 3m(m-2) - 6\tau - 8\iota$$

onde m é a classe, n a ordem, δ o número de nós, κ o número de cúspides, ι o número de tangentes estacionárias (pontos de inflexão) e τ o número de bitangentes. Dessas equações resulta imediatamente que uma cônica (de ordem dois) não pode ter singularidades e portanto deve ser também de classe dois.

Num artigo no *Journal* de Crelle em 1831 Plücker estendeu o princípio de dualidade a três dimensões, onde as relações entre as coordenadas homogêneas (a, b, c, d) de um plano e as coordenadas (x, y, z, t) de um ponto mostram que o dual de um teorema no espaço tridimensional se obtém por permuta das palavras "ponto" e "plano", a palavra "reta" permanecendo sem modificação. O geômetra francês Michel Chasles (1793-1880) afirmou ter tido a idéia das coordenadas de reta e plano ao mesmo tempo que Plücker, o que dá mais um exemplo de simultaneidade de descoberta na geometria do século dezenove[11]. Em artigos e volumes posteriores Plücker estendeu seu trabalho de modo a incluir coordenadas cartesianas e homogêneas imaginárias. Agora era trivial justificar o teorema de Poncelet que diz que todos os círculos têm em comum dois pontos imaginários no infinito, pois os pontos $(1, i, 0)$ e $(i, 1, 0)$ satisfazem ambos à equação $x^2 + y^2 + axt + byt + ct^2 = 0$, quaisquer que sejam os valores de a, b, c. Plücker mostrou também que os focos das cônicas têm a propriedade que as tangentes imaginárias

[11]Veja C. B. Boyer, *History of Analytic Geometry*, p. 251, nota 65

por esses pontos à curva passam pelos dois pontos circulares citados acima; por isso ele definiu um foco de uma curva plana de ordem superior como um ponto tendo essa propriedade.

7 Durante os dias de Descartes e Fermat, e novamente durante o tempo de Monge e Lagrange, a França fora o centro do desenvolvimento da geometria analítica, mas com a obra de Plücker a liderança no campo atravessou o Reno fixando-se na Alemanha. No entanto Plücker foi em larga medida o tradicional profeta não reconhecido em seu próprio país. Lá Steiner era extraordinariamente admirado; e Steiner odiava métodos analíticos. O termo análise implica uma certa dose de técnica ou maquinaria. Freqüentemente se fala da análise como um instrumento, termo nunca aplicado à síntese; e Steiner fazia objeções a todos os tipos de instrumentos ou "ajudas mecânicas" na geometria. O cálculo, ele dizia, substitui o pensamento, ao passo que a geometria deveria estimular o pensamento. Möbius permaneceu neutro na controvérsia análise versus síntese, mas Jacobi, apesar de ser ele próprio um construtor de algoritmos, se uniu a Steiner na oposição polêmica a Plücker[12]. Desanimado, Plücker em 1847 se voltou da geometria para a física, publicando uma série de artigos sobre magnetismo e espetroscopia.

É uma das ironias da história que a obra de Plücker encontrou reconhecimento onde menos se esperaria. A Inglaterra durante o século dezoito fora um bastião da geometria sintética; ao passo que Monge e Lagrange estavam produzindo a revolução analítica na França, a geometria de coordenadas na Inglaterra fora pouco adiante da obra de Newton. Mesmo *As cônicas* de Wallis caíra em desuso em Cambridge, onde o interesse pela matemática estava em baixa no começo do século dezenove[13]. O rápido progresso da pesquisa matemática na França e na Inglaterra impressionara pouco na Grã-Bretanha. Perante essa situação, um grupo de jovens matemáticos de Cambridge em 1812 formou o que chamaram a "Analytic Society". Nas palavras de Charles Babbage (1792-1871), um dos líderes, o objetivo da Sociedade era promover *"the principles of pure* d-*ism as opposed to the* dot-*age of the university"*. (Um segundo objetivo da Sociedade era "deixar o mundo mais sábio do que o tinham encontrado".) Isso, é claro, era uma referência à persistente recusa dos ingleses de abandonar os fluxos de Newton, com notação com pontos (*dot*), em favor das diferenciais, notadas *d*, de Leibniz; mais geralmente implicava um desejo de aproveitar os grandes progressos feitos na matemática no Continente[14]. Em 1816, como resultado da inspiração da Sociedade, foi publicada uma tradução para o inglês do *Calculus* em um volume de Lacroix, e dentro de poucos anos os matemáticos ingleses se viram em posição de rivalizar com seus contemporâneos do Continente. Por exemplo, George Green (1793-1841), um filho de moleiro, autodidata, em 1828 publicou para circulação privada um ensaio sobre eletricidade e magnetismo que continha o importante teorema que leva seu nome: se $P(x, y)$ e $Q(x, y)$ têm derivadas parciais contínuas sobre uma região R do plano xy limitada por uma curva C, então $\int_C P dx + Q dy = \iint_R (Q_x - P_y)dxdy$. Esse teorema, ou seu análogo em três dimensões, é também conhecido como teorema de Gauss, pois os resultados de Green foram praticamente esquecidos até serem redescobertos por Lord Kelvin em 1846. Enquanto isso o teorema fora também descoberto por Michel Ostrogradski (1801-1861) e na Rússia tem seu nome até hoje.

8 Um fato que ilustra o despertar da matemática na Inglaterra é a fundação em 1839 do *Cambridge Mathematical Journal*. Logo depois a Inglaterra produziu um dos mais prolíficos matemáticos de todos os tempos, só Euler e Cauchy sendo seus rivais em produtividade. Foi Arthur Cayley (1821-1895), um brilhante estudante de Cambridge que ganhou a maior parte dos prêmios de matemática e que desde cedo contribuiu com artigos no *Cambridge Mathematical Journal* e seus sucessores. Cayley era primariamente um algebrista, não um especialista em geometria; mas era no lado algébrico que Plücker fora mais fraco. É com surpresa que se observa que Plücker não aproveitara os desenvolvimentos na teoria dos determinantes, talvez por causa de seu feudo com Jacobi; pode ser essa a razão pela qual ele não desenvolveu sistematicamente uma geometria analítica de mais de três dimensões. Plücker chegara perto dessa noção por sua observação em 1846 de que os quatro parâmetros que determinam uma reta no espaço tridimensional podem ser pensados como quatro coordenadas; mas só muito tempo depois, em 1865, é que ele voltou à geometria analítica e desenvolveu a idéia de uma "nova geometria do espaço" — um espaço a quatro dimensões em que as retas e não os pontos eram os elementos básicos. Enquanto isso, em 1843 Cayley iniciara a geometria analítica ordinária do espaço n-dimensional, usando determinantes como instrumento essencial. Nessa notação, usando coordenadas homogêneas, as equações da reta e do plano, respectivamente, podem ser escritas como

$$\begin{vmatrix} x & y & t \\ x_1 & y_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & t_2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{e} \quad \begin{vmatrix} x & y & z & t \\ x_1 & y_1 & z_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & t_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & t_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Cayley fez notar que o correspondente elemento fundamental $(n-1)$-dimensional no espaço a n dimensões pode ser expresso em coordenadas homogêneas por um determinante, semelhante a esses anteriores, de ordem $n + 1$. Muitas das fórmulas simples para dimensões dois e três podem, se convenientemente expressas, ser generalizadas facilmente para n dimensões. Em 1846 Cayley publicou um artigo no *Journal* de Crelle em que ele novamente estendia alguns teoremas do espaço tridimensional a um espaço de dimensão quatro; em 1847 Cauchy nos *Comptes Rendus* publicou um artigo em que ele considerava "pontos analíticos" e "retas analíticas" num espaço de dimensão maior que três[15].

9 Um ano apenas depois da publicação do primeiro artigo de Cayley sobre a geometria em dimensões superiores, noções semelhantes apareceram na Alemanha em *Ausdehnungslehre* de Hermann Grassmann (1809-1877). Em notação nova e assustadora e obscura exposição, Grassmann tentava construir um cálculo de "grandezas extensivas" envolvendo um número indefinido de elementos ou dimensões, mas seus esforços para construir uma espécie de análise vetorial para n dimensões encontraram pouca compreensão da parte de seus contemporâneos[16]. Talvez uma razão para isso fosse a influência esmagadora de Steiner, que continuava a defender a geometria pura. Steiner, em Systematische Entwicklungen de 1832 produzira um tratamento da geometria projetiva baseado em considerações métricas. Alguns anos depois a geometria pura encontrou outro devoto alemão em K. G. C. von Staudt (1798-1867), cuja *Geometrie der Lage* de 1847 construía a geometria projetiva sem referência a grandeza ou número. Na França a obra de Poncelet tinha sido continuada por Chasles, também graduado da École Polytechnique, onde se tornou professor de geometria. A Chasles deveu-se a ênfase nas seis razões duplas ou anarmônicas

$$\frac{c-a}{c-b} \bigg/ \frac{d-a}{d-b}$$

de quatro pontos colineares ou quatro retas concorrentes, e na invariância delas sob transformações projetivas. Seu *Traité de géométrie supérieure* (1852) foi influente também

[12] Uma excelente exposição sobre a obra de Plücker se encontra em Wilhelm Ernst, *Julius Plücker* (1933). Veja também Alfred Clebsch, "Notice sur les travaux de Jules Plücker", traduzido por Paul Mansion, *Bulletino di Bibliografia e di Storia delle Scienze Matematiche e Fisiche*, 5 (1872), 183-212

[13] Veja W. W. R. Ball, *A History of the Study of Mathematics at Cambridge* (Cambridge, 1889)

[14] Veja J. M. Dubbey, "The Introduction of the Differential Notation to Great Britain", *Annals of Science*, **19** (1963), 37-48

[15] Para excertos dessas e outras obras veja *Source Book in Mathematics*, editado por D. E. Smith, pp. 524-545

[16] Uma exposição resumida das idéias de Grassmann se encontra em J. L. Coolidge, *A History of Geometrical Methods* (1963), pp. 252-257, e uma tradução de uma parte de *Ausdehnungslehre* de Grassmann aparece em *Source Book in Mathematics* de Smith, pp. 684-696

para o estabelecimento do uso de segmentos de reta orientados na geometria pura. Chasles, que é conhecido também por seu *Aperçu historique sur l'origine et le developpement des méthodes en géométrie* (1837) foi um dos últimos grandes geômetras projetivos na França, e foi principalmente na Alemanha que sua obra foi continuada por homens como Steiner e von Staudt. A este último em particular deve-se muito da forma que tomou a geometria projetiva sintética[17].

10 Foi difícil apresentar uma descrição dos desenvolvimentos geométricos na primeira metade do século dezenove por causa das correntes cruzadas e das inter-relações entre os múltiplos aspectos do assunto, mas houve um aspecto, o surgimento da geometria não-euclidiana, que se desenvolveu independentemente dos movimentos descritos acima. Porém, também nesse caso encontramos um assombroso exemplo de simultaneidade de descoberta, pois noções semelhantes ocorreram, durante o primeiro terço do século dezenove, a três homens, um alemão, um húngaro e um russo. Já observamos que Gauss durante a segunda década do século tinha chegado à conclusão que os esforços para provar o postulado das paralelas feitos por Saccheri, Lambert, Legendre e seu amigo húngaro Farkas Bolyai eram vãos e que eram possíveis geometrias diferentes da de Euclides. No entanto, ele não participou suas idéias a outros; ele simplesmente tinha elaborado a idéia, como ele disse, "para si próprio". Por isso continuaram a ser feitos esforços para provar o postulado, e entre os que tentaram tal prova estava o jovem Nicolai Lobachevsky (1793-1856), filho de um funcionário que morreu quando Nicolai tinha apenas sete anos. Lobachevsky freqüentou a Universidade de Kazan, apesar das dificuldades financeiras da família, onde entrou em contato com reputados professores que a universidade trouxera da Alemanha, inclusive J. M. Bartels (1769-1836) com quem Gauss estudara antes. Aos vinte e um anos, apenas, Lobachevsky tornou-se membro do corpo docente, e em 1827 tinha sido nomeado Reitor da universidade. Lá ele permaneceu, como professor e administrador, até o fim de seus dias, apesar de seus últimos anos serem amargurados pela cegueira e pela falta de apreciação por seu trabalho.

Lobachevsky e Ostrogradsky foram ambos matemáticos russos eminentes, mas diferiam fortemente quanto a idéias matemáticas e políticas. Ostrogradsky estudara longamente em Paris, onde sofreu a influência da análise francesa de Cauchy — assunto convencional em que rápido progresso estava sendo feito. Lobachevsky, de outro lado, tinha sido mais influenciado pela corrente alemã e geométrica. Além disso, Ostrogradsky vinha de família próspera, aristocrática e conservadora, ao passo que Lobachevsky, constantemente sujeito a pobreza e privações, nunca teve uma posição de relevo na sociedade e freqüentemente defendia causas liberais impopulares. Assim em sua época Ostrogradsky gozou de uma estima que Lobachevsky não teve; mas hoje o nome de Ostrogradsky, quando é conhecido, é em conexão com um único teorema, ao passo que Lobachevsky é chamado o "Copérnico da geometria", o homem que revolucionou o assunto pela criação de todo um ramo novo, a geometria de Lobachevsky, mostrando com isso que a geometria euclidiana não era a verdade absoluta que se supunha ser. Num certo sentido a descoberta da geometria não-euclidiana desferiu um golpe devastador na filosofia kantiana comparável ao efeito que teve sobre as concepções pitagóricas a descoberta de grandezas incomensuráveis. Através da obra de Lobachevsky tornou-se necessário rever as concepções fundamentais sobre a natureza da matemática; mas os colegas de Lobachevsky estavam demasiado próximos da situação para vê-la na perspectiva apropriada, e o desbravador de novos caminhos teve que elaborar suas idéias na solidão.

11 As idéias revolucionárias de Lobachevsky parecem não lhe ter vindo como inspiração súbita. Numa exposição geral sobre geometria que ele escreveu em 1823, presumivelmente para uso em cursos, Lobachevsky disse do postulado de paralelas simplesmente que "nunca foi descoberta uma prova rigorosa de sua validade"[18]. Aparentemente ele então não excluía a possibilidade de ser descoberta uma tal prova. Três anos depois na Universidade de Kazan ele leu, em francês, um artigo (agora perdido) sobre os princípios da geometria, inclusive "une démonstration rigoureuse du theorème des parallèles". O ano de 1826 em que esse artigo foi lido pode ser tomado como data não-oficial de nascimento da geometria de Lobachevsky, pois foi então que o autor apresentou muitos dos teoremas característicos do novo assunto. Passados mais três anos, no *Mensageiro de Kazan* de 1829, Lobachevsky publicou um artigo, "On the Principles of Geometry", que marca oficialmente o nascimento da geometria não-euclidiana. Entre 1826 e 1829 ele ficara completamente convencido de que o quinto postulado de Euclides não pode ser provado com base nos outros quatro, e no artigo de 1829 ele se tornou o primeiro matemático a dar o passo revolucionário de publicar uma geometria especificamente construída sobre uma hipótese em conflito direto com o postulado das paralelas: Por um ponto C fora de uma reta AB pode-se traçar mais de uma reta do plano que não encontra AB. Com esse novo postulado Lobachevsky deduziu uma estrutura geométrica harmoniosa sem contradições lógicas inerentes. Era em todos os sentidos uma geometria válida, mas ela parecia tão contrária ao senso comum que o próprio Lobachevsky a chamou "geometria imaginária".

[17]Para mais detalhes veja J. L. Coolidge, *A History of Geometrical Methods*, pp. 92-101

[18]Veja V. Kagan, *N. Lobachevsky and his Contribution to Science* (1957), p. 33; também Alexander Vucinich, "Nikolai Ivanovich Lobachevskyii: The Man behind the First Non-Euclidean Geometry", *Isis*, 53 (1962), 465-481

Lobachevsky percebia bem o significado de sua descoberta da "geometria imaginária", como se percebe claramente pelo fato que durante os vinte anos entre 1835 e 1855 ele escreveu três exposições completas da nova geometria. Em 1835-1838 seu livro *Novos Fundamentos da Geometria* apareceu em russo; em 1840 ele publicou *Investigações Geométricas sobre a teoria das Paralelas* em alemão; e em 1855 seu último livro, *Pangeometria*, foi publicado simultaneamente em francês e em russo. (Todos foram já traduzidos em outras línguas.) Pelo segundo desses livros Gauss veio a saber das contribuições de Lobachevsky à geometria não-euclidiana e foi por sua recomendação que Lobachevsky em 1842 foi eleito para a Sociedade Científica de Göttingen. Em cartas a amigos Gauss louvou a obra de Lobachevsky, mas nunca lhe deu apoio em artigo impresso porque temia a caçoada dos "beócios". Em parte por isso a nova geometria só lentamente se tornou conhecida.

12 O amigo húngaro de Gauss, Farkas Bolyai, passara boa parte de sua vida tentando provar o postulado das paralelas, e quando descobriu que seu próprio filho Janos Bolyai (1802-1860) estava absorvido pelo problema das paralelas, o pai, um professor de matemática de província, escreveu ao filho, oficial do exército:

> Pelo amor de Deus, eu lhe peço, desista! Tema tanto isso quanto as paixões sensuais porque isso também pode tomar todo seu tempo, e privá-lo de sua saúde, paz de espírito, e felicidade na vida!

O filho, não persuadido, continuou seus esforços até que em 1829 aproximadamente ele chegou à conclusão a que poucos anos antes Lobachevsky chegara. Em vez de tentar provar o impossível, ele desenvolveu o que chamou a "Ciência Absoluta do Espaço", partindo da hipótese que por um ponto fora de uma reta podem ser traçadas infinitas retas do plano, não uma só, cada uma paralela à reta dada. Janos mandou suas reflexões a seu pai, que as publicou sob forma de um apêndice de um tratado que tinha completado, com um longo título em latim começando com *Tentamen*. O *Tentamen* do Bolyai mais velho tem um *imprimatur* datado de 1829, o ano do artigo de Lobachevsky no *Mensageiro de Kazan*, mas só apareceu em 1832.

A reação de Gauss à "Ciência Absoluta do Espaço" foi semelhante à que tivera no caso de Lobachevsky — aprovação sincera, mas sem apoio impresso. Quando Farkas Bolyai escreveu perguntando sua opinião a respeito da obra não ortodoxa de seu filho, Gauss respondeu que não podia elogiar a obra de Janos pois isso seria auto-elogio, já que havia tido essas idéias já havia anos. O temperamental Janos ficou compreensivelmente perturbado, temendo ser privado da prioridade. A continuada falta de reconhecimento, bem como a publicação da obra de Lobachevsky em alemão em 1840 tanto o abalaram que ele nada mais publicou. A parte do leão do crédito pelo desenvolvimento da geometria não-euclidiana pertence pois a Lobachevsky[19].

13 A geometria não-euclidiana continuou por várias décadas a ser um aspecto da matemática um tanto à margem até ser completamente integrada através das idéias notavelmente gerais de G. F. B. Riemann (1826-1866). Filho de um pastor de aldeia, Riemann foi educado em condições muito modestas, permanecendo sempre fisicamente frágil e tímido de modos. Teve no entanto boa instrução, primeiro em Berlim depois em Göttingen, onde obteve seu doutorado com uma tese sobre teoria das funções de variável complexa. É aqui que achamos as chamadas equações de Cauchy-Riemann, $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$, que uma função analítica $w = f(z) = u + iv$ de uma variável complexa $z = x + iy$ deve satisfazer, embora essa exigência fosse conhecida já nos dias de Euler e d'Alembert[20]. A tese levava também ao conceito de superfície de Riemann, antecipando o papel que a topologia finalmente viria a desempenhar na análise.

Em 1854 Riemann tornou-se Privatdozent na Universidade de Göttingen, e segundo o costume ele foi designado para apresentar um *Habilitationschrift* perante o corpo docente. O resultado no caso de Riemann foi a mais célebre conferência probacionária da história da matemática, pois apresentava uma profunda e ampla visão de todo o domínio da geometria. A tese tinha o título "Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen" (Sobre as hipóteses que estão nos fundamentos da geometria), mas não apresentava um exemplo específico. Propunha em vez disso uma visão global da geometria como um estudo de variedades de qualquer número de dimensões em qualquer tipo de espaço. Suas geometrias eram não-euclidianas num sentido muito mais geral do que a de Lobachevsky, em que a questão é simplesmente a de quantas paralelas são possíveis por um ponto. Riemann viu que a geometria nem sequer deveria necessariamente tratar de pontos ou retas ou do espaço no sentido ordinário, mas de coleções de n-uplas que são combinadas segundo certas regras.

Entre as regras mais importantes em qualquer geometria, Riemann percebeu, está a regra para achar a distância entre dois pontos que estão infinitesimalmente próximos um do outro. Na geometria euclidiana ordinária essa "métrica" é dada por $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$; mas uma infinidade de outras fórmulas podem ser usadas como fórmula da distância, e naturalmente a métrica usada determinará as propriedades do espaço ou a geometria.

Um espaço cuja métrica é da forma

$$\begin{aligned} ds^2 = {} & g_{11}dx^2 + g_{12}dxdy + g_{13}dxdz \\ & + g_{21}dydx + g_{22}dy^2 + g_{23}dydz \\ & + g_{13}dzdx + g_{23}dzdy + g_{33}dz^2, \end{aligned}$$

onde as g são constantes ou, mais geralmente, funções de x, y e z, chama-se um espaço Riemanniano. Assim (localmente) o espaço euclidiano é apenas um caso muito especial de um espaço riemanniano em que $g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1$ e todos os outros gs são zero. Riemann inclusive desenvolveu a partir da métrica uma fórmula para a curvatura gaussiana de uma "superfície" em seu "espaço". Não é de espantar que depois da conferência de Riemann, e quase pela única vez em sua longa carreira, Gauss tenha exprimido entusiasmo pela obra de outra pessoa[21].

Há também um sentido mais restrito em que usamos hoje a frase geometria riemanniana: a geometria plana que se deduz da hipótese de Saccheri do ângulo obtuso se se abandona também a hipótese da infinitude da reta. Um modelo para essa geometria se encontra na interpretação do "plano" como a superfície de uma esfera e de uma "reta" como um círculo máximo sobre a esfera. Nesse caso a soma dos ângulos de um triângulo é maior que dois retos, ao passo que na geometria de Lobachevsky e Bolyai (correspondendo à hipótese do ângulo agudo) a soma dos ângulos é menor que dois retos. Esse uso do nome de Riemann, no entanto, não faz justiça à mudança fundamental nas concepções geométricas que sua *Habilitationschrift* de 1854 (só publicada em 1867) acarretou. Foi a sugestão de Riemann do estudo geral de espaços métricos com curvatura e não o caso especial da geometria sobre a esfera, que mais tarde tornou possível a teoria geral da relatividade. O próprio Riemann contribuiu grandemente para a física teórica em muitas direções, e portanto foi apropriado que em 1859 ele fosse nomeado sucessor de Dirichlet na cadeira em Göttingen que Gauss ocupara.

Ao mostrar que a geometria não-euclidiana com soma dos ângulos maior que dois retos é realizada sobre a superfície de uma esfera Riemann essencialmente provou a consistência dos axiomas de que a geometria deriva. No mesmo sentido Eugênio Beltrami (1835-1900), um colega de Cremona em Bolonha e mais tarde professor em Pisa, Pávia e Roma, mostrou que havia disponível um modelo para a geometria de Lobachevsky. Esse é a superfície gerada pela revolução de uma tratriz em torno de sua assíntota, superfície denominada pseudo-esfera por ter curvatura negativa constante, assim como a esfera tem curvatura positiva constante. Se definimos a "reta" entre dois pontos da pseudo-esfera como a geodésica por esses pontos, a geometria resultante terá as propriedades que resultam dos postulados de Lobachevsky. Como o plano é uma superfície com curvatura constante nula, a geometria euclidiana pode ser considerada como um intermediário entre os dois tipos de geometria não-euclidiana.

14 A unificação da geometria que Riemann tinha conseguido era especialmente relevante no caso da geometria diferencial, ou geometria "de pequena vizinhança". A geometria analítica, ou "em grande" não mudara muito. Na verdade, a conferência de Riemann foi feita mais ou menos a meio tempo da auto-aposentadoria geométrica de Plücker, durante a qual tinha havido uma pausa na atividade sobre geometria analítica na Alemanha. Em 1865 Plücker novamente voltou a publicar trabalhos de matemática, desta vez em publicações inglesas em vez do *Journal* de Crelle, provavelmente porque Cayley mostrara interesse pela obra de Plücker. Nesse ano ele publicou um artigo em *Philosophical Transactions* (freqüentemente chamada simplesmente *Phil. Trans.*) que três anos depois ele expandiu num livro, sobre uma "Nova geometria do espaço". Aqui ele explicitamente formulou um princípio que ele já indicara vinte anos antes. Um espaço, ele dizia, não precisa ser pensado como uma totalidade de pontos; pode igualmente bem ser visualizado como composto de retas. Na verdade, cada figura que antes fora pensada como um lugar ou totalidade de pontos pode ser ela própria pensada como um *elemento* de um espaço, e a dimensionalidade do espaço corresponderá ao número de parâmetros que determinam esse elemento. Se nosso espaço ordinário a três dimensões é pensado como um "feixe de feno cósmico de palhas infinitamente finas e infinitamente longas" em vez de um "aglomerado de chumbo de matar passarinho infinitamente fino"[22] ele será a quatro dimensões em vez de três. Em 1868, o ano do livro de Plücker baseado nesse tema, Cayley desenvolveu analiticamente em *Phil. Trans.* a noção do plano cartesiano ordinário a duas dimensões como um espaço de cinco dimensões, cujos elementos são as cônicas. Há ainda outras idéias na *Neue Geometrie des Raumes* de Plücker. A representação geométrica de uma única equação $f(x, y, z) = 0$ em coordenadas de ponto é chamada uma superfície, duas equações simultâneas correspondem a uma curva, e três determinam um ou mais pontos. Na "Nova geometria" de seu espaço de retas a quatro dimensões Plücker chamou a "figura" representada por uma única equação $f(r, s, t, u) = 0$ nas quatro coordenadas de seu espaço de retas um "complexo", duas equações designavam uma "congruência" e três um "domínio". Descobriu que o complexo de retas quadrático tem propriedades semelhantes às de uma superfície quádrica, mas não viveu para completar o estudo extenso que planejava. Morreu em 1868, o ano

[19]Porções das obras tanto de Lobachevsky quanto de Bolyai aparecem em inglês em muitos lugares, inclusive em Smith, *Source Book*. Uma exposição muito completa se encontra em Friedrich Engel e Paul Stäckel, *Urkunden zur Geschichte der nichteuklidischen Geometrie* (1898-1913). Entre as exposições mais completas em inglês está uma em Roberto Bonola, *Non-Euclidean Geometry* (1955), que contém traduções da *Teoria das Paralelas* de Lobachevsky e da *Ciência absoluta do espaço* de Bolyai

[20]Veja E. T. Bell, *Development of Mathematics* (New York: McGraw-Hill, 1940), p. 465

[21]Veja E. T. Bell, *Men of Mathematics* (New York: Simon and Schuster, 1937), pp. 484-509

[22]Veja E. T. Bell, *Men of Mathematics*, p. 400

em que sua Nova Geometria apareceu, editada por um de seus estudantes, Felix Klein (1849-1925).

15 Klein fora assistente de Plücker na Universidade de Bonn durante a volta deste último à geometria e num certo sentido foi o sucessor de Plücker no entusiasmo pela geometria analítica. No entanto, a obra do jovem no campo tomou direção diferente — uma direção que serviu para trazer um elemento de unidade à diversidade dos novos resultados da pesquisa. Esse novo ponto de vista pode ter sido em parte resultado de visitas a Paris, onde as noções de Lagrange de teoria dos grupos tinham sido desenvolvidas, especialmente através de grupos de substituição, num completo ramo da álgebra. Klein ficou profundamente impressionado com as possibilidades unificadoras do conceito de grupo, e passou boa parte do resto de sua vida desenvolvendo, aplicando e popularizando a noção. Em parte dessa obra ele colaborou com o matemático norueguês, Sophus Lie (1842-1899), estudante contemporâneo de Klein em Göttingen que descobriu as transformações de contato e escreveu um tratado em três volumes sobre a teoria de grupos de transformações (1888-1893). As transformações de contato de Lie, sistematizadas por Klein, estabeleciam uma correspondência biunívoca entre as retas e esferas do espaço euclidiano de tal modo que retas concorrentes correspondem a esferas tangentes[23]. (Segundo o conceito de Plücker, as retas e esferas no espaço euclidiano tridimensional constituem um espaço a quatro dimensões.) Em geral, transformações de contato são transformações analíticas que levam superfícies tangentes em superfícies tangentes.

Diz-se que uma coleção de elementos forma um grupo com relação a uma dada operação se (1) a coleção é fechada sob a operação, (2) a coleção contém um elemento identidade com relação à operação, (3) para cada elemento na coleção há um elemento inverso com relação à operação e (4) a operação é associativa. Os elementos podem ser números (como na aritmética), pontos (na geometria), transformações (em álgebra ou geometria) ou qualquer coisa. A operação pode ser aritmética (como adição ou multiplicação) ou geométrica (como uma rotação em torno de um ponto ou eixo) ou qualquer outra regra para combinar dois elementos de um conjunto (tais como duas transformações) de modo a formar um terceiro elemento do conjunto. A generalidade do conceito de grupo é evidente; Klein numa célebre aula inaugural em 1872, quando se tornou professor em Erlangen, mostrou como podia ser aplicado como um meio conveniente para caracterizar as várias geometrias que tinham aparecido durante o século.

Essa conferência de Klein, que veio a chamar-se o *Erlanger Programm*, descrevia a geometria como o estudo das propriedades das figuras que permanecem invariantes sob um particular grupo de transformações. Portanto toda classificação de grupos de transformações torna-se uma codificação das geometrias. A geometria plana euclidiana, por exemplo, é o estudo das propriedades das figuras, inclusive área e comprimento, que ficam invariantes sob o grupo de transformações obtidas a partir das translações e rotações do plano — as transformações ditas rígidas, equivalentes ao axioma não enunciado de Euclides de que as figuras permanecem invariantes quando deslocadas no plano. Analiticamente as transformações rígidas do plano podem ser escritas na forma

$$\begin{cases} x' = ax + by + c, \\ y' = dx + ey + f, \end{cases}$$

onde $ae - bd = 1$; esses elementos formam um grupo. A "operação" que "combina" dois tais elementos é simplesmente a de efetuar as transformações uma depois da outra. É fácil ver que se a transformação acima é seguida por uma outra

$$\begin{cases} x'' = Ax' + By' + C, \\ y'' = Dx' + Ey' + F, \end{cases}$$

o resultado das duas operações executadas sucessivamente é equivalente a alguma operação desse tipo que levará o ponto (x, y) no ponto (x'', y'').

[23]Veja Coolidge, *History of Geometrical Methods*, pp. 298 e seguintes

Se nesse grupo de transformações substituímos a restrição $ae - bd = 1$ pela exigência mais geral $ae - bd \neq 0$ as novas transformações também formam um grupo. No entanto comprimentos e áreas não são mais preservados, mas uma cônica de um tipo dado (elipse, parábola, hipérbole) permanecerá, sob essas transformações, uma cônica de mesmo tipo. Tais transformações, estudadas antes por Möbius, são conhecidas como transformações afins; caracterizam uma geometria conhecida como *afim*, assim chamada porque pontos finitos vão em pontos finitos sob qualquer transformação dessas. É claro, pois, que a geometria euclidiana, do ponto de vista de Klein, é simplesmente um caso especial da geometria afim. A geometria afim por sua vez é apenas um caso especial de uma outra ainda mais geral — a projetiva. Uma transformação projetiva pode ser escrita na forma

$$x' = \frac{ax + by + c}{dx + ey + f}, \qquad y' = \frac{Ax + By + C}{dx + ey + f}.$$

É claro que se $d = 0 = e$ e $f = 1$, a transformação é afim. Propriedades interessantes das transformações projetivas incluem o fato de que (1) uma cônica é transformada numa cônica e (2) razões duplas permanecem invariantes. Papus tinha percebido essas propriedades um milênio e meio antes, mas não tinha idéia do conceito de grupo que possibilita essa organizada classificação das geometrias. Na verdade, para Papus, havia só uma geometria, pois os pontos ideais da geometria projetiva seriam impensáveis na antiguidade. O *Erlanger Programm* de Klein era tão claramente um produto do século dezenove que não poderia ter sentido em nenhuma época anterior. A princípio teve apenas circulação limitada, mas antes do fim do século veio a ter grande influência em todo o mundo matemático[24]. A influência persistente do *Erlanger Programm* pode ainda hoje ser percebida em quase qualquer tratado geral de geometria moderno[25].

16 A obra de Klein num certo sentido é um clímax adequado para a "Idade Heróica da Geometria" pois ele ensinou durante meio século. Tão contagioso era seu entusiasmo que algumas figuras do fim do século dezenove profetizaram que não só a geometria mas finalmente toda a matemática viria a ser contida na teoria dos grupos. Sua clássica história da matemática no século dezenove (publicada postumamente)[26] mostra como ele conhecia todos os aspectos do assunto; seu nome é também lembrado hoje na topologia na superfície de uma face chamada garrafa de Klein. Ocupava-se muito de geometria não-euclidiana, à qual contribuiu com os nomes "geometria elítica" e "geometria hiperbólica" para as hipóteses do ângulo obtuso e do ângulo agudo respectivamente; para o último ele propôs um modelo simples como alternativa ao de Beltrami. Seja o plano hiperbólico imaginado como formado dos pontos interiores a um círculo C no plano euclidiano, seja a "reta" hiperbólica por dois pontos P_1 e P_2 a parte da reta euclidiana P_1P_2 que jaz dentro do círculo C, e seja a "distância" entre os dois pontos P_1 e P_2 dentro do círculo definida como

$$\ln \frac{P_2Q_1 \cdot P_1Q_2}{P_1Q_1 \cdot P_2Q_2},$$

onde Q_1 e Q_2 são os pontos de intersecção da reta P_1P_2 com o círculo C (Fig. 24.1). Com uma definição conveniente de "ângulo" entre duas "retas" os "pontos", "retas" e "ângulos" no modelo hiperbólico de Klein têm propriedades semelhantes às da geometria euclidiana, excetuado o postulado das paralelas.

Desde Monge não existira professor tão influente, pois além de dar aulas entusiasmantes Klein se preocupava com o ensino da matemática em muitos níveis e exerceu

[24]Uma tradução em inglês sob o título "A Comparative Review of Recent Researches in Geometry" apareceu em 1893 no segundo volume do *Bulletin of the New York Mathematical Society* (agora o *Bulletin of the American Mathematical Society*)

[25]Veja, por exemplo, Annita Tuller, *A Modern Introduction to Geometries* (Princeton, New York: D. Van Nostrand Co., 1967)

[26]*Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert* (1926-1927)

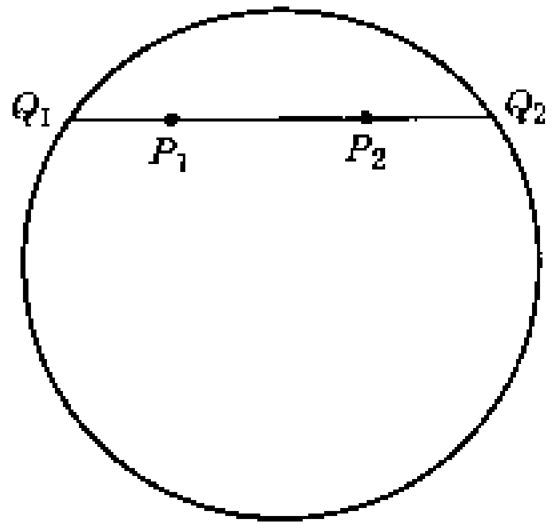


Figura 24.1

forte influência em círculos pedagógicos. Em 1886 ele se tornou professor de matemática em Göttingen, e sob sua liderança a universidade tornou-se a Meca a que estudantes de muitos países acorriam. Em seus últimos anos Klein desempenhou muito eficazmente o papel de "velho estadista" no reino da matemática[27]. Assim a idade áurea da geometria moderna que começara tão auspiciosamente na França na École Polytechnique com a obra de Lagrange, Monge e Poncelet atingiu a seu zênite na Alemanha na Universidade de Göttingen, através da pesquisa e inspiração de Gauss, Riemann e Klein.

BIBLIOGRAFIA

Bolyai, Johann, *Geometrische Untersuchungen*, editado por Paul Stäckel (Leipzig: B. G. Teubner, 1913)

Bonola, Roberto, *Non-Euclidean Geometry*, traduzido por H. S. Carslaw (New York: reimpressão Dover, 1955)

Boyer, C. B., *History of Analytic Geometry* (New York: Scripta Mathematica, 1956)

Cajori, Florian, *History of Mathematics*, 2.ª edição (New York: Macmillan, 1931)

Chasles, Michel, *Aperçu historique sur l'origine et la développement des méthodes en géométrie* (Bruxelas, 1837; 2.ª edição, Paris, 1875)

Clebsch, Alfred, "Notice sur les travaux de Jules Plücker", traduzido por Paul Mansion, *Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze Matematiche e Fisiche*, 5 (1872) 183-212

Coolidge, J. L., "The Heroic Age of Geometry", *Bulletin of the American Mathematical Society*, **35** (1929), 19-37

Coolidge, J. L., *A History of Geometrical Methods* (New York: reimpressão Dover, 1963)

De Vries, Hk., "How Analytic Geometry Became a Science," *Scripta Mathematica*, **14** (1948), 5-15

Engel, Friedrich, e Paul Stäckel, *Urkunden zur Geschichte der nichteuklidischen Geometrie* (Leipzig: B. G. Teubner, 1898-1913, 2 volumes)

Ernst, Wilhelm, *Julius Plücker* (Bonn, 1933)

Fano, G., "Gegensatz von synthetischer und analytischer Geometrie in seiner historischen Entwicklung im XIX. Jahrhundert", *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften*, Vol. III, Parte 1, primeira metade, pp. 223-288; tradução para o francês em *Encyclopédie des Sciences Mathématiques*, Tomo III, Vol. 1, pp. 185-259

Kagan, V., *N. Lobachevsky and his Contribution to Science* (Moscou: Foreign Languages Publishing House, 1957)

Klein, Felix, *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert* (Berlin: Springer, 1926-1927, 2 volumes)

Klein, Felix, *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint*, Vol. II, *Geometry* (New York, brochura Dover, 1939)

Kötter, Ernst, "Die Entwickelung der synthetischen Geometrie, von Monge bis auf Staudt, 1847," *Jahresbericht der Deutscher Mathematiker-Vereinigung*, **5**, parte 2 (1898-1901)

Loria, Gino, *Storia delle matematiche* (Turin: Sten, 1929-1935, 3 volumes)

Loria, Gino, *Il passato e il presente delle principali teorie geometriche*, 4.ª edição (Pádua: Cedam, 1931)

Nagel, Ernest, "The Formation of Modern Conceptions of Formal Logic in the Development of Geometry", *Osiris*, 7 (1939), 142-224

Patterson, Boyd C., "The Origins of the Geometric Principle of Inversion," *Isis*, **19** (1933), 154-180

Pierpont, James, "The History of Mathematics in the Nineteenth Century," *Bulletin of the American Mathematical Society*, **11** (1904), 136-159

Schmidt, Franz, e Paul Stäckel, eds., *Briefwechsel zwischen Carl Friedrich Gauss und Wolfgang Bolyai* (Leipzig, 1899)

[27]Veja, por exemplo, G. A. Miller, "Felix Klein and the History of Mathematics", *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 13 (1927), 611-613

Simon, Max, "Uber die Entwicklung der Elementargeometrie im XIX. Jahrhundert", *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Ergänzungsbände*, 1 (1906)

Smith, D. E., *Source Book in Mathematics* (New York: reimpressão Dover, 1959)

Sommerville, D. M. Y., *Bibliography of Non-Euclidean Geometry* (Londres: Harrison, 1911)

Vucinich, Alexander, "Nikolai Ivanovich Lobachevskii, The Man behind the First Non-Euclidean Geometry", *Isis*, **53** (1962), 465-481

EXERCÍCIOS

1. O papel de École Polytechnique, uma escola de engenharia, foi um auxílio ou prejudicou o renascimento da geometria pura no século dezenove? Explique.

