

Introdução à história da matemática



UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Reitor

FERNANDO FERREIRA COSTA

Coordenador Geral da Universidade

EDGAR SALVADORI DE DECCA

EDITORA
UNICAMP

Conselho Editorial

Presidente

PAULO FRANCHETTI

ALCIR PÉCORÁ – CHRISTIANO LYRA FILHO

JOSÉ A. R. GONTIJO – JOSÉ ROBERTO ZAN

MARCELO KNOBEL – MARCO ANTONIO ZAGO

SEDI HIRANO – SILVIA HUNOLD LARA

Howard Eves

*Introdução
à história da matemática*

TRADUÇÃO

Hygino H. Domingues

Grafia atualizada segundo o Acordo Ortográfico da Língua Portuguesa de 1990. Em vigor no Brasil a partir de 2009.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELO
SISTEMA DE BIBLIOTECAS DA UNICAMP
DIRETORIA DE TRATAMENTO DA INFORMAÇÃO

Eves, Howard
Ev 28i Introdução à história da matemática / Howard Eves; tradução Hygino H. Domingues. 5ª ed. – Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.

1. Matemática – História. I. Título.

ISBN 85-268-0657-2

20 CDD 510.9

Índices para catálogo sistemático:

1. Matemática – História

510.9

Copyright © by Howard Eves
Copyright © 2011 by Editora da Unicamp

1ª edição, 1995
2ª edição, 1997
3ª edição, 2002
4ª edição, 2004

Nenhuma parte desta publicação pode ser gravada, armazenada em sistema eletrônico, fotocopiada, reproduzida por meios mecânicos ou outros quaisquer sem autorização prévia do editor.

Editora da Unicamp
Rua Caio Graco Prado, 50 – Campus Unicamp
CEP 13083-892 – Campinas – SP – Brasil
Tél./Fax: (19) 3521-7718/7728
www.editora.unicamp.br – vendas@editora.unicamp.br

À MIMSE

*Por incontáveis recordações encantadoras
de coisas como tomar sorvete juntos no
meio de um lago, debaixo de chuva.*

Sumário

Prefácio.....	13
Introdução.....	17
PRIMEIRA PARTE: ANTES DO SÉCULO XVII	
Panorama Cultural I: Os caçadores das savanas..... (<i>A Idade da Pedra</i>)	22
1 SISTEMAS DE NUMERAÇÃO.....	25
1-1 Contagem primitiva; 1-2 Bases; 1-3 Números digitais e números escritos; 1-4 Sistemas de agrupamentos simples; 1-5 Sistemas de agrupamentos multiplicativos; 1-6 Sistemas de numeração cifrados; 1-7 Sistemas de numeração posicionais; 1-8 Computação primitiva; 1-9 O Sistema de numeração indo-arábico; 1-10 Bases arbitrárias.	
EXERCÍCIOS.....	44
TEMAS.....	49
BIBLIOGRAFIA.....	49
Panorama Cultural II: A Revolução Agrícola..... (<i>Os berços da civilização</i>)	52
2 A MATEMÁTICA BABILÔNICA E EGÍPCIA.....	57
2-1 O Oriente antigo; 2-2 BABILÔNIA: Fontes; 2-3 Matemática agrária e comercial; 2-4 Geometria; 2-5 Álgebra; 2-6 <i>Plimpton 322</i> ; 2-7 EGITO: Fontes e datas; 2-8 Aritmética e álgebra; 2-9 Geometria; 2-10 Um curioso problema do papiro Rhind.	
EXERCÍCIOS.....	77
TEMAS.....	88
BIBLIOGRAFIA.....	88