2. Cite meia dúzia de casos de descoberta independente e simultânea na geometria durante a primeira metade do século dezenove, mencionando os papéis desempenhados pelos descobridores.

3. Dê os nomes de três geômetras importantes na França e três na Alemanha durante o século dezenove, citando algumas de suas contribuições principais e indicando se eles eram primariamente analistas ou sintetistas.

4. Foi por acaso ou por conseqüência natural que a geometria não-euclidiana primeiro apareceu na Alemanha, Rússia e Hungria e não na França ou Inglaterra? Dê razões para sua resposta

5. A descoberta e a justificação do princípio de dualidade foram o resultado de desenvolvimentos na geometria sintética ou na geometria analítica? Explique.

6. Como você explica o fato de a Inglaterra, um bastião da geometria, durante o século dezoito, não tomar a liderança no reavivamento da geometria pura no século dezenove?

7. Descreva vários aspectos em que a geometria de coordenadas no século dezenove difere da de Fermat e Descartes.

8. Ache o eixo radical ou "reta de Gaultier" do par de círculos $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$ e $(x-2)^2(y-4)^2 - 1 = 0$. Esboce vários membros da família radical e o eixo radical.

9. Mostre que com a definição de Klein da distância em seu modelo de geometria hiperbólica, três pontos colineares na ordem P, Q, R tem a propriedade $PQ + \overline{QR} = \overline{PR}$.

10. Mostre que no modelo de Klein a reta é infinitamente longa no sentido que a distância entre dois pontos sobre ela cresce indefinidamente quando um dos pontos permanece fixo e o outro tende a um ponto de intersecção da reta com o círculo de fronteira

11. Para o triângulo reto três-quatro-cinco ache os raios dos círculos inscrito e excrito e o raio do círculo de nove pontos.

12. Construa, com régua e compasso, o círculo inscrito, os três círculos excritos e o círculo de nove pontos de um triângulo.

13. Mostre que o círculo de nove pontos de um triângulo retângulo isósceles é tangente tanto ao círculo circunscrito quanto ao inscrito.

14. Mostre que em coordenadas homogêneas no plano o inverso $P'(x', y', z')$ de $P(x, y, t)$ com relação ao círculo $x^2 + y^2 = a^2t^2$ é dado pela equação $x' = a^2xt$, $y' = a^2yt$, $t' = x^2 + y^2$.

15. Mostre que a inversa de uma parábola não é uma parábola.

*16. Prove que o centro do círculo de nove pontos de qualquer triângulo é ponto médio entre o circuncentro e o ortocentro.

*17. Prove que se os ângulos de base de um quadrilátero são retos e se os dois lados perpendiculares à base são iguais, os ângulos do topo são iguais. São agudos, retos ou obtusos? Explique.

*18. Prove que o inverso plano de um círculo que não passa pelo centro de inversão é um círculo que não passa pelo centro de inversão. Qual é o inverso de um círculo que passa pelo centro de inversão?

*19. Uma inversão no espaço tridimensional com relação a uma esfera transforma um plano num plano? Explique completamente.

*20. Prove que um círculo ortogonal ao círculo de inversão é transformado em si mesmo, mas que o inverso do centro não é o centro do círculo invertido.

*21. Se $C_1 = 0$ e $C_2 = 0$ são dois círculos num plano, descreva os membros da família $K_1C_1 + K_2C_2 = 0$ para os três casos seguintes: (a) $C_1 = 0$ e $C_2 = 0$ se cortam; (b) $C_1 = 0$ e $C_2 = 0$ são tangentes; (c) $C_1 = 0$ e $C_2 = 0$ não têm ponto comum.

*22. Verifique o teorema de Green, usando integral curvilínea e dupla, para o caso em que $P = xy$ e $Q = x^2 + y^2$ e a região R é a parte do plano limitada pelo quadrado unitário com vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ e $(0, 1)$.

*23. Mostre que uma cônica sob inversão é transformada numa cúbica ou quártica conforme o centro de inversão esteja ou não sobre a cônica.

*24. Qual seria a dimensionalidade de uma geometria plana em que os elementos fundamentais não são pontos mas (a) retas ou (b) círculos ou (c) parábolas ou (d) secções cônicas ou (e) curvas algébricas de grau três?

Capítulo **25**

A aritmetização da análise

> Na maior parte das ciências uma geração põe abaixo o que outra construiu, e o que uma estabeleceu a outra desfaz. Somente na matemática é que cada geração constrói um novo andar sobre a antiga estrutura.
>
> *Hermann Hankel*

1 Newton e Leibniz tinham entendido que a análise, o estudo de processos infinitos, tratava de grandezas contínuas, tais como comprimentos, áreas, velocidades e acelerações, ao passo que a teoria dos números claramente tem como seu domínio o conjunto discreto dos números naturais. No entanto vimos que Bolzano tentou dar provas puramente aritméticas de proposições, tais como o teorema da locação na álgebra elementar, que pareciam depender de propriedades de funções contínuas; e Plücker tinha aritmetizado completamente a geometria analítica. A teoria dos grupos originalmente tratara de conjuntos discretos de elementos, mas Klein tinha em mente uma unificação dos aspectos discreto e contínuo da matemática sob o conceito de grupo. O século dezenove foi de fato um período de correlação na matemática, e a aritmetização da análise, frase cunhada por Klein em 1895, era um aspecto dessa tendência.

A palavra chave na análise, é claro, é "função", e foi especialmente no esclarecimento desse termo que surgiu a tendência à aritmetização. Já antes do meio do século dezoito tinham surgido diferenças de opinião quanto à representação de funções, quando d'Alembert e Euler tinham dado soluções do problema de uma corda vibrante em "forma fechada", usando duas funções arbitrárias, ao passo que Daniel Bernoulli achara uma solução em termos de uma série infinita de funções trigonométricas. Como essa última solução parecia implicar periodicidade, ao passo que as funções arbitrárias de d'Alembert e Euler não eram necessariamente periódicas, parecia que a solução de Bernoulli era menos geral. Que isso não era assim foi mostrado em 1824 por J. B. J. Fourier (1768-1830).

Joseph Fourier era filho de um alfaiate em Auxerre; foi educado pela Ordem Beneditina, na qual num dado momento ele pensou em tomar ordens. Em vez disso tornou-se professor de matemática, primeiro na escola militar local e depois na École Normale e na École Polytechnique. Em 1798 ele se juntou a Monge na aventura egípcia de Napoleão, tornando-se secretário do Institut d'Egypte e compilando a *Description de l'Egypte*. Ao voltar à França ele teve vários postos administrativos, mas assim mesmo teve oportunidade de continuar seus trabalhos científicos. Ele é mais conhecido hoje por seu célebre *Théorie analytique de la chaleur* de 1822. Esse livro, descrito por Kelvin como "um grande poema matemático" foi um desenvolvimento de idéias que dez anos antes lhe tinham valido o prêmio da Académie por um ensaio sobre a teoria matemática do calor. Lagrange, Laplace e Legendre, os julgadores, tinham criticado uma certa imprecisão de raciocínio no ensaio; a posterior elucidação das idéias de Fourier foi até certo ponto a razão pela qual o século dezenove veio a ser chamado a idade do rigor[1].

A principal contribuição de Fourier e seu livro clássico à matemática foi a idéia, vagamente percebida por Daniel Bernoulli, de que qualquer função $y = f(x)$ pode ser representada por uma série da forma

$$y = 1/2\, a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \cdots + a_n \cos nx + \cdots$$
$$+ b_1 \operatorname{sen} x + b_2 \operatorname{sen} 2x + \cdots + b_n \operatorname{sen} nx + \cdots,$$

[1]Veja P. E. B. Jourdain, "Note on Fourier's Influence on the Conceptions of Mathematics", *International Congress of Mathematicians* (Cambridge, 1912), Vol. II, pp. 526-527

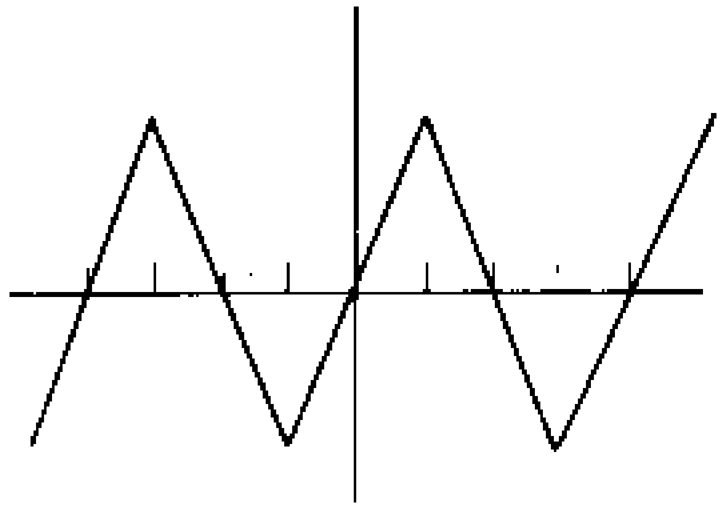


Figura 25.1

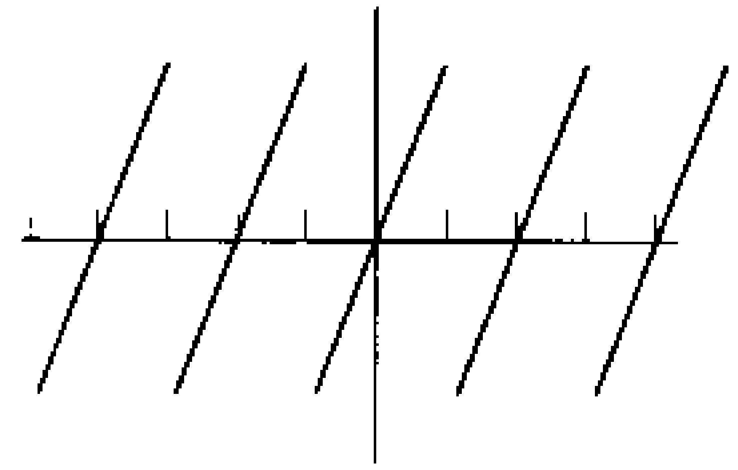


Figura 25.2

agora conhecida como série de Fourier. Uma tal representação em série admite uma generalidade muito maior no tipo de funções que podem ser estudadas que a série de Taylor. Mesmo que haja muitos pontos em que a derivada não existe (como na Fig. 25.1) ou em que a função não é contínua (como na Fig. 25.2), a função ainda assim pode ter uma expansão de Fourier; essa expansão é facilmente encontrada observando que

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx, \qquad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$$

e

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen} nx\,dx.$$

Fourier, como Monge, caiu em desgraça quando se deu a restauração dos Bourbons após o exílio de Napoleão em 1815, mas seu trabalho é fundamental tanto na física quanto na matemática. As funções já não precisavam mais ter a forma bem comportada com que os matemáticos estavam acostumados. Lejeune Dirichlet, por exemplo, em 1837 sugeriu[2] uma definição muito ampla de função: se uma variável y está relacionada com uma variável x de tal modo que, sempre que é dado um valor numérico a x, existe uma regra segundo a qual um valor único de y fica determinado, então diz-se que y é função da variável independente x. Isso chega perto da noção moderna de uma correspondência entre dois conjuntos de números, mas o conceito de "conjunto" e de "número real" ainda não tinham sido estabelecidos. Para indicar a natureza completamente arbitrária da regra de correspondência, Dirichlet propôs uma função muito "mal comportada"; quando x é racional, ponha-se $y = c$, e quando x é irracional seja $y = d \neq c$. Essa função, freqüentemente chamada função de Dirichlet, é tão patológica que não há valor de x para o qual seja contínua. Dirichlet deu também a primeira prova rigorosa da convergência de série de Fourier para uma função sujeita a certas restrições, ditas condições de Dirichlet. Uma série de Fourier nem sempre converge para o valor da função da qual deriva, mas Dirichlet no *Journal* de Crelle de 1828 provou o seguinte teorema. Se $f(x)$ é periódica de período 2π, se para $-\pi < x < \pi$ a função $f(x)$ tem um número finito de valores máximos e mínimos e um número finito de descontinuidades, e se $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$ é finita, então a série de Fourier converge para $f(x)$ em todos os pontos em que $f(x)$ é contínua e em pontos de salto converge para a média aritmética dos limites à direita e à esquerda da função. Também útil é outro teorema conhecido como critério de Dirichlet: se os termos da série $a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n + \cdots$ são tais que os bs são positivos e tendem monotonicamente a zero, e se existe um número M tal que $|a_1 + a_2 + \cdots + a_m| < M$ para todos os valores de m, então a série converge.

O nome de Dirichlet surge em muitas outras conexões na matemática pura e aplicada. Especialmente importante na termodinâmica e eletrodinâmica é o problema de Dirichlet: dada uma região R limitada por uma curva fechada C e uma função $f(x, y)$ contínua sobre C, achar uma função $F(x, y)$ contínua em R e C que satisfaça à equação de Laplace em R e que seja igual a f sobre C. Em matemática pura Dirichlet é bem conhe-

[2]Veja Dirichlet, *Werke* (1889-1897), I, 135

cido pela aplicação que fez da análise à teoria dos números, em conexão com a qual introduziu a série de Dirichlet — $\sum a_n e^{-\lambda_n S}$ — onde os coeficientes de Dirichlet a_n são números complexos, os expoentes de Dirichlet λ_n são números reais monotonicamente crescentes e S é uma variável complexa.

2 O sucessor de Dirichlet em Göttingen, Bernhard Riemann, também conseguiu profundos teoremas relacionando a teoria dos números com a análise clássica. Euler tinha observado conexões entre a teoria dos números e a série

$$1/1^s + 1/2^s + 1/3^s + \cdots + 1/n^s + \cdots,$$

onde s é um inteiro — um caso especial da série de Dirichlet. Riemann estudou a mesma série para uma variável complexa, a soma da série definindo uma função $\zeta(s)$ que a partir daí passou a ser conhecida como função zeta de Riemann. Uma das sugestões tantalizantes que os matemáticos ainda não puderam provar ou negar é a famosa conjetura de Riemann: todos os zeros imaginários $s = \sigma + it$ da função zeta[3] têm parte real $\sigma = 1/2$. Provavelmente nenhum ramo da matemática já legou tantos problemas não resolvidos quanto a teoria dos números. Riemann era um matemático de interesses múltiplos e mente fértil, contribuindo não só para a geometria e a teoria dos números como também para a análise. Em análise é lembrado por seu papel no refinamento da definição de integral, pela ênfase que deu às equações de Cauchy-Riemann, e pelas superfícies de Riemann. Essas superfícies são um engenhoso meio de uniformizar uma função, isto é, dar uma representação unívoca de funções complexas que no plano ordinário de Gauss seriam multivalentes. Aqui vemos um aspecto notável da obra de Riemann — uma concepção fortemente intuitiva e geométrica da análise que está em marcado contraste com as tendências aritmetizantes da escola de Weierstrass. Seus processos foram chamados "um método de descoberta" ao passo que os de Weierstrass constituíam "um método de demonstração"[4], e seus resultados foram tão significativos que Bertrand Russell descreveu-o como "logicamente o predecessor imediato de Einstein". Foi o gênio intuitivo de Riemann na física e na matemática que produziu conceitos como o de curvatura de um espaço riemanniano ou variedade, sem o qual a teoria da relatividade geral não poderia ter sido formulada[5].

3 A teoria dos números trata primariamente dos inteiros ou, mais geralmente, das razões de inteiros — os chamados números racionais. Tais números são sempre raízes de uma equação linear $ax + b = 0$ com coeficientes inteiros. A análise real lida com um tipo de número mais geral, que pode ser racional ou irracional. Essencialmente já Euclides sabia que as raízes de $ax^2 + bx + c = 0$ onde a, b, c são múltiplos inteiros de um dado comprimento, podem ser construídos geometricamente com régua e compasso. Se os coeficientes de $ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \cdots + px + q = 0$, onde n e $a, b, c, \ldots, q$ são inteiros e $n > 2$, as raízes da equação em geral não são construtíveis com os instrumentos euclidianos. As raízes de uma tal equação, para $n > 0$, chamam-se números algébricos, para indicar o modo pelo qual são definidos. Como todo número racional é raiz de uma tal equação com n 1, surge naturalmente a questão de saber se ou não todo número irracional é raiz de uma tal equação com $n > 2$. A resposta negativa a essa questão foi finalmente dada em 1844 por Liouville, que nesse ano construiu uma classe ampla de números reais não-algébricos. A particular classe que ele construiu é conhecida como dos números de Liouville, o conjunto todo dos números reais não algébricos sendo de-

[3]Para propriedades da função zeta veja E. Landau, *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen* (Leipzig, 1909). Uma exposição sobre a hipótese de Riemann se encontra em E. T. Bell, *The Development of Mathematics* (1940), p. 293

[4]Henri Poincaré, "L'oeuvre mathématique de Weierstrass", *Acta Mathematica*, 22 (1898-1899), 1-18

[5]Em E. T. Bell, *Men of Mathematics* (New York: Simon and Schuster, 1937) há um capítulo caloroso, entitulado "Anima Candida", inteiramente dedicado a Riemann e sua obra (pp. 484-509)

signado como dos números transcendentes. A construção de Liouville de números transcendentes é bastante elaborada, mas para quem não insiste numa prova de transcendentalismo podem ser dados alguns exemplos simples de números transcendentes — tais como 0,1001000100001 ... ou os números da forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}}.$$

Provar que um número real particular, como e ou π não é algébrico é em geral bastante difícil. Liouville, por exemplo, conseguiu provar, em seu *Journal* de 1844, que nem e nem e^2 podiam ser raízes de uma equação quadrática com coeficientes inteiros; logo, dado um segmento de reta unitário, segmentos de comprimentos e ou e^2 não são construtíveis com instrumentos euclidianos. Mas passaram-se quase trinta anos antes que outro matemático francês, Charles Hermite (1822-1901), continuando as idéias de Liouville, mostrasse que e não pode ser raiz de nenhuma equação polinomial a coeficientes inteiros — isto é, que e é transcendente[6].

O nome "teorema de Hermite" é freqüentemente dado à afirmação de que e é um número transcendente. Hermite, como muitos de seus renomados predecessores, estudou na École Polytechnique, onde mais tarde ensinou e onde era geralmente considerado o mais importante autor francês em teoria das funções desde os dias de Cauchy. Entre seus sucessos notáveis estava uma resolução da equação quíntica geral por meio de funções elíticas[7]. Liouville também é conhecido por uma variedade de outras contribuições. Em análise sua obra é lembrada pelo teorema de Liouville — se $f(z)$, uma função analítica inteira da variável complexa z, é limitada em todo o plano complexo, então $f(z)$ é uma constante. Desse teorema o teorema fundamental da álgebra pode ser deduzido como simples corolário como segue. Se $f(z)$ é um polinômio de grau maior que zero, e se $f(z)$ nunca se anulasse no plano complexo, então seu recíproco $F(z) = 1/F(z)$ satisfaria às condições do teorema de Liouville. Conseqüentemente $F(z)$ seria uma constante, o que é obviamente falso. Logo a equação $f(z) = 0$ é satisfeita ao menos por um valor complexo $z = z_0$. Na geometria analítica plana há um outro "teorema de Liouville" — os comprimentos das tangentes de um ponto P a uma cônica C são proporcionais às raízes cúbicas dos raios de curvatura de C nos correspondentes pontos de contato[8].

O status do número π desafiou os matemáticos por nove anos mais que o número e. Lambert em 1770 e Legendre em 1794 tinham mostrado que tanto π quanto π^2 são irracionais, mas essa prova não tinha posto fim à velhíssima questão da quadratura do círculo. A questão foi finalmente encerrada em 1882 por um artigo em *Mathematische Annalen* de C. L. F. Lindemann (1852-1939) de Munich. O artigo, intitulado "Über die Zahl π", mostrava conclusivamente, estendendo a obra de Liouville e Hermite, que π também é transcendente. Em sua prova Lindemann primeiro mostrou que a equação $e^{ix} + 1 = 0$ não pode ser satisfeita se x é algébrico. Como Euler mostrara que o valor $x = \pi$ satisfaz à equação, segue-se que π não é algébrico. Aqui, finalmente, estava a resposta ao problema clássico da quadratura do círculo. Para que a quadratura do círculo fosse possível com os instrumentos euclidianos o número π teria que ser raiz de uma equação algébrica com uma raiz exprimível por raízes quadradas. Como π não é

[6]Para uma exposição completa sobre a história do assunto veja U. G. Mitchell e Mary Strain, "The Number e", *Osiris*, 1 (1936), 476-496. Veja também D. E. Smith, *Source Book in Mathematics* (New York: reimpressão Dover, 1959), pp. 99-106

[7]Veja E. Picard, "L'oeuvre scientifique de Charles Hermite" em École Normale Supérieure, *Annales Scientifiques* (3), 18 (1901), 9-34, ou o prefácio de Charles Hermite, *Oeuvres*, editado por Emile Picard (1905-1917)

[8]Para esse e outros aspectos de sua obra veja Gino Loria, "J. Liouville and His Work", *Scripta Mathematica*, 4 (1936), 147-154, 257-262; 301-305; ou, em francês, *Archeion*, 18 (1936), 117-139

algébrico, o círculo não pode ser quadrado segundo as regras clássicas[9]. Estimulado por seu sucesso, Ferdinand Lindemann mais tarde publicou várias pretensas provas do último teorema de Fermat, mas outros mostraram que elas não eram válidas.

4 O ano de 1872 foi um ano de festa não só na geometria mas ainda mais particularmente na análise. Nesse ano contribuições cruciais na direção da aritmetização da análise foram feitas por não menos que cinco matemáticos, um francês, os demais alemães. O francês foi H. C. R. (Charles) Méray (1835-1911) da Borgonha; os quatro alemães foram Karl Weierstrass (1815-1897) da Universidade de Berlim, seu aluno H. E. Heine (1821-1881) de Halle, Georg Cantor (1845-1918), também de Halle, e J. W. R. Dedekind (1831-1916) de Braunschweig. Esses homens num certo sentido representaram o clímax de meio século de investigação sobre a natureza da função e do número que começara em 1822 com a teoria do calor de Fourier e com uma tentativa feita naquele mesmo ano por Martin Ohm (1792-1872) de reduzir toda a análise a aritmética em *Versuch eines vollständig konsequenten Systems der Mathematik*. Havia duas causas principais de inquietação nesse intervalo de cinqüenta anos. Uma era a falta de confiança nas operações executadas sobre séries infinitas. Não era sequer claro se ou não uma série infinita de funções — de potências, ou de senos e co-senos, por exemplo — sempre converge à função de que provém. Uma segunda causa de preocupação era a falta de qualquer definição da expressão "número real" que estava no próprio cerne do programa de aritmetização. Bolzano em 1817 tinha percebido tão bem a necessidade de rigor em análise que Klein o chamava "o pai da aritmetização"; mas Bolzano tinha sido menos influente que Cauchy, cuja análise ainda carregava muito de intuição geométrica. Mesmo a função contínua e não derivável de Bolzano de cerca de 1830 foi esquecida pelos sucessores, e o exemplo de uma tal função dado por Weierstrass (em aulas dadas em 1861 e num artigo para a Academia de Berlin de 1872) em geral foi considerado como a primeira ilustração do fato.

Riemann enquanto isso tinha exibido uma função $f(x)$ que é descontínua numa infinidade de pontos num intervalo mas cuja integral no entanto existe e define uma função contínua $F(x)$ que para a infinidade de pontos em questão não tem derivada. A função de Riemann num certo sentido é menos patológica que as de Bolzano ou Weierstrass, mas tornou claro que a integral exigia uma definição mais cuidadosa que a de Cauchy, que fora conduzido em grande parte pelo sentimento geométrico sobre a área sob uma curva. A definição atual de integral definida sobre um intervalo em termos de somas superiores e inferiores é geralmente conhecida como integral de Riemann, em honra do homem que deu condições necessárias e suficientes para que uma função limitada seja integrável. A função de Dirichlet, por exemplo, não tem integral de Riemann em nenhum intervalo. Definições ainda mais gerais da integral, com condições mais fracas sobre a função, foram propostas no século seguinte, mas a definição de integral usada em quase todos os cursos universitários de cálculo é ainda a de Riemann.

5 Houve uma lacuna de quase cinqüenta anos entre a obra de Bolzano e a de Weierstrass, mas a unidade de esforços nesse meio século e a necessidade de redescobrir a obra de Bolzano eram tais que há um célebre teorema que leva o nome de ambos, o teorema de Bolzano-Weierstrass: um conjunto limitado S contendo infinitos elementos (pontos ou números) tem ao menos um ponto de acumulação. Esse teorema foi provado por Bolzano e aparentemente Cauchy também o conhecia, mas foi a obra de Weierstrass que o tornou familiar aos matemáticos.

[9]Para uma exposição excepcionalmente extensa sobre a história mais recente dos três problemas clássicos veja Felix Klein, *Famous Problems of Elementary Geometry*, traduzido por Beman e Smith (reimpresso em New York, 1955). Veja também E. W. Hobson, *Squaring the Circle*, e D. E. Smith, "The History and Transcendence of π", em J. W. A. Young, *Monographs on Topics of Modern Mathematics* (New York, 1915), pp. 387-416. Cf. Hermann von Baravalle, "The Number π", *The Mathematics Teacher*, 45 (1952), 340-348, ou 60 (1967), 479-487

Ceticismo quanto às séries de Fourier fora expresso por Lagrange, mas Cauchy em 1823 julgava ter provado a convergência da série de Fourier geral. Dirichlet mostrara que a prova de Cauchy não era satisfatória e tinha fornecido condições suficientes para convergência. Foi ao procurar liberalizar as condições de Dirichlet para a convergência de uma série de Fourier que Riemann desenvolveu sua definição de integral de Riemann; e mostrou que uma função $f(x)$ pode ser integrável em um intervalo sem ser representável por uma série de Fourier[10]. Foi o estudo das séries trigonométricas que levou também à teoria de Cantor, a ser descrita mais adiante.

6 Dirichlet morreu no ano crítico de 1872. Só um ano depois morreu também, com trinta e quatro anos, um jovem que prometia dar contribuições significativas tanto à matemática quanto à sua história. Foi Hermann Hankel (1839-1873), aluno de Riemann e professor de matemática em Leipzig. Em 1867 ele tinha publicado um livro, *Theorie der komplexen Zahlensysteme*, em que observava que "a condição para construir uma aritmética universal é pois uma matemática puramente intelectual, desligada de todas as percepções". Vimos que a revolução na geometria teve lugar quando Gauss, Lobachevsky e Bolyai se libertaram das preconcepções do espaço. Um tanto no mesmo sentido, a completa aritmetização da análise só se tornou possível quando, como Hankel previra, os matemáticos compreenderam que os números reais devem ser encarados como "estruturas intelectuais" e não como grandezas intuitivamente dadas, legadas pela geometria de Euclides. A idéia de Hankel não era realmente nova; havia uma geração, como veremos no próximo capítulo, que os algebristas, especialmente na Grã-Bretanha, vinham desenvolvendo uma aritmética universal e álgebras múltiplas. As implicações para a análise, no entanto, não tinham sido percebidas por muitos. Bolzano, no começo da década de 1830, fizera uma tentativa para desenvolver uma teoria dos números reais como limites de seqüências de números racionais[11], mas essa não foi reconhecida nem publicada até 1962. Sir William Rowan Hamilton (1805-1865) tinha talvez sentido a necessidade disso, mas seu recorrer ao tempo em vez de ao espaço era uma mudança de linguagem, embora não de forma lógica, a partir dos conceitos geométricos usualmente colocados como base. A essência da questão foi apreendida pela primeira vez e publicada pelo quinteto de 1872 já mencionado.

Méray não demorou a apresentar suas idéias, pois já em 1869 ele tinha publicado um artigo chamando a atenção para uma séria falha de raciocínio que os matemáticos vinham cometendo desde os tempos de Cauchy. Essencialmente a *petitio principii* consistia em definir o limite de uma seqüência como um número real e em seguida definir um número real como limite de uma seqüência (de números racionais). Deve-se lembrar que Bolzano e Cauchy tinham tentado provar que uma seqüência que "converge em si" — isto é, uma seqüência para a qual S_{n+p} difere de S_n (para n suficientemente grande) por menos que um número prefixado ε — também converge no sentido de relações externas a um número real S, o limite da seqüência. Méray, em seu *Nouveau precis d'analyse infinitésimale* de 1872, cortou o nó górdio deixando de apelar para a condição externa de convergência ou para o número real S. Usando apenas o critério de Cauchy-Bolzano, onde n, p e ε são números racionais, a convergência pode ser descrita sem referência a números irracionais. Num sentido amplo ele considerava que uma seqüência convergente determina ou um número racional como limite ou um "número fictício" como um "limite fictício". Mostrou que esses "números fictícios" podem ser ordenados e em essência eles são o que chamamos números irracionais. Méray era um tanto vago quanto a se ou não sua seqüência convergente é o número. Se é, como parece indicado, então sua teoria é equivalente à desenvolvida ao mesmo tempo por Weierstrass.

[10]Para mais detalhes veja Jerome H. Manheim, *The Genesis of Point Set Topology* (1964), Caps. 3 e 4. Obras relacionadas com a análise de Riemann e Weierstrass são extensamente tratadas em Felix Klein, *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert* (1926-1927), Vol. 1

[11]Veja B. von Rootselaar, "Bolzano's Theory of Real Numbers", *Archive for History of Exact Sciences*, 2 (1964-1965), 168-180

7 Weierstrass tentou separar o cálculo da geometria e baseá-lo no conceito de número apenas; como Méray, ele também viu que para fazer isso era necessário dar uma definição de número irracional que fosse independente do conceito de limite, já que esse até então tinha pressuposto o anterior. Para corrigir o erro lógico de Cauchy, Weierstrass decidiu a questão da *existência* de um limite de uma seqüência convergente tomando a própria seqüência como o número ou limite. A concepção de Weierstrass é demasiado sutil para ser apresentada com detalhe aqui, mas em forma consideravelmente simplificada podemos dizer que o número 1/3 não é o *limite* da série 3/10 + 3/100 + + 3/1 000 + · · · + $3/10^n$ + · · · ; ele *é* a seqüência associada a essa série. (Na verdade, na teoria de Weierstrass, os números irracionais são mais amplamente definidos como *agregados* de racionais, e não de forma mais restrita como *sequências ordenadas* de racionais como indicamos.)

Weierstrass não publicou suas idéias sobre a aritmetização da análise, mas elas foram difundidas por estudantes, como Ferdinand Lindemann e Eduard Heine, que assistiram a suas aulas. Em 1871 Cantor iniciara um terceiro programa de aritmetização, semelhante aos de Méray e Weierstrass. Heine sugeriu simplificações que levaram ao chamado desenvolvimento de Cantor-Heine, publicado por Heine no *Journal* de Crelle para 1872 no artigo "Die Elemente der Funktionenlehre". Não podemos entrar em detalhes, mas em essência o desenvolvimento se assemelhava ao de Méray no sentido que seqüências convergentes que não convergem a números racionais por decreto definem números irracionais. Um ataque inteiramente diferente ao mesmo problema, e o que é mais conhecido hoje, foi dado no mesmo ano por Dedekind num livro célebre, *Stetigkeit und die Irrationalzahlen* (A continuidade e os números irracionais)[12].

8 A atenção de Dedekind se voltara para o problema dos números irracionais desde 1858, quando dava aulas de Cálculo. O conceito de limite, ele concluiu, deveria ser desenvolvido através da aritmética apenas, sem usar a geometria como guia, se se desejava que fosse rigoroso. Em vez de simplesmente procurar uma saida do circulo vicioso de Cauchy, Dedekind se perguntou, como indica o título de seu livro, o que há na grandeza geométrica contínua que a distingue dos números racionais. Galileu e Leibniz tinham julgado que a "continuidade" de pontos sobre uma reta era conseqüência de sua densidade — isto é, do fato que entre dois pontos quaisquer existe sempre um terceiro. Porém os números racionais têm essa propriedade, no entanto não formam um *continuum*.

Refletindo sobre a questão, Dedekind chegou à conclusão de que a essência da continuidade de um segmento de reta não se deve a uma vaga propriedade de ligação mútua, mas a uma propriedade exatamente oposta — a natureza da divisão do segmento em duas partes por um ponto sobre o segmento. Em qualquer divisão dos pontos do segmento em duas classes tais que cada ponto pertence a uma e somente uma, e tal que todo ponto numa classe está à esquerda de todo ponto da outra, existe um e um só ponto que realiza a divisão. Como Dedekind escreveu: "Por essa observação trivial o segredo da continuidade será revelado". A observação podia ser trivial, mas seu autor parece ter tido algumas dúvidas quanto a ela, pois hesitou durante alguns anos antes de se comprometer em algo impresso.

Dedekind viu que o domínio dos números racionais pode ser estendido de modo a formar um *continuum* de números reais se supusermos o que agora se chama o axioma de Cantor-Dedekind — que os pontos sobre uma reta podem ser postos em correspondência biunívoca com os números reais. Expresso aritmeticamente, isso significa que para toda divisão dos números racionais em duas classes *A* e *B* tais que todo número da primeira classe, *A*, é menor que todo número da segunda classe, *B*, existe um e um só número real que produz essa *Schnitt*, ou corte de Dedekind. Se *A* tem um maior número, ou se *B* contém um menor número, o corte define um número racional; mas se *A* não tem um maior elemento e *B* não tem um menor, então o corte define um número irracional.

[12]Existe uma tradução para o inglês sob o título *Essays on the Theory of Numbers*, traduzido por W. W. Beman (Chicago, 1901; New York, brochura Dover, 1963). Esta contém também a tradução de *Was sind und was sollen die Zahlen*, de Dedekind, 1888

Se, por exemplo, pusermos em *A* todos os números racionais negativos e também todos os racionais positivos cujos quadrados são inferiores a dois, e em *B* todos os racionais positivos cujos quadrados são superiores a dois, dividimos todo o conjunto dos racionais de um modo que define um número irracional — nesse caso o número que usualmente escrevemos como $\sqrt{2}$. Agora, Dedekind observou, os teoremas fundamentais sobre limites podem ser provados rigorosamente sem recurso à geometria. Foi a geometria que indicou o caminho para uma definição conveniente de continuidade, mas no fim foi excluida da definição aritmética formal do conceito. O corte de Dedekind no sistema de números racionais, ou uma construção equivalente dos números reais, tinha agora substituído a grandeza geométrica como espinha dorsal da análise.

As definições de número real são, como Hankel indicara que deviam ser, construções intelectuais baseadas nos números racionais, em vez de algo imposto à matemática do exterior. Das definições acima, uma das mais populares tem sido a de Dedekind. No começo do século vinte uma modificação do corte de Dedekind foi proposta por Bertrand Russel (1872-1970). Ele notou que como qualquer das duas classes *A*, *B* de Dedekind é univocamente determinada pela outra, uma só basta para a determinação de um número real. Assim $\sqrt{2}$ pode ser definido simplesmente como o segmento ou subclasse do conjunto dos números racionais formado de todos os números racionais positivos cujos quadrados são menores que dois e também de todos os números racionais negativos; de modo semelhante, todo número real nada mais é que um segmento do sistema dos números racionais.

9 Weierstrass, como parte de um programa de aritmetização, não só contribuiu para uma definição satisfatória de número real, como também para uma definição melhorada do conceito de limite. A definição de Cauchy usara frases como "valores sucessivos" ou "aproximar-se indefinidamente" ou "tão pequeno quanto se queira". Embora sejam sugestivas, e provavelmente pedagogicamente reconfortantes falta-lhes a precisão que em geral se espera da matemática. Em suas conferências, portanto, Weierstrass dava ênfase ao que às vezes se chamou a "teoria estática da variável". Heine, em seus *Elemente* de 1872, influenciado pelas aulas de Weierstrass, definiu o limite da função $f(x)$ em x_0 como segue:

> Se, dado qualquer ε, existe um η_0 tal que para $0 < \eta < \eta_0$ a diferença $f(x_0 \pm \eta) - L$ é menor em valor absoluto que ε, então L é o limite de $f(x)$ para $x - x_0$.

Nessa definição fria e precisa não há sugestão de entidades fluindo e gerando magnitudes de dimensão superior, nenhum recurso a pontos ou retas móveis, nenhum abandono de quantidades infinitamente pequenas. Só restam os números reais, a operação de adição (e sua inversa, a subtração) e a relação "menor que". A linguagem sem ambigüidades e o simbolismo de Weierstrass e Heine expulsaram do Cálculo a noção de variabilidade e tornaram desnecessário o persistente apelo a infinitesimais fixos. A "Idade do Rigor" chegara verdadeiramente, substituindo os antigos artifícios heurísticos e os antigos conceitos intuitivos por precisão lógica crítica. Hoje o η de Weierstrass freqüentemente é substituído por outra letra grega, δ, mas as definições de limite de uma função encontradas em livros atuais são essencialmente as mesmas que Weierstrass e Heine introduziram há quase um século. As chamadas provas por épsilons e deltas são agora parte do instrumental comum dos matemáticos.

10 Weierstrass fora educado numa família católica devota mas liberal, tendo sido seu pai um protestante convertido. Karl, o mais velho, tinha um irmão e duas irmãs, mas nenhum deles casou-se, talvez por causa da atitude de dominação do pai; e Karl tinha pelo menos mais uma excentricidade, não gostava de música. Saiu-se tão bem na escola que seu pai insistiu para que ele se preparasse para o serviço público estudando direito na Universidade de Bonn, onde se tornou um perito em beber e em esgrima, em vez de em direito ou matemática, e saiu sem se graduar. Preparou-se então para o ensino secundário em Münster, onde um instrutor, Christoph Gudermann (1798-1851) tomou Weierstrass sob sua proteção. Gudermann interessava-se especialmente por funções

elíticas e hiperbólicas, assunto em que seu nome é lembrado na gudermaniana: Se u é uma função de x satisfazendo à equação $\operatorname{tg} u = \operatorname{senh} x$, então u chama-se a gudermaniana de x, escrita $u = \operatorname{gd} x$. Mais importante para a matemática que essa pequena contribuição foram o tempo e inspiração que o professor deu ao estudante, que estava destinado a tornar-se por sua vez o maior professor de matemática dos meados do século dezenove — pelo menos se julgarmos em termos do número de pesquisadores de sucesso que produziu. Gudermann fizera ver ao jovem Weierstrass o instrumento útil que era a representação em série de potências de uma função, e foi em relação a isso que Weierstrass, seguindo as pegadas de Abel, produziu sua maior obra.

Weierstrass obteve seu diploma de professor aos vinte e seis anos, e durante mais de uma dúzia de anos ensinou em várias escolas secundárias. Em 1854, porém, um artigo sobre funções abelianas publicado no *Journal* de Crelle trouxe-lhe tanta reputação que logo depois um posto de professor na Universidade de Berlim lhe foi oferecido, o qual ele aceitou. Weierstrass tinha então quase quarenta anos, o que faz dele uma notável exceção à idéia comumente aceita de que um grande matemático deve revelar-se cedo. Apesar de seu início tardio, foi geralmente reconhecido, durante o último terço do século, como o maior analista do mundo[13].

Antes do meio do século dezenove supunha-se que se uma série infinita converge em algum intervalo a uma função $f(x)$ contínua e derivável, então uma segunda série obtida derivando a série de partida termo a termo convergirá necessariamente, no mesmo intervalo, a $f'(x)$. Vários matemáticos mostraram que isso não é sempre verdade e que só se pode confiar na derivação termo a termo se a série obtida é uniformemente convergente no intervalo — isto é, se um N único pode ser achado tal que para todo valor de x no intervalo as somas parciais $S_n(x)$ diferem da soma $S(x)$ da série por menos que um ε dado para todo $n > N$. Weierstrass mostrou que a integração termo a termo de uma série uniformemente convergente era também permissível. Na questão da convergência uniforme Weierstrass de modo algum estava só, pois o conceito foi enunciado independentemente, mais ou menos ao mesmo tempo, por, ao menos, três outros — Cauchy na França (talvez por volta de 1853), Sir G. G. Stokes em Cambridge, (em 1847) e P. L. V. Seidel (1821-1896) na Alemanha (em 1848)[14]. Porém talvez ninguém mereça tanto ser conhecido como o pai do movimento de crítica em análise quanto Weierstrass[15]. De 1857 até sua aposentadoria em 1890 ele aconselhou insistentemente a toda uma geração de estudantes a ter cuidado no uso da representação em série, e um desses estudantes, Heine, em 1870 provou que o desenvolvimento em série de Fourier de uma função contínua é único se impusermos a condição de ser uniformemente convergente. Nisso ele estava aplainando dificuldades surgidas no trabalho de Dirichlet e Riemann sobre séries de Fourier.

Uma das contribuições importantes de Weierstrass à análise é conhecida como prolongamento analítico. Weierstrass mostrara que a representação como série de potências de uma função $f(x)$ em torno de um ponto P_1 no plano complexo converge em todos os pontos internos a um círculo C_1 com centro em P_1 e que passa pela singularidade mais próxima. Se, agora, expandirmos a mesma função em torno de um segundo ponto P_2 diferente de P_1 mas interno a C_1, essa série convergirá dentro de um círculo C_2 tendo P_2 como centro e passando pela singularidade mais próxima de P_2. Esse círculo pode envolver pontos fora de C_1, portanto prolongamos a área do plano em que $f(x)$ está analiticamente definida. Weierstrass por isso definiu uma função analítica como uma série de potências juntamente com todas as que podem ser obtidas dela por prolongamento analítico. A importância de trabalhos como o de Weierstrass é sentida particularmente na física matemática, em que soluções de equações diferenciais raramente são achadas em forma que não seja a de uma série infinita.

[13]Sobre sua vida veja E. T. Bell, *Men of Mathematics* (New York: Simon e Schuster 1937), Cap. 22, ou Ganesh Prasad, *Some Great Mathematicians of the Nineteenth Century* (1933-1937), Vol. I, Cap. 5

[14]Veja E. T. Bell, *The Development of Mathematics*, p. 270

[15]Veja James Pierpont, "Mathematical Rigor, Past and Present", *Bulletin of the American Mathematical Society*, 34 (1928), 23-53

Em alguns pontos a vida de Dedekind se assemelha à de Weierstrass: ele também era um em quatro filhos, e também ele nunca se casou; e ambos viveram mais de oitenta anos. De outro lado, os membros da família de Dedekind eram luteranos; ele se iniciou na matemática mais cedo que Weierstrass, entrando em Göttingen aos dezenove anos e obtendo seu doutorado três anos depois com uma tese sobre o Cálculo que foi elogiada por Gauss. Dedekind permaneceu em Göttingen durante alguns anos, ensinando e ouvindo aulas de Dirichlet, depois dedicou-se ao ensino secundário, principalmente em Brunswick, pelo resto de sua vida. Dedekind viveu tantos anos depois de sua célebre introdução dos "cortes" que a famosa editora Teubner deu como data de sua morte, no *Calendário de Matemáticos*, 4 de setembro de 1899. Isso divertiu Dedekind, que viveu ainda mais de uma dúzia de anos, e ele escreveu ao editor que passara a data em questão em conversa estimulante com seu amigo Georg Cantor.

11 A vida de Cantor foi tragicamente diferente da de seu amigo Dedekind[16]. Cantor nasceu em S. Petersburgo, de pais que havia emigrado da Dinamarca, mas a maior parte de sua vida ele passou na Alemanha, tendo a família se mudado para Frankfurt quando ele tinha onze anos. Seus pais eram cristãos de ascendência judia — sendo seu pai um convertido ao protestantismo e sua mãe católica de nascimento. O filho Georg se interessou fortemente pelos argumentos sutis dos teólogos medievais sobre a continuidade e o infinito, e isso contribuiu para que não quisesse seguir uma carreira mundana em engenharia, como seu pai sugeria. Em seus estudos em Zürich, Göttingen e Berlim o jovem conseqüentemente concentrou-se em filosofia, física e matemática — programa que parece ter estimulado sua enorme imaginação matemática. Doutorou-se em Berlim em 1867 com uma tese sobre a teoria dos números, mas suas primeiras publicações mostram atração pela análise de Weierstrass. Esse campo estimulou as idéias revolucionárias que lhe ocorreram pouco antes dos trinta anos. Já notamos a obra de Cantor em conexão com a prosaica expressão "número real"; mas suas contribuições mais originais centram-se na provocativa palavra "infinito".

Desde os dias de Zeno que se falava em infinito, tanto na teologia quanto na matemática, mas ninguém antes de 1872 fora capaz de dizer exatamente do que estava falando. Com demasiada freqüência nas discussões sobre o infinito os exemplos citados eram coisas como poder ilimitado ou grandezas indefinidamente grandes. Ocasionalmente a atenção se concentrava, como na obra de Galileu e Bolzano, na infinidade de elementos de uma coleção — por exemplo, os números naturais ou os pontos de um segmento de reta. Cauchy e Weierstrass só viam paradoxo nas tentativas de identificar um infinito "completado" na matemática, acreditando que o infinitamente grande ou pequeno indicava apenas a potencialidade de Aristóteles — uma incompletude do processo em questão. Porém enquanto estavam sob a influência de Weierstrass dois de seus estudantes chegaram a uma conclusão oposta. O primeiro deles foi Dedekind, que viu nos paradoxos de Bolzano não uma anomalia mas uma propriedade universal dos conjuntos infinitos que tomou como definição precisa:

> Diz-se que um sistema S é infinito quando é semelhante a uma parte própria dele mesmo; caso contrário S se diz um sistema finito.

Em terminologia um tanto mais moderna, um conjunto S de elementos se diz infinito se os elementos de um subconjunto próprio S' podem ser postos em correspondência biunívoca com os elementos de S. Que o conjunto S dos números naturais é infinito, por exemplo, é claro pelo fato de ser o conjunto S' dos números triangulares tal que a cada elemento n de S corresponde um elemento de S' dado por $n(n+1)/2$. Essa definição positiva de um conjunto "infinito completado" não deve ser confundida com a afirmação negativa às vezes escrita com o símbolo de Wallis como $1/0 = \infty$. Essa

[16]Veja Bell, *Men of Mathematics*, Cap. 29, ou Prasad, *Great Mathematicians*, Vol. II, Cap. 7

"equação" diz apenas que não existe número real que multiplicado por zero produza o número um.

12 A definição de Dedekind de conjunto infinito apareceu em 1872 em seu *Stetigkeit und irrationale Zahlen*. (Em 1888 Dedekind expôs mais amplamente suas idéias em outro importante tratado, *Was sind und was sollen die Zahlen*). Dois anos depois Cantor casou-se, e na lua-de-mel foi a Interlaken, onde o casal encontrou Dedekind. No mesmo ano, 1874, Cantor publicou no *Journal* de Crelle um de seus artigos mais revolucionários[17]. Ele, como Dedekind, tinha reconhecido a propriedade fundamental dos conjuntos infinitos, mas, ao contrário de Dedekind, Cantor viu que os conjuntos infinitos não são todos iguais. No caso finito, dizemos que conjuntos de elementos têm o mesmo número (cardinal) se podem ser postos em correspondência biunívoca. De modo um tanto semelhante, Cantor se dispôs a construir uma hierarquia de conjuntos infinitos conforme a *Mächtigkeit* ou "potência" do conjunto. O conjunto dos quadrados perfeitos ou o conjunto dos números triangulares têm a mesma potência que o conjunto de todos os inteiros positivos, pois eles podem ser postos em correspondência biunívoca. Esses conjuntos parecem muito menores que o conjunto de todas as frações racionais, no entanto Cantor mostrou que também esse último conjunto é contável ou enumerável — isto é, também esse pode ser posto em correspondência biunívoca com os inteiros positivos, portanto tem a mesma potência. Para mostrar isso, simplesmente seguimos as flechas na Fig. 25.3, "contando" as frações pelo caminho.

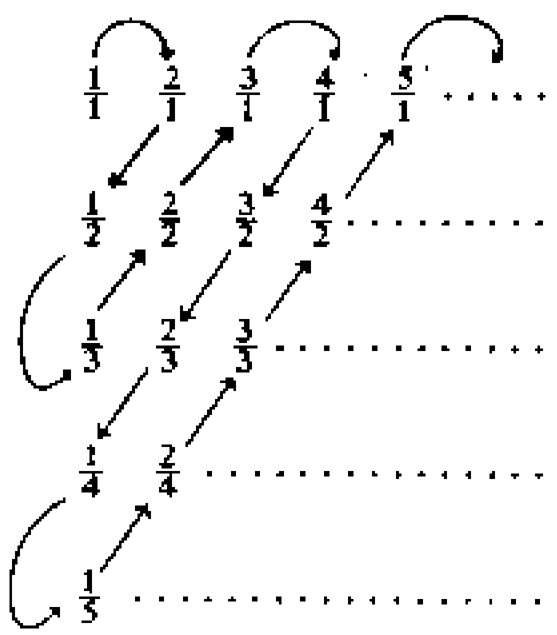


Figura 25.3

As frações racionais são tão densas, que entre duas quaisquer delas, por mais próximas que estejam, há sempre outra; no entanto o arranjo de Cantor[18] mostrou que o conjunto das frações tem a mesma potência que o dos inteiros. Começa-se a pensar que todos os conjuntos infinitos têm a mesma potência, porém Cantor provou conclusivamente que isso não é verdade. O conjunto de todos os números reais, por exemplo, tem potência maior que o conjunto das frações racionais. Para mostrar isso Cantor usou uma *reductio ad absurdum*. Suponhamos que os números reais entre 0 e 1 sejam contáveis, e que estejam expressos como decimais infinitos (de modo que 1/3, por exemplo, aparece como 0,333 . . ., 1/2 como 0,4999 . . ., e assim por diante), e que estejam dispostos em ordem:

$$
\begin{aligned}
a_1 &= 0{,}a_{11}a_{12}a_{13}\cdots\\
a_2 &= 0{,}a_{21}a_{22}a_{23}\cdots\\
a_3 &= 0{,}a_{31}a_{32}a_{33}\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

[17]Uma exposição muito completa da obra de Cantor se encontra na Introdução a uma tradução para o inglês de dois artigos de Cantor de 1895 e 1897 publicada sob o título *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers*, editado por P. E. B. Jourdain (1915). Veja também Herbert Meschkowski, *Ways of Thought of Great Mathematicians* (S. Francisco: Holden-Day, 1964), pp. 91-104

[18]Cantor provou a enumerabilidade dos números racionais em seu artigo de 1874, mas aqui ele usou um tipo diferente de prova. Mais tarde ele deu a demonstração aqui reproduzida

onde a_{ij} é um dígito entre 0 e 9 inclusive. Para mostrar que nem todos os números reais entre 0 e 1 estão incluídos acima, Cantor exibiu uma fração decimal infinita diferente de todas as referidas anteriormente. Para isso, formemos $b = 0{,}b_1b_2b_3\ldots$ onde $b_K = 9$ se $a_{KK} = 1$ e $b_K = 1$, se $a_{KK} \neq 1$. Esse número real estará entre 0 e 1 e no entanto será diferente de todos os do arranjo que se presumia conter todos os números reais entre 0 e 1.

13 Os números reais podem ser subdivididos em dois tipos de dois modos diferentes: (1) como racionais e irracionais ou (2) como algébricos e transcendentes. Cantor mostrou que mesmo a classe dos números algébricos, que é muito mais geral que a dos racionais, tem ainda a mesma potência que a dos inteiros. Portanto são os números transcendentes que dão ao sistema dos números reais a "densidade" que resulta em maior potência. Que é fundamentalmente uma questão de densidade que determina a potência de um conjunto é sugerido pelo fato que a potência do conjunto de pontos numa reta é a mesma que a potência do conjunto de pontos de um segmento da reta, por menor que seja. Para mostrar isso, seja *RS* a reta indefinidamente estendida e seja *PQ* qualquer segmento finito (Fig. 25.4). Coloquemos o segmento de modo a cortar *RS* num ponto *O* mas não ser perpendicular a *RS*, nem jazer sobre *RS*. Escolhendo os pontos *M* e *N* de modo que *PM* e *QN* sejam paralelas a *RS*, e *MON* perpendicular a *RS*, então traçando retas por *M* que cortam tanto *OP* quanto *OR*, e retas por *N* que cortem tanto *OQ* quanto *OS*, estabelece-se facilmente uma correspondência biunívoca.

Ainda mais surpreendente é o fato de a dimensão não decidir a potência de um conjunto. A potência do conjunto de pontos sobre um segmento de reta unitário é a mesma da dos pontos numa área unitária ou num volume unitário — ou, aliás, a mesma que a potência do conjunto de todos os pontos do espaço tridimensional. (Porém a dimensão conserva alguma autoridade por ser uma correspondência biunívoca entre espaços de dimensão diferente necessariamente descontínua.) Alguns resultados na teoria dos conjuntos de pontos eram tão paradoxais que o próprio Cantor uma vez, em 1877, escreveu a Dedekind, "Eu vejo isso, mas não acredito"; e pediu a seu amigo que verificasse a prova[19]. Os editores também hesitavam muito antes de aceitar seus artigos, e várias vezes a publicação de artigos de Cantor no *Journal* de Crelle foi atrasada devido à indecisão dos editores e à preocupação quanto à possibilidade de erros estarem escondidos nesse inconvencional modo de ataque a conceitos matemáticos.

14 Os incríveis resultados de Cantor o levaram a estabelecer a teoria dos conjuntos como uma disciplina matemática completamente desenvolvida, chamada *Mengenlehre* (teoria das coleções) ou *Mannigfaltigkeitslehre* (teoria das multiplicidades), ramo que em meados do século vinte teria efeitos profundos sobre o ensino da matemática. Ao tempo de sua fundação Cantor despendeu muito esforço para convencer seus contemporâneos da validade de seus resultados, pois havia considerável *horror infiniti*, e os matemáticos sentiam relutância em aceitar o *eigentlich Unendlich* ou infinidade completada. Juntando prova sobre prova, Cantor finalmente construiu toda uma aritmética transfinita. A "potência" de um conjunto tornou-se o "número cardinal" do conjunto. Assim o "número" do conjunto dos inteiros era o "menor" número transfinito, *E*, e o "número" do conjunto dos números reais ou dos pontos de uma reta é um número "maior",

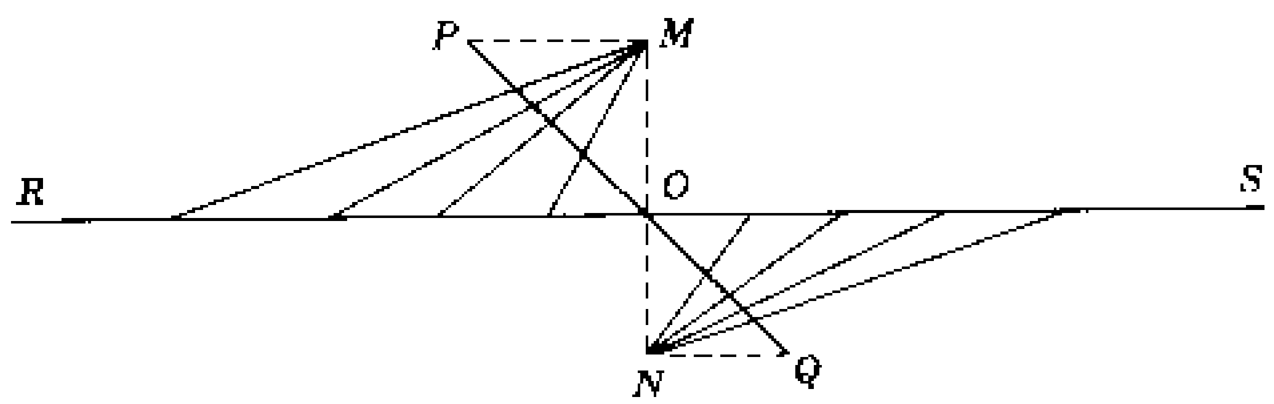


Figura 25.4

[19]Uma exposição especialmente clara da obra de Cantor se encontra em Herbert Meschkowski, *Evolution of Mathematical Thought* (1965), Cap. 5

C, o número do *continuum*. Ainda não teve resposta a questão de saber se existem ou não números transfinitos entre E e C. Cantor provou que existem infinitos números transfinitos para além de C, pois provou que o conjunto dos subconjuntos de um conjunto sempre tem potência maior que o próprio conjunto. Portanto o "número" do conjunto dos subconjuntos de C é um terceiro número transfinito, o conjunto dos subconjuntos desse conjunto de subconjuntos determina um quarto número e assim por diante, indefinidamente. Assim como há uma infinidade de números naturais, há uma infinidade de números transfinitos.

Os números transfinitos descritos anteriormente são números cardinais, mas Cantor desenvolveu também uma aritmética de números ordinais transfinitos. Relações de ordem são delicadas e verifica-se que a aritmética ordinal transfinita difere marcadamente da aritmética ordinal finita. Para casos finitos as regras para números ordinais são essencialmente as mesmas que para cardinais. Assim $3 + 4 = 4 + 3$ quer esses dígitos designem números cardinais ou ordinais. No entanto, se designarmos por ω o número ordinal dos "números de contar", então $1 + \omega$ não é a mesma coisa que $\omega + 1$, pois $1 + \omega$ obviamente é a mesma coisa que ω. Ainda mais, pode-se mostrar que $\omega + \omega = \omega$ e $\omega \cdot \omega = \omega$, propriedades diferentes da dos ordinais finitos mas semelhantes a de cardinais transfinitos.

15 Dedekind e Cantor estavam entre os matemáticos mais notáveis, e certamente mais originais, de sua época; no entanto nenhum dos dois conseguiu uma posição profissional de primeiro plano. Dedekind passou quase toda a sua vida ensinando em nível de escola secundária, e Cantor passou a maior parte de sua carreira na Universidade de Halle, pequena escola sem grande reputação. Cantor esperava obter um posto de professor na Universidade de Berlim e culpou Leopold Kronecker (1823-1891) por sua falta de sucesso. Kronecker, como Cantor, nascera de pais judeus, mas, novamente como Cantor, preferiu o protestantismo[20]. Na Universidade de Berlim entrou em contato com Weierstrass, Dirichlet, Jacobi e Steiner, obtendo seu doutorado em 1845 com uma tese sobre teoria algébrica dos números. Como Weierstrass, aprovava a aritmetização universal da análise, mas queria que a aritmética fosse finita, e aqui entrou em conflito com Cantor. Voltando às antigas idéias pitagóricas, Kronecker insistia em que a aritmética e a análise se baseassem nos números inteiros. "Deus fez os inteiros", ele costumava dizer, "e todo o resto é obra do homem". Rejeitava categoricamente a construção dos números reais de seu tempo pelo fato de não poder ser efetuada só com processos finitos, e pedia uma revolução aritmética que banisse como inexistentes os números irracionais. Na análise Kronecker pouco fez além de criticar abertamente seus contemporâneos em suas aulas e conversação. Diz-se que ele perguntou a Lindemann para que servia sua prova de que π não é algébrico já que números irracionais não existem. Na álgebra Kronecker fez contribuições significativas, mas os analistas da época consideravam suas idéias excessivamente metafísicas. Às vezes se diz que seu movimento morreu de inanição[21]; veremos depois, que se pode dizer que reapareceu sob nova forma na obra de Poincaré e Brouwer.

Durante a maior parte de sua vida Kronecker foi um homem de negócios muito próspero, mas possuía fortes ligações com professores na Universidade de Berlim onde finalmente aceitou um posto em 1883. Seu finitismo evidentemente embaraçava Weierstrass, mas foi a Cantor que ele feriu mais gravemente. Não só Kronecker se opôs a que fosse dada uma posição a Cantor em Berlim como procurou solapar o ramo da matemática que Cantor estava criando. Cantor, por sua vez, escreveu uma defesa vigorosa em 1883 em seu *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre* (Fundamentos de uma teoria geral das multiplicidades), em que mantinha que "numerações definidas podem ser feitas com conjuntos infinitos tão bem quanto com finitos". Não temia cair no que chamava um "abismo de transcendentes" no entanto ocasionalmente ele se entregava a argumentos de tipo teológico. Kronecker continuou seus ataques contra o hipersensitivo e temperamental Cantor e em 1884 Cantor sofreu o primeiro dos esgotamentos nervosos que viriam reaparecer durante os trinta e três anos restantes de sua vida. Acessos de depressão às vezes o levavam a duvidar de sua própria obra, embora fosse até certo ponto reconfortado pelo apoio de homens como Hermite. Quase no fim ele obteve o reconhecimento de suas realizações, mas sua morte em 1918 numa instituição para doenças mentais em Halle faz lembrar que o gênio e a loucura às vezes estão relacionados de perto. A tragédia de sua vida pessoal é mitigada pelo hino de elogio de um dos maiores matemáticos do começo do século vinte, David Hilbert, que descreveu a nova aritmética transfinita como "o produto mais extraordinário do pensamento matemático, uma das mais belas realizações da atividade humana no domínio do puramente inteligível". Onde almas tímidas tinham hesitado, Hilbert exclamava "Ninguém nos expulsará do paraíso que Cantor criou para nós[22].

[20]Para sua vida e obra ver Bell, *Men of Mathematics*, Cap. 25, ou Prasad, *Great Mathematicians*, Vol. II, Cap. 3

[21]Pierpont, "Mathematical Rigor, Past and Present", *Bulletin of the American Mathematical Society*, 34 (1928), 23-53, pp. 38-40

BIBLIOGRAFIA

Bell, E. T., *The Development of Mathematics* (New York: McGraw-Hill, 1940)

Bourbaki, Nicolas, *Éléments d'histoire des mathématiques* (Paris: Hermann, 1960)

Boyer, Carl B., *The Concepts of the Calculus* (New York: Columbia University Press, 1939; reimpresso por Dover, 1959)

Brill, A., e M. Noether, "Die Entwicklung der Theorie der algebraischen Funktionen in älterer und neurer Zeit", *Jahresbericht der Deutsche Mathematiker Vereinigung*, 3 (1892-1893), 107-566

Cajori, Florian, *History of Mathematics*, 2.ª edição (New York: Macmillan, 1931)

Cantor, Georg, *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers*, traduzido por P. E. B. Jourdain (Chicago e Londres: Open Court, 1915; New York: brochura Dover, s.d.).

Dantscher, Victor, *Vorlesungen über die Weierstrassche Theorie der irrationalen Zahlen* (Leipzig e Berlin: B. G. Teubner, 1908)

Dedekind, Richard, *Essays on the Theory of Numbers*, traduzido por W. W. Beman (Chicago: Open Court, 1901)

Dirichlet, G. L., *Werke*, editado por L. Kronecker and L. Fuchs (Berlin, 1889-1897, 2 volumes)

Eves, Howard, e Carroll V. Newsom, *An Introduction to the Foundations and Fundamental Concepts of Mathematics* (New York: Rinehart, 1958)

Fourier, Joseph, *Oeuvres*, editado por G. Darboux (Paris, 1888-1890, 2 volumes)

Heine, E., "Die Elemente der Funktionenlehre", *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, 74 (1872), 172-188

Hermite, Charles, *Oeuvres*, editado por Émile Picard (Paris: Gauthier-Villars, 1905-1917, 4 volumes)

Hobson, E. W., "On the Infinite and the Infinitesimal in Mathematic Analysis", *Proceedings of the London Mathematical Society*, 35 (1903), 117-140

Jourdain, P. E. B., "The Development of the Theory of Transfinite Numbers", *Archiv der Mathematik und Physik* (3), 10 (1906), 254-281; 17 (1908-1909), 287-311; 16 (1910), 21-43; 22 (1913-1914), 1-21

Jourdain, P. E. B., "Note on Fourier's Influence on the Conceptions of Mathematics", *International Congress of Mathematicians* (Cambridge, 1912), Vol. II, pp. 526-527

Jourdain, P. E. B., "On Isoid Relations and Theories of Irrational Number", *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* (Cambridge, 1912), Vol. II, pp. 492-496

Klein, Felix, *On Riemann's Theory of Algebraic Functions and Their Integrals*, traduzido por Frances Hardcastle (Cambridge: Cambridge University Press, 1893)

Klein, Felix, *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert* (Berlin: Springer, 1926-1927, 2 volumes)

Kronecker, Leopold, *Werke*, editado por Kurt Hensel (Leipzig: B. G. Teubner, 1895-1931, 5 volumes)

Langer, Rudolph E., *Fourier Series, the Genesis and Evolution of a Theory* (Oberlin, Ohio: The Mathematical Association of America, 1947)

[22]"Sur l'infini", *Acta Mathematica*, 48 (1926), 91-122, especialmente pp. 97-100; ou "Über das Unendlich", *Mathematische Annalen*, 95 (1926), 161-190, especialmente pp. 167-170

Loria, Gino, "Le mathématicien J. Liouville et ses oeuvres," *Archeion*, 18 (1936), 117-139; versão em inglês em *Scripta Mathematica*, Vol. 4 (1936)
Manheim, Jerome H., *The Genesis of Point Set Topology* (New York: Pergamon Press, 1964)
Méray, Charles, *Nouveau précis d'analyse infinitésimale* (Paris, 1872)
Merz, J. T., *A History of European Thought in the Nineteenth Century* (Edimburgh e Londres, 1896-1914, 4 volumes, reimpresso, New York: Dover, 1965)
Meschkowski, Herbert, *Evolution of Mathematical Thought* (San Francisco: Holden-Day, 1965)
Pierpont, James, "The History of Mathematics in the Nineteenth Century", *Bulletin of the American Mathematical Society*, **11** (1904), 136-159
Pierpont, James, "Mathematical Rigor, Past and Present," *Bulletin of the American Mathematical Society*, **34** (1928), 23-53
Pincherle, Salvatore, "Saggio di una introduzione alla teoria delle funzioni analitiche secondo i principii del Prof. C. Weierstrass," *Giornale di Matematiche*, **18** (1880), 178-254, 317-357
Poincaré, Henry, "L'oeuvre mathématique de Weierstrass," *Acta Mathematica*, **22** (1898-1899), 1-18
Prasad, Ganesh, *Some Great Mathematicians of the Nineteenth Century* (Benares: Benares Mathematical Society, 1933-1934, 2 volumes)
Waismann, Friedrich, *Introduction to Mathematical Thinking* (New York: reimpressão Harper, 1959)
Weierstrass, Karl, *Mathematische Werke* (Berlin: Mayer & Müller, 1894-1927, 7 volumes)

EXERCÍCIOS

1. Explique por que o século dezenove foi chamado "um século de correlação" na matemática, citando contribuições especificas em apoio a essa idéia.

2. Até que ponto os desenvolvimentos da análise no século dezenove foram motivados mais por fatores internos na matemática que pelas necessidades e preferências da sociedade? Dê exemplos específicos para apoiar sua resposta.

3. Compare o nível de rigor na análise do século dezenove com o do século dezoito e com o das obras de Arquimedes, apoiando sua resposta com exemplos específicos.

4. Descreva a importância do ano de 1872 na aritmetização da análise.

5. Havia mais probabilidade de os matemáticos principais do século dezenove serem professores do que ocorria no século dezoito? Dê exemplos para apoiar sua resposta.

6. A asserção de Kronecker, de que Deus fez os inteiros e todos os outros números são obra do homem, é defensável ou indefensável? Explique.

7. Mostre que o conjunto de todos os números reais entre 3 e 7 inclusive pode ser posto em correspondência biunivoca com o conjunto de todos os números reais entre 1 e 11.

8. Defina precisamente as expressões "número real" e "número irracional". Quando e como foi pela primeira vez reconhecida a necessidade de admitir números irracionais e quando e como surgiu a necessidade de ter uma definição precisa? Explique claramente.

9. Compare a definição de "limite de uma função" dada por Weierstrass com a formulada antes por Cauchy, indicando as vantagens ou desvantagens relativas.

10. Qual tem maior número transfinito, o conjunto de todos os inteiros ou a classe de todas as raízes n-ésimas de todos os inteiros? Explique.

11. Dados dois segmentos de reta de comprimentos diferentes, mostre que se pode estabelecer uma correspondência biunivoca entre os pontos dos dois segmentos.

12. Escreva sob forma de decimais infinitos uma dúzia de números transcendentes diferentes, dando em cada caso a regra de sucessão dos dígitos. Algum desses números é racional? Explique.

13. Mostre que se $u = \operatorname{gd} x$, então $\cos u = \operatorname{sech} x$ e $\operatorname{sen} u = \operatorname{tgh} x$.

*14. Na expansão de Fourier

$$f(x) = 1/2\, a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \cdots + b_1 \operatorname{sen} x + b_2 \operatorname{sen} 2x + \cdots$$

multiplique ambos os membros da equação por $\cos 2x$ e integre ambos os membros de $-\pi$ a $+\pi$ para mostrar que

$$a_2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos 2x \, dx.$$

*15. Como no Exc. 14, multiplique ambos os membros da equação por $\operatorname{sen} 2x$ e integre entre $-\pi$ e $+\pi$ para obter a fórmula análoga para b_2.

*16. Esboce a função $f(x) = 1$ para $n\pi < x < (n+1)\pi$ quando n é par e $f(x) = 0$ para $n\pi < x < (n+1)\pi$ quando n é ímpar, e ache a expansão de Fourier da função.

Capítulo **26**

O surgimento da álgebra abstrata

> Não é paradoxo dizer que nos nossos momentos de inspiração mais teórica podemos estar o mais próximo possível de nossas aplicações mais práticas.
>
> *A. N. Whitehead*

1 O século dezenove, mais do que qualquer período precedente, mereceu ser conhecido como Idade Áurea da matemática. O que se acrescentou ao assunto durante esses cem anos supera de longe, tanto em quantidade quanto em qualidade, a produtividade total combinada de todas as épocas precedentes. O século foi também, com a possível exceção da Idade Heróica na Grécia antiga, o mais revolucionário na história da matemática. Em 1829 um novo mundo na geometria foi descoberto por Lobachevsky, um russo que tivera um professor alemão, e em 1874 o campo da análise fora assombrado pela matemática do infinito que fora introduzida por Cantor, um alemão nascido na Rússia. A França já não era mais o centro reconhecido do mundo matemático, embora fornecesse a carreira meteórica de Évariste Galois (1811-1832). O caráter internacional do assunto se percebe no fato de as duas contribuições mais revolucionárias na álgebra terem sido feitas, em 1843 e 1847, por matemáticos que ensinavam na Irlanda. A primeira dessas foi a obra de Sir William Rowan Hamilton (1805-1865) a segunda veio de George Boole (1815-1864). Os contribuidores mais prolíficos à álgebra do século dezenove porém foram ingleses que passaram algum tempo na América, — Arthur Cayley (1821-1895) e J. J. Sylvester (1814-1897) — e foi principalmente na universidade de onde esses provinham, Cambridge, que se deu o aparecimento da álgebra moderna.

A Universidade de Cambridge no começo do século dezenove não era bem um lugar onde se procuraria enxergar novos desenvolvimentos da matemática. É verdade que cem anos antes fora a *alma mater* de Sir Isaac Newton; mas o chauvinismo e a controvérsia sobre prioridade no Cálculo tinham levado ao isolacionismo intelectual pelo qual os britânicos pagaram caro. As universidades escocesas do século dezoito tinham mantido ligações mais estreitas com o Continente que as da Inglaterra, mas as primeiras eram relativamente mais fracas em matemática que em biologia e química. Quando Jacobi visitou Cambridge em 1842 perguntaram-lhe quem era o maior matemático inglês vivo e ele respondeu "Não há nenhum"[1]. Isso na época era um juízo deselegantemente duro. Mas é verdade que uma geração antes na Inglaterra em geral e em Cambridge, em particular, quase não havia consciência dos imensos avanços que tinham sido feitos no Continente em análise e geometria. Talvez fosse por isso que a Inglaterra, quando emergiu da teia do provincianismo, tomou a liderança em álgebra, pois nesse campo os desenvolvimentos realizados no Continente durante o século dezoito tinham sido menos notáveis.

2 O ponto de virada na matemática inglesa veio em 1815 com a formação em Trinity College, Cambridge, da Analytical Society, já mencionada antes, a qual se constituía de três jovens de Cambridge: o algebrista George Peacock (1791-1858), o astrônomo John Herschel (1792-1871), e Charles Babbage (1792-1871) célebre pelas "Calculating Engines". A finalidade imediata da Sociedade era reformar o ensino e a notação do cálculo; e em 1817, quando Peacock foi nomeado examinador para o *tripos** matemático,

[1]Alexander Macfarlane, *Lectures on Ten British Mathematicians of the Nineteenth Century* (1916), p. 10. Cf. W. W. R. Ball, *A History of the Study of Mathematics at Cambridge* (1889)

*Originalmente, exame para graduação em matemática na Cambridge University. N. do R.

a notação diferencial substituiu a dos fluxos no exame de Cambridge. Peacock era ele próprio graduado e professor de Cambridge, o primeiro dos muitos homens de Trinity College que iriam conduzir o desenvolvimento da álgebra. Ele se graduou como segundo *wrangler* — isso é, teve o segundo lugar no célebre exame de *tripos* (iniciado em 1725) para estudantes de matemática — o primeiro lugar sendo de John Herschel, outro dos fundadores da Analytical Society. Peacock era um zeloso administrador e reformador, tomando parte ativa na modificação dos estatutos da universidade e na fundação da Astronomical Society of London, da Philosophical Society of Cambridge, e da British Association for the Advancement of Science, essa última tendo sido o modelo da American Association for the Advancement of Science. Durante os últimos vinte anos de sua vida ele foi deão da catedral de Ely.

Peacock não produziu resultados novos notáveis em matemática, mas teve grande importância na reforma do assunto na Inglaterra, especialmente no que diz respeito à álgebra. Tinha havido em Cambridge uma tendência tão conservadora em álgebra quanto na geometria e na análise; ao passo que, no Continente, os matemáticos estavam desenvolvendo a representação gráfica dos números complexos, na Inglaterra havia protestos de que mesmo os números negativos não tinham validade. Num esforço para justificar as idéias mais amplas na álgebra, Peacock em 1830 publicou seu *Treatise on Algebra*, em que procurou dar à álgebra uma estrutura lógica comparável à de *Os elementos* de Euclides. Sem usar seus nomes modernos, ele tentou, sem grande sucesso se julgado por padrões atuais, formular as leis fundamentais da aritmética — as leis comutativa e associativa para a adição e a multiplicação e a lei distributiva para a multiplicação relativamente à adição. Esse método, mais tarde ampliado numa obra em dois volumes de 1842-1845, marca o início do pensamento postulacional na aritmética e na álgebra. No primeiro volume o autor aplicou as regras a números, ou, como denominava o tema, à "álgebra aritmética"; no segundo volume, dedicado à "álgebra simbólica", ele estendia as regras ao estudo de grandezas em geral. Na "álgebra aritmética" de Peacock entende-se que os símbolos + e − têm apenas seu significado ordinário, de modo que a expressão $a-b$ só tem sentido se a é maior que b (pois Peacock tinha em mente os números naturais). Na "álgebra simbólica" tais restrições são eliminadas, mas assume-se que as regras da álgebra númerica valem universalmente no sistema mais abstrato[2]:

> Todos os resultados da álgebra aritmética que foram deduzidos pela aplicação de suas regras, e que têm forma geral embora tenham valor particular são também resultados na álgebra simbólica, onde são gerais tanto em valor quanto em forma.

A justificativa para essa ousada extrapolação não é explicada; Peacock simplesmente aceita isso como um "princípio da permanência de formas equivalentes" um tanto semelhante ao princípio de correlação que Carnot e Poncelet tinham usado com tanto sucesso em geometria. Porém, a forma algébrica desse nebuloso postulado num certo sentido serviu de obstáculo ao progresso, pois sugeria que as leis da álgebra são as mesmas quaisquer que sejam os números ou objetos dentro dela. Peacock, ao que parece, pensava primariamente no sistema numérico dos inteiros e nas grandezas reais da geometria, e sua distinção entre os dois tipos de álgebra não era muito diferente da que Viète fizera entre "logistica numerosa" e "logistica speciosa". Por isso o subtítulo do segundo volume da obra de Peacock é *On Symbolical Algebra and its Applications to the Geometry of Position*, cujas últimas três palavras poderiam dar a entender que o autor estivera lendo Carnot.

3 Peacock, o "Euclides da álgebra", achou apoio para suas idéias na obra de Augustus De Morgan (1806-1871), o qual ajudou também a fundar a British Association for the

[2]*Treatise on Algebra* (reimpresso da edição de 1842-1845, New York: Scripta Mathematica, 1940), Vol. I, pp. VI-VIII. Encontra-se uma biografia de Peacock em Macfarlane, *Ten British Mathematicians*, Cap. 1

Advancement of Science (1831) e num certo sentido se uniu a Peacock para formar o que se poderia chamar uma "escola inglesa" de matemática. De Morgan nascera na Índia, seu pai tendo trabalhado para a East India Company, mas estudou no Trinity College, graduando-se como quarto *wrangler*. Não conseguiu um lugar em Cambridge ou Oxford porque recusou submeter-se ao exame religioso necessário, embora tivesse sido educado como membro da Igreja da Inglaterra, na qual sua mãe esperava que viesse a ser ministro. Em conseqüência, De Morgan foi nomeado, aos vinte e dois anos, professor de matemática na recém-fundada Universidade de Londres, mais tarde chamada University College da Universidade de Londres, onde continuou a ensinar exceto durante curtos períodos em que se demitia por causa de restrições da liberdade acadêmica. Sempre foi um defensor da tolerância religiosa e intelectual, e foi também autor e professor de qualidade excepcional. Nasceu cego de um olho, o que pode explicar algumas de suas inocentes excentricidades, como o fato de não gostar da vida rural, sua recusa de votar em qualquer eleição, e não se ter candidatado a membro da Royal Society. Amava enigmas e ditos de espírito, muitos dos quais estão reunidos no seu conhecido *Budget of Paradoxes*, uma encantadora sátira aos quadradores de círculo editada após sua morte por sua viúva[3].

Peacock foi uma espécie de profeta no desenvolvimento da álgebra abstrata, e De Morgan estava para ele um tanto como Elisha está para Elijah. Na *Álgebra* de Peacock entendia-se em geral que os símbolos representavam números ou grandezas, mas De Morgan os conservava abstratos. Deixava sem significado não só as letras que usava como também os símbolos de operação; letras como A, B, C podiam indicar virtudes e vícios e + e − podiam significar recompensas e castigos. De Morgan insistia em que "com uma única exceção, nenhuma palavra ou sinal em álgebra ou aritmética tem um átomo de significado em todo este capítulo, cujo assunto são símbolos e suas leis de combinação, dando uma álgebra simbólica que pode a partir daí tornar-se a gramática de cem álgebras diferentes significativas". (A exceção mencionada por De Morgan é o símbolo de igualdade, pois ele pensava que em $A = B$ os símbolos A e B "devem ter o mesmo significado resultante, quaisquer que sejam os passos para atingi-lo".) Essa idéia, expressa já em 1830 em sua *Trigonometry and Double Algebra*, está próxima da percepção moderna de que a matemática lida com funções proposicionais, e não com proposições; mas De Morgan parece não ter percebido a natureza inteiramente arbitrária das regras e definições da álgebra. Estava suficientemente próximo da filosofia de Kant para acreditar que as leis fundamentais usuais da álgebra deveriam aplicar-se a qualquer sistema algébrico. Ele via que indo da "álgebra simples" do sistema numérico real para a "álgebra dupla" dos números complexos as regras de operação permaneciam as mesmas. E De Morgan acreditava que essas duas formas esgotam os tipos de álgebra possíveis e que não era possível desenvolver uma álgebra tripla ou quádrupla. Nesse importante ponto Hamilton, outro homem de Trinity, mas desta vez Trinity College de Dublin, não de Cambridge, mostrou que ele estava errado. (Outro matemático de Trinity, Dublin, foi George Salmon [1819-1904] que lá ensinava matemática e religião, e foi autor de excelentes textos sobre cônicas, álgebra e geometria analítica.)

4 O pai de Hamilton, advogado, e sua mãe, ao que se diz ambos intelectualmente bem dotados, morreram quando ele era ainda menino; mas mesmo antes de ficar órfão a instrução do jovem Hamilton fora determinada por um tio, que era lingüista. Jovem extremamente precoce, William lia grego, hebraico e latim aos cinco anos; aos dez conhecia meia dúzia de línguas orientais. Um encontro com um calculista relâmpago poucos anos depois estimulou o interesse já forte de Hamilton pela matemática, assim como a amizade com Wordsworth e Coleridge provavelmente encorajou-o a continuar a pro-

[3]Uma extensa exposição sobre a vida e a obra de De Morgan está incluída em Macfarlane, *Ten British Mathematicians*, Cap. 2. Ver também *Memoir of A. D. M. by his Wife Sophia Elizabeth De Morgan, with Selections from His Letters* (1882)

duzir a má poesia que vinha escrevendo desde a meninice[4]. Hamilton entrou em Trinity College, Dublin, e enquanto ainda estudante lá, aos vinte e dois anos, foi nomeado Royal Astronomer da Irlanda, Diretor do Observatório de Dunsink, e professor de astronomia. No mesmo ano ele apresentou à Academia Irlandesa um artigo sobre sistemas de raios em que exprimia um de seus temas favoritos — que o espaço e o tempo estão "indissoluvelmente ligados entre si". Num certo sentido pode-se tomar essa idéia como presságio da teoria da relatividade, mas Hamilton tirou dela uma conclusão menos frutífera: assim como a geometria é a ciência do espaço somente, a álgebra deve ser a ciência do tempo puro. Talvez aqui Hamilton estivesse seguindo na álgebra o exemplo de Newton que, quando encontrava dificuldade para definir conceitos abstratos no método dos fluxos, sentia-se mais à vontade apelando para a noção de tempo no universo físico. Talvez estivesse simplesmente concluindo que, como a geometria é a ciência do espaço, e espaço e tempo são os dois aspectos da intuição sensorial, a álgebra deveria ser a ciência do tempo[5].

Pouco depois de apresentar seu primeiro artigo a predição feita por Hamilton de refração cônica em certos cristais foi experimentalmente confirmada por físicos. Essa verificação de uma teoria matemática garantiu sua reputação, e aos trinta anos ele recebeu um título de nobreza. Dois anos antes, em 1833, ele tinha apresentado um artigo longo e significativo à Academia Irlandesa, em que introduziu uma álgebra formal de pares de números complexos cujas regras de combinação são precisamente as que hoje são dadas para números complexos. A importante regra para multiplicação dos pares é naturalmente

$$(a, b)(\alpha, \beta) = (a\alpha - b\beta, a\beta + b\alpha)$$

e ele interpretava esse produto como uma operação envolvendo rotação[6]. Aqui vê-se o conceito definitivo de número complexo como par ordenado de números reais, idéia que estava indicada nas representações gráficas de Wessel, Argand e Gauss, mas que agora era explicitada pela primeira vez.

Hamilton percebia que seus pares ordenados podiam ser pensados como entidades orientadas no plano, e naturalmente tentou estender a idéia a três dimensões passando do número complexo binário $a + bi$ às triplas ordenadas $a + bi + cj$. A operação de adição não oferecia dificuldade, mas durante dez anos ele lutou com a multiplicação de n-uplas para n maior que dois. Um dia em 1843, enquanto passeava com a esposa ao longo do Royal Canal, teve uma inspiração: sua dificuldade desapareceria se usasse quádruplas em vez de triplas e se abandonasse a lei comutativa para a multiplicação. Estava mais ou menos claro já que para quádruplas de números $a + bi + cj + dk$ se deveria tomar $i^2 = j^2 = k^2 = -1$; agora Hamilton viu que deveria tomar $ij = k$ mas $ji = -k$, e semelhantemente $jk = i = -kj$ e $ki = j = -ik$. No resto, as leis de operação são as da álgebra ordinária.

Assim como Lobachevsky criara uma nova geometria consistente em si mesma, abandonando o postulado das paralelas, Hamilton criou uma nova álgebra, também consistente em si, abandonando o postulado da comutatividade para a multiplicação. Parou em seu passeio e com uma faca recortou a fórmula fundamental $i^2 = j^2 = k^2 = ijk$ numa pedra na Brougham Bridge; no mesmo dia, 16 de outubro, pediu licença à Royal Irish Academy para ler um artigo sobre quatérnions na sessão seguinte. A descoberta chave fora súbita, mas o descobridor vinha trabalhando para ela havia uns quinze anos. Hamilton, muito naturalmente, sempre considerou a descoberta dos quatérnions como

[4]Exposições sobre sua vida e obra se encontram em E. T. Bell, *Men of Mathematics* (1937), Cap. 19, e Alexander Macfarlane, *Ten British Mathematicians*, Cap. 3. Em *Scripta Mathematica*, **10** (1944), há vários artigos dedicados à vida e à obra de Hamilton. O estudo mais extenso é R. P. Graves, *Life of Sir William Rowan Hamilton* (1882). Veja também C. Lanczos, "William Rowan Hamilton", *American Scientist*, **55** (1967), 129-143

[5]E. T. Bell, *Men of Mathematics*, p. 359

[6]Uma exposição sobre o artigo em que Hamilton apresentou essa idéia é dada por C. C. MacDuffee em "Algebra's Debt to Hamilton", *Scripta Mathematica*, **10** (1944), 25-36

seu maior sucesso; em retrospecto é claro que não era tanto esse particular tipo de álgebra que era significativo, mas antes a descoberta da tremenda liberdade que tem a matemática de construir álgebras que não precisam satisfazer às restrições impostas pelas ditas "leis fundamentais", que até então, com o apoio do vago princípio da permanência de forma, tinham sido invocadas sem exceção. Durante os últimos vinte anos de sua vida Hamilton dispendeu suas energias com sua álgebra favorita, à qual ele se inclinava a atribuir significado cósmico, e que alguns matemáticos ingleses consideravam uma espécie de *arithmetica universalis* em sentido leibniziano. Suas *Lectures on Quaternions* apareceram em 1853, e depois disso ele se dedicou à preparação da obra ampliada, *Elements of Quaternions*. Essa não estava de todo terminada quando ele morreu em 1865, mas foi editada e publicada por seu filho no ano seguinte. A tragédia de uma esposa semi-inválida tinha ensombrecido seus últimos anos, e uma ocasional intemperança alcoólica levava alguns engraçados a dizer que ele poderia ser de fato um mestre do tempo puro, mas não do tempo sublunar. No entanto é uma satisfação para os norte-americanos lembrar que nesses infelizes anos de guerra civil a recém-fundada National Academy of Sciences nomeou Sir William Rowan Hamilton seu primeiro associado estrangeiro.

5 Em 1844, o ano seguinte à descoberta da multiplicação quaternioniana por Hamilton, idéias um tanto semelhantes foram publicadas na Alemanha por Grassmann em seu tratado *Die lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik* (A teoria da extensão linear, um novo ramo da matemática). Este é um cálculo vetorial muito geral, em um número qualquer de dimensões, e aqui também encontramos o desenvolvimento da idéia de multiplicação não-comutativa. Na verdade no sistema de Grassmann a multiplicação não é necessariamente associativa. É interessante notar que Grassmann, como Hamilton, era um lingüista, sendo especialista em literatura sânscrita. Ao contrário de Hamilton, porém, nunca ocupou cargo proeminente, mas ensinou em escolas secundárias. Além disso, demorou para que o significado de seu *Ausdehnungslehre* fosse percebido, pois o livro era não só pouco convencional como difícil de ler. Uma razão era que Grassmann, como Desargues antes dele, usava uma terminologia muito inusitada, porém mais fundamental era a novidade e extrema generalidade das idéias do autor quanto a extensão. Mesmo Gauss, que exprimiu aprovação à obra de Grassmann, parece ter achado excessiva a abstração filosófica[7].

Grassmann reescreveu seu *Ausdehnungslehre* em uma segunda edição em 1862, e então sua influência começou a fazer-se sentir mais fortemente. Em particular, resultou no desenvolvimento na América do Norte, primeiramente graças aos esforços de um físico da Universidade de Yale, Josiah Welleard Gibbs (1839-1903), da álgebra mais limitada dos vetores no espaço tridimensional. A álgebra dos vetores é novamente uma álgebra múltipla em que não vale a lei comutativa para a multiplicação.

Na verdade em 1867 Hankel provou que a álgebra dos números complexos é, como De Morgan suspeitara, a álgebra mais geral que é possível sob as leis fundamentais da aritmética[8]. A *Vector Analysis* de Gibbs apareceu em 1881 e novamente em 1884, e ele publicou outros artigos durante essa década. Essas obras provocaram uma animada e não muito polida controvérsia com os proponentes dos quatérnions sobre os méritos relativos das duas álgebras. Em 1895 um colega de Gibbs em Yale organizou uma Associação Internacional para Promover o Estudo dos Quatérnions e Sistemas Relacionados da Matemática, cujo primeiro presidente era um fervoroso adepto dos quatérnions. Não demorou muito para que sistemas relacionados, como vetores e sua generalização, ten-

[7]E. T. Bell, *The Development of Mathematics* (1940), p. 183. Não há exposição adequada em inglês sobre Grassmann e sua obra, mas um extrato em tradução inglesa de *Ausdehnungslehre* está incluido em *Source Book in Mathematics*, editado por D. E. Smith (1929), pp. 684-685

[8]Veja Kenneth O. May, "The Impossibility of a Division Algebra of Vectors in Three Dimensional Space", *American Mathematical Monthly*, **73** (1966), 289-291

sores, durante algum tempo eclipsassem os quatérnions[9], mas hoje eles têm um lugar garantido na álgebra, bem como na teoria quântica. Ainda mais, embora o nome de Hamilton seja raramente ligado a vetores, pois as notações de Gibbs vinham principalmente de Grassmann, a verdade é que as propriedades principais dos vetores tinham sido estabelecidas durante a longa investigação que Hamilton fez das álgebras múltiplas.

6 Pelos meados do século dezenove os matemáticos alemães estavam de cabeça e ombros acima dos de outras nacionalidades no que se referia à análise e à geometria, com as universidades de Berlim e Göttingen na liderança e com a publicação centrada no *Journal* de Crelle. A álgebra, por outro lado, foi durante algum tempo quase um monopólio britânico, com Trinity College, Cambridge, à frente e o *Cambridge Mathematical Journal* como principal veículo de publicação. Peacock e De Morgan eram ambos de Trinity, como também Cayley, que contribuiu fortemente tanto para a álgebra quanto para a geometria, e que se graduara como *senior wrangler*. Mencionamos a obra de Cayley em geometria analítica, especialmente quanto ao uso de determinantes; mas Cayley foi também um dos primeiros a estudar matrizes, outro exemplo da preocupação britânica com forma e estrutura em álgebra. Essa obra proveio de uma memória de 1858 sobre a teoria das transformações. Se, por exemplo, aplicamos após a transformação

$$T_1 \begin{cases} x' = ax + by, \\ y' = cx + dy, \end{cases}$$

uma outra transformação

$$T_2 \begin{cases} x'' = Ax' + By', \\ y'' = Cx' + Dy', \end{cases}$$

o resultado (que aparecera já antes, por exemplo nas *Disquisitiones arithmeticae* de Gauss em 1801) é equivalente à transformação composta

$$T_1T_2 \begin{cases} x'' = (Aa + Bc)x + (Ab + Bd)y, \\ y'' = (Ca + Dc)x + (Cb + Dd)y. \end{cases}$$

Se, de outro lado, invertemos a ordem de T_1 e T_2, de modo que T_2 é a transformação

$$\begin{cases} x' = Ax + By, \\ y' = Cx + Dy, \end{cases}$$

e T_1 é a transformação

$$\begin{cases} x'' = ax' + by', \\ y'' = cx' + dy', \end{cases}$$

então essas duas aplicadas sucessivamente equivalem à transformação única

$$T_1T_2 \begin{cases} x'' = (aA + bC)x + (aB + bD)y, \\ y'' = (cA + dC)x + (cB + dD)y. \end{cases}$$

A troca da ordem das transformações em geral produz um resultado diferente. Expresso na linguagem das matrizes,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aA + bC & aB + bD \\ cA + dC & cB + dD \end{pmatrix},$$

mas

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Aa + Bc & Ab + Bd \\ Ca + Dc & Cb + Dd \end{pmatrix}.$$

[9]Um livro sobre a história da análise vetorial, por Michael J. Crowe, foi publicado pela University of Notre Dame Press, em 1967. Crowe está também preparando uma tradução da *Ausdehnungslehre* de Grassmann. Há uma introdução histórica em P. H. Moon e D. E. Spencer, *Vectors* (Princeton, N. J., 1965). Veja também G. J. Pawlikowski, "The Men Responsible for the Development of Vectors", *The Mathematics Teacher*, **60** (1967), 393-396

Como duas matrizes são iguais se e somente se todos os elementos correspondentes são iguais, é claro que mais uma vez estamos diante de um exemplo de multiplicação não comutativa.

A definição da multiplicação de matrizes é a indicada acima, e a soma de duas matrizes (de iguais dimensões) é definida como a matriz obtida somando os elementos correspondentes das matrizes. Assim

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + A & b + B \\ c + C & d + D \end{pmatrix}.$$

A multiplicação de uma matriz por um escalar K é definida pela equação

$$K \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ka & Kb \\ Kc & Kd \end{pmatrix}.$$

A matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

que é usualmente denotada por I, deixa toda matriz quadrada de segunda ordem invariante por multiplicação; por isso é chamada a matriz identidade para multiplicação. A única matriz que deixa outra matriz invariante por adição é evidentemente a matriz zero

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

que é portanto a matriz identidade para a adição. Com essas definições podemos pensar nas operações sobre as matrizes como nas de uma "álgebra", passo que foi dado por Cayley e pelos matemáticos americanos Benjamin Peirce (1809-1880) e seu filho Charles S. Peirce (1839-1914). Os Peirces desempenharam na América algo do papel que Hamilton, Grassmann e Cayley tinham tido na Europa. O estudo da álgebra de matrizes e outras álgebras não comutativas foi em toda parte um dos principais fatores no desenvolvimento de uma visão cada vez mais abstrata da álgebra[10], especialmente no século vinte.

7 Logo depois de graduar-se em Trinity, Cayley dedicou-se ao direito durante quatorze anos; isso quase não interferiu com sua pesquisa matemática, e ele publicou várias centenas de artigos durante esses anos. Muitos dos artigos foram sobre a teoria dos invariantes algébricos, campo em que ele e seu amigo James Joseph Sylvester eram proeminentes. Cayley e Sylvester faziam um contraste total, o primeiro sendo de boa índole e temperamento, o segundo irrequieto e impaciente. Ambos se graduaram em Cambridge — Cayley em Trinity, Sylvester em St. John — mas Sylvester não podia obter um grau por ser judeu. Durante três anos depois de 1838 Sylvester ensinara no University College, em Londres, onde era colega de seu antigo professor, De Morgan; depois disso ele aceitou um posto de professor na University of Virginia. Problemas de disciplina perturbaram tanto o temperamental matemático que ele partiu precipitadamente, depois de três meses apenas. Ao voltar à Inglaterra passou quase dez anos ocupando-se de negócios e depois voltou-se para o estudo de direito, em conexão com o que, em 1850, ele encontrou Cayley pela primeira vez. A partir daí os dois tornaram-se amigos e matemáticos, e finalmente ambos abandonaram as leis. Em 1854 Sylvester aceitou um posto na Royal Military Academy em Woolwich, e em 1863 Cayley aceitou o posto de *"sadlerian professor"* em Cambridge. Em 1876 Sylvester fez mais uma tentativa de ensinar na América do Norte, dessa vez na recém-fundada Johns Hopkins University, onde permaneceu quase até os setenta anos, quando então aceitou um posto de professor na Universidade de Oxford.

[10]Veja, por exemplo, Nicolas Bourbaki, *Éléments d'histoire des mathématiques* (1960), pp. 120-128

Em 1881, quando Sylvester estava ainda na Johns Hopkins, Cayley aceitou um convite para fazer lá uma série de conferências sobre funções abelianas e funções teta. Embora os artigos de Cayley, quase tão numerosos quanto os de Euler ou de Cauchy, tratem predominantemente de álgebra e geometria, ele também contribuiu para a análise e seu único livro, publicado em 1876, é um *Treatise on Elliptic Functions*[11].

Os interesses de Cayley se dispersavam, mas a lealdade de Sylvester à álgebra era firme, e é justo que seu nome esteja ligado ao que se chama o método dialítico de Sylvester para eliminar uma incógnita entre duas equações polinomiais. O artifício é simples e consiste em multiplicar uma ou ambas as equações pela incógnita a ser eliminada, repetindo o processo se necessário até que o número total de equações seja uma unidade maior que o número de potências da incógnita. Dessa coleção de $n+1$ equações pode-se então eliminar todas as n potências, pensando em cada potência como uma incógnita diferente. Assim, para eliminar x do par de equações $x^2 + ax + b = 0$ e $x^3 + cx^2 + dx + e = 0$ multiplica-se a primeira por x e depois multiplica-se a equação resultante, e também a segunda equação acima, por x. Então, pensando em cada uma das quatro potências de x como numa incógnita diferente, o determinante

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & a & b \\ 0 & 1 & a & b & 0 \\ 1 & a & b & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c & d & e \\ 1 & c & d & e & 0 \end{vmatrix}$$

chamado o resultante no método de Sylvester, quando igualado a zero, dá o resultado da eliminação.

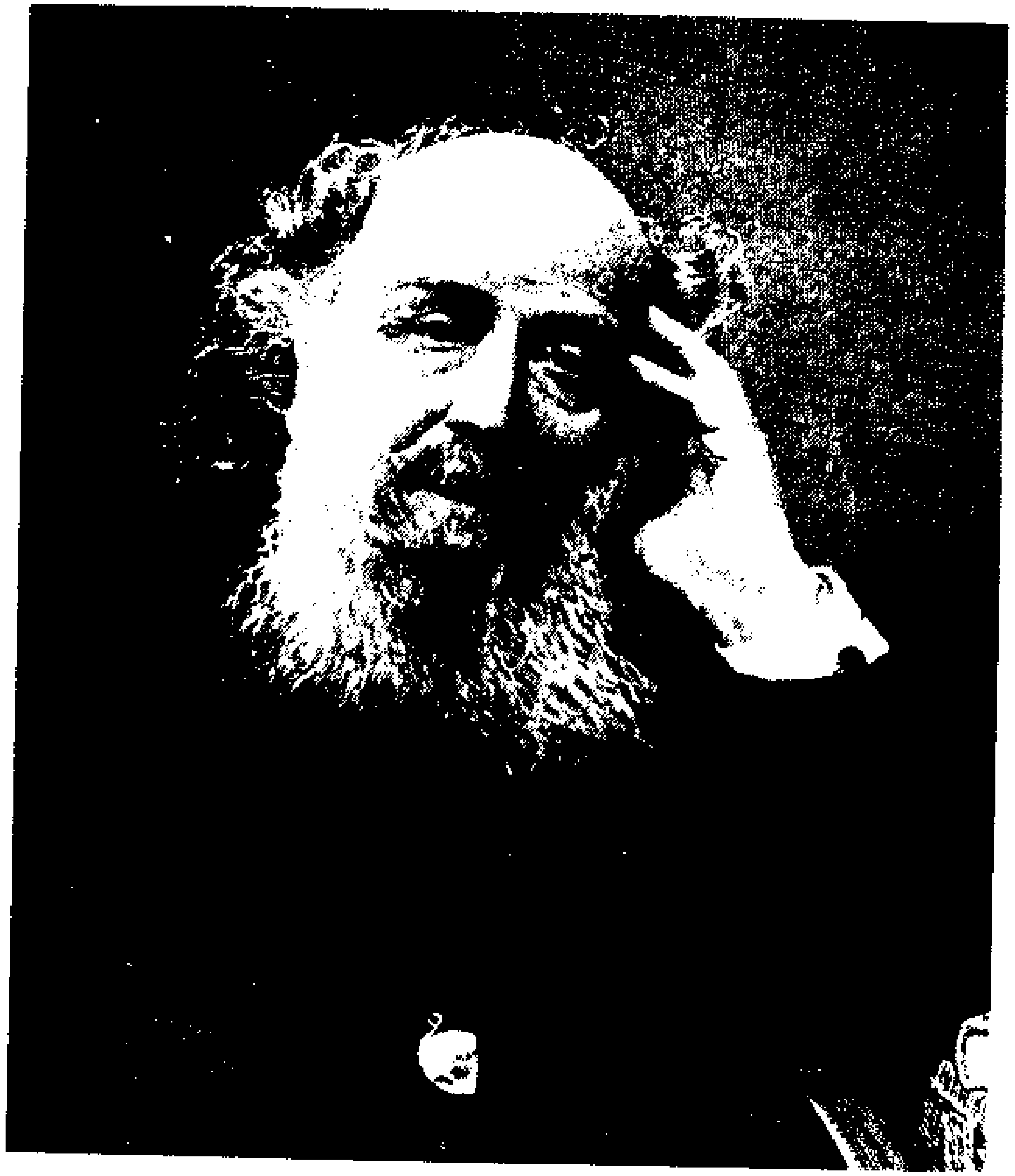
8 Mais importante que sua obra sobre eliminação foi a colaboração de Sylvester com Cayley no desenvolvimento da teoria das "formas" (ou "quânticas", como Cayley preferia chamá-las), através da qual os dois vieram a ser chamados os "gêmeos invariantes". Entre 1854 e 1878 Sylvester publicou quase uma dúzia de artigos sobre formas — polinômios homogêneos em duas ou mais variáveis — e seus invariantes[12]. Os casos mais importantes na geometria analítica e na física são as formas quadráticas em duas e três variáveis, pois, quando igualadas a uma constante, representam cônicas e quádricas. Em particular a forma $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$, quando igualada a uma constante não nula, representa uma elipse (real ou imaginária), uma parábola ou uma hipérbole, conforme $B^2 - AC$ seja menor que, igual a ou maior que zero. Além disso, se a forma é transformada por rotação de eixos em torno da origem na nova forma $A'x^2 + 2B'xy + C'y^2$, então $(B')^2 - A'C' = B^2 - AC$ — isto é, a expressão $B^2 - AC$, chamada a característica da forma, é um invariante sob uma tal transformação. A expressão $A + C$ é outro invariante. Outros invariantes importantes associados com a forma são as raízes k_1 e k_2 da equação característica

$$\begin{vmatrix} A-k & B \\ B & C-k \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ou} \quad \begin{vmatrix} A'-k & B' \\ B' & C'-k \end{vmatrix} = 0.$$

As raízes, de fato, são os coeficientes de x^2 e y^2 na forma canônica $k_1x^2 + k_2y^2$ a que a forma, se não for de tipo parabólico, pode ser reduzida por uma rotação dos eixos. O efervescente Sylvester se gabava de ter descoberto e desenvolvido a redução de formas binárias à forma canônica de uma assentada, "com uma garrafa de vinho do Porto para sustentar as energias naturais debilitadas"[13].

Se designarmos por M a matriz dos coeficientes da forma e por I a matriz identidade de ordem dois, a equação característica pode ser escrita como $|M - kI| = 0$, onde as barras verticais representam o determinante da matriz. Uma das propriedades importantes da álgebra de matrizes é que uma matriz M satisfaz à sua equação característica, resultado dado em 1858 e conhecido como teorema de Hamilton-Cayley. Diz-se às vezes que a álgebra de matrizes de Cayley deriva da álgebra de quatérnions de Hamilton, mas Cayley em 1894 negou especificamente tal ligação. Ele admirava a teoria dos quatérnions, mas afirmava que seu desenvolvimento das matrizes se originava dos determinantes, como modo conveniente de exprimir uma transformação[14].

9 Enquanto que os matemáticos de Trinity, Hamilton e Cayley (um de Dublin, outro de Cambridge), estavam desenvolvendo dois novos tipos de álgebra, uma terceira forma de álgebra, radicalmente diferente, estava sendo inventada por um inglês praticamente



James Joseph Sylvester

[11]Seus *Collected Mathematical Papers* (1889-1898) formam quatorze volumes grandes

[12]Sumários breves de alguns artigos de Cayley sobre quânticas e outros tópicos estão incluídos em Ganesh Prasad, *Some Great Mathematicians of the Nineteenth Century* (1933-1934), II, 1-33. Veja também R. W. Feldmann, "History of Elementary Matrix Theory", *The Mathematics Teacher*, **55** (1962), 482-484, 589-590, 657-659

[13]Bell, *Men of Mathematics*, p. 398. No Cap. 21 há uma boa exposição geral das vidas de Sylvester e Cayley. Em Macfarlane, *Ten British Mathematicians*, há um capítulo inteiro sobre cada um

[14]E. T. Bell, *Development of Mathematics*, pp. 188-189

autodidata, George Boole. Nascido de família modesta em Lincoln, Inglaterra, Boole tinha só instrução escolar comum; mas aprendeu grego e latim por si, acreditando que esse conhecimento o ajudaria a melhorar sua condição. Durante seus primeiros anos como professor de escola elementar, Boole percebeu que precisava aprender mais matemática, e começou a estudar as obras de Laplace e Lagrange, além de mais línguas estrangeiras. Tornando-se amigo de De Morgan, interessou-se também vivamente por uma controvérsia sobre lógica que o filósofo escocês Sir William Hamilton (1788-1856), que não deve ser confundido com o matemático irlandês Sir William Rowan Hamilton (1805-1865), tinha iniciado com De Morgan. (O Sir William escocês era um baronete que herdara seu título, o Sir William irlandês era um *knight* que ganhara seu título.) O resultado foi que Boole em 1847 publicou uma obra curta chamada *The Mathematical Analysis of Logic*, um pequeno livro que De Morgan viu estar destinado a marcar época.

A história da lógica pode ser dividida, com simplificação ligeiramente excessiva, em três estágios: (1) lógica grega, (2) lógica escolástica, e (3) lógica matemática[15]. No primeiro estágio, as fórmulas lógicas consistiam de palavras da linguagem ordinária, sujeitas às regras sintáticas usuais. No segundo estágio, a lógica era tirada da linguagem ordinária mas caracterizada por regras sintáticas diferenciadas e funções semânticas especializadas. No terceiro estágio, a lógica ficou marcada pelo uso de uma linguagem artificial em que palavras e sinais têm funções semânticas muito limitadas. Ao passo que nos dois primeiros estágios teoremas lógicos eram derivados da linguagem ordinária, a lógica do terceiro estágio procede de maneira oposta — primeiro ela constrói um sistema puramente formal, e só depois procura uma interpretação na fala comum. Embora Leibniz seja às vezes considerado um precursor desse último ponto de vista, sua data de florescimento é na verdade o ano em que apareceu o primeiro livro de Boole, bem como a *Formal Logic* de De Morgan. A obra de Boole, em particular, insistia em que a lógica deve ser associada à matemática, não à metafísica, como argüia o escocês Sir William Hamilton.

Mais importante até que sua lógica matemática era a concepção que Boole tinha da própria matemática. Na Introdução a sua *Análise Matemática da Lógica* o autor faz objeções à concepção então corrente da matemática como ciência da grandeza e do número (definição ainda adotada em alguns dicionários inferiores). Defendendo uma visão mais ampla, Boole escrevia:

> Poderíamos com justiça tomar como característica definitiva de um verdadeiro Cálculo, que é um método que se apóia no uso de Símbolos, cujas leis de combinação são conhecidas e gerais, e cujos resultados admitem uma interpretação consistente... É com base nesse princípio geral que eu pretendo estabelecer o Cálculo da Lógica, e que reivindico para ele um lugar entre as formas reconhecidas da Análise Matemática[16].

A *Álgebra* de Peacock de 1830 tinha sugerido que os símbolos para objetos na álgebra não precisam indicar números, e De Morgan argüia que as interpretações dos símbolos para operações eram também arbitrárias; Boole levou o formalismo à sua conclusão. A matemática já não estava limitada a questões de número e grandeza contínua. Aqui pela primeira vez está claramente expressa a idéia de que a característica essencial da matemática é não tanto seu conteúdo quanto sua forma. Se qualquer tópico é apresentado de tal modo que consiste de símbolos e regras precisas de operação sobre esses símbolos, sujeitas apenas à exigência de consistência interna, tal tópico é parte da matemática. Embora a *Mathematical Analysis of Logic* não conseguisse grande fama, foi provavelmente por causa dessa obra que Boole dois anos depois foi nomeado professor de matemática no recém-fundado Queens College, em Cork.

[15]Veja I. M. Bochenski, *Formale Logik* (Amsterdam: North Holland, 1956; tradução para o inglês, 1961)

[16]George Boole, *The Mathematical Analysis of Logic* (1847) pp. 3-4. Há uma reimpressão dessa obra – New York: Philosophical Library, 1948

Um grande matemático e filósofo do século vinte, Bertrand Russell, afirmou que a maior descoberta do século dezenove foi a natureza da matemática pura. Acrescenta a essa asserção as palavras, "A matemática pura foi descoberta por Boole numa obra que ele chamou *As Leis do Pensamento*." Nessa asserção Russell se refere à obra mais conhecida de Boole, publicada em 1854. Para ser mais preciso seria melhor citar o livro anterior, de 1847, em que as mesmas idéias tinham sido apresentadas.

10 A *Investigation of the Laws of Thought* de 1854 de Boole é um clássico na história da matemática, pois ampliou e esclareceu as idéias apresentadas em 1847, estabelecendo ao mesmo tempo a lógica formal e uma nova álgebra, chamada álgebra de Boole, ou álgebra dos conjuntos, ou álgebra da lógica. Boole usou as letras $x, y, z, \ldots$ para representar subconjuntos de coisas — números, pontos, idéias, ou outras entidades — escolhidas de um conjunto universal ou universo de discurso, cuja totalidade ele designava pelo símbolo ou "número" 1. Por exemplo, se o símbolo 1 representa todos os europeus, x poderia representar todos os europeus que são cidadãos franceses, y poderia representar todos os homens europeus de mais de vinte e um anos, e z todos os europeus cuja altura está entre 1,50 m e 1,80 m. O símbolo ou número 0 Boole tomou para indicar o conjunto vazio, que não contém nenhum elemento do conjunto universal — o que agora se chama conjunto nulo. O sinal + entre duas letras ou símbolos, como $x + y$, ele tomou como sendo a união dos subconjuntos x e y — isto é, o conjunto formado de todos os elementos em x ou y (ou ambos). O sinal de multiplicação $\times$ representava a intersecção de conjuntos, de modo que $x \times y$ significa os elementos ou objetos que estão no subconjunto x e também no subconjunto y. No exemplo acima $x + y$ consiste de todos os europeus que são cidadãos franceses ou são homens de mais de vinte e um anos, ou ambos; $x \times y$ (escrito também como $x \cdot y$ ou simplesmente xy) é o conjunto de todos os cidadãos franceses que são homens de mais de vinte e um anos. (Boole, ao contrário de De Morgan, usava união exclusiva, não admitindo elementos comuns em x e y, mas a álgebra booleana moderna, mais convenientemente, toma + como sendo a união inclusiva de conjuntos que podem ter elementos comuns.) O sinal = representa a relação de identidade. É claro que as cinco leis fundamentais da álgebra valem para essa álgebra booleana, pois $x + y = y + x$, $xy = yx$, $x + (y + z) = (x + y) + z$, $x(yz) = (xy)z$ e $x(y + z) = xy + xz$. No entanto, nem todas as regras da álgebra ordinária continuam válidas. Por exemplo, $1 + 1 = 1$ e $x \cdot x = x$. (A segunda dessas aparece na obra de Boole, mas não a primeira, já que ele usava união exclusiva.) A equação $x^2 = x$ tem somente duas raizes, na álgebra ordinária, $x = 0$ e $x = 1$; quando escrita na forma $x(1 - x) = 0$ ela sugere que $1 - x$ deve designar o complemento do subconjunto x — isto é, todos os elementos do conjunto universal que não estão no subconjunto x. Embora seja verdade na álgebra booleana que $x^3 = x$ ou $x(1 - x^2) = 0$ ou $x(1 - x)(1 + x) = 0$, a solução na álgebra ordinária difere da da álgebra booleana em que não há números negativos. A álgebra de Boole difere da álgebra ordinária também pelo fato de $zx = zy$ (onde z não é o conjunto nulo) não implicar $x = y$; nem é necessariamente verdade que se $xy = 0$, então x ou y deve ser 0.

Boole mostrou que sua álgebra fornecia um algoritmo simples para raciocínios silogísticos. A equação $xy = x$, por exemplo, diz muito claramente que todos os xs são ys. Se também é dado que todos os ys são zs, então $yz = y$. Substituindo na primeira equação o valor de y dado na segunda o resultado é $x(yz) = x$. Usando a lei associativa da multiplicação, a última equação pode ser escrita como $(xy)z = x$, e substituindo xy por x temos $xz = x$, que é simplesmente a maneira simbólica de dizer que todos os xs são zs.

A *Mathematical Analysis of Logic* (1847) e, a fortiori, *The Laws of Thought* (1854) contêm muito mais sobre a álgebra de conjuntos do que indicamos. Em particular, a segunda obra inclui aplicações a probabilidades. Hoje a álgebra booleana é largamente usada não só por matemáticos puros mas também por outros que a aplicam a problemas de seguros e de teoria da informação. As notações mudaram um pouco desde os dias de Boole, de modo que a união e a intersecção são geralmente denotadas por $\cup$ e $\cap$, em vez de + e $\times$, e o símbolo para o conjunto vazio é ϕ em vez de 0; mas os princípios fundamentais são os estabelecidos por Boole há mais de um século.

Há um aspecto da obra de Boole que não se relaciona de perto com seus tratados sobre lógica e teoria dos conjuntos, mas que é familiar a todo estudante de equações diferenciais. É o algoritmo dos operadores diferenciais, que ele introduziu para facilitar o tratamento das equações diferenciais lineares. Se, por exemplo, queremos resolver a equação diferencial $ay'' + by' + cy = 0$, a equação é escrita na notação $(aD^2 + bD + c)y = 0$. Então, considerando D como uma incógnita, em vez de operador, resolvemos a equação quadrática algébrica $aD^2 + bD + c = 0$. Se as raízes da equação algébrica são p e q, então e^{px} e e^{qx} são soluções da equação diferencial e $Ae^{px} + Be^{qx}$ é a solução geral da equação diferencial. Há muitas outras situações em que Boole, em seu *Tratado sobre Equações Diferenciais* de 1859 assinalou analogias entre as propriedades do operador diferencial (e seu inverso) e as regras da álgebra. Os matemáticos ingleses da segunda metade do século dezenove estavam novamente voltando a liderar na análise algorítmica, campo em que cinqüenta anos antes estavam muito deficientes.

Boole morreu em 1864, só dez anos depois de publicar suas *Laws of Thought*, mas o reconhecimento, inclusive um grau honorário da Universidade de Dublin, tinha-lhe vindo antes de sua morte[17]. É curioso notar que Cantor, que como Boole foi um dos principais abridores de trilhas novas do século, foi um dos poucos a não aceitar a obra de Boole.

11 Entre os que continuaram a obra de Boole após sua morte estavam De Morgan e Benjamin Peirce. Esses descobriram independentemente a chamada lei de dualidade de De Morgan — para toda proposição envolvendo adição e multiplicação lógicas, existe uma proposição correspondente em que as palavras adição e multiplicação são permutadas. Em particular temos a chamada fórmula de De Morgan: Se x e y são subconjuntos de um conjunto S, então o complementar da união de x e y é a intersecção dos complementares de x e y, e o complementar da intersecção de x e y é a reunião dos complementares de x e y.

Benjamin Peirce esteve ligado a Harvard College por mais de cinqüenta anos, primeiro como estudante, depois como professor. Sua obra principal foi seu artigo sobre *Álgebra linear associativa*, lido para a American Association for the Advancement of Science em 1864, mas publicado somente em 1881 no *American Journal of Mathematics*. As álgebras lineares associativas incluem a álgebra ordinária, a análise vetorial e os quatérnions como casos especiais, mas não estão restritas às unidades l, i, j, k. Peirce construiu tabelas de multiplicação para 162 álgebras, o que estava bem longe da idéia que prevalecia no começo do século, de que existia somente uma álgebra! C. S. Peirce continuou a obra de seu pai nessa direção mostrando que de todas essas álgebras somente três têm divisão univocamente definida: a álgebra ordinária real, a álgebra dos números complexos, e a álgebra dos quatérnions. Foi em conexão com sua obra sobre álgebra linear associativa que Benjamin Peirce em 1870 deu a definição bem conhecida. "A matemática é a ciência que tira conclusões necessárias". Seu filho concordava plenamente com essa idéia, devido à influência de Boole, mas frisava que a matemática e a lógica não são a mesma coisa. "A matemática é puramente hipotética: só produz proposições condicionais. A lógica, ao contrário, é categórica em suas asserções"[18]. Essa distinção seria discutida pelo mundo matemático durante a primeira metade do século vinte.

[17]Não há biografia completa de Boole. Para mais detalhes ver Macfarlane, *Ten British Mathematicians*, pp. 50-63, Bell, *Men of Mathematics*, Cap. 23, ou artigo a aparecer sobre Boole de T. A. A. Broadbent em *Dictionary of Scientific Biography* (a ser publicado por Charles Scribner's Sons, New York). Uma exposição bem feita da álgebra de Boole está incluída também em Herbert Meschkowski, *Ways of Thought of Great Mathematicians* (1964), pp. 74-83. Veja também o artigo sobre "Logic, History of", na *Encyclopedia of Philosophy*, ed. por Paul Edwards (8 volumes, New York: Macmillan, 1967), IV, 513-571

[18]Para excertos curtos da obra tanto de Benjamin como de C. S. Peirce, veja *The Treasury of Mathematics*, editado por Henrietta O. Midonick (1965), pp. 610-642. Cf. *Studies in the Philosophy of Charles Sanders Peirce* (2.ª série, Amherst, Mass.: University of Massachusetts Press, 1964)

Charles Sanders Peirce

Na Inglaterra idéias um tanto semelhantes eram apresentadas por William Kingdon Clifford (1845-1879), outro graduado de Trinity, cuja obra brilhante, como a de um graduado de Trinity mais antigo, Roger Cotes, foi bruscamente cortada por morte prematura aos trinta e quatro anos. Clifford era extraordinário em muitos aspectos. Por exemplo, era um ginasta capaz de se suspender na barra com qualquer das mãos — feito incomum para qualquer pessoa, e especialmente para um matemático. Além disso, teve prêmios de declamação, algo quase nunca visto em alguém que se graduou como segundo *wrangler*. Também, como o matemático de Oxford C. L. Dogson (1832-1898), mais conhecido como Lewis Carroll, autor de *Alice no País das Maravilhas*, ele compôs *Little People*, coleção de histórias infantis. Em 1870 Clifford escreveu um artigo "On the Space-Theory of Matter" em que apoiou fortemente a geometria não-euclidiana de Lobachevsky e Riemann[19]. Na álgebra Clifford também apoiou as idéias novas, e

[19]Veja Bell, *Men of Mathematics*, pp. 503-504, e D. J. Struik, *Concise History of Mathematics* (1967), pp. 171-173

seu nome está perpetuado nas álgebras de Clifford, de que octônions ou biquatérnions são casos particulares. Essas álgebras não comutativas foram usadas por Clifford para estudar movimentos em espaços não-euclidianos, dos quais certas variedades são chamadas espaços de Clifford e Klein[20]. Como a progressista matemática inglesa da segunda metade do século dezenove diferia do mediocrizante conservadorismo do começo do século!

12 A multiplicidade de álgebras inventadas no século dezenove poderia ter dado à matemática uma tendência centrífuga se não tivessem sido desenvolvidos certos conceitos estruturais. Um dos mais importantes desses foi a noção de grupo, cujo papel unificador na geometria já foi indicado. Na álgebra o conceito de grupo foi sem dúvida a força mais importante para a coesão, e foi um fator essencial no surgimento das idéias abstratas. Não houve uma pessoa responsável pelo surgimento da idéia de grupo, mas a figura que mais se sobressai nesse contexto foi o homem que deu o nome a esse conceito, o jovem Évariste Galois, morto tragicamente antes de completar vinte e um anos.

Galois nasceu nas proximidades de Paris, na aldeia de Bourg-la-Reine, onde seu pai era prefeito. Seus pais, bastante cultos, não tinham mostrado particular aptidão pela matemática, porém deles o jovem Galois adquiriu seu ódio implacável pela tirania. Quando entrou na escola aos doze anos mostrou pouco interesse pelo latim, grego ou álgebra, mas ficou fascinado pela *Geometria* de Legendre. Mais tarde ele leu e compreendeu obras de álgebra e análise de mestres como Lagrange e Abel, mas seus trabalhos escolares de rotina permaneciam medíocres e seus professores o consideravam excêntrico. Aos dezesseis anos Galois sabia o que seus professores não tinham percebido — que era um gênio matemático. Esperava, por isso, entrar na escola que tinha produzido tantos matemáticos célebres, a École Polytechnique, mas foi recusado devido à sua falta de preparo sistemático. Foi o primeiro fracasso amargo. Mesmo assim, aos dezessete anos Galois expôs suas descobertas fundamentais num artigo, que ele pediu a Cauchy que apresentasse à Académie. Cauchy não se limitou a esquecer o artigo, como fizera com um dos artigos importantes de Abel, ele perdeu o artigo! Agora Galois odiava não só os examinadores como também os acadêmicos. Um fracasso na sua segunda tentativa de entrar na Polytechnique aumentou sua amargura; mas o choque mais pesado ainda estava para vir. Atacado por causa de intrigas clericais, seu pai sentiu-se perseguido e suicidou-se.

Apesar dos golpes que sofrera Galois entrou na École Normale a fim de preparar-se para ensinar; também continuou sua pesquisa, e em 1830 submeteu uma memória num concurso para o prêmio de matemática da Académie. Fourier, o secretário da Académie, levou o artigo para casa, morreu logo depois, e o artigo se perdeu. Enfrentando de todos os lados tirania e frustações, Galois aderiu à causa da revolução de 1830. Uma carta candente criticando a indecisão do diretor da École Normale resultou na expulsão de Galois; mas mais uma vez ele tentou submeter um artigo à Académie, dessa vez através de Poisson. O artigo continha resultados importantes que agora são parte do que se chama teoria de Galois; mas Poisson, o assessor, devolveu-o com a observação de que era "incompreensível". Completamente desiludido, Galois entrou para a Guarda Nacional. Em 1831, numa reunião de republicanos, propôs um brinde que foi interpretado como ameaça à vida de Louis Philippe, e foi preso. Embora solto logo, foi preso de novo poucos meses depois e condenado a seis meses de prisão. Pouco depois envolveu-se com uma mulher e por causa dela, em nome de um código de "honra", não pode evitar um duelo. Numa carta para amigos ele escreveu, "Fui desafiado por dois patriotas — era impossível recusar". Na noite anterior ao duelo, com pressentimentos de morte, Galois passou as horas rascunhando, numa carta a um amigo, notas para a posteridade sobre suas descobertas[21]. Pediu que a carta fosse publicada (o que foi feito no mesmo ano) na *Revue Encyclopedique* e exprimiu a esperança de que Jacobi e Gauss pudessem dar publicamente sua opinião sobre a importância dos teoremas. Na manhã de 30 de maio de 1832 Galois encontrou seu adversário num duelo com pistolas. Recebeu um tiro nos intestinos e ficou caído no lugar até que um camponês que passava o levou a um hospital onde morreu de peritonite na manhã seguinte. A seu funeral compareceram milhares de republicanos[22]. Tinha apenas vinte anos então, o mais jovem matemático que jamais fez descobertas tão significativas.

[20]Uma exposição sobre a vida de Clifford se encontra em Macfarlane *Ten British Mathematicians*, pp. 78-91, mas os julgamentos ali expressos sobre a obra de Clifford não são bem fundamentados. Veja também Clifford, *Mathematical Papers* (Londres, 1882)

13 Galois confiara ao destinatário de sua última carta alguns manuscritos para a Académie e em 1846 Liouville editou alguns desses e publicou-os em seu *Journal*. Liouville achara a tarefa difícil, pois Galois não seguira o conselho de Descartes, "Quando se discute uma questão transcendente, deve-se ser transcendentemente claro". Mas Liouville sentiu-se recompensado quando, depois de preencher as lacunas na prova, percebeu o método pelo qual Galois provara esse belo teorema:

> Para que uma equação irredutível de grau primo possa ser resolvida por radicais é necessário e suficiente que todas as suas raízes sejam funções racionais de duas quaisquer dentre elas.

O objetivo principal das pesquisas de Galois tinha sido o de determinar quando as equações polinomiais são resolúveis por radicais. Gauss, em seus critérios para construtibilidade de polígonos regulares, em essência tinha resolvido a questão da solubilidade da equação $a_0X^n + a_n = 0$ em termos de operações racionais e raízes quadradas dos coeficientes. Galois generalizou o resultado fornecendo critérios para a resolubilidade de $a_0X^n + a_1X^{n-1} + \cdots + a_{n-1}X + a_n = 0$ em termos de operações racionais e raízes n-ésimas dos coeficientes. Seu método de ataque do problema, hoje chamado teoria de Galois é como alho, no sentido que não há algo como um pouco dele. É preciso fazer um estudo substancial para apreciar o raciocínio — como as experiências de Galois com seus contemporâneos mostraram. No entanto podemos indicar de modo geral o que está atrás da teoria de Galois e por que ela é importante.

Galois começou suas investigações com um trabalho de Lagrange sobre as permutações das raízes de uma equação polinomial. Toda mudança no arranjo ordenado de n objetos chama-se uma permutação desses objetos. Se por exemplo a ordem das letras a, b, c é mudada para c, a, b essa permutação é escrita sucintamente (acb), notação em que cada letra é levada na letra imediatamente seguinte, entendendo-se que a primeira letra sucede à última. Assim a letra a foi levada em c, c por sua vez em b e b foi em a. A notação (ac) ou (ac,b), no entanto, significa que a vai em c, c vai em a e b vai em si mesmo. Se duas permutações são efetuadas sucessivamente, a permutação resultante chama-se o produto das duas transformações de permutação. Assim o produto de (acb) e (ac, b), escrito como $(acb)(ac, b)$ é a permutação (a, bc). A permutação idêntica I leva cada letra em si mesma — isto é, deixa a ordem a, b, c inalterada. O conjunto de todas as permutações sobre as letras a, b, c claramente satisfaz à definição de grupo dada no Cap. 24 sobre a geometria; esse grupo, contendo seis permutações, é chamado grupo simétrico sobre a, b, c. No caso de n elementos distintos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ o grupo simétrico sobre eles contém $n!$ transformações. Se esses elementos são as raízes de uma equação irredutível, as propriedades do grupo simétrico fornecem condições necessárias e suficientes para que a equação seja resolúvel por radicais.

Inspirado pela prova de Abel da irresolubilidade por radicais da equação quíntica, Galois descobriu que uma equação algébrica irredutível é resolúvel por radicais se e só se seu grupo — isto é, o grupo de permutações sobre suas raízes — é resolúvel. A descrição de um grupo resolúvel é bastante complicada, envolvendo relações entre o grupo

[21]A carta aparece traduzida para o inglês em *Source Book in Mathematics*, editado por D. E. Smith, pp. 278-285

[22]Ver George Sarton, "Évariste Galois", *Osiris*, 3 (1937), 241-259

e seus subgrupos. As três permutações (abc), $(abc)^2$ e $(abc)^3 = I$ formam um subgrupo do grupo simétrico sobre a, b, c. Lagrange já tinha mostrado que a ordem de um subgrupo deve ser um divisor da ordem do grupo; mas Galois foi além e achou relações entre a fatorabilidade do grupo de uma equação e a solubilidade da equação. Além disso, a ele devemos o uso em 1830 da palavra "grupo" em seu sentido técnico em matemática[23].

A teoria de Galois fornece um algoritmo para achar de fato as raízes de uma equação quando essas podem ser expressas por radicais; mas a ênfase no método de Galois na teoria das equações geralmente se volta mais para a estrutura algébrica do que para o tratamento de casos específicos. Embora sua obra fosse anterior à da maior parte dos algebristas ingleses do grande período de 1830-1850 suas idéias não tiveram influência até sua publicação em 1846. A álgebra então estava tornando-se tão geral e abstrata que métodos heurísticos para encontrar raízes eram subordinados a questões lógicas referentes a teoremas de existência. Galois estava tão perto da atitude moderna e no entanto era tão inarticulado que não conseguiu fazer-se compreender pelos professores em seu tempo. Hoje fala-se muito nas escolas secundárias em "Matemática Moderna", mas ela só é moderna no sentido que as idéias de Galois finalmente estão chegando a todos, mais de um século depois que o destino o tratou tão mal.

14 A obra de Galois foi importante não só por tornar a noção abstrata de grupo fundamental na teoria das equações, mas também por levar, através das contribuições de Dedekind, Kronecker e Kummer, ao que se pode chamar tratamento aritmético da álgebra, algo parecido com a aritmetização da análise. Isso não significa uma volta à concepção medieval e renascentista da álgebra como um algoritmo para achar um número desconhecido. Significa o desenvolvimento de um cuidadoso tratamento postulacional da estrutura algébrica em termos de vários corpos de números. O conceito de corpo estava implícito na obra de Abel e Galois, mas Dedekind, em 1879, parece ter sido o primeiro a dar uma definição explícita de corpo numérico — uma coleção de números que formam um grupo abeliano com relação à adição e (com a exceção do inverso do zero) com relação à multiplicação, e no qual a multiplicação é distributiva com relação à adição. Exemplos simples são a coleção dos números racionais, o sistema dos números reais, e o corpo complexo. Kronecker em 1881 deu outros exemplos com seus domínios de racionalidade. O conjunto dos números da forma $a + b\sqrt{2}$, onde a e b são racionais, forma um corpo, como se verifica facilmente. Nesse caso o número de elementos do corpo é infinito. Um corpo com um número finito de elementos chama-se um corpo de Galois, e um exemplo simples é o corpo dos inteiros módulo 5 (ou qualquer primo).

A preocupação com estrutura e o surgimento de novas álgebras, especialmente durante a segunda metade do século dezenove, levaram a amplas generalizações quanto a número e aritmética. Já vimos que Gauss estendeu a idéia de inteiro como o estudo dos inteiros gaussianos da forma $a + bi$, onde a e b são inteiros. Dedekind generalizou ainda mais com a teoria dos "inteiros algébricos" — números que satisfazem a equações polinomiais com coeficientes inteiros e primeiro coeficiente igual a um. Tais sistemas de "inteiros", é claro, não formam um corpo, pois faltam os inversos para a multiplicação. Têm algo em comum no fato de satisfazerem às demais exigências para um corpo; dizemos que formam um "domínio de integridade". Tais generalizações da palavra *inteiro* têm porém um preço — perde-se a fatoração única. Por isso Dedekind e um matemático

[23]Veja suas *Oeuvres*, editado por E. Picard (1897), p. 28. Para detalhes sobre a teoria de Galois e solubilidade de equações veja Emile Artin, *Galois Theory* (Notre Dame Mathematical Lectures, n.° 2, Notre Dame, Ind., 1959); ou veja um volume sobre álgebra moderna, como Garrett Birkhoff e Saunders MacLane, *Survey of Modern Algebra* (New York: Macmillan, 1941), ou L. E. Dickson, *Modern Algebraic Theories* (Chicago: B. H. Sanborn, 1926). Uma explicação muito concisa encontra-se em E. T. Bell, *The Development of Mathematics*, pp. 218-220. Cf. Garrett Birkhoff, "Galois and Group Theory", *Osiris*, 3 (1937), 260-268

seu contemporâneo, Ernst Eduard Kummer (1810-1893) introduziram na aritmética o conceito de "ideal", baseado na noção de "anel".

Dizemos que um conjunto de elementos forma um anel se (1) é um grupo abeliano com relação à adição, (2) o conjunto é fechado com relação à multiplicação e (3) a multiplicação é associativa e é distributiva com relação à adição. (Assim um anel que seja comutativo para a multiplicação, tenha elemento unidade, e não tenha divisores do zero, é um domínio de integridade.) Um ideal, então, é um subconjunto I de elementos de um anel R que (1) é um grupo aditivo e (2) tem a propriedade que sempre que x pertence a R e y pertence a I, xy pertence a I. O conjunto dos inteiros pares, por exemplo, é um ideal do anel dos inteiros. Verifica-se que no anel (ou domínio de integridade) R dos inteiros algébricos, todo ideal I de R pode ser representado de modo único (exceto quanto à ordem dos fatores) como um produto de ideais primos. Isto é, a unicidade de fatoração pode ser preservada com a teoria dos ideais[24].

Kummer perdeu o pai aos três anos, mas sua mãe cuidou de que seu filho estudasse na Universidade de Halle, onde se doutorou aos vinte e um anos. Após cerca de doze anos de ensino em ginásios, ele sucedeu a Dirichlet em Berlim quando esse em 1855 tornou-se o sucessor de Gauss em Göttingen; Kummer permaneceu lá até aposentar-se em 1883. Logo depois de seu doutoramento Kummer começara a interessar-se pelo último teorema de Fermat, para o qual Cauchy uma vez erradamente pensara ter uma prova. Kummer conseguiu provar o teorema para uma grande classe de expoentes, mas uma prova geral ele não conseguiu. A pedra no caminho parece ter estado no fato de que na fatoração de $x^n + y^n$, através da resolução de $x^n + y^n = 0$ para x em termos de y, os inteiros algébricos, ou raízes da equação, não satisfazem necessariamente ao teorema fundamental da aritmética — isto é, não têm fatoração única. O resultado foi que, embora não conseguisse provar o teorema de Fermat na tentativa de fazê-lo ele criou num certo sentido uma nova aritmética — a teoria dos ideais que ele descobriu em 1846, muitos anos antes de desenvolvimentos semelhantes por Dedekind. Uma das lições que a história da matemática ensina claramente é que a busca de soluções para problemas não resolvidos, sejam eles resolúveis ou não, leva invariavelmente a descobertas importantes pelo caminho.

15 A matemática tem sido freqüentemente comparada a uma árvore, pois cresce numa estrutura acima da terra que se espalha e ramifica sempre mais, ao passo que ao mesmo tempo suas raízes cada vez mais se aprofundam e alargam, em busca de fundamentos sólidos. Esse duplo crescimento foi especialmente característico do desenvolvimento da análise no século dezenove, pois a rápida expansão da teoria das funções fora acompanhada pela rigorosa aritmetização do campo, desde Bolzano até Weierstrass. Na álgebra o século dezenove fora mais notável por desenvolvimentos novos que por atenção aos fundamentos, e os esforços de Peacock para construir uma base sólida eram fracos se comparados com a precisão de Bolzano na análise. Durante os últimos anos do século, porém, houve vários esforços para fornecer raízes mais sólidas para a álgebra. O sistema dos números complexos é definido em termos dos números reais, que são exibidos como classes de números racionais, que por sua vez são pares ordenados de inteiros; mas o que são afinal os inteiros? Todos pensam saber, por exemplo, o que é o número três — até tentarem defini-lo ou explicá-lo — e a idéia da igualdade de inteiros é tomada como óbvia. Não satisfeito com a idéia de deixar os conceitos básicos da aritmética, e portanto da álgebra, em estado tão vago, o lógico e matemático alemão F. L. G. Frege (1848-1925) foi levado a sua bem conhecida definição de número cardinal. A base para suas idéias veio da teoria dos conjuntos de Boole e Cantor. Lembremos que Cantor considerara que dois conjuntos infinitos têm a mesma "potência" se os elementos dos conjuntos podem ser postos em correspondência biunívoca. Frege viu que essa

[24]Para uma boa introdução à teoria dos ideais, veja N. H. McCoy, *Rings and Ideals* (Carus Mathematical Monographs, N.° 8, The Mathematical Association of America, 1948)

idéia de correspondência de elementos é básica também na noção de igualdade de inteiros. Dois conjuntos finitos têm o mesmo número cardinal se os elementos de cada um podem ser postos em correspondência biunívoca com os do outro. Se, então, começarmos com um conjunto inicial, como o conjunto dos dedos de uma mão humana normal, e formarmos o conjunto muito maior de todos os conjuntos cujos elementos podem ser postos em correspondência biunívoca com os elementos do conjunto original, então esse conjunto de todos tais conjuntos constituiria um número cardinal, nesse caso o número cinco. Mais geralmente, a definição de Frege do número cardinal de uma dada classe, finita ou infinita, é a classe de todas as classes que são semelhantes à classe dada (onde por "semelhante" entende-se que os elementos das duas classes em questão podem ser postos em correspondência biunívoca).

A definição de Frege de número cardinal (emendada mais tarde para evitar paradoxos) apareceu em 1884 num livro bem conhecido, *Die Grundlagen der Arithmetik* (Os fundamentos da aritmética), e da definição ele derivou as propriedades dos números inteiros que são familiares na aritmética de escola elementar. Nos anos subseqüentes Frege ampliou suas idéias em *Grundgesetze der Arithmetik* (Leis básicas da aritmética) em dois volumes, o primeiro volume aparecendo em 1893 e o segundo dez anos depois. Aqui o autor se propôs derivar os conceitos da aritmética dos da lógica formal, pois discordava da asserção de C. S. Peirce de que a matemática e a lógica são claramente distintas. Frege estudara nas Universidades de Jena e Göttingen, e ensinou em Jena durante uma longa carreira. No entanto seu programa não encontrou muito eco até ser atacado independentemente no começo do século vinte por Bertrand Russell, quando se tornou um dos principais objetivos dos matemáticos[25]. Frege ficou agudamente decepcionado com a fraca receptividade a seu livro, mas a culpa em parte está na forma excessivamente nova e filosófica em que seus resultados estavam expressos. A história mostra que as idéias novas são mais facilmente aceitas se apresentadas em forma relativamente convencional.

16 A Itália tinha tomado parte um tanto menos ativa no desenvolvimento da álgebra abstrata que a França, a Alemanha e a Inglaterra, mas durante os últimos anos do século dezenove houve matemáticos italianos que se interessaram profundamente pela lógica matemática. O mais conhecido desses foi Giuseppe Peano (1858-1932) cujo nome é lembrado hoje em conexão com os axiomas de Peano dos quais dependem tantas construções rigorosas da álgebra e da análise. Seu objetivo era semelhante ao de Frege, mas era ao mesmo tempo mais ambicioso e mais terra-a-terra[26]. Esperava, em seu "Formulaire de mathématiques" (1894 e seguintes) desenvolver uma linguagem formalizada que contivesse não só a lógica matemática como todos os ramos mais importantes da matemática. Que esse programa atraísse um grande círculo de colaboradores e discípulos resultou em parte do fato de ele evitar a linguagem metafísica e de sua feliz escolha de símbolos — tais como ε (pertence à classe de), $\cup$ (soma lógica ou união), $\cap$ (produto lógico ou intersecção) e $\supset$ (contém) — muitos deles usados até hoje. Para seus fundamentos da aritmética ele escolheu três conceitos primitivos (zero, número, isto é, inteiros não-negativos, e a relação "é sucessor de") satisfazendo aos cinco postulados seguintes.

1. Zero é um número.
2. Se a é um número, o sucessor de a é um número.

[25]Há uma tradução para o inglês de *The Foundations of Arithmetic* por J. L. Austin, 2.ª edição (New York: Philosophical Library, 1953). Parte dessa tradução está incluída em *The Treasury of Mathematics*, editado por Henrietta O. Midonick. Há também uma versão em inglês das partes introdutórias do Vol. I e do Epílogo ao Vol. II de *Leis Básicas da Aritmética*, de Montgomery Furth (Berkeley: University of California Press, 1964)

[26]Nicolas Bourbaki, *Eléments d'histoire des mathématiques* (1960), p. 20

3. Zero não é o sucessor de um número.
4. Dois números cujos sucessores são iguais são eles próprios iguais.
5. Se um conjunto S de números contém o zero e também o sucessor de todo número de S, então todo número está em S.

A última exigência, é claro, é o axioma de indução. Os axiomas de Peano, formulados pela primeira vez em 1889 na *Arithmetices principia nova methodo exposita*, representam a mais notável tentativa do século de reduzir a aritmética comum, portanto no fim a maior parte da matemática, a puro simbolismo formal. (Ele exprimia os postulados em símbolos, em vez das palavras que usamos.) Aqui o método postulacional atingiu novo nível de precisão, sem ambigüidade de sentido e sem hipóteses ocultas. Peano também despendeu muito esforço no desenvolvimento da lógica simbólica, um tema favorito no século vinte.

Mais uma contribuição de Peano deve talvez ser mencionada, pois representou uma das descobertas inquietantes do tempo. O século dezenove se iniciou com a descoberta de que curvas e funções não precisam ser do tipo bem comportado que até então dominara o campo, e Peano em 1890 mostrou até que ponto a matemática podia insultar o senso comum quando construiu curvas contínuas que enchem o espaço — isto é, curvas dadas por equações paramétricas $x = f(t)$, $y = g(t)$, onde f e g são funções reais contínuas no intervalo $0 \leq t \leq 1$, cujos pontos preenchem completamente o quadrado unitário $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$. Esse paradoxo, é claro, combina perfeitamente com a descoberta de Cantor de que não há mais pontos no quadrado unitário que no segmento de reta unitário[27], e foi um dos fatores que levaram o século seguinte a dedicar muito mais atenção à estrutura básica da matemática. O próprio Peano, porém, em 1903 se distraiu com a invenção da linguagem internacional que ele chamou "Interlingua" ou "Latino sine flexione", com vocabulário tirado do latim, francês, inglês e alemão. Esse movimento porém foi muito mais efêmero que sua estrutura axiomática da aritmética.

Em retrospecto podemos admirar o século dezenove como um período de incomparável realização, em geometria, análise e álgebra. Em extensão, imaginação, rigor, abstração e generalidade nenhum século anterior podia comparar-se com ele. No entanto, apesar do rápido avanço e das formulações definitivas, havia pouca impressão de que os desenvolvimentos matemáticos iriam tornar-se mais lentos. O pessimismo *fin de siècle* que Lagrange exprimira no fim do século dezoito estava conspicuamente ausente no fim do século dezenove. A Era Vitoriana exalava apenas otimismo, no que se refere à matemática. No capítulo final indicaremos alguns dos aspectos em que essa espectativa otimista foi amplamente realizada — mas não antes que sérias desconfianças tivessem abalado a serenidade dos matemáticos durante os primeiros anos do novo século. Paradoxo se sucederia a paradoxo até que o século vinte veio a parecer mais um período de dúvidas que um de grandes expectativas. Felizmente o princípio de desafio e resposta parece ter funcionado: nas realizações matemáticas já registradas, esse século lidera facilmente todos os outros.

BIBLIOGRAFIA

Ball, W. W. R., *A History of the Study of Mathematics at Cambridge* (Cambridge: Cambridge University Press, 1889)
Bell, E. T., *Men of Mathematics* (New York: Simon and Schuster, 1937)
Bell, E. T., *The Development of Mathematics* (New York: McGraw-Hill, 1940)
Bochenski, I. M., *Formale Logik* (Amsterdam, traduzido para o inglês em: North Holland, 1956, 1961)

[27]Uma descrição da curva de Peano bem como de seus axiomas se encontra em Ettore Carruccio, *Mathematics and Logic in History and in Contemporary Thought*, traduzido para o inglês por Isabel Quigly (1964), pp. 306-308. Esse livro inclui referências também a outros aspectos da obra de Peano

Boole, George, *The Laws of Thought*, reimpresso como Vol. II em seu *Collected Logical Works* (Chicago: Open Court, 1916)
Boole, George, *The Mathematical Analysis of Logic* (Cambridge: Macmillan, 1847; reimpresso, New York: Philosophical Library, 1948)
Boole, George, *Studies in Logic and Probability* (Londres: Waters, 1952)
Boole, George, *Treatise on Differential Equations* (Londres: Macmillan, 1859)
Bourbaki, Nicolas, *Éléments d'histoire des mathématiques* (Paris: Hermann, 1960)
Carruccio, Ettore, *Mathematics and Logic in History and in Contemporary Thought*, trad. por Isabel Quigly (Chicago: Aldine, 1964)
Cayley, Arthur, *Collected Mathematical Papers* (Cambridge, 1889-1898, 14 volumes)
Crowe, Michael J., *A History of Vector Analysis* (University of Notre Dame Press, 1967)
De Morgan, Sophia Elizabeth, *Memoir of A. D. M. by his Wife Sophia Elizabeth De Morgan, with Selections from His Letters* (Londres, 1882)
Feldmann, R. W., "History of Elementary Matrix Theory," *The Mathematics Teacher*, 55 (1962), 482-484, 589-590, 657-659
Galois, Évariste, *Oeuvres*, editado por E. Picard (Paris, 1897)
Graves, R. P., *Life of Sir William Rowan Hamilton* (Dublin: Hodges, Figgis, 1882, 3 volumes)
Klein, Felix, *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert* (Berlin: Springer, 1926-1927, 2 volumes)
MacDuffee, C. C., "Algebra's Debt to Hamilton," *Scripta Mathematica*, 10 (1944), 25-36
Macfarlane, Alexander, *Lectures on Ten British Mathematicians of the Nineteenth Century* (New York: Wiley, 1916)
Meschkowski, Herbert, *Ways of Thought of Great Mathematicians* (San Francisco: Holden-Day, 1964)
Midonick, Henrietta O., ed., *The Treasury of Mathematics* (New York: Philosophical Library, 1965)
Peacock, George, *Treatise on Algebra* (1840-1845, 2 volumes; reimpresso, New York: Scripta Mathematica, 1940)
Prasad, Ganesh, *Some Great Mathematicians of the Nineteenth Century* (Benares: Benares Mathematical Society, 1933-1934, 2 volumes)
Prior, A. N., ed., "Logic, History of," *The Encyclopedia of Philosophy* (New York: Macmillan, 1967, 8 volumes), IV, 513-571
Sarton, George, "Évariste Galois," *Osiris*, 3 (1937), 241-259
Smith, D. E., ed., *Source Book in Mathematics* (New York: McGraw-Hill, 1929; reimpresso, New York: Dover, 1959)
Struik, D. J., *Concise History of Mathematics*, 3.ª edição (New York: brochura Dover, 1967)

EXERCÍCIOS

1. A Inglaterra no século dezenove era forte na álgebra, ao passo que no século dezoito dera preferência à geometria sintética. Explique como certos fatores podem justificar isso, citando exemplos específicos.

2. A álgebra no século dezenove contribuiu com idéias mais notavelmente novas que a análise e a geometria? Dê exemplos específicos em apoio a sua resposta.

3. À medida que a álgebra tornava-se mais abstrata, os meios de sustento para os matemáticos mudaram substancialmente? Descreva os meios de sustento de algumas figuras principais.

4. Bertrand Russell afirmava que foi o século dezenove que descobriu a natureza da matemática pura. Explique o que ele tinha em mente ao fazer tal asserção.

5. Até que ponto as carreiras de Hamilton e Boole foram semelhantes, e em que suas vidas e contribuições diferiram?

6. Cayley e Sylvester são às vezes chamados os "gêmeos invariantes". Explique por que e indique em que pontos eles estavam longe de serem gêmeos.

7. A álgebra do século dezenove dá apoio à idéia comum de que a maior parte das grandes descobertas matemáticas são feitas por jovens? Cite exemplos para justificar sua resposta.

8. Durante o século dezenove muitos grandes matemáticos estudaram e ensinaram em Trinity College, Cambridge, onde Newton estudara e ensinara. Mencione alguns desses, indicando seus papéis em Cambridge e suas contribuições à matemática.

9. Explique em que sentido a álgebra dos números complexos é uma "álgebra dupla". Por que De Morgan combinou-a com elementos de trigonometria?

10. De Morgan, nascido no século dezenove, propôs o seguinte enigma relativo a sua idade: Eu tinha x anos no ano x^2. Resolva o enigma.

11. Se A é a matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

e B é a matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

vale $AB = BA$?

12. Mostre que para um polinômio quadrático em x e y a soma dos coeficientes dos termos em x^2 e y^2 permanece invariante sob uma rotação dos eixos em torno da origem.

13. Mostre por meio de diagramas que a fórmula de De Morgan para conjuntos é válida.

14. Se A é a permutação (abc) e B é a permutação (cba), o produto AB é igual ao produto BA? Explique.

15. Mostre que o inteiro de Gauss $1 + i$ não tem inverso para a multiplicação, portanto que os inteiros de Gauss $a + bi$ não formam um corpo.

16. Usando o conceito de Hamilton de número complexo $x + yi$ como simplesmente o par de números reais (x, y), escreva o quociente de $(a, b) \div (\alpha, \beta)$ como par de números reais.

17. Da fórmula de Hamilton para quatérnions $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$, usando a lei associativa para multiplicação, mostre que $ij = ji$, $ik = -ki$, e $jk = -kj$.

18. Usando o método dos operadores de Boole resolva a equação diferencial $y'' + 3y' + 2y = 0$.

*19. Mostre que o conjunto de todas as permutações sobre as letras a, b, c forma um grupo. É um grupo abeliano? Abel conhecia esse grupo? Explique.

*20. Mostre que o conjunto dos inteiros módulo 5 forma um corpo.

*21. Mostre que para o corpo dos inteiros módulo 5 todo valor de x satisfaz $x^5 = x$.

*22. Mostre que os números da forma $a + b\sqrt{2}$, onde a e b são racionais, formam um corpo.

*23. Prove que a relação $B^2 - AC$ entre os coeficientes da cônica $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$ é invariante sob rotação dos eixos. Use esse resultado para provar que a cônica é uma elipse, uma parábola, ou uma hipérbole conforme $B^2 - AC$ seja menor que, igual a, ou maior que zero.

Capítulo **27**

Aspectos do século vinte

A idade áurea da matemática — não foi a de Euclides, é a nossa.

C. J. Keyser

1 Uma das contribuições definitivas do século dezenove foi o reconhecimento de que a matemática não é uma ciência natural, mas uma criação intelectual do homem. Bertrand Russell escreveu no *International Monthly* em 1901:

> O século dezenove, que se orgulha da invenção do vapor e da evolução, poderia derivar um título mais legítimo à fama da descoberta da matemática pura.

T. H. Huxley (1825-1895), "o *bull-dog* de Darwin" na defesa da evolução, notara que "A matemática é aquele assunto que nada sabe da observação, nada da indução, nada da causalidade". Em outra ocasião, quando criticara Kelvin por ter, ao que pensava, subestimado a idade da Terra, Huxley fez o comentário bem conhecido:

> A matemática pode ser comparada a um moinho magnificamente bem feito que mói farinha tão fina quanto se deseja; mas o que você recebe depende do que você põe lá; e assim como o melhor moinho do mundo não pode tirar farinha de trigo de grãos de ervilha, também páginas de fórmulas não tirarão um resultado definido de dados imprecisos.

Isto é, pelo fim do século era geralmente reconhecido mesmo por não-matemáticos que a matemática é pensamento postulacional, em que de premissas arbitrárias são tiradas conclusões válidas. Que os postulados sejam ou não verdadeiros num sentido científico é indiferente; na verdade, as próprias palavras em que os postulados são expressos são termos não-definidos. Isso levou Bertrand Russell à sua descrição da matemática, em 1901, como o assunto em que ninguém sabe do que está falando, nem se o que está dizendo é verdade. Dois anos depois, no início de seus *Principles of Mathematics*, Russell formulou uma definição precisa da matemática:

> A matemática pura é a classe de todas as proposições da forma "p implica q", onde p e q são proposições contendo uma ou mais variáveis, as mesmas nas duas proposições e nem p nem q contêm constantes exceto constantes lógicas[1].

Essa definição enfatiza que é a estrutura lógica a característica essencial da matemática e não os enunciados categóricos que possa conter referentes ao mundo dos sentidos. Russell, em resumo, pretendia igualar matemática e lógica, mas nisso não houve acordo universal entre os matemáticos. Sylvester discordara fortemente de Huxley, argumentando que a matemática se origina

> . . . diretamente das forças e atividades inerentes da mente humana, e da introspecção continuamente renovada daquele mundo interior do pensamento em que os fenômenos são tão variados e exigem atenção tão grande quanto os do mundo físico exterior.

Sylvester, em outras palavras, se inclinava ao que agora se chama a visão intuicionista da matemática, pois considerava que o objetivo da matemática pura era "revelar as leis da inteligência humana", assim como a física revela as leis do mundo dos sentidos[2].

[1]Veja Bertrand Russell, *Principles of Mathematics* (reimpresso, New York: Norton, 1938), p. 3. Veja também pp. VI e seguintes

[2]*Collected Mathematical Papers*, editado por H. F. Baker (Cambridge: Cambridge University Press, 1904-1912, 4 volumes), III, 424

Nisso ele representava uma rejeição das tendências formalizantes de Boole, Dedekind e Peano. Kronecker poderia talvez ser colocado no campo de Sylvester, apesar da aritmetização que representava, pois considerava os inteiros como tendo um sentido dado por Deus.

Mais claramente intuicionista era um matemático que pode ser considerado como uma das duas principais figuras de transição entre o século dezenove e o século vinte — Henri Poincaré (1854-1912), homem a quem Sylvester na velhice admirava como jovem prolífico.

2 Quando Gauss morreu em 1855 pensava-se em geral que nunca mais existiria um universalista em matemática — alguém que estivesse igualmente à vontade em todos os ramos, puros e aplicados. Se alguém a partir daí provou que essa idéia estava errada, esse alguém foi Poincaré, pois ele considerou toda a matemática como seu domínio.

Em muitos pontos, porém, Poincaré diferia fundamentalmente de Gauss. Gauss fora calculista prodígio que em toda sua vida nunca hesitou perante cálculos complicados, ao passo que Poincaré não foi especialmente precoce em demonstrar aptidão matemática e reconhecia que tinha dificuldades com cálculos aritméticos simples. O caso de Poincaré mostra que para ser um grande matemático não é necessário ter facilidade com números; há outros aspectos mais relevantes do talento matemático inato. Também, enquanto que Gauss escreveu relativamente pouco, polindo suas obras, Poincaré escrevia apressadamente e extensamente, publicando mais memórias por ano que qualquer outro matemático. Além disso, Poincaré, especialmente em seus últimos anos, escreveu livros populares de sabor filosófico, algo que não atraíra Gauss. De outro lado, são numerosas e fundamentais as semelhanças entre Poincaré e Gauss. Ambos eram tão férteis em idéias que era difícil para eles rascunhar suas idéias em papel, ambos tinham forte preferência por teoremas gerais em vez de casos específicos, e ambos contribuíram para uma grande variedade de ramos da ciência.

Poincaré nasceu em Nancy[3], cidade que iria abrigar bom número de grandes matemáticos no século vinte. A família conquistou proeminência de várias maneiras; seu primo Raymond foi presidente da França durante a Primeira Grande Guerra. Henri era desageitadamente ambidestro, e sua ineptitude em exercícios físicos era lendária. Tinha vista fraca e era muito distraído, mas, como Euler e Gauss, tinha notável capacidade para exercícios mentais em todos os aspectos do pensamento matemático. Após graduar-se na École Polytechnique em 1875 ele obteve um diploma em engenharia de minas, em 1879, e ficou ligado ao Departamento de Minas pelo resto de sua vida. Em 1879 ele obteve também um doutorado em ciência na Universidade de Paris, onde, até sua morte em 1912, ele teve vários postos de professor de matemática e ciência.

A tese de doutoramento de Poincaré fora sobre equações diferenciais (não métodos de resolução, mas teoremas de existência), que levaram a uma de suas mais célebres contribuições à matematica — as propriedades das funções automorfas; na verdade, ele foi virtualmente o fundador da teoria dessas funções. Uma função automorfa $f(z)$ da variável complexa z é uma função que é analítica, excetuados pólos, num domínio D e que é invariante sob um grupo infinito enumerável de transformações lineares fracionárias

$$z' = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Tais funções são generalizações das funções trigonométricas — como vemos se $a = 1 = d$, $c = 0$, e b é da forma $2k\pi$ — e das funções elíticas. Hermite estudara tais transformações no caso especial em que os coeficientes a, b, c e d são inteiros para os quais $ad - bc = 1$ e tinha descoberto uma classe de funções modulares elíticas invariantes

[3]Para uma bibliografia de fontes sobre a vida e a obra de Poincaré, veja George Sarton, *The Study of the History of Mathematics* (Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1936), pp. 93-94. O Cap. 28, apropriadamente intitulado "The Last Universalist", em E. T. Bell, *Men of Mathematics* (New York: Simon and Schuster, 1937), fornece um vivo relato sobre a vida e a obra de Poincaré

por essas transformações. Mas as generalizações de Poincaré revelaram uma categoria mais ampla de funções, conhecidas como zeta-fuchsianas, que, conforme Poincaré mostrou, podiam ser usadas para resolver a equação diferencial linear de segunda ordem com coeficientes algébricos.

3 Poincaré não se demorava em campo algum o tempo suficiente para dar um fecho a sua obra; um contemporâneo disse dele, "Ele era um conquistador, não um colonizador". No seu ensino na Sorbonne ele lecionava sobre um tópico diferente em cada ano escolar — capilaridade, elasticidade, termodinâmica, óptica, eletricidade, telegrafia, cosmogonia e outros; a apresentação era tal que em muitos casos as aulas apareciam impressas, pouco depois de serem dadas. Só em astronomia ele publicou meia dúzia de volumes — *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste* (3 volumes, 1892-1899) e *Leçons de mécanique céleste* (3 volumes, 1905-1910) — sendo nisso um digno sucessor de Laplace. Especialmente importantes foram os métodos que ele usou para atacar o problema dos três corpos e suas generalizações. Também significativa para a cosmogonia foi uma memória de 1885 em que ele mostrou que uma forma de pera pode ser uma figura de equilíbrio relativo assumido por um fluido homogêneo sujeito a gravitação newtoniana e girando uniformemente em torno de um eixo, e a questão de uma terra em forma de pera continuou a interessar os geodesistas até nossos dias. Sir George H. Darwin (1845-1912), filho de Charles Darwin (1809-1882), escreveu em 1909 que a mecânica celeste de Poincaré seria uma vasta mina para pesquisadores ainda por meio século.

É interessante que Poincaré, como Laplace, escreveu extensamente sobre probabilidades. Em certos aspectos sua obra é apenas uma continuação natural da de Laplace e das dos analistas do século dezenove; mas Poincaré tinha duas faces como Janus e até certo ponto antecipava o grande interesse pela topologia que seria tão característico do século seguinte. A topologia não foi invenção de um homem. Alguns problemas topológicos encontram-se na obra de Euler, Möbius e Cantor e mesmo a palavra "topologia" fora usada em 1847 por J. B. Listing (1808-1882) no título de um livro, *Vorstudien zur Topologie* (Estudos introdutórios em topologia); mas como data para o início do assunto a mais apropriada é 1895, o ano em que Poincaré publicou sua *Analysis situs*. Esse livro pela primeira vez forneceu um desenvolvimento sistemático.

A topologia é agora um ramo amplo e fundamental da matemática, com muitos aspectos; mas pode ser dividida em dois sub-ramos bastante diferentes — a topologia combinatória e a topologia dos conjuntos de pontos. Poincaré tinha pouco entusiasmo pela última, e quando em 1908 ele falou no Congresso Internacional de Matemática em Roma, ele se referiu ao *Mengenlehre* de Cantor como uma doença de que gerações posteriores se considerariam curadas[4]. A topologia combinatória, ou *analysis situs* como era então chamada em geral, é o estudo de aspectos qualitativos intrínsecos das configurações espaciais que permanecem invariantes por transformações biunívocas contínuas com inversa contínua. Freqüentemente é chamada popularmente "geometria de borracha", pois deformações de um balão, por exemplo, sem furá-lo ou rasgá-lo, são exemplos de transformações topológicas. Um círculo, por exemplo, é topologicamente equivalente a uma elipse; a dimensão de um espaço é um invariante topológico, como também o número de Descartes-Euler $N_0 - N_1 + N_2$ para poliedros simples. Entre as contribuições originais de Poincaré à topologia está uma generalização da fórmula poliedral de Descartes-Euler para espaços de dimensão superior, usando o que ele chamou "números de Betti" em honra de Enrico Betti (1823-1892), que ensinara na Universidade de Pisa e observara algumas das propriedades desses invariantes topológicos.

A maior parte da topologia, porém, lida com aspectos qualitativos e não quantitativos da matemática, e nisso é típica de uma ruptura com o estilo prevalente na análise do século dezenove. A atenção de Poincaré parece ter sido atraída para a *analysis situs* por tentativas de integração qualitativa de equações diferenciais. Poincaré, como Riemann, era especialmente hábil no tratar problemas de natureza topológica, como o de achar as

[4]As atas publicadas de tais congressos internacionais encontram-se em muitas bibliotecas e podem ser consultadas, com grande proveito quanto ao desenvolvimento da matemática no século vinte

propriedades de uma função sem se preocupar com sua representação formal no sentido clássico, pois eles eram intuicionistas de julgamento sólido. Se o interesse de Poincaré pela topologia tivesse se mantido ele poderia ter antecipado mais desse ramo da matemática, um dos mais favorecidos e fecundos campos de pesquisa no século vinte. Sua mente inquieta, porém, estava ocupada com tudo o que estava acontecendo na física e na matemática da passagem do século, desde as ondas hertzianas e raios X à teoria quântica e teoria da relatividade.

Como exemplo da variedade de interesses de Poincaré, é a ele que devemos um sugestivo modelo da geometria de Lobachevsky dentro de uma moldura euclidiana[5]. Suponhamos que o mundo é limitado por uma grande esfera de raio R e que a temperatura absoluta num ponto dentro da esfera é $R^2 - r^2$, onde r é a distância ao centro da esfera; suponhamos também que o indice de refração do meio translúcido é inversamente proporcional a $R^2 - r^2$. Além disso, suponhamos que as dimensões dos objetos variam de ponto para ponto, sendo proporcionais à temperatura em qualquer ponto dado. Aos habitantes de um tal mundo o universo pareceria infinito; e os raios de luz ou "retas" não seriam retilíneos, mas círculos ortogonais à esfera de fronteira e pareceriam infinitos. Os "planos" seriam esferas ortogonais à esfera de fronteira e dois tais "planos" não-euclidianos se cortariam numa "reta" não-euclidiana. Os axiomas de Euclides valeriam, com exceção do postulado das paralelas.

4 Poincaré morreu no auge de sua capacidade, aos cinqüenta e oito anos, tendo escrito mais que qualquer outro matemático de nosso século[6]. Klein comparou-o a Cauchy em versatilidade, e muitos o consideraram o primeiro matemático de seus dias. Seu maior rival, David Hilbert (1862-1943) vinha da Alemanha e era de temperamento e idéias notavelmente diferentes. Aqui temos outra figura de transição entre os séculos dezenove e vinte; mas enquanto que Poincaré parece talvez pertencer mais ao século anterior, Hilbert claramente está mais no seu elemento no posterior, em vista de sua ênfase em estrutura. Hilbert, como Immanuel Kant (1724-1804) nascera em Königsberg na Prússia Oriental, mas ao contrário de Kant ele viajou largamente, especialmente para assistir a congressos internacionais de matemáticos que se tornaram tão característicos deste século. O primeiro congresso matemático formal realizou-se em Zürich em 1893, o segundo em Paris em 1900, e a partir daí se tem realizado mais ou menos regularmente cada quatro anos, sendo o Décimoquinto Congresso Internacional realizado em 1966 em Moscou.

No Congresso de Paris de 1900, Hilbert, renomado professor em Göttingen, apresentou uma exposição em que tentou, com base nas tendências da pesquisa matemática no fim do glorioso século dezenove, predizer a direção de progressos futuros. Isso ele fez propondo vinte e três problemas que ele acreditava estariam ou deveriam estar entre os que ocupariam a atenção dos matemáticos no século vinte. "Se quisermos ter uma idéia do desenvolvimento provável do conhecimento matemático no futuro imediato", ele disse, "devemos fazer passar por nossas mentes as questões não-resolvidas e olhar os problemas que a ciência de hoje coloca e cujas soluções esperamos do futuro"[7].

Embora discordasse da idéia de que só os conceitos da aritmética são suscetíveis de tratamento completamente rigoroso, ele reconhecia que o desenvolvimento do *continuum* aritmético por Cauchy, Bolzano e Cantor era um dos dois mais notáveis sucessos do século — o outro sendo a geometria não-euclidiana de Gauss, Bolyai e Lobachevsky — e assim o primeiro dos vinte e três problemas dizia respeito à estrutura do *continuum* dos números reais. A questão consta de duas partes: (1) se existe um

[5]Para essa e outras contribuições de Poincaré veja o "Éloge historique d'Henri Poincaré" por Gaston Darboux em *Oeuvres Henri Poincaré* (1916-1956), Vol. II (1952), VII-LXXI. Veja também Vito Volterra e outros, *Henri Poincaré: l'oeuvre scientifique, l'oeuvre philosophique* (1914)

[6]Veja Ernest Lebon, *Henri Poincaré, bibliographie analytique des écrits* (1909)

[7]Veja a tradução por Mary Winston Newson de "Mathematical Problems" de Hilbert em *Bulletin of the American Mathematical Society* (2), **8** (1902), 437-479. O original em alemão apareceu no *Göttingen Nachrichten* de 1900, pp. 253-297, e em *Archiv der Mathematik und Physik*, (3), **1** (1901), 44-63, 213-237

número transfinito entre o de um conjunto enumerável e o número do *continuum*; e (2) o *continuum* numérico pode ser considerado um conjunto bem ordenado? A segunda parte pergunta se a totalidade dos números reais pode ser disposta de outro modo de forma que toda coleção parcial tenha um primeiro elemento. Isso se relaciona de perto com o axioma da escolha que leva o nome do matemático alemão Ernst Zermelo (1871-1956) que o formulou em 1904. O axioma de Zermelo afirma que, dado qualquer conjunto de conjuntos mutuamente disjuntos não-vazios, existe pelo menos um conjunto que contém um e um só elemento em comum com cada um dos conjuntos não-vazios[8]. Como ilustração de um problema envolvendo o axioma de Zermelo, consideremos o conjunto de todos os números reais n tais que $0 \leq n \leq 1$; chamemos dois desses números reais de equivalentes se sua diferença é racional. Existem evidentemente infinitas classes de equivalência de números reais. Se formarmos um conjunto S de um número de cada uma dessas classes, S é enumerável ou não-enumerável? O axioma da escolha, indispensável em análise, Kurt Gödel (1906-   ) em 1940 provou ser consistente com outros axiomas da teoria dos conjuntos; mas em 1963 foi provado por Paul Cohen (1934-   ) que o axioma da escolha é independente dos outros axiomas num certo sistema de teoria dos conjuntos, mostrando assim que o axioma não pode ser provado dentro desse sistema[9]. Isso parece excluir uma solução definida para o primeiro problema de Hilbert.

5 O segundo problema de Hilbert, também sugerido pela idade do rigor no século dezenove, perguntava se é possível provar que os axiomas da aritmética são consistentes — que um número finito de passos lógicos baseados neles nunca pode levar a resultados contraditórios. Uma década depois apareceu o primeiro volume de *Principia mathematica* (3 volumes, 1910-1913), de Bertrand Russell e Alfred North Whitehead (1861-1947), a mais elaborada tentativa feita até então de desenvolver as noções fundamentais da aritmética a partir de um conjunto preciso de axiomas. Essa obra, na tradição de Leibniz, Boole e Frege, e baseada nos axiomas de Peano, desenvolvia em todos os detalhes um programa que se destinava a provar que toda a matemática pura pode ser obtida a partir de um pequeno número de princípios lógicos fundamentais. Isso justificaria a idéia de Russell, expressa antes, de que a matemática é indistinguível da lógica. Mas o sistema de Russell e Whitehead, não inteiramente formalizado, parece ter encontrado mais aprovação entre lógicos do que entre matemáticos. Além disso, os *Principia* deixavam sem resposta a segunda pergunta de Hilbert. Esforços para resolver esse problema levaram em 1931 a uma surpreendente conclusão por parte de um jovem matemático austríaco, Kurt Gödel, que emigrara para os Estados Unidos e se tornara membro do Institute for Advanced Study em Princeton. Gödel mostrou que dentro de um sistema rigidamente lógico como o que Russell e Whitehead tinham desenvolvido para a aritmética, podem ser formuladas proposições que são indecidíveis ou indemonstráveis dentro dos axiomas do sistema. Isto é, dentro do sistema existem certos enunciados precisos que não podem ser provados ou negados[10]. Portanto não se pode, usando os métodos usuais, ter certeza de que os axiomas da aritmética não levarão a contradições.

Num certo sentido o teorema de Gödel, às vezes considerado o resultado mais decisivo da lógica matemática, parece resolver negativamente a segunda pergunta de Hilbert.

[8] Veja Herman Rubin e Jean E. Rubin, *Equivalents of the Axiom of Choice* (Amsterdam: North-Holland, 1963)

[9] Veja P. J. Cohen, "The Independence of the Continuum Hypothesis", *Proceedings of the National Academy of Science*, 50 (1963), 1 143-1 148; 51 (1964), 105-110

[10] Kurt Gödel, "Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme", *Monatshefte der Mathematik und Physik*, **38** (1931), 173-198; ou veja sua *Consistency of the Axiom of Choice and the Generalized Continuum Hypothesis with the Axioms of Set Theory* (Princeton, N. J.: Princeton University Press, 1940, edição revista em 1951). Inúmeros esforços têm sido feitos para explicar a prova de Gödel em linguagem apropriada para o não-especialista. Veja em particular Ernest Nagel e J. R. Newman, "Gödel's Proof", *The World of Mathematics* (New York: Simon e Schuster, 1956, 4 volumes), III, 1668-1695

Em suas implicações a descoberta por Gödel de proposições indecidíveis é tão perturbadora quanto a revelação por Hipasus da existência de grandezas incomensuráveis, pois parece eliminar a esperança de certeza matemática pelo uso dos métodos óbvios. Talvez também, como resultado, esteja condenado o ideal da ciência — inventar uma coleção de axiomas dos quais todos os fenômenos do mundo natural possam ser deduzidos. No entanto, os matemáticos e os cientistas aceitaram igualmente o golpe sem maior preocupação e continuaram a acumular teorema sobre teorema em quantidade maior que nunca. Certamente nenhum estudioso hoje repetiria a asserção de Babbage em 1813 de que "A idade áurea da literatura matemática certamente passou".

Os problemas levantados pelo teorema de Gödel foram atacados de fora da própria aritmética através de um novo aspecto da lógica matemática que surgiu pelo meio do século vinte e chamado metamatemática. Essa não se preocupa com o simbolismo e operações da aritmética, mas com a interpretação desses sinais e regras. Se a aritmética não pode sair do areal da possível inconsistência, talvez a metamatemática, estando fora da dificuldade, possa salvar o dia por outros meios — tais como indução transfinita. Alguns matemáticos esperariam ao menos um meio de determinar, para cada proposição matemática, se ela é verdadeira, falsa ou indecidível. De qualquer forma, mesmo a resposta desencorajadoramente negativa ao segundo problema de Hilbert estimulou assim, em vez de reduzi-la, a criatividade matemática.

6 As quatro perguntas seguintes na lista de Hilbert são um tanto mais técnicas e abstrusas que as duas primeiras, mas a sete e a oito dizem respeito a noções familiares. No problema sete pergunta-se se o número α^{β}, onde α é algébrico (e não zero ou um) e β é irracional e algébrico, é transcendente. Em forma geométrica, Hilbert exprimia isso perguntando se em um triângulo isósceles a razão da base para um lado é transcendente se a razão do ângulo no vértice para os ângulos na base é algébrica e irracional.

Essa questão foi resolvida em 1934 por Aleksander Osipovich Gelfond (1906-   ) que provou que a conjetura de Hilbert, agora conhecida como teorema de Gelfond, era correta — α^{β} é transcendente se α é algébrico e não é zero nem 1, e se β é algébrico e não-racional. No entanto, na matemática a resposta a uma pergunta apenas faz surgir outras, e os matemáticos ainda não sabem responder a uma questão como a de saber se α^{β} é ou não transcendente se α e β são transcendentes. Não se sabe, por exemplo, se e^{e} ou π^{π} ou π^{e} ou a constante de Euler γ são transcendentes. Sabe-se porém que e^{π} é transcendente, pois $e^{\pi} = 1/e^{-\pi} = 1/i^{2i}$, e i^{2i} é transcendente pelo teorema de Gelfond[11].

A pergunta oito de Hilbert simplesmente renovava o apelo, familiar no século dezenove, para a obtenção de uma prova da conjetura de Riemann de que os zeros da função zeta, excetuados os zeros inteiros negativos, têm todos a parte real igual a um meio. Uma prova disso, ele pensava, poderia levar a uma prova da familiar conjetura sobre a infinidade de pares de primos; mas nenhuma prova foi dada ainda, embora mais de um século tenha-se passado desde que Riemann arriscou o palpite.

Não podemos tratar dos outros problemas postos por Hilbert — problemas de topologia, equações diferenciais, cálculo de variações, e outros campos — exceto para dizer que aproximadamente a metade deles ainda não foi resolvida[12] e que, naturalmente, a matemática se desenvolveu também em muitas direções não previstas em 1900. Devemos observar ainda que a primeira metade do século vinte não diferiu de períodos anteriores na história da matemática ao menos num ponto — cada problema antigo que era resolvido legava à posteridade vários problemas novos. Como Hilbert disse ao propor seus problemas, "Enquanto um ramo da ciência oferece uma abundância de problemas, ele está vivo"; ele terminou com palavras de encorajamento perante o crescimento pra-

[11] Veja Einar Hille, "Gelfond's Solution of Hilbert's Seventh Problem", *American Mathematical Monthly*, **49** (1942), 654-661. Cf. A. O. Gelfond, *Transcendental and Algebraic Numbers*, traduzido por Leo F. Boron (New York: Dover, 1960)

[12] Para o status dos problemas depois de trinta anos, veja L. Bieberbach, "Über den Einfluss von Hilberts Pariser Vortrag über 'Mathematische Probleme' auf die Entwicklung der Mathematik in den letzten dreissig Jahren", *Naturwissenschaften*, **18** (1936), 1 101-1 111

ticamente exponencial da matemática, observando que à medida que o assunto se expande os instrumentos ficam mais aguçados e os métodos mais simples, por isso o campo pode ser dominado apesar de sua extensão.

7 Hilbert legou à matemática muito mais que uma coleção de problemas. Em 1899, um ano antes de sua conferência em Paris, ele havia publicado um volume pequeno mas famoso chamado *Grundlagen der Geometrie* (Fundamentos da geometria). Essa obra, traduzida nas línguas principais[13], exerceu forte influência sobre a matemática do século vinte. Com a aritmetização da análise e os axiomas de Peano, a maior parte da matemática, exceto a geometria, conseguira base estritamente axiomática. A geometria no século dezenove florescera como nunca antes, mas foi principalmente nos *Grundlagen* de Hilbert que um esforço foi feito pela primeira vez para dar-lhe o caráter puramente formal que tinham a álgebra e a análise. *Os elementos* de Euclides tinham uma estrutura dedutiva, certamente, mas estavam cheios de hipóteses ocultas, definições sem sentido e falhas lógicas. Hilbert percebeu que nem todos os termos em matemática podem ser definidos e por isso começou seu tratamento da geometria com três objetos não definidos — ponto, reta e plano — e seis relações não definidas — estar sobre, estar em, estar entre, ser congruente, ser paralelo e ser contínuo. Em lugar dos cinco axiomas (ou noções comuns) de Euclides e cinco postulados, Hilbert formulou para sua geometria uma coleção de vinte e um postulados, conhecidos como axiomas de Hilbert. Oito deles se referem à incidência e incluem o primeiro postulado de Euclides, quatro são sobre propriedades de ordem, cinco sobre congruência, três sobre continuidade (propriedades não mencionadas explicitamente por Euclides) e uma é um postulado de paralelas essencialmente equivalente ao quinto postulado de Euclides[14]. Em seguida à obra pioneira de Hilbert outras coleções de axiomas foram propostas por outros; e o caráter puramente dedutivo e formal da geometria, como dos outros ramos da matemática, ficou completamente estabelecido desde o começo do século vinte.

8 Hilbert, através de seus *Grundlagen*, tornou-se o principal representante de uma "escola axiomática" que foi influente na formação das atitudes contemporâneas na matemática e no ensino da matemática[15]. Os *Grundlagen* iniciavam com uma frase de Kant: "Todo conhecimento humano começa com intuições, passa a conceitos e termina com idéias", mas o desenvolvimento dado por Hilbert à geometria estabelecia uma visão do assunto decididamente antikantiana. Dava ênfase a que não se devem assumir, para os termos não definidos na geometria, propriedades além das indicadas nos axiomas. O nível intuitivo-empírico das antigas concepções geométricas deve ser abandonado e pontos, retas e planos devem ser entendidos apenas como elementos de certos conjuntos dados.

A teoria dos conjuntos, tendo dominado a álgebra e a análise agora invadia a geometria. Semelhantemente, as relações não definidas devem ser tratadas como abstrações indicando nada mais que uma correspondência ou aplicação. Através da geometria analítica o tratamento formal da geometria fora associado à axiomatização da álgebra, e o resultado final da associação foi um grau de abstração que excedia tudo do século dezenove. Peano em 1888 tinha em essência definido um espaço vetorial sobre o corpo dos números reais; mas no que veio a chamar-se espaço de Hilbert[16] as idéias de Hamilton, Grassmann e Peano são generalizadas ainda mais. Os elementos não são os pontos de Euclides, mas seqüências infinitas de números complexos $x_1, x_2, \ldots,$ para

[13]Uma tradução para o inglês por E. J. Townsend, *The Foundations of Geometry*, foi publicado por Open Court, LaSalle, Ill., em 1902. Uma oitava edição alemã apareceu em 1956

[14]Uma lista dos postulados pode ser encontrada em Ralph G. Stanton e Kenneth D. Fryer, *Topics in Modern Mathematics* (Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, 1964), pp. 167-170, bem como nas várias edições dos *Fundamentos* de Hilbert

[15]Veja, por exemplo, Rolf Nevanlinna, "Reform in Teaching Mathematics", *The Mathematical Monthly*, 73 (1966), 451-464

[16]Veja P. R. Halmos, *Introduction to Hilbert Space* (New York: Chelsea, 1951) ou S. K. Berberian, *Introduction to Hilbert Space* (New York: Oxford, 1961)

as quais a série $x_1^2 + x_2^2 + \cdots$ converge. Esse é um caso especial de espaço vetorial, formas mais gerais do qual foram introduzidas mais tarde por Stefan Banach (1892-1945) e outros. Um espaço vetorial é uma coleção de elementos chamados vetores, sujeitos às regras usuais de combinação de vetores e escalares. Espaços vetoriais de tipos variados são determinados conforme restrições impostas aos elementos. O espaço de Hilbert, por exemplo, é um espaço vetorial cujos elementos têm uma infinidade de componentes, sujeitas à condição de que $(x_1^2 + x_2^2 + \cdots)$ seja finita. Os espaços de Hilbert, apesar do extraordinário grau de abstração que representam, encontraram aplicação na teoria quântica. Os espaços de Banach são espaços vetoriais ainda mais abstratos em que os elementos não precisam ser definidos em relação ao corpo complexo. Em linguagem técnica, um espaço de Banach é um espaço vetorial normado, completo na métrica definida pela norma; um espaço de Hilbert é um espaço de Banach cuja norma $\|x\|$ tem a propriedade do paralelogramo $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$. Banach era a luz mais forte numa grande "Escola polonesa" que floresceu entre as duas Grandes Guerras, nas Universidades de Lwow e Varsóvia. Banach ensinava em Lwow, e o chefe do grupo de Varsóvia era Waclaw Sierpinski (1882-), que deu contribuições à teoria dos números, topologia e teoria dos conjuntos, e fundou em 1920 a *Fundamenta Mathematicae*, um dos melhores periódicos de matemática do mundo. Sierpinski foi um professor notavelmente bem sucedido e muitos de seus discípulos conquistaram reputação na matemática norteamericana quando o círculo polonês foi dispersado e Sierpinski deportado pelos alemães[17]. Com o fim da guerra Sierpinski voltou à destruída Varsóvia e a publicação de *Fundamenta* recomeçou; mas Banach morrera pouco depois do fim das hostilidades[18].

Hilbert se interessava por todos os aspectos da matemática pura e seu nome está ligado a uma curva simples que enche um espaço e é mais fácil de descrever que a semelhante dada por Peano. A curva de Hilbert é gerada continuando indefinidamente o processo indicado na Fig. 27.1. Começando com um quadrado unitário, nós o subdividimos em quatro partes quadradas como mostra a figura e depois ligamos em ordem os quatro pontos centrais. Cada uma dessas quatro partes é por sua vez subdividida em quatro partes, cujos centros são ligados do modo indicado, sempre começando no quadrado inferior à esquerda e terminando no inferior direito. É claro que a curva limite desse processo passará por todos os pontos do quadrado; incidentalmente esse é outro exemplo de curva contínua que não é diferenciável em nenhum ponto. O século dezenove observara alguns dos casos patológicos que podem surgir na álgebra, análise e geometria, mas foi no século vinte que anomalias e paradoxos surgiram de todos os lados. Entre outras esquisitices estava uma curva contínua fechada exibida em 1904 por Helge von

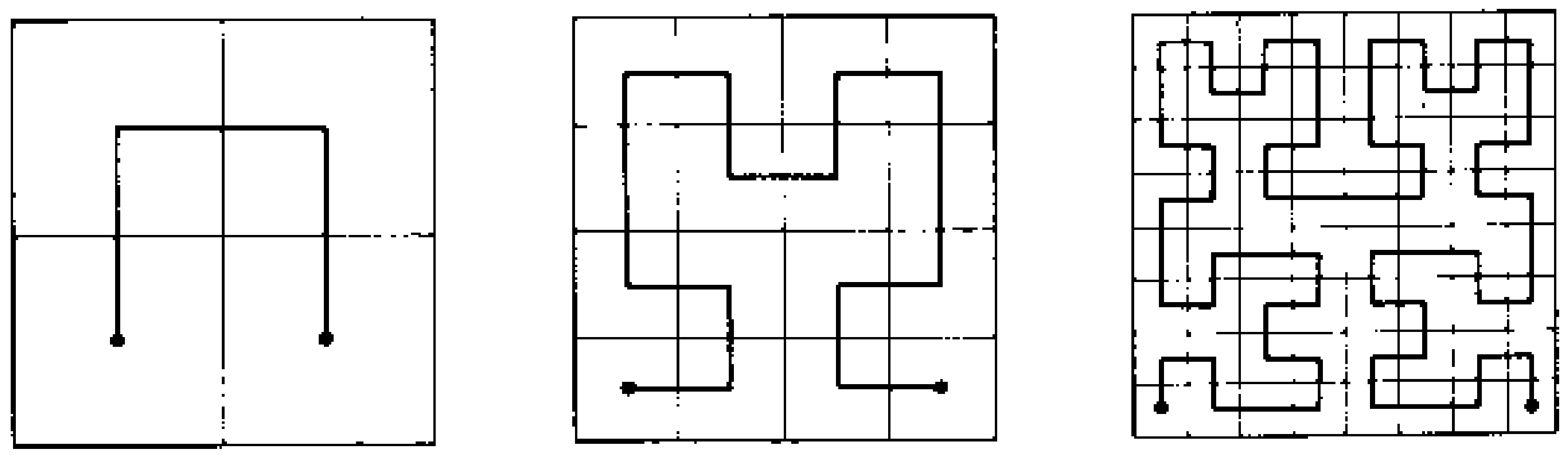


Figura 27.1

[17]Veja Matthew M. Fryde, "Waclaw Sierpinski Mathematician", *Scripta Mathematica*, 27 (1964), 105-111

[18]Veja Hugo Steinhaus, "Stefan Banach, 1892-1945", *Scripta Mathematica*, 26 (1963), 93-100. Steinhaus foi também um dos reputados membros do grupo polonês de matemáticos. Para algumas notas adicionais, mas inadequadas, sobre os matemáticos poloneses ver Sister Mary Grace, "Poland's Contribution to Mathematics", *The Mathematics Teacher*, 60 (1967), 383-386. Para os que lêem polonês existe uma exposição muito mais completa num volume por Jadwiga Dianni e Adam Wachulka, *Mil Anos de Matemática Polonesa* (Varsóvia: PZVS, 1963)

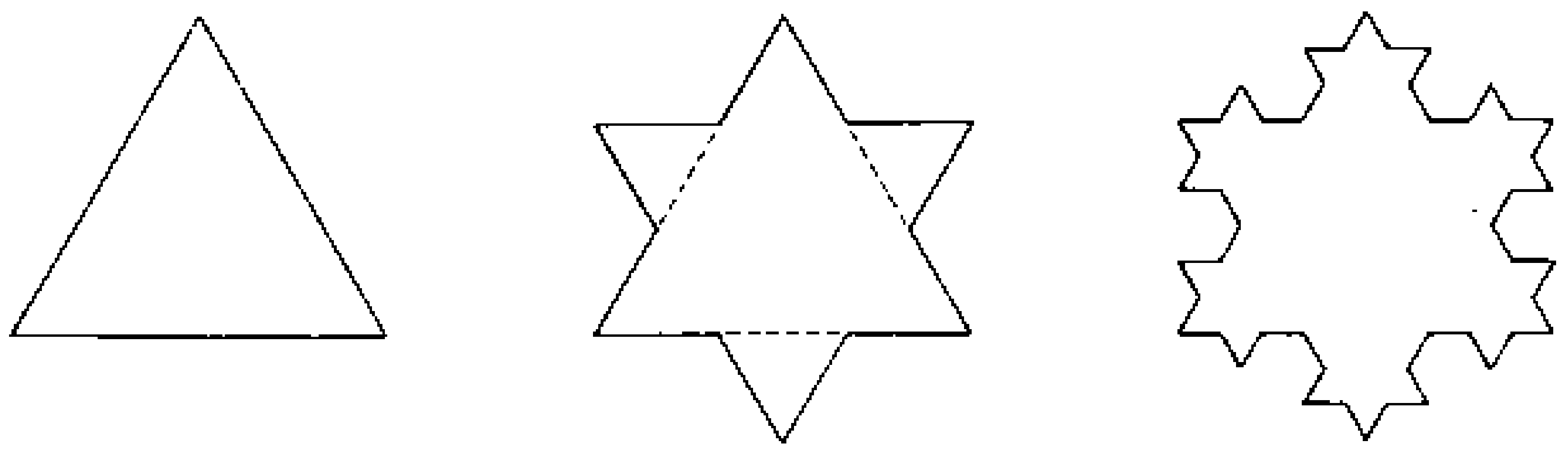


Figura 27.2

Koch (1870-1924) de Stockholm e definida essencialmente como segue[19]. Começando com um triângulo equilátero com lados unitários, dividimos em três cada um dos segmentos unitários, construímos um triângulo equilátero no terço do meio e apagamos a base de cada um dos novos triângulos equiláteros (veja Fig. 27.2). O resultado é uma poligonal fechada de doze lados e com comprimento total de quatro unidades. Dividindo em três cada um dos doze lados, erigindo doze triângulos equiláteros sobre os terços do meio, e apagando as bases, temos uma figura fechada com quarenta e oito lados e um comprimento de 16/3. Continuando esse processo indefinidamente, resulta uma curva limite chamada curva de Koch ou do floco de neve. Não só não tem tangente em nenhum ponto mas tem a notável propriedade de que, dados dois pontos quaisquer sobre a curva, o comprimento de arco entre os dois pontos é infinito.

9 Hilbert, como Poincaré, era um matemático de muitas facetas, que contribuiu para a teoria dos números, lógica matemática, equações diferenciais, o problema dos três corpos e outros aspectos da física matemática. Foi em conexão com seu trabalho sobre fundamentos da matemática[20] que ele se envolveu na mais forte controvérsia do século, que num certo sentido era a continuação do conflito anterior entre Cantor e Kronecker. Hilbert admirava o *Mengenlehre* de Cantor, ao passo que Poincaré o criticava fortemente. As teorias de Cantor, como os abstratos espaços de Hilbert, pareciam muito afastados da base intuitivo-empírica que Poincaré e alguns de seus contemporâneos preferiam. No Congresso de Paris de 1900, em que Hilbert apresentou seus problemas, Poincaré leu um artigo em que comparava os papéis da lógica e da intuição na matemática.

Os matemáticos então e depois vieram a se agrupar em duas ou três escolas de pensamento, dependendo de sua atitude com relação aos fundamentos de sua ciência. Os que adotavam idéias semelhantes às de Poincaré formaram um grupo vagamente definido com predileções intuitivas. Hilbert veio a ser considerado chefe de uma escola "formalista", que alguns de seus sucessores levaram à conclusão de que a matemática é apenas um jogo sem sentido jogado com fichas sem sentido de acordo com certas regras formais aceitas previamente.

Relacionado com o grupo formalista, mas não identificado com ele, havia um certo número de matemáticos que hesitavam em aceitar a natureza inteiramente arbitrária das regras do jogo. Liderados por Bertrand Russell, esses homens, freqüentemente descritos como a escola "logicista" ou "logicalista", igualavam a matemática e a lógica, em oposição a C. S. Peirce, mas de acordo com Frege. Foi L. E. J. Brouwer (1881-1966) da Universidade de Amsterdam quem realmente conseguiu reunir os oponentes do formalismo de Hilbert e do logicismo de Russell. Ele insistia em que os elementos e axiomas da matemática são consideravelmente menos arbitrários do que parece. Em sua tese para doutoramento em 1907 e em artigos posteriores Brouwer atacou os fundamentos lógicos da aritmética e da análise, tornando-se conhecido como o fundador de uma nova escola claramente definida, a "escola intuicionista". Segundo Brouwer, a linguagem e a lógica não são pressuposições para a matemática, a qual tem sua origem na intuição

[19]"Une méthode géométrique élémentaire pour l'étude de certaines questions de la théorie des courbes planes", *Acta Mathematica*, 30 (1906), 145-174. Modificamos um pouco a curva de Koch para fins de exposição

[20]*Grundlagen der Mathematik*, com P. Bernays (Berlin: Springer, 1934-1939, 2 volumes)

que torna seus conceitos e inferências imediatamente claros para nós[21]; uma afirmação de que existe um objeto tendo uma dada propriedade significa que existe um método conhecido que permite que o objeto seja encontrado ou construído em um número finito de passos. Em particular, ele argüia que o método de prova indireta, a que a aritmética transfinita recorria com freqüência, não é válido. Desde os tempos de Aristóteles as três leis básicas da lógica tinham sido consideradas sacrossantas: (1) a lei da identidade, *A* é *A*; (2) a lei da contradição, *A* não pode ser simultaneamente *B* e não *B*; e (3) a lei do meio excluído (ou *tertium non datur*), *A* ou é *B* ou não *B*, pois não há outra alternativa. Brouwer negava essa última lei da lógica e recusava aceitar resultados baseados nela. Por exemplo, ele perguntava aos formalistas se é verdadeiro ou falso que "a seqüência de dígitos 123456789 ocorre em algum lugar na representação decimal de π". Como não existe método conhecido para fazer uma decisão, não se pode aplicar aqui a lei do meio excluído e afirmar que a proposição ou é verdadeira ou é falsa.

10 Em 1918 Hermann Weyl (1885-1955) aderiu à causa intuicionista, apesar de ter estudado com Hilbert, a quem mais tarde sucedeu em Göttingen. Weyl afirmava que, ao basear a análise no *continuum* da aritmética, os formalistas tinham construído uma casa que "numa parte essencial está construída sobre areia"[22]. Hilbert comparava os ataques de Brouwer e Weyl com o negativismo de Kronecker no período anterior, mas não conseguiu destruir seus argumentos. Weyl foi um dos grandes matemáticos produzidos pela Universidade de Göttingen, e contribuiu para vários ramos da matemática e para dois grandes avanços da ciência durante os primeiros anos do século. Fora colega de Albert Einstein (1879-1955) em Zürich em 1913, e em 1918 Weyl sustentou a teoria da relatividade num livro muito difundido, *Raum-Zeit-Materie* ("Espaço-tempo-matéria"). Durante os dez anos seguintes ele escreveu uma série de artigos sobre as aplicações da teoria dos grupos à mecânica quântica, a que Einstein também fez contribuições importantes. No ápice de sua carreira, em 1933, Weyl se demitiu de seu posto em Göttingen em protesto contra a demissão de seus colegas pelos nazistas, e o glorioso período da matemática nessa universidade terminou abruptamente. Weyl foi para a América do Norte e tornou-se membro do Institute for Advanced Study em Princeton, de que também Einstein em 1933 tinha sido feito membro vitalício. A relação estreita entre matemática abstrata e teoria científica que a obra de Poincaré, Hilbert, Weyl e Einstein representa tem sido especialmente característica do século vinte, e não foi perturbada pelas controvérsias dentro da matemática com relação aos fundamentos do assunto.

Os formalistas e logicistas ficaram particularmente embaraçados com vários paradoxos na teoria dos conjuntos que há muito tempo eram familiares, como o do barbeiro da cidade que barbeia todos aqueles, e somente aqueles, que não se barbeiam a si mesmos. O barbeiro está ou não incluído no conjunto daqueles que barbeiam a si mesmos? Aqui também a lei do meio excluído parece inaplicável. Outro exemplo é o que geralmente se chama de "antinomia de Russell". O conjunto de todos os conjuntos que não são elementos deles mesmos é um elemento dele mesmo? Quer a resposta seja afirmativa quer negativa, resulta uma contradição. Tais paradoxos levantaram sérias dúvidas sobre se um programa como o de Russell e Whitehead, baseado como é na noção de conjunto, poderia ter sucesso. O paradoxo de Russell foi proposto em 1902, e o desgosto que causou entre os especialistas em lógica matemática foi bem expresso por Frege em 1903 num apêndice ao segundo volume de seu *Grundgesetze*:

> Nada pior praticamente pode acontecer a um autor científico do que ver uma das fundações de seu edifício ser abalada depois de terminada a obra. Fui colocado nessa posição por uma carta contendo o paradoxo de Mr. Bertrand Russell exatamente quando a impressão deste segundo volume

[21]Veja o artigo, "Mathematics, Foundations of", por S. C. Kleene em *Encyclopaedia Britannica*, XV (1963), 82B-83. Cf. Edith H. Luchins e A. S. Luchins, "Logicism", *Scripta Mathematica*, 27 (1965), 223-243

[22]Veja Hermann Weyl: *Philosophy of Mathematics and Natural Science*, baseado numa tradução de Olaf Helmer (1940)

estava quase pronta . . . *Solatium miseris, socios habuisse malorum.* Eu também tenho esse consolo, se é que é consolo; pois todos aqueles que em suas provas usaram extensões de conceitos, classes, conjuntos inclusive sistemas de Dedekind estão na mesma posição. Não é só uma questão de meu método particular de colocar as fundações, mas trata-se de saber se alguma fundamentação lógica para a aritmética é possível[23].

Essa percepção das três principais concepções quanto à natureza da matemática não deve levar à conclusão de que todo matemático se encontra em um dos três campos. Nada podia estar mais longe da verdade, e mesmo dentro de cada escola de pensamento há grande diversidade de opinião. Pode-se até sugerir que não há dois matemáticos de hoje que concordem quanto à natureza de seu assunto. Certamente a palavra "matemática" significou coisas diferentes para os povos do mundo em diferentes períodos da história, e seria pouco realístico esperar grande acordo dentro de um campo que se tornou tão vasto. Durante a primeira métade do século vinte o conflito entre as facções foi às vezes agudo; mas a partir daí tem havido mais um sentimento, que lembra o pensamento de d'Alembert cerca de duzentos anos antes, de que devemos levar avante o desenvolvimento do assunto, tanto nas fundações quanto na superestrutura, sem preocupação excessiva com um credo particular[24].

11 Nem todos os matemáticos principais do começo do século vinte tomaram parte ativa na controvérsia formalista-intuicionista. Em particular, Henri Lebesgue (1875-1941) um dos matemáticos mais originais e produtivos, revolucionou um importante aspecto da análise sem aderir a uma das principais ortodoxias. Tomou uma posição um tanto intermediária entre intuicionistas e formalistas — uma posição que poderia ser descrita como empirismo lógico francês. Mas se no que diz respeito a fundamentos lógicos Lebesgue ocupava uma posição de centro, em sua pesquisa ele escandalizou os analistas convencionais, como Hermite, com sua predileção por tipos patológicos de funções. Ele tivera o tipo usual de treinamento matemático, embora tivesse mostrado excepcional irreverência ao questionar afirmações feitas por seus professores; mas sua dissertação, aceita em Nancy em 1902, era inusitada, virtualmente refazendo a teoria da integração. Sua obra se afastava tanto das idéias aceitas que Lebesgue, como Cantor, a princípio foi atacado não só por crítica externa como por dúvida interior; mas o valor de suas idéias encontrou crescente reconhecimento, e em 1910 ele foi nomeado para a Sorbonne. No entanto, ele não criou uma "escola" nem se concentrou no campo que abrira. Embora seu conceito de integral fosse por si um exemplo notável de generalização, Lebesgue temia que "Reduzida a teorias gerais, a matemática fosse uma bela forma sem conteúdo. Morreria rapidamente"[25]. Desenvolvimentos posteriores parecem indicar que seus temores quanto à má influência da generalidade na matemática eram injustificados.

A integral de Riemann tinha dominado o estudo da integração antes que Lebesgue se tornasse o "Arquimedes do período de extensão". Mas, pelo fim do século dezenove, estudos sobre séries trigonométricas e o *Mengenlehre* de Cantor tinham feito com que os matemáticos percebessem mais claramente que a idéia essencial de funcionalidade deveria ser uma correspondência ponto-a-ponto ou "aplicação" no novo sentido, não a idéia de variação lisa. Cantor tinha até lutado com noções de conjuntos mensuráveis, mas em sua definição a medida da união de dois conjuntos podia ser menor que a soma das medidas dos conjuntos. Os defeitos da definição de Cantor foram removidos por Emile Borel (1871-1956), o predecessor imediato de Lebesgue nos estudos sobre teoria da medida. Borel, como Carnot, até certo ponto levava vida dupla, pois de um posto de professor em Paris ele passou a participação ativa em negócios governamentais. De

[23]Veja Gottlob Frege, *The Basic Laws of Arithmetic: Exposition of the System*, traduzido para o inglês por Montgomery Furth (Berkeley, Calif.: University of California Press, 1964), p. 127

[24]Uma exposição intensiva das idéias conflitantes é apresentada em Max Black: *The Nature of Mathematics* (1933). Veja também Abraham S. Luchins e Edith H. Luchins, *Logical Foundations of Mathematics for Behavioral Scientists* (1965) para uma exposição mais popular

[25]Veja Henri Lebesgue, *Measure and the Integral* (1966), p. 5. Esse volume contém um bem escrito "Biographical Sketch" por K. O. May

1924 a 1936 ele fez parte da Câmara de Deputados, e, antes de ser preso em 1940 pelo governo de Vichy, fora ministro da marinha. Sua lista de publicações de matemática antes de 1924 era notável, incluindo mais de meia dúzia de livros. Um dos primeiros volumes tinha sido sobre um tema pouco comum: *Leçons sur le séries divergentes* (1901). Aqui o autor mostrava como para certas séries divergentes é possível definir uma "soma" que faça sentido em relações e operações envolvendo tais séries. Por exemplo, se a série é $\sum u_n$, então uma "soma" pode ser definida como $\int_0^\infty e^{-x} \sum_0^\infty u_n x^n/n!\, dx$ se essa integral existe. Durante as primeiras décadas deste século houve vivo interesse por tais definições; mas a influência mais duradoura de Borel esteve na aplicação da teoria dos conjuntos à teoria das funções, onde seu nome é lembrado no familiar teorema de Heine-Borel:

> Se um conjunto fechado de uma reta pode ser coberto por um conjunto de intervalos de modo que cada ponto do conjunto é um ponto interior de pelo menos um dos intervalos, então existe um número finito de intervalos com essa propriedade de cobertura.

Em terminologia um pouco diferente esse teorema fora enunciado por Heine em 1872, mas fora esquecido até ser reenunciado em 1895 por Borel[26]. O nome de Borel está também ligado a qualquer conjunto que possa ser obtido de conjuntos abertos e fechados da reta real por aplicações repetidas das operações de união e intersecção a número enumerável de conjuntos. Todo conjunto de Borel é mensurável em sua definição.

Lebesgue, refletindo sobre o trabalho de Borel sobre conjuntos, viu que a definição de Riemann de integral tem o defeito de só se aplicar em casos excepcionais, pois assume não mais que uns poucos pontos de descontinuidade para a função. Se uma função $y = f(x)$ tem muitos pontos de descontinuidade, então à medida que o intervalo $x_{i-1} - x_i$ se torna menor, os valores $f(x_{i+1})$ e $f(x_i)$ não ficam necessariamente próximos. Em vez de subdividir o domínio da variável independente, Lebesgue dividiu pois o campo $\bar{f} - \underline{f}$ de variação da função em subintervalos Δy_i e em cada subintervalo escolheu um valor η_i. Então achou a "medida" $m(E_i)$ do conjunto E_i dos pontos do eixo x para os quais os valores de f são aproximadamente iguais a η_i. No modo informal em que Lebesgue gostava de exprimir a diferença, os integradores anteriores tinham adicionado indivisíveis, grandes ou pequenos, na ordem da esquerda para a direita, ao passo que ele preferia agrupar indivisíveis de tamanho semelhantes antes de somar[27]. Isto é, às somas de Riemann $S_n = \sum f(x_i)\Delta x_i$ ele substituiu somas tipo Lebesgue $S_n = \sum \eta_i m(E_i)$ e depois fazia os intervalos tenderem a zero.

A integral de Lebesgue que descrevemos aqui muito informalmente na verdade é definida muito mais precisamente em termos de supremos e ínfimos e da medida de Lebesgue de um conjunto, conceito complicado que não pode ser explicado aqui, mas um exemplo pode sugerir como opera a integral de Lebesgue. Assumamos que a medida de Lebesgue do conjunto dos números racionais no intervalo [0, 1] é zero e que a medida de Lebesgue dos irracionais desse intervalo é um; suponhamos procurada a integral de $f(x)$ nesse intervalo, onde $f(x)$ é zero para valores racionais de x e um para valores irracionais de x. Como $m(E_i) = 0$ para todos os valores de i exceto $i = n$ onde $\eta_n = 1$, temos $S_n = 0 + 0 + \cdots + \eta_n m(E_n) = 1 \cdot 1 = 1$; portanto a integral de Lebesgue é 1. A integral de Riemann da mesma função no mesmo intervalo não existe, é claro.

Não definimos as expressões "medida de um conjunto" ou "função mensurável" pois não é fácil defini-las em poucas palavras elementares. Além disso, a palavra "medida" pode ter vários significados diferentes. Quando Lebesgue apresentou seu novo conceito de integral, ele usou a palavra no sentido específico do que hoje se chama medida de Lebesgue. Essa era uma extensão das noções clássicas de comprimento e área a conjuntos mais gerais que os associados com as curvas e superfícies usuais. Hoje a palavra "medida" é usada mais amplamente ainda, uma medida num espaço R sendo simples-

[26]Veja E. T. Bell, *The Development of Mathematics* (1940), p. 452, para referências

[27]Para uma excelente introdução à integral de Lebesgue veja as palavras do próprio Lebesgue em sua *Measure and the Integral* (traduzido para o inglês) mencionado na nota de rodapé 25 deste capítulo

mente uma função não-negativa μ com a propriedade $\mu(\sum A_i) = \sum \mu(A_i)$ para toda classe enumerável de partes disjuntas A_i contidas em R. Não só o novo conceito de integral cobre uma classe mais ampla de funções que o de Riemann, mas a relação inversa entre diferenciação e integração (no sentido generalizado de Lebesgue) está sujeita a menos exceções. Por exemplo, se $g(x)$ é diferenciável em $[a, b]$ e se $g'(x) = f(x)$ é limitada, então $f(x)$ é Lebesgue integrável e $g(x) - g(a) = {}_L\int_a^x f(t)\,dt$, ao passo que com as mesmas restrições sobre $g(x)$ e $g'(x)$ a integral de Riemann ${}_R\int_a^x f(t)\,dt$ poderia não existir.

As idéias de Lebesgue datam dos anos finais do século dezenove, mas tornaram-se conhecidas através de seus dois tratados clássicos: *Leçons sur les séries trigonométriques* (1903) e *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives* (1904)[28].

As idéias revolucionárias que continham abriram caminho para novas generalizações. Entre essas estão a integral de Denjoy e a integral de Haar, propostas por um francês, Arnaud Denjoy (1884-   ) e um húngaro, Alfred Haar (1885-1933) respectivamente. Outra integral bem conhecida do século vinte é a de Lebesgue-Stieltjes, combinação das idéias de Lebesgue e do analista holandês T. J. Stieltjes (1856-1894). A obra desses homens e outros alterou tanto o conceito de integral, através de generalizações, que se disse que embora a integração seja tão antiga quanto o tempo de Arquimedes, "a teoria da integração foi creação do século vinte"[29].

12 As novas teorias de integração estavam relacionadas de perto com outra característica acentuada do século vinte, o rápido crescimento da topologia geral. Maurice Fréchet (1878-   ) na Universidade de Paris, em sua tese de doutoramento de 1906 mostrou claramente que a teoria das funções já não podia passar sem uma visão muito geral da teoria dos conjuntos. O que Fréchet tinha em mente não eram necessariamente os conjuntos de números, mas conjuntos de elementos de natureza arbitrária, tais como curvas ou pontos; sobre tais conjuntos arbitrários ele construiu um "cálculo funcional" em que uma operação funcional é definida num conjunto E quando a cada elemento A de E corresponde um valor numericamente determinado $U(A)$. Interessava-se não por um particular exemplo de conjunto E mas pelos resultados da teoria dos conjuntos que são independentes da natureza dos elementos do conjunto. Nesse cálculo muito geral a noção de limite é muito mais ampla do que a previamente definida, essa estando incluída na anterior como caso especial, assim como a integral de Lebesgue contém as integrais de Riemann e Cauchy. Provavelmente nenhum aspecto da matemática do século vinte sobressai tanto quanto o grau sempre crescente de generalização e abstração. Desde o tempo de Hilbert e Fréchet as noções de conjunto abstrato e espaço abstrato têm sido fundamentais na pesquisa.

É interessante notar que Hilbert e Fréchet chegaram a suas generalizações do conceito de espaço partindo de direções um tanto diferentes. Hilbert se interessara, como Poincaré, pelo estudo de equações integrais, especialmente através da obra de Ivar Fredholm (1866-1927). Num certo sentido uma equação integral pode ser considerada uma extensão de um sistema de n equações em n incógnitas a um sistema de infinitas equações a infinitas incógnitas, tópico que tinha sido tratado, sob forma de determinantes infinitos, por von Koch. Ao trabalhar com equações integrais de 1904 a 1910 Hilbert não se referiu explicitamente a espaços com infinitas dimensões, mas desenvolveu o conceito de continuidade de uma função de infinitas variáveis. Até que ponto Hilbert construiu formalmente o "espaço" que mais tarde teve seu nome pode ser um ponto discutível, mas as idéias básicas estavam ali, e seu impacto no mundo matemático foi

[28]Há muitas exposições em inglês. Veja J. Burkill, *The Lebesgue Integral* (Cambridge: Cambridge University Press, 1951); J. H. Williamson, *Lebesgue Integration* (New York: Holt, Rinehart, 1962); Stanislaw Hartman e J. Mikusinski, *The Theory of Lebesgue Measure and Integration*, traduzido por Leo F. Boron (Oxford, Pergamon, 1961); L. Cesari, *Surface Area* (Princeton: Princeton University Press, 1956)

[29]E. T. Bell, *Development of Mathematics*, p. 448. Cf. Arnaud Denjoy, *Un demi-siècle* (1907-1956) *de notes communiquées aux académies* (Paris: Gauthier-Villars, 1957, 2 volumes); e *Introduction à la théorie des fonctions de variables réelles* (Paris: Hermann, 1937, 2 volumes). Veja também Leopoldo Nachbin, *The Haar Integral*, traduzido por Lulu Bechtolsheim (Princeton: D. Van Nostrand, 1965)

grande. Durante os anos em que Hilbert se ocupou com equações integrais, Hadamard estava fazendo pesquisas sobre cálculo de variações, e seu protegido Fréchet conscientemente tentou em 1906 generalizar os métodos nesse campo através do que chamou *cálculo funcional*. Ao passo que o cálculo usual lida com funções, o cálculo funcional lida com funcionais. Ao passo que uma função é uma correspondência entre um conjunto S_1 de números e outro conjunto S_2 de números, um funcional é uma correspondência entre uma classe C_1 de funções e outra classe C_2 de funções. Fréchet formulou definições generalizadas, correspondendo aproximadamente a termos como limite, derivada e continuidade no cálculo usual, aplicáveis aos espaços de funções que ele criou assim, introduzindo em grande escala um novo vocabulário para a nova situação[30].

Dizem alguns que a topologia começou com a *analysis situs* de Poincaré; outros que data da teoria dos conjuntos de Cantor, ou talvez do desenvolvimento dos espaços abstratos. Outros ainda consideram Brouwer o fundador da topologia, especialmente devido a seus teoremas de invariança topológica de 1911 e à fusão que efetuou dos métodos de Cantor com os da *analysis situs*. De qualquer forma, com Brouwer começou o período de evolução intensiva da topologia que continuou até hoje. Durante essa "idade áurea" da topologia, matemáticos americanos têm contribuído notavelmente. Foi dito que "a topologia começou como muita geometria e pouca álgebra, mas agora é muita álgebra e pouca geometria"[31]. Ao passo que outrora a topologia podia ser descrita como geometria sem medida, hoje a topologia algébrica ameaça dominar o campo, mudança que resultou em grande parte de liderança dos Estados Unidos.

Em 1913 Weyl deu um curso sobre superfícies de Riemann[32] em Göttingen, onde Hilbert tinha recebido uma cadeira por recomendação de Klein, e ele também deu ênfase à natureza abstrata de uma superfície, ou "variedade de dimensão dois", como preferia chamá-la. O conceito de variedade, ele afirmou, não deveria ser ligado a um espaço de pontos (no sentido geométrico usual), mas ter sentido mais amplo. Começamos simplesmente com uma coleção de coisas chamadas "pontos" (que podem ser objetos quaisquer) e introduzimos um conceito de continuidade por meio de definições adequadas. A formulação clássica dessa idéia foi dada um ano depois por Felix Hausdorff (1868-1942), o "sumo sacerdote" da topologia dos conjuntos de pontos.

A primeira parte dos *Grundzüge der Mengenlehre* (Aspectos básicos da teoria dos conjuntos) de Hausdorff de 1914 é uma exposição sistemática dos aspectos característicos da teoria dos conjuntos, em que a natureza dos elementos não tem importância; só as relações entre os elementos são importantes. Na segunda parte do livro achamos um desenvolvimento claro dos "espaços topológicos de Hausdorff" a partir de uma coleção de axiomas. Por espaço topológico o autor entende um conjunto E de elementos x e certos subconjuntos S_x chamados vizinhanças de x. Assume-se que as vizinhanças satisfazem aos quatro seguintes "axiomas de Hausdorff".

1. A cada ponto x corresponde ao menos uma vizinhança $U(x)$, e cada vizinhança $U(x)$ contém o ponto x.
2. Se $U(x)$ e $V(x)$ são duas vizinhanças do mesmo ponto x, existe uma vizinhança $W(x)$ que é subconjunto das duas.
3. Se o ponto y pertence a $U(x)$, existe uma vizinhança $U(y)$ que é subconjunto de $U(x)$.

[30]Uma exposição detalhada e bem feita do surgimento dos espaços de funções através da obra de Hilbert e Fréchet é dada em Michael Bernkopf, "The Development of Function Spaces with Particular Reference to Their Origins in Integral Equation Theory", *Archive for History of Exact Sciences*, 3 (1966), 1-96

[31]Veja *Recent Soviet Contributions to Mathematics*, editado por J. P. LaSalle e S. Lefschetz (1962), p. 13

[32]Hermann Weyl, *The Concept of a Riemann Surface*, traduzido por G. R. Maclane, 3.ª edição (Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1955)

4. Para dois pontos diferentes x e y existem duas vizinhanças $U(x)$ e $U(y)$ sem pontos comuns[33].

Vizinhanças assim definidas permitem a Hausdorff introduzir o conceito de continuidade. Com axiomas adicionais ele desenvolveu as propriedades e vários espaços mais particulares, tais como o espaço euclidiano.

Se algum livro marca o aparecimento da topologia dos conjuntos de pontos como disciplina separada, é o *Grundzüge* de Hausdorff. É interessante notar que embora fosse a aritmetização da análise que começou a linha de pensamento que levou de Cantor a Hausdorff, no fim o conceito de número fica totalmente submerso sob um ponto de vista muito mais geral. Além disso, embora a palavra "ponto" seja usada no título, a nova disciplina tem tão pouco a ver com os pontos da geometria ordinária quanto com os números da aritmética comum. A topologia emergiu no século vinte como um tema que unifica quase toda a matemática, um tanto como a filosofia procura coordenar todo o conhecimento. Por causa de seu primitivismo, a topologia está na base de uma parte muito grande da matemática, conferindo-lhe uma inesperada coesão.

13 O alto grau de abstração formal que se introduziu na análise, geometria e topologia no começo do século vinte não podia deixar de invadir a álgebra. O resultado foi um novo tipo de álgebra, às vezes inadequadamente descrito como "álgebra moderna", produto em grande parte do segundo terço do século. É de fato verdade que um processo gradual de generalização na álgebra tinha sido desenvolvido no século dezenove, mas no século vinte o grau de abstração deu uma virada brusca para cima[34]. x e y já não representavam mais necessariamente números desconhecidos (reais ou imaginários) ou segmentos, como na obra de Descartes; agora podiam designar elementos de qualquer tipo — substituições, figuras geométricas, matrizes, etc. Quando no século dezesseis *cosa* era usado para a incógnita, a "coisa" naturalmente era uma grandeza; agora o sentido literal da palavra italiana ou espanhola é literalmente aplicável, pois não há restrição sobre a natureza dos elementos da álgebra abstrata além dos especificamente postulados nos axiomas. Alguma indicação da direção em que a álgebra estava avançando pode ser percebida comparando os artigos sobre álgebra apresentados no Quinto Congresso Internacional em Cambridge, Inglaterra, em 1912, logo antes da interrupção causada pela Primeira Grande Guerra, e os lidos no Décimo Primeiro Congresso Internacional em Cambridge, Massachusetts, em 1950, depois da segunda interrupção na série causada pela Segunda Grande Guerra. A transição da álgebra clássica para a abstrata, no entre-guerra, fica evidente olhando os índices, como também a emergência da topologia como rival de sua mãe, a geometria. O enorme desenvolvimento da topologia hoje resulta em parte do fato que é difícil imaginar um aspecto da análise ou da geometria que não deva ser baseado num estudo topológico prévio; e apesar do ar vago que a topologia às vezes aparenta, ela está ligada de perto com as questões matemáticas mais precisas. Se a segunda metade do século continuar na direção em que se abriu, a álgebra abstrata e a topologia terão a parte do leão na pesquisa matemática.

14 Se a matemática mudou de forma entre as guerras, é igualmente verdade que muito da matemática em seguida à Segunda Guerra representou algo radicalmente novo, anunciando uma nova era[35]. A teoria dos conjuntos e a teoria da medida durante o século vinte invadiram uma parte sempre maior da matemática, e poucos ramos foram tão completamente influenciados por essa tendência quanto a teoria das probabilidades, a que Borel tinha contribuído com seus *Éléments de la théorie des probabilités* (1909). O primeiro ano do novo século foi auspicioso para as probabilidades, tanto na física quanto na genética, pois em 1901 Gibbs publicou seus *Elementary Principles in Statistical*

[33]Veja Paul Alexandroff. *Elementary Concepts of Topology*, traduzido por Alexis N. Obolensky (1965), p. 17, ou Jerome H. Manheim, *The Genesis of Point Set Topology* (1964), pp. 126-127

[34]Veja Oystein Ore, *L'algèbre abstraite* (Paris: Hermann, 1936)

[35]Jean Dieudonné, "Recent Developments in Mathematics". *American Mathematical Monthly*, 71 (1964). 239-248

Mechanics, e no mesmo ano a *Biometrika* foi fundada por Karl Pearson (1857-1936). Francis Galton (1822-1911), primo precoce de Charles Darwin e estatístico nato, tinha estudado os fenômenos de regressão; em 1900 Pearson, professor "Galton" de eugenia na Universidade de Londres, tinha popularizado o teste do *chi-square*. Um dos títulos de Poincaré tinha sido "Professor do cálculo de probabilidades", indicando o interesse crescente pelo assunto. Na Rússia o estudo de cadeias ligadas de eventos foi iniciado, especialmente em 1906-1907, por Andrei Andreyevitch Markov (ou Markoff, 1856-1922), discípulo de Tchebycheff e co-editor das *Oeuvres* (2 volumes, 1899-1904) de seu mestre. Na teoria cinética dos gases e em muitos fenômenos biológicos e sociais a probabilidade de um evento depende muitas vezes de resultados precedentes, e especialmente desde os meados do século vinte as cadeias de Markov de probabilidades interligadas têm sido amplamente estudadas[36]. Quando se procuraram fundamentos matemáticos para a teoria das probabilidades, os estatísticos viram que o instrumento adequado estava disponível, e hoje nenhuma exposição rigorosa da teoria das probabilidades é possível sem usar noções sobre funções mensuráveis e teorias modernas da integração. Na Rússia, por exemplo, Andrei Nicolaevich Kolmogoroff (1903-) fez importantes progressos em processos de Markov, e satisfez em parte o sexto projeto de Hilbert, que pedia fundamentos axiomáticos para as probabilidades, através do uso da teoria da medida de Lebesgue. A análise clássica se ocupara de funções contínuas, ao passo que os problemas de probabilidades em geral envolvem casos discretos. A teoria da medida e as extensões do conceito de integração eram idealmente adequados para promover uma associação mais íntima da análise com probabilidades, especialmente depois da metade do século, quando Laurent Schwartz (1915-) da Universidade de Paris generalizou o conceito de diferenciação através da teoria das distribuições (1950-1951).

A função delta de Dirac da física atômica tinha mostrado que as funções patológicas que por tanto tempo tinham ocupado os matemáticos eram úteis também na ciência. Nos casos mais difíceis, porém, perde-se a diferenciabilidade, o que causa problemas na resolução de equações diferenciais — um dos principais elos de ligação entre a matemática e a física — especialmente quando estão envolvidas soluções singulares. Para superar essa dificuldade Schwartz introduziu uma noção mais ampla de diferenciabilidade, tornada possível pelo desenvolvimento, na primeira metade do século, de espaços vetoriais gerais por Banach, Fréchet e outros.

Um espaço vetorial é um conjunto de elementos $a, b, c \ldots$ satisfazendo a certas condições, inclusive especialmente a exigência que se a e b são elementos de L e se α e β são números complexos então $\alpha a + \beta b$ é um elemento de L. Se os elementos de L são funções, o espaço vetorial chama-se um espaço vetorial de funções e uma aplicação linear dele chama-se um funcional linear. Por "distribuição" Schwartz entendia um funcional linear contínuo sobre o espaço das funções que são diferenciáveis e satisfazem a certas outras condições. A medida de Dirac, por exemplo, é um caso especial de uma distribuição. Schwartz então desenvolveu uma definição apropriada de derivada de uma distribuição tal que a derivada de uma distribuição é sempre uma distribuição. Isso fornece uma poderosa generalização do cálculo, com aplicações imediatas à teoria das probabilidades e à física. A análise funcional, essencialmente uma generalização do cálculo de variações, e a teoria das distribuições têm sido também importantes tópicos de pesquisa desde os meados do século[37].

15 As probabilidades e a estatística no século vinte estão intimamente ligados não só com a matemática pura como com uma característica notavelmente diferente de nosso

[36]Não há exposição adequada da história da teoria das probabilidades recente, mas uma apresentação elementar de alguns aspectos encontra-se em Amy C. King e C. B. Read. *Pathways to Probability* (1963). Veja também as notas histórico-bibliográficas no fim de E. B. Dynkin. *Markov Processes*, traduzido do russo (New York: Springer, 1965, 2 volumes), II, 240-266

[37]Para uma exposição sinótica veja J.-P. Marchand, *Distributions: An Outline* (Amsterdam: North-Holland, 1962). Cf. Laurent Schwartz, *Théorie des distributions* (Paris: Hermann, 1950-1951, 2 volumes; 2.ª edição, 1957)

tempo — uma dependência crescente com relação aos grandes computadores. O assunto do cálculo por máquinas não era realmente novo, pois Pascal e Leibniz tinham tido sucesso modesto muito antes. Na verdade, o profeta da máquina de calcular elaborada tinha sido Charles Babbage, um excêntrico que manteve uma polêmica durante toda a sua vida com os tocadores de realejo enquanto tentava desesperadamente obter fundos para completar seu ambicioso projeto de construir um "engenho de diferença". Esse artefato, concebido em 1833, foi durante algum tempo financiado pelo governo inglês; quando o Ministro do Tesouro em 1842 cancelou o apoio financeiro, Babbage amargamente comparou-o ao destruidor do belo Templo de Éfeso. A máquina idealizada por Babbage teria muito da flexibilidade das máquinas modernas, mas sem a velocidade dessas. Efetuaria todas as operações aritméticas e guardaria informação para uso posterior, usando um esquema elaborado de rodas e alavancas. Sua "máquina", um computador digital, nunca foi completada. A era moderna da computação mecânica pode-se dizer que começou aproximadamente em 1925 no Massachusetts Institute of Technology onde Vannevar Bush (1890-) e seus associados construíram um calculador grande, com motores elétricos, mas por outro lado mecânico. Em 1930 a International Business Machines Corporation começou a construção do MARK I, uma calculadora eletromecânica completamente automática segundo as linhas da visão de Babbage; mas antes de ficar pronta, em 1944, já estava fora da moda com os planos do ENIAC (Eletronic Numerical Integrator and Calculator). Esse foi o primeiro calculador completamente eletrônico, baseado no fluxo de eléctrons através de tubos de vácuo. Fora começado sob a pressão de necessidades militares, e entre aqueles que serviram como consultores no projeto estava John von Neumann (1903-1957), nascido em Budapeste, que havia ensinado em Berlin e Hamburgo antes de ir para a América do Norte em 1930, onde, junto com Einstein, ele se tornou um dos primeiros membros permanentes do Institute for Advanced Study em 1933. Entre 1944 e 1946 ele ajudou a preparar um relatório para o exército sobre a capacidade dos computadores, e em 1949 o primeiro computador com programa em reserva entrou em operação. Dois anos depois UNIVAC I (Universal Automatic Calculator) estava pronto, feito pela Sperry Rand Corporation, mas o campo da computação eletrônica muda tão rapidamente que esse computador é hoje peça de museu na Smithsonian Institution[38].

A eletricidade alterou tanto nosso modo de viver que freqüentemente se diz que vivemos numa era elétrica; agora os aparelhos eletrônicos podem estar a ponto de alterar grande parte de nosso desenvolvimento matemático. Os computadores hoje tornaram-se tão vastos e intrincados que ultrapassam os sonhos de Babbage, que viveu um século antes de seu advento. Problemas que estavam desesperadoramente além das capacidades dos matemáticos de eras anteriores recentemente foram resolvidos com a ajuda dos computadores de alta velocidade. Se, como Kepler disse, a invenção dos logaritmos duplicou a vida de um astrônomo, quanto mais o computador eletrônico expandiu as carreiras de cientistas e matemáticos! Com seu poder crescente veio também uma proliferação de novos campos e aplicações da matemática — programação linear, teoria dos jogos, pesquisa operacional e muito mais. Von Neumann, um dos matemáticos mais criativos e versáteis de nosso século, foi um pioneiro num novo tratamento da economia matemática. A econometria havia muito usava análise matemática, mas foi especialmente através da *Theory of Games and Economic Behavior* de von Neumann e Oskar Morgenstern em 1944 que a chamada matemática finita veio a desempenhar um papel crescente nas ciências sociais. As inter-relações entre os vários ramos do pensamento tornaram-se tão complicadas que Norbert Wiener (1894-1964), um prodígio matemático e por muitos anos professor no MIT, em 1948 publicou seu *Cybernetics*, livro que estabelecia uma nova disciplina dedicada ao estudo do controle e comunicação

[38]Uma exposição muito informativa sobre o desenvolvimento dos computadores se encontra em Jeremy Bernstein, *The Analytical Engine: Computers — Past, Present and Future* (1963). Veja também *Babbage's Calculating Machine or Difference Engine*, editado por Philip Morrison e Emily Morrison (New York, 1961)

em animais e máquinas. Von Neumann e Wiener também se envolveram profundamente com teoria quântica, e o primeiro em 1955 foi nomeado para a Comissão de Energia Atômica Americana; mas seria um erro concluir que homens como esses eram apenas matemáticos aplicados. Contribuíram pelo menos tanto para a matemática pura — para teoria dos conjuntos, teoria dos grupos, cálculo operacional, probabilidades e lógica matemática e fundamentos. Fora von Neumann, na verdade, quem em 1929 deu aos espaços de Hilbert esse nome, sua primeira axiomatização e sua forma atual altamente abstrata[39]. Wiener fora importante no começo da década de vinte na origem da teoria moderna dos espaços lineares e em particular no desenvolvimento dos espaços de Banach. A notável expansão da matemática aplicada no século vinte de modo algum diminuiu o ritmo do desenvolvimento da matemática pura, nem o surgimento de novos ramos diminuiu o vigor dos antigos.

16 Os conceitos fundamentais da álgebra moderna (ou abstrata), topologia e espaços vetoriais foram estabelecidos entre 1920 e 1940, mas a vintena de anos seguinte viu uma verdadeira revolução nos métodos da topologia algébrica que se estendeu à álgebra e à análise. O resultado foi uma nova disciplina chamada álgebra homológica, sobre a qual apareceu, em 1955 o primeiro livro por Henri Cartan (1904-) e Samuel Eilenberg (1913-), sendo seguido na dúzia de anos seguintes por várias outras monografias. A álgebra homológica é um desenvolvimento da álgebra abstrata que trata de resultados válidos para muitas espécies diferentes de espaços — uma invasão do domínio da álgebra pura pela topologia algébrica. A rapidez com que esse cruzamento, geral e poderoso, entre a álgebra e a topologia algébrica, cresceu é evidente pelo rápido aumento no número de artigos sobre álgebra homológica que aparecem na lista de *Mathematical Reviews*. Além disso, os resultados desse ramo têm aplicação tão ampla que as etiquetas antigas, álgebra, análise, geometria, já não se ajustam aos resultados de pesquisa recente. Nunca antes a matemática esteve tão unificada quanto hoje. A maior parte do enorme desenvolvimento durante os vinte anos seguintes à Segunda Grande Guerra teve pouco que ver com as ciências naturais, sendo estimulada por problemas dentro da própria matemática pura; no entanto durante o mesmo período as aplicações da matemática à ciência se multiplicaram incrivelmente. A explicação dessa anomalia parece clara: a abstração e percepção de estruturas tem tido papel cada vez mais importante no estudo da natureza, como na matemática. Por isso mesmo em nossos dias de pensamento superabstrato, a matemática continua a ser a linguagem da ciência, tal como o era na antiguidade[40]. Que há uma conexão íntima entre fenômenos experimentais e estruturas matemáticas parece completamente confirmado da maneira mais inesperada pelas descobertas recentes da física contemporânea, embora as razões subjacentes para essa concordância permaneçam obscuras. "Do ponto de vista axiomático, a matemática aparece assim como um repositório de formas abstratas — as estruturas matemáticas; e acontece — sem que saibamos por que — que certos aspectos da realidade empírica se ajustam a essas formas, como por uma espécie de pré-adaptação"[41].

17 Foi dito repetidamente aqui que a matemática do século vinte viu uma ênfase sobre a abstração e uma preocupação crescente com a análise de esquemas amplos. Talvez isso apareça o mais claramente possível nas obras de meados do século vinte emanadas do matemático policéfalo conhecido como Nicolas Bourbaki. Este é um francês inexistente com nome grego que apareceu nas páginas de título de várias dúzias de volumes numa grande obra que ainda prossegue, *Éléments de mathématique*, que pretende captar toda a matemática que vale a pena. A cidade de Bourbaki é dada como Nancy, cidade

[39]Para uma exposição sobre a obra de von Neumann veja uma série de artigos formando um número em memória do *Bulletin of the American Mathematical Society*, 64 (Maio, 1958)

[40]M. H. Stone "The Revolution in Mathematics", *Liberal Education*, 47 (1961), 304-327. Veja especialmente p. 326

[41]N. Bourbaki "The Architecture of Mathematics", *American Mathematical Monthly*, 57 (1950), 221-232. É uma tradução de um artigo que apareceu em *Les grands courants de la pensée mathématique*, editado por F. Le Lionnais (1962). Veja especialmente p. 231

que forneceu vários dos grandes matemáticos do século; pode não ser coincidência o fato de que em Nancy há uma estátua do pitoresco e outrora muito real General Charles Denis Sauter Bourbaki (1816-1897) a quem em 1862 foi oferecido o trono da Grécia, que ele rejeitou, e cujo papel na Guerra franco-prussiana foi muito notável. Nicolas Bourbaki porém não é parente seu em nenhum sentido da palavra; o nome foi simplesmente tomado para designar um grupo de matemáticos, quase exclusivamente franceses, que formam uma espécie de secreta *société anonyme*[42]. Como instituição de referência N. Bourbaki às vezes usa a Universidade de Nancago, referência ao fato que dois dos líderes do grupo durante algum tempo pertenceram a universidades da área de Chicago — André Weil (1906-) na Universidade de Chicago (mais recentemente porém no Institute for advanced Study em Princeton) e Jean Dieudonné (1906-) na Northwestern University (antes na Universidade de Nancy, depois na Universidade de Paris). O primeiro volume dos *Éléments* de Bourbaki apareceu em 1939, o trigésimo primeiro em 1965; até agora a obra não completou o que se conhece como Parte I, *Les structures fundamentales de l'analyse*. Essa parte contém meia dúzia de subtítulos: (1) Teoria dos conjuntos, (2) Álgebra, (3) Topologia geral, (4) Funções de variável real, (5) Espaços vetoriais topológicos, e (6) Integração. Esses títulos indicam que só uma pequena parte da matemática contida nesses volumes existia há um século. A apresentação do assunto por Bourbaki é caracterizada por uma adesão sem concessões ao tratamento axiomático e a uma forma secamente abstrata e geral que retrata claramente a estrutura lógica. O tratamento bourbakista da matemática é assim um tanto análogo, no mais alto nível, às mudanças que se deram na matemática em nível elementar e secundário. A esperança em ambos os casos é que a ênfase em estrutura leve a considerável economia de pensamento. Por exemplo, no começo do século dezenove a descoberta de que a estrutura do sistema dos números complexos era a mesma que a do plano euclidiano mostrou que as propriedades deste, estudadas por dois milênios, podiam ser aplicadas ao primeiro. O resultado foi uma proliferação exuberante na análise complexa. Não há razão para que a preocupação atual com semelhanças de estrutura não produza, nos anos futuros, dividendos semelhantes.

A chamada matemática moderna nas escolas também partilha com Bourbaki o desejo de substituir cálculos por idéias. Os românticos da matemática no começo do século temiam que um árido formalismo encorajado pelo logicismo se apoderasse do assunto. Pelos meados do século o feudo entre formalistas e intuicionistas tinha-se aquietado e Bourbaki não vê necessidade de tomar partido na controvérsia. "O que o método axiomático fixa como seu objetivo principal", ele escreve, "é exatamente o que o formalismo lógico por si não pode fornecer, ou seja, a inteligibilidade profunda da matemática"[43]. Na mesma linha de pensamento um dos líderes do grupo, geralmente considerado como um dos grandes matemáticos dos meados do século, escreveu que, "Se a lógica é a higiene da matemática, não é sua fonte de alimento"[44].

Poincaré observou uma vez que em matemática "os profetas da desgraça . . . os pessimistas, sempre foram forçados a recuar"; esse otimismo está presente na matemática de hoje. Weil, concordando com a visão de Hilbert, apontou para a multidão de problemas existentes como sinal seguro da vitalidade da matemática; do futuro ele diz: "O grande matemático do futuro, como o do passado, fugirá dos caminhos batidos. É por *rapprochements* inesperados, a que nossa imaginação não saberia como chegar, que ele resolverá, dando-lhes outro aspecto, os grandes problemas que nós lhe deixaremos de

[42]Paul R. Halmos, "Nicolas Bourbaki", *Scientific American*, **196** (Maio, 1957), 88-99

[43]Bourbaki, "The Architecture of Mathematics", *American Mathematical Monthly*, **57** (1950), 223

[44]André Weil, "The Future of Mathematics", *American Mathematical Monthly*, **57** (1950), 295-306; veja p. 297. É tradução de um artigo de *Les grands courants de la pensée mathématique*, editado por F. Le Lionnais (1948; nova edição 1962)

herança"[45]. Olhando para o futuro, Weil tem confiança em mais uma coisa: "No futuro, como no passado, as grandes idéias devem simplificar idéias"[46].

Pelo conhecimento do passado pode-se prever num sentido muito geral o que o futuro pode conter. Mas se há um elemento de verdade no aforismo "a história se repete", a história da matemática contudo mostrou que as "repetições" são tão variadas e imprevistas que impedem qualquer previsão significativa das coisas que estão para vir. Foi dito[47] que um gráfico representando o crescimento da ciência, incluindo a matemática, se aproxima de uma curva exponencial, e não é desarrazoado esperar que os desenvolvimentos futuros da matemática sigam essa curva. No entanto, loucura e sabedoria estão tão misturadas na sociedade humana que há agora uma possibilidade muito real de que a matemática do homem se torne um dia o instrumento de sua própria destruição.

BIBLIOGRAFIA

Alexandroff, Paul, *Elementary Concepts of Topology*, traduzido por Alexis N. Obolensky (New York: Frederick Ungar, 1965)

Bell, E. T., *The Development of Mathematics* (New York: McGraw-Hill, 1940)

Bernkopf, Michael, "The Development of Function Spaces with Particular Reference to Their Origins in Integral Equation Theory", *Archive for History of Exact Sciences*, **3** (1966), 1-96

Bernstein, Jeremy, *The Analytical Engine: Computers—Past, Presente and Future* (New York: Random House, 1963)

Beth, E. W., *The Foundations of Mathematics* (Amsterdam: North Holland, 1959)

Black, Max, *The Nature of Mathematics* (New York: Harcourt, Brace, 1933)

Bochenski, I. M., *A History of Formal Logic*, traduzido por Ivo Thomas (Notre Dame, Ind.: University of Notre Dame Press, 1961)

Bourbaki, N., "The Architecture of Mathematics", *American Mathematical Monthly*, **57** (1950), 221-232

Bourbaki, N., *Éléments d'histoire des mathématiques* (Paris: Hermann, 1960)

Delachet, André, *Contemporary Geometry*, traduzido por H. G. Bergmann (New York: Dover Publications, 1962)

Dieudonné, Jean, "Recent Developments in Mathematics", *The American Mathematical Monthly*, 71 (1964), 239-248

Enriques, F., *The Historic Development of Logic*, traduzido por J. Rosenthal (New York: Holt, Rinehart, 1929)

Hilbert, David, "Mathematical Problems", traduzido por Mary Winston Newson, no *Bulletin of the American Mathematical Society* (2), **8** (1902), 437-479

Hilbert, David, *Foundations of Geometry*, traduzido por E. J. Townsend, 2.ª edição (Chicago: Open Court, 1910)

Hilbert, David, *Gesammelte Abhandlungen* (Berlin: Springer, 1932-1935, 3 volumes)

King, Amy, C. e C. B. Read, *Pathways to Probability* (New York: Holt, Rinehart, 1963)

LaSalle, J. P., e S. Lefschetz, eds., *Recent Soviet Contributions to Mathematics* (New York: Macmillan, 1962)

Lebesgue, Henri, *Leçons sur l'intégration* (Paris: Gauthier-Villars, 1904)

Lebesgue, Henri, *Measure and the Integral*, editado por K. O. May (San Francisco: Holden-Day, 1966)

Lebon, Ernest, *Henri Poincaré, bibliographie analytique des écrits* (Paris: Gauthier-Villars, 1909)

Le Lionnais, F., ed. *Les grands courants de la pensée mathématique*, nova edição (Paris: Albert Blanchard, 1962)

Luchins, Abraham S., e Edith H. Luchins, *Logical Foundations of Mathematics for Behavioral Scientists* (New York: Holt, Rinehart, 1965)

Manheim, Jerome H., *The Genesis of Point Set Topology* (New York: Macmillan, 1964)

Nevanlinna, Rolf, "Reform in Teaching Mathematics", *American Mathematical Monthly*, **73** (1966), 451-464

Nörlund, N. E., "Correspondence de Henri Poincaré et de Felix Klein", *Acta Mathematica*, **39** (1923), 94-132

[45]"L'avenir des mathématiques" em *Les grands courants de la pensée mathématique*, editado por Le Lionnais (1962), pp. 307-320; veja p. 317

[46]"The Future of Mathematics", *American Mathematical Monthly*, **57** (1950), 304

[47]D. J. Price, *Science since Babylon* (New Haven, Conn.: Yale University Press, 1961), Cap. 5. Cf. K. O. May, "Quantitative Growth of the Mathematical Literature", *Science*, **154** (1966), 1672-1673

Picard, Émile, *Les sciences mathématiques en France depuis un demi-siècle* (Paris: Gauthier-Villars, 1917)
Pierpont, James, "Mathematical Rigor, Past and Present", *Bulletin of the American Mathematical Society*, 37 (1928), 23-53
Poincaré, Henri, *Oeuvres* (Paris: Gauthier-Villars, 1916-1956, 11 volumes)
Prasad, Ganesh, *Mathematical Research in the Last Twenty Years* (Berlin: Walter de Gruyter, 1923)
Russel, Bertrand, *Principles of Mathematics*, 2.ª edição (New York: Norton, 1938)
Stone, M. H., "The Revolution in Mathematics", *Liberal Education*, 47 (1961), 304-327
Volterra, Vito, e outros, *Henri Poincaré: l'oeuvre scientifique, l'oeuvre philosophique* (Paris: Alcan, 1914)
Weil, André, "The Future of Mathematics", *American Mathematical Monthly*, 57 (1950), 295-306
Weyl, Hermann, *Philosophy of Mathematics and Natural Science*, baseado numa tradução de Olaf Helmer (Princeton, N. J.: Princeton University Press, 1940)
Wilder, R. L., "The Origin and Growth of Mathematical Concepts," *Bulletin of the American Mathematical Society*, 59 (1953), 423-448

EXERCÍCIOS

1. Dê três definições ou descrições da matemática dos séculos dezenove e vinte, explicando qual prefere e por quê.

2. Descreva as idéias das três principais escolas de pensamento do século dezenove quanto aos fundamentos da matemática, mencionando uma ou duas figuras importantes de cada uma.

3. Descreva vários paradoxos e anomalias na matemática do século vinte, indicando seu significado.

4. Explique por que as distinções tradicionais entre álgebra e geometria se tornaram menos pronunciadas durante o século vinte. Que campo se desenvolveu mais rapidamente no século e por quê?

5. Os progressos da matemática se inspiraram mais na ciência e na tecnologia no século vinte que no dezenove? Explique.

6. Compare a influência sobre as atitudes matemáticas do teorema de Gödel com a da descoberta das grandezas incomensuráveis.

7. A taxa de crescimento das descobertas matemáticas está aumentando ou diminuindo durante o século vinte? Como você explica isso?

8. Os matemáticos gregos antigos hoje seriam classificados como formalistas, intuicionistas, ou logicistas? Explique.

9. Cite três matemáticos importantes, não nascidos nos Estados Unidos, que se tornaram membros do Institute for Advanced Study em Princeton (familiarmente conhecido como *Princetitute*) e descreva brevemente suas principais contribuições à matemática.

10. Mencione três aspectos em que a cidade francesa de Nancy esteve associada com matemáticos do século vinte.

11. Descreva algumas das contribuições da Polônia à matemática no intervalo entre as duas Guerras Mundiais.

12. Qual é a integral de Lebesgue em $[0, 1]$ da função $f(x)$ onde $f(x) = 1$ se x racional e $f(x) = 0$ se x irracional? Dê os motivos de sua resposta.

13. Mostre que o produto de duas transformações lineares fracionárias (em uma variável) é uma transformação linear fracionária.

14. Se uma transformação linear fracionária

$$z' = \frac{az + b}{cz + d}$$

satisfaz à condição $ad - bc = 1$, mostre que a transformação inversa também satisfaz a essa condição.

*15. Se cada uma de duas transformações lineares fracionárias satisfaz à condição no Exc. 14, mostre que o produto delas também satisfaz.

16. Quais dos números seguintes são, ao que se sabe, transcendentes: π^e, e^π, e^e, π^π, $(\sqrt{2})^e$, $\pi^{\sqrt{3}}$, $(\sqrt{2})^{\sqrt{3}}$, ln 1, tg $\pi/3$, i^i. Explique

*17. Prove que $\log_{10}3$ é irracional e use esse resultado e o teorema de Gelfond para mostrar que $\log_{10}3$ é transcendente. Quantos dos logaritmos comuns dos inteiros entre 1 e 10 inclusive são algébricos?

*18. Os três primeiros passos na definição da curva de von Koch ou do floco de neve são mostrados na Fig. 27.2. Ache o perímetro e a área da configuração correspondente ao quarto passo.

*19. O perímetro da curva de von Koch ou do floco de neve é infinito, mas a área limitada por ela é finita. Ache essa área.

Bibliografia geral

Archibald, R. C., *Outline of the History of Mathematics* (Buffalo: Slaught Memorial Papers of the Mathematical Association of America, 1949). Valioso especialmente por sua extensa bibliografia.
Ball, W. W. R., *A Short Account of the History of Mathematics* (Londres: Macmillan, 1888). Uma das mais populares histórias da matemática: apareceu em 6.ª edição em 1915 e foi reimpressa como brochura Dover em 1960. Obsoleta, mas ainda é interessante.
Ball, W. W. R., *Mathematical Recreations and Problems of Past and Present Times* (Londres: Macmillan, 1892). Muito popular; contém muito da história da matemática.
Bell, E. T., *Men of Mathematics* (New York: Simon and Schuster, 1937). Exposições biográficas muito bem escritas, assumem relativamente pouco conhecimento matemático.
Bell, E. T., *Development of Mathematics* (New York: McGraw-Hill, 1940). Excelente exposição, especialmente sobre a matemática moderna, para leitores de bom preparo matemático.
Bochner, Salomon, *The Role of Mathematics in the Rise of Science* (Princeton, N. J.: Princeton University Press, 1966). Não uma narrativa contínua, mas uma coleção de ensaios.
Bourbaki, Nicolas, *Éléments d'histoire des mathématiques* (Paris: Hermann, 1960). Não é uma história conexa, mas exposições sobre certos aspectos, especialmente de tempos modernos.
Braunmühl, Anton von, *Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie* (Leipzig: B. B. Teubner, 1900-1903, 2 volumes). Ainda o padrão no campo.
Cajori, Florian, *A History of Mathematics*, 2.ª edição (New York: Macmillan, 1919). A mais ambiciosa fonte em um volume em inglês.
Cajori, Florian, *A History of Mathematical Notations* (Chicago: Open Court, 1928-1929, 2 volumes). A obra definitiva sobre o assunto.
Cantor, Moritz, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* (Leipzig: Teubner, 1892-1908, 4 volumes). A mais extensa história da matemática publicada até hoje. Alguns volumes estão em 2.ª edição e a obra toda existe em reimpressão.
Carruccio, Ettore, *Mathematics and Logic in History and in Contemporary Thought*, traduzido por Isabel Quigly (Chicago: Aldine, 1964). Um apanhado geral eclético. Na bibliografia predominam autores italianos.
Chasles, Michel, *Aperçu historique sur l'origine et le développement des methodes en géométrie*, 2.ª edição (Paris, 1875). Obra clássica especialmente forte quanto à geometria sintética no começo do século dezenove.
Coolidge, J. L., *A History of Geometrical Methods* (Oxford: Clarendon, 1940). Excelente obra que pressupõe considerável conhecimento de matemático. Existe em brochura Dover de 1963.
Dickson, L. E., *History of the Theory of Numbers* (Washington, D. C.: Carnegie Intitution, 1919-1923). Definitivo em sua área. Existe em reimpressão, New York: Stechert, 1934.
Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées (Paris, 1904-1914). Isto é essencialmente uma tradução parcial de *Encyklopädie der mathematischen Wissenschsften* (Leipzig: Teubner, 1898-1935), mas a versão francesa contém muitas referências históricas adicionais.
Eves, Howard, *An Introduction to the History of Mathematics*, edição revista (New York: Holt, Rinehart and Winston, 1964). Texto notavelmente bem feito.
Gillespie, C. C., ed., *Dictionary of Scientific Bibliography* (a ser publicado em cerca de seis volumes por Charles Scribner's Sons, New York, começando em 1968).
Heath, T. L., *A History of Greek Mathematics* (Oxford: Clarendon, 1921, 2 volumes). A melhor exposição sobre o assunto em inglês. Existe em brochura, em forma um tanto abreviada como *A Manual of Greek Mathematics* (New York: Dover, 1963).
Hofman, J. E., *Geschichte der Mathematik* (Berlim: Walter de Gruyter, 1953-1957, 3 volumes; Vol. I nova edição, 1963). Os agradáveis volumes em tamanho de bolso contêm índices bibliográficos extraordinariamente úteis. Esses indices foram tragicamente omitidos na tradução em inglês que apareceu em dois volumes (New York: Philosophical Library, 1957-1959) sob os títulos *The History of Mathematics* e *Classical Mathematics*, o que tornou a tradução de utilidade muito limitada.
Itard, Jean e Pierre Dedron, *Mathématiques et mathématiciens* (Paris: Magnard, 1959). Elementar mas útil; contém extratos de fontes.
James, Glenn, e R. C. James, *Mathematics Dictionary*, 2.ª edição (Princeton, N. J.: D. Van Nostrand, 1959). Útil, mas não tão completo quanto Naas e Schmid.

Kaestner, A. G., *Geschichte der Mathematik* (Göttingen, 1796-1800, 4 volumes). Especialmente útil quanto à matemática prática e à ciência na Renascença.

Klein, Felix, *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert* (Berlim, 1926-1927, 2 volumes). Apanhado em alto nível, que ficou incompleto devido à morte do autor.

Kline, Morris, *Mathematics in Western Culture* (New York: Oxford, 1953). Agradavelmente escrito, em nível popular.

Klügel, G. S., *Mathematisches Wörterbuch* (Leipzig, 1803-1836, 7 volumes). Retrata a situação do campo um século e meio atrás.

Loria, Gino, *Storia delle matematiche* (Turim: Sten, 1929-1933, 3 volumes). Obra sólida e substancial. Segunda edição, Milan: U. Hoepli, 1950.

Marie, Maximilien, *Histoire des sciences mathématiques* (Paris, 1883-1888, 12 volumes). Não uma história sistemática, mas uma série de biografias dispostas em ordem cronológica e arrolando as obras principais de cada um.

Midonick, Henrietta O., ed., *The Treasury of Mathematics* (New York: Philosophical Library, 1965). Útil, mas a seleção dá ênfase a contribuições não-européias.

Montucla, J. E., *Histoire des mathématiques*, nova edição (Paris, 1799-1802, 4 volumes). Ainda útil, especialmente para aplicações da matemática à ciência. Existe reimpressão, Paris: A. Blanchard, 1960.

Moritz, R. E., *Memorabilia Mathematica or the Philomath's Quotation Book* (New York, 1914). Contém mais de duas mil citações, distribuídas por assunto e com um índice. Existe em brochura Dover sob o título *On Mathematics and Mathematicians*.

Muir, Thomas, *The Theory of Determinants in the Historical Order of Development* (Londres, 1906--1930, 4 volumes e suplemento). De longe a mais completa no campo. Existe reimpressão Dover.

Naas, Joseph, e H. L. Schmid, *Mathematisches Wörterbuch* (Berlim: Akademie, 1961, 2 volumes). Um dicionário absolutamente exemplar contendo número extraordinário de definições e biografias curtas.

Newman, James, ed., *The World of Mathematics* (New York: Simon e Schuster, 1956, 4 volumes). Contém muito material sobre história da matemática.

Read, C. B., "Articles on the History of Mathematics: A Bibliography of Articles Appearing in Six Periodicals". *School Science and Mathematics* (1959), 689-717. Especialmente útil quanto a material introdutório.

Sarton, George, *Introduction to the History of Science* (Baltimore: Carnegie Institution, 1927-1948, 3 volumes em 5). Obra monumental e instrumento indispensável na pesquisa da história da ciência e da matemática até 1400.

Sarton, George, *The Study of the History of Mathematics* (Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1936; New York: reimpressão em brochura Dover, 1957). Um guia breve mas útil. Veja também Sarton, *Horus: A Guide to the History of Science* (New York: Ronald Press, 1952)

Schaaf, W. L., *A Bibliography of Mathematical Education* (Forest Hills, N. Y.: Stevinus Press, 1941). Um índice de artigos em periódicos desde 1920, contendo mais de quatro mil itens.

Schaaf, W. L., *Recreational Mathematics: A Guide to the Literature*, 3.ª edição (Washington, D. C. National Council of Teachers of Mathematics, 1963). Contém entre duas e três mil referências a livros e artigos.

Scott, J. F., *A History of Mathematics* (Londres: Taylor and Francis, 1958). Bom quanto a matemáticos ingleses mas desatualizado quanto ao período pré-helênico.

Smith, D. E., *History of Mathematics* (Boston: Ginn, 1923-1925, 2 volumes; brochura Dover, New York, 1958). Ainda muito útil quanto a detalhes biográficos, especialmente datas de nascimento e morte, e para aspectos elementares da matemática.

Smith, D. E., *A Source Book in Mathematics* (New York: McGraw Hill, 1929; brochura Dover, New York, 1959, 2 volumes). Útil, mas a seleção está longe de ser ideal.

Struik, D. J., *A Concise History of Mathematics*, 3.ª edição (New York: Dover, 1967). Breve, mas merecedora de confiança e em nível muito erudito, com muitas referências.

Struik, D. J., *Source Book in Mathematics* (Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1968). Muito boa cobertura em álgebra, análise e geometria de 1200 a 1800.

Tannery, Paul, *Mémoires scientifiques* (Paris: Gauthier-Villars, 1912-1934, 13 volumes). Esses volumes contêm muitos artigos sobre história da matemática, especialmente da antiguidade grega e sobre o século dezessete, por uma das grandes autoridades no campo.

Taton, René, ed., *Histoire générale des sciences* (Paris: Presses Universitaires de France, 1957-1961, 3 volumes; tradução inglesa, New York: Basic Books, 1964-1965). Excelente exposição bem fundamentada.

Taylor, Eva, G. R., *The Mathematical Practitioners of ... England* (Cambridge: Cambridge University Press, 1954-1966, 2 volumes). Detalhes biográficos sobre pessoas de 1485 a 1840.

Todhunter, Isaac, *History of the Mathematical Theory of Probability from the Time of Pascal to that of Laplace* (Cambridge, 1865). Uma obra padrão e completa.

Tropfke, Johannes, *Geschichte der Elementar-Mathematik*, 2.ª edição (1921-1924, 7 volumes). Uma história importante para os ramos elementares. Alguns volumes apareceram numa 3.ª edição incompleta.

Van der Waerden, B. L., *Science Awakening*, traduzido por Arnold Dresden (New York: Oxford University Press, 1961). Uma exposição sobre a matemática grega e pré-helênica, com ilustrações atraentes. Existe uma edição em brochura (New York: Wiley, 1963).

Wieleitner, Heinrich, *Geschichte der Mathematik* (Parte II, de Descartes a cerca de 1800, Leipzig, 1911-1921, 2 volumes). Obra muito útil em nível matemático médio; não confundir com a Sammlung Göschen *Geschichte der Mathematik* do mesmo autor, mais breve, em dois volumes (Berlim, 1939).

Youschkevitch, A. P., *Geschichte der Mathematik im Mittelalter* (Leipzig: Teubner, 1964). Exposição substanciosa e com autoridade.

Zeller, Irmã Mary Claudia, *The Development of Trigonometry from Regiomontanus to Pitiscus* (Ann Arbor, Mich.: University of Michigan; Ph. D. Dissertation, 1944). O que há em inglês de mais parecido com uma história da trigonometria.

Zeuthen, H. G., *Geschichte der Mathematik im XVI und XVII Jahrhundert* (edição alemã, Leipzig: Teubner, 1903). Exposição sólida e útil.

Apêndice

Tabela cronológica

(As datas anteriores a –776 são apenas aproximações)

		5 000 000 000 000	Origem do sol
		–5 000 000 000	Origem da terra
		–600 000 000	Começo da Idade Paleozóica
		–225 000 000	Começo da Idade Mesozóica
		–60 000 000	Começo da Idade Cenozóica
		–2 000 000	Origem do homem
–50 000	Evidência de contagens	–50 000	Homem de Neanderthal
–25 000	Desenhos geométricos primitivos	–25 000	Arte paleolítica; Homem de Cro-Magnon
		10 000	Agricultura mesolítica
		5000	Civilizações neolíticas
–4241	Origem hipotética do calendário egípcio		
		4000	Uso de metais
		3500	Uso da roda de ceramista; escrita
–3000	Numerais hieroglíficos no Egito	–3000	Uso de veículos com rodas
		–2800	Grande pirâmide
–2773	Provável introdução do calendário egípcio		
–2400	Notação posicional na Mesopotâmia	–2400	Império sumério-acadiano
–1850	Papiro de Moscou (Golonishev); ciferização		
		–1800	Código de Hamurabi
		–1700	Domínio do Egito pelos hicsos; Stonehenge na Inglaterra
		–1600	Domínio cassita na Mesopotâmia; novo reinado no Egito
		1400	Catástrofe em Creta
		–1350	Alfabeto fenício, uso do ferro; relógios de sol e água
		–1200	Guerra de Tróia, Êxodo do Egito
–1100?	Chou Pei		
		–776	Primeira olimpíada
		–753	Fundação tradicional de Roma
		–743	Era de Nabonassar
		–740	Obras de Homero e Hesíodo (aprox.)
		–586	Cativeiro na Babilônia

−585 Tales de Mileto; geometria dedutiva (?)
−540 Aritmética e geometria pitagóricas (aprox.)
Numerais em barra, na China (aprox.)
Sulvasūtras na Índia (aprox.)

−450 Terra esférica de Parmênides (aprox.)
−430 Morte de Zeno; obras de Demócrito
Astronomia de Filolaus (aprox.)
Os elementos de Hipócrates de Chios (aprox.)

−428 Nascimento de Arquitas; morte de Anaxágoras
−427 Nascimento de Platão
−420 Trissetriz de Hípias (aprox.)
Incomensuráveis (aprox.)

−369 Morte de Teaetetus
−360 Eudoxo sobre proporção e exaustão (aprox.)
−350 Menaecmus sobre secções cônicas (aprox.)
Dinostrato sobre quadratriz (aprox.)

−335 Eudemus: *História da Geometria* (aprox.)

−330 Autólico: *Sobre a esfera móvel* (aprox.)

−320 Aristeu: *Cônicas* (aprox.)

−300 *Os elementos* de Euclides (aprox.)

−260 Astronomia heliocêntrica de Aristarco (aprox.)

−230 Crivo de Eratóstenes (aprox.)
−225 *As cônicas* de Apolônio (aprox.)

−538 Persas tomam a Babilônia
−480 Batalha das Termópilas
−477 Formação da Liga de Delos
−461 Começo da Idade de Péricles

−430 Hipócrates de Cos (aprox.)
Doutrina atômica (aprox.)

−429 Morte de Péricles; peste em Atenas

−404 Fim da Guerra do Peloponeso
−399 Morte de Sócrates; *Anabasis* de Xenofonte

−347 Morte de Platão

−332 Fundação de Alexandria

−323 Morte de Alexandre
−322 Morte de Aristóteles e de Demóstenes

−311 Começo da Era Selêucida na Mesopotâmia
−306 Ptolomeu I (Sóter) do Egito

−283 Faros em Alexandria
−264 Começa a Primeira Guerra Púnica

−232 Morte de Asoka, o "Constantino Budista"

−212 Morte de Arquimedes

−180 Cissóide de Diocles (aprox.)
Conchóide de Nicomedes (aprox.)
Hipsicles e círculo de 360° (aprox.)

−150 Espiras de Perseus (aprox.)

−140 Trigonometria de Hiparco (aprox.)

−60 Geminus sobre postulado das paralelas (aprox.)

+75 Obras de Heron de Alexandria (aprox.)

100 Nicômaco: *Aritmética* (aprox.)
Menelau: *Esferas* (aprox.)

125 Teon de Smirna e a matemática platônica
150 Ptolomeu: *O Almajesto* (aprox.)

250 Diofante: *Aritmética* (aprox.?)

320 Papus: *Coleções matemáticas* (aprox.)

390 Teon de Alexandria (evidência)
415 Morte de Hipatia

470 Tsu Ch'ung-Chi: valor de π (aprox.)
476 Nascimento de Aryabhata
485 Morte de Proclus

520 Antêmio de Tiales e Isidoro de Mileto
524 Morte de Boécios

529 Fechamento das escolas de Atenas

−210 Começa a grande muralha da China

−166 Revolta de Judas Macabeu

−146 Destruição de Cartago e Corinto

−121 Caio Graco é morto
−75 Cícero restaura o túmulo de Arquimedes
−60 Lucrécio: *De rerum natura*
−44 Morte de Júlio César

+79 Morte de Plínio o Velho no Vesúvio

116 Trajano amplia o Império Romano
122 Começa a muralha de Adriano na Inglaterra

180 Morte de Marco Aurélio

286 Divisão do Império por Diocleciano

324 Fundação de Constantinopla
378 Batalha de Adrianopla

455 Vândalos saqueiam Roma

476 Tradicional "queda" de Roma

496 Clovis adota o cristianismo

526 Morte de Teodorico
529 Fundação do mosteiro de Monte Cassino

		532	Construção de Hágia Sophia por Justiniano
560	Comentários de Eutócio sobre Arquimedes (aprox.)		
		590	Gregório, o Grande, é eleito papa
		622	Hejira de Maomé
628	Brahmasphuta siddhanta		
		641	Queimada a biblioteca de Alexandria
662	O bispo Sebokht menciona os numerais hindus		
		732	Batalha de Tours
735	Morte do Venerável Beda		
775	Obras hindus traduzidas para o árabe		
		814	Morte de Carlos Magno
830	Al-Khowarizmi: *Algebra* (aprox.)		
901	Morte de Thabit ibn-Qurra		
		910	Abadia beneditina em Cluny
		987	Ascensão de Hugo Capeto
998	Morte de abu'l-Wefa		
		999	Gerbert torna-se papa Silvestre II
		1028	Escola em Chartres
1037	Morte de Avicena		
1039	Morte de Alhazen		
1048	Morte de al-Biruni		
		1066	Batalha de Hastings
		1096	Primeira Cruzada
		1100	Henrique I da Inglaterra coroado
1114	Nascimento de Bhaskara		
1123	Morte de Omar Khayyam		
1142	Adelar de Bath traduz Euclides		
		1170	Assassinato de Thomas à Becket
1202	Fibonacci: *Liber abaci*		
		1204	Cruzados saqueiam Constantinopla
			Morte de Maimônides
		1215	Magna Carta
1260	Trissecção de Campanus (aprox.)		
	Jordanus Nemorarius: *Arithmetica* (aprox.)		
		1265	"Primeiro" parlamento na Inglaterra
1270	Wm. de Moerbeke traduz Arquimedes (aprox.)		
		1271	Viagens de Marco Polo; relógios mecânicos (aprox.)
1274	Morte de Nasir Eddin		
		1286	Invenção dos óculos (aprox.)
1303	Chu Shi-kié e o triângulo de Pascal		
1328	Bradwardine: *Liber de proportionibus*		
1336	Morte de Richard of Wallingford		
		1348	A Peste Negra
1360	Latitude de formas de Oresme (aprox.)		
		1364	Morte de Petrarca
		1431	Joana d'Arc é queimada
1436	Morte de al-Kashi		
		1440	Invenção da imprensa
		1453	Queda de Constantinopla
1464	Morte de Nicholas de Cusa		
1472	Peurbach: *Nova teoria dos planetas*		
		1473	Capela Sistina
1476	Morte de Regiomontanus		
1482	Primeira impressão de Euclides		
		1483	Assassinato dos príncipes na Torre
		1485	Henrique VII, primeiro Tudor
1489	Uso de + e − por Widmann		
1492	Uso do ponto decimal por Pellos	1492	Descoberta da América por Colombo
1494	Pacioli: *Summa*		
		1498	Execução de Savonarola
		1517	Reforma Protestante
		1520	Campo do Tecido de Ouro
1525	Rudolff: *Coss*		
1526	Morte de Scipione dal Ferro		
1527	Apian publica o triângulo de Pascal		
		1534	Ato de Supremacia
1543	Tartaglia publica o *Arquimedes* de Moerbeke	1543	Vesalius: *De fabrica*
	Copérnico: *De revolutionibus*		Ramus: *Reprovação de Aristóteles*
1544	Stifel: *Arithmetica integra*		
1545	Cardan: *Ars magna*		
		1553	Servetus queimado em Genebra
1557	Recorde: *Whetstone of Witte*		
		1558	Ascensão de Elizabeth I

1564 Nascimento de Galileu

1572 Bombelli: *Algebra*
1579 Viète: *Canon mathematicus*

1585 Stevin: *La disme*
Relato de Harriot sobre "Virginia"

1595 Pitiscus: *Trigonometria*

1603 Morte de Viète
1609 Kepler: *Astronomia nova*
1614 Logaritmos de Napier

1620 Logaritmos de Bürgi

1629 Método de máximos e mínimos de Fermat
1631 Harriot: *Artis analyticae praxis*
Oughtred: *Clavis mathematicae*
1635 Cavalieri: *Geometria indivisibilibus*

1637 Descartes: *Discours de la méthode*
1639 Desargues: *Brouillon projet*
1640 *Essay pour les coniques* de Pascal
1642 Nascimento de Newton; morte de Galileu

1647 Morte de Cavalieri e de Torricelli

1655 Wallis: *Arithmetica infinitorum*
1657 Neil retifica sua parábola
1658 Relógio de pêndulo cicloidal de Huygens

1564 Nascimento de Shakespeare; mortes de Vesalius e Miguelângelo
1572 Massacre de S. Bartolomeu

1584 Assassinato de Guilherme de Orange

1588 Drake derrota a armada espanhola

1598 Edito de Nantes
1603 Morte de Wm. Gilbert e de Elizabeth I
1609 Telescópio de Galileu

1616 Morte de Shakespeare e de Cervantes
1620 Desembarque dos Peregrinos
1626 Morte de Francis Bacon e de Willebrod Snell
1628 Harvey: *De motu cordis et sanguinis*

1636 Fundação da Universidade de Harvard

1643 Ascenção de Luiz XIV
1644 Barômetro de Torricelli

1649 Carlos I decapitado
1651 Hobbes: *Leviathan*
Bomba de ar de Von Guericke

1660 A Restauração
1662 Fundada a Royal Society
1666 Fundada a Académie des Sciences

1667 Gregory: *Geometriae pars universalis*
1668 Mercator: *Logarithmotechnia*
1670 Barrow: *Lectiones geometriae*
1672 Assassinato de De Witt
1678 Teorema de Ceva

1684 Primeiro artigo de Leibniz sobre Cálculo

1687 *Principia* de Newton

1690 Rolle: *Traité d'algèbre*
1696 Braquistocrona (Bernoullis)
Regra de l'Hospital

1706 Uso de π por William Jones

1715 Taylor: *Methodus incrementorum*
1718 De Moivre: *Doctrine of Chances*
1722 Cotes: *Harmonia mensurarum*
1730 Fórmula de Stirling
1731 Clairaut sobre curvas reversas
1733 Saccheri: *Euclides vindicatus*
1734 Berkeley: *The Analyst*

1742 Maclaurin: *Treatise of Fluxions*
1743 D'Alembert: *Traité de dynamique*
1748 Euler: *Introductio*; Agnesi: *Instituzioni*

1750 Regra de Cramer; elipse de Fagnano

1759 *Die freye Perspektive* de Lambert

1770 Trigonometria hiperbólica

1679 Habeas Corpus
1682 Fundada *Acta eruditorum*
1683 Sitio de Viena

1685 Revogação do Edito de Nantes

1689 A Revolução Gloriosa

1699 Morte de Racine
1702 Começo da Guerra da Rainha Anne

1711 Nascimento de Hume

1718 Termômetro de Fahrenheit

1730 Termômetro de Rèaumur

1737 Linnaeus: *Systema naturae*
1738 Daniel Bernoulli: *Hydrodynamica*
1740 Ascenção de Frederico, o Grande
1742 Termômetro centígrado

1749 Volume I da *Histoire naturelle* de Buffon

1751 Volume I da *Encyclopédie* de Diderot
1752 Pipa de Franklin

1767 Máquina a vapor aperfeiçoada de Watt

1777 Problema da agulha de Buffon
1779 Bézout sobre eliminação

1788 Lagrange: *Mécanique analytique*

1794 Legendre: *Éléments de géométrie*
1795 Monge: *Feuilles d'analyse*
1796 Laplace: *Système du monde*
1797 Lagrange: *Fonctions analytiques*
Mascheroni: *Geometria del compasso*
Wessel: *Essay on . . . direction*
Carnot: *Métaphysique du calcul*

1801 Gauss: *Disquisitiones arithmeticae*
1803 Carnot: *Géométrie de position*

1810 Volume I de *Annales* de Gergonne

1815 "The Analytical Society" em Cambridge
1817 Bolzano: *Rein analytischer Beweis*

1822 Poncelet: *Traité*; séries de Fourier; teorema de Feuerbach
1826 Fundado o *Journal* de Crelle
Princípio de dualidade (Poncelet, Plücker, Gergonne)
Funções elíticas (Abel, Gauss, Jacobi)
1827 Coordenadas homogêneas
(Möbius, Plücker, Feuerbach)
Cauchy: *Calcul des Residus*
1828 Green: *Electricity and Magnetism*
1829 Geometria de Lobachevsky
Morte de Abel aos 26 anos
1830 Peacock: *Algebra*

1774 Descoberta do oxigênio (Priestley, Scheele, Lavoisier)
1776 Declaracão de Independência Americana

1781 Descoberta de Uranus por Herschel
1783 Composição da água (Cavendish, Lavoisier)

1789 Revolução Francesa
1794 Lavoisier guilhotinado
1795 École Polytechnique; École Normale
1796 Vacinação (Jenner)

1799 Sistema métrico
1800 Pilha de Volta
1801 Descoberta de Ceres
1803 Teoria atômica de Dalton
1804 Napoleão coroado imperador

1814 Linhas de Fraunhofer
1815 Batalha de Waterloo
1817 Vibrações ópticas transversas (Young e Fresnel)
1820 Oersted descobre o eletromagnetismo

1826 Obra de Ampère em eletrodinâmica

1827 Lei de Ohm

1828 Síntese da uréia por Wöhler
1829 Morte de Thomas Young

1830 Lyell: *Principles of Geology*
Comte: *Cours de philosophie positive*

1832 Bolyai: *Ciência Absoluta do Espaço*
Morte de Galois aos 20 anos
1834 Steiner torna-se professor em Berlim
1836 Fundado o *Journal* de Liouville
1837 *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*

1843 Quatérnions de Hamilton
1844 Grassmann: *Ausdehnungslehre*

1847 Von Staudt: *Geometrie der Lage*

1852 Chasles: *Traité de géométrie supérieure*
1854 Habilitationschrift de Riemann
Boole: *Laws of Thought*
1855 Dirichlet sucede a Gauss em Göttingen

1863 Cayley nomeado em Cambridge
1864 Weierstrass nomeado em Berlim

1872 Dedekind: *Stetigkeit und irrationale Zahlen*
Heine: *Elemente*
Méray: *Nouveaux précis*
Klein: Erlanger Programm
1873 Hermite prova que *e* é transcendente
1874 *Mengenlehre de Cantor*

1877 Sylvester nomeado em Johns Hopkins
1881 Gibbs: *Vector Analysis*
1882 Lindemann prova que π é transcendente
1884 Frege: *Grundlagen der Arithmetik*

1888 Começos da American Mathematical Society

1831 Indução eletromagnética de Faraday
1832 Engenho analítico de Babbage

1836 Primeiro telégrafo

1842 Conservação da energia (Mayer e Joule)

1846 Descoberta de Netuno (Adams e Leverrier)
Uso da anestesia

1848 Marx: *Manifesto Comunista*
1850 Dickens: *David Copperfield*

1858 Cabo Atlântico
1859 Darwin: *Origin of Species*
Espectroscopia química (Bunsen e Kirchhoff)

1868 Descoberta das cavernas Cro-Magnon
1869 Abertura do Canal de Suez
Tabela periódica de Mendeleef

1873 Maxwell: *Electricity and Magnetism*

1876 Telefone de Bell

1887 Descoberta das ondas herzianas
1888 Fundado o Institut Pasteur

1889	Axiomas de Peano	1895	Descoberta dos raios X (Roentgen)
1895	Poincaré: *Analysis situs*	1896	Descoberta da radioatividade (Becquerel)
1896	Provado o teorema dos números primos (Hadamard e De la Vallée Poussin)	1897	Descoberta do electron (J. J. Thomson)
1899	Hilbert: *Grundlagen der Geometrie*	1898	Descoberta do radium (Marie Curie)
1900	Problemas de Hilbert	1900	Freud: *Die Traumdeutung*
	Volume I de Russell e Whitehead: *Principia*	1901	Teoria quântica de Planck
1903	Integração de Lebesgue	1903	Primeiro vôo com motor
1906	Cálculo funcional (Fréchet)	1905	Relatividade especial (Einstein)
1907	Brouwer e intuicionismo	1914	Assassinato do arquiduque austríaco
1914	Hausdorff: *Grundzüge der Mengenlehre*	1915	Abertura do Canal de Panamá
1916	Teoria geral da relatividade de Einstein	1917	Revolução Russa
1917	Hardy e Ramanujan sobre teoria dos números	1927	Lindbergh voa sobre o Atlântico
1923	Espaços de Banach	1928	Fleming descobre a penicilina
1930	Weyl sucede a Hilbert em Göttingen	1933	Hitler torna-se Chanceler
1931	Teorema de Gödel	1941	Pearl Harbor
1933	Weyl se demite de Göttingen	1945	Bombardeio de Hiroshima
1934	Teorema de Gelfond	1946	Primeira reunião da ONU
1939	Volume I de Bourbaki: *Éléments*	1963	Assassinato do Presidente Kennedy
1955	Álgebra homológica (Cartan e Eilenberg)	1965	Morte de Sir Winston Churchill
1963	Paul J. Cohen sobre a hipótese do continuum		
1966	15.º Congresso Internacional de Matemática (Moscou)		

Índice

Este trabalho foi elaborado pelo processo de FOTOCOMPOSIÇÃO **Monophoto** - no Departamento de Composição da Editora Edgard Blücher Ltda. - São Paulo - Brasil

impresso na
planimpress gráfica e editôra
rua anhaia, 247 - s.p.