Panorama Cultural III: Os filósofos da <i>Ágora</i>	90
(<i>Grécia Helênica</i>)	
3 A MATEMÁTICA PITAGÓRICA.....	94
3-1 O berço da matemática demonstrativa; 3-2 Pitágoras e os pitagóricos; 3-3 Aritmética pitagórica; 3-4 O teorema de Pitágoras e os ternos pitagóricos; 3-5 A descoberta das grandezas irracionais; 3-6 Identidades algébricas; 3-7 Resolução geométrica de equações quadráticas; 3-8 Transformação de áreas; 3-9 Os sólidos regulares 3-10 O raciocínio postulacional.	
EXERCÍCIOS.....	115
TEMAS	126
BIBLIOGRAFIA	127
4 DUPLICAÇÃO, TRISSECÇÃO E QUADRATURA.....	129
4-1 O período de Tales a Euclides; 4-2 Linhas de desenvolvimento matemático; 4-3 Os três famosos problemas; 4-4 Os instrumentos de Euclides; 4-5 Duplicação do cubo; 4-6 Trissecção do ângulo; 4-7 Quadratura do círculo; 4-8 Cronologia de π .	
EXERCÍCIOS.....	149
TEMAS	159
BIBLIOGRAFIA	159
Panorama Cultural IV: O <i>oikoumene</i>	161
(<i>O Império Persa, A Grécia Helenística, O Império Romano</i>)	
5 EUCLIDES E SEUS ELEMENTOS	166
5-1 Alexandria; 5-2 Euclides; 5-3 Os “Elementos” de Euclides; 5-4 O conteúdo dos “Elementos”; 5-5 A teoria das proporções; 5-6 Polígonos regulares; 5-7 Aspectos formais dos “Elementos”; 5-8 Outros trabalhos de Euclides.	
EXERCÍCIOS.....	181
TEMAS	189
BIBLIOGRAFIA	189

6	A MATEMÁTICA GREGA DEPOIS DE EUCLIDES	191
	6-1 Cenário histórico; 6-2 Arquimedes; 6-3 Eratóstenes;	
	6-4 Apolônio; 6-5 Hiparco, Menelau, Ptolomeu e a trigonometria	
	grega; 6-6 Herão; 6-7 Álgebra grega antiga; 6-8 Diofanto;	
	6-9 Pappus; 6-10 Os comentadores.	
	EXERCÍCIOS.....	213
	TEMAS	231
	BIBLIOGRAFIA	232
	 Panorama Cultural V: Os impérios asiáticos	234
	<i>(China, Índia e a ascensão do Islamismo)</i>	
7	A MATEMÁTICA CHINESA, HINDU E ÁRABE	241
	7-1 CHINA: Fontes e períodos; 7-2 Do Shang ao Tang; 7-3 Do Tang	
	através do Ming; 7-4 Observações finais; 7-5 ÍNDIA: Visão geral;	
	7-6 Cálculos numéricos; 7-7 Aritmética e álgebra 7-8 Geometria e	
	trigonometria; 7-9 Confronto entre a matemática grega e a hindu;	
	7-10 ARÁBIA: A ascensão da cultura muçulmana; 7-11 Aritmética	
	e álgebra; 7-12 Geometria e trigonometria; 7-13 Alguma etimologia;	
	7-14 A contribuição árabe.	
	EXERCÍCIOS.....	267
	TEMAS	279
	BIBLIOGRAFIA	280
	 Panorama Cultural VI: Servos, senhores e papas	282
	<i>(A Idade Média europeia)</i>	
8	A MATEMÁTICA NA EUROPA, DE 500 A 1600	289
	8-1 A Alta Idade Média; 8-2 O período de transmissão;	
	8-3 Fibonacci e o século XIII; 8-4 O século XIV; 8-5 O século XV;	
	8-6 As primeiras aritméticas; 8-7 O início do simbolismo algébrico;	
	8-8 Equações cúbicas e quárticas; 8-9 François Viète;	
	8-10 Outros matemáticos do século XVI.	
	EXERCÍCIOS.....	314
	TEMAS	329
	BIBLIOGRAFIA	330

SEGUNDA PARTE: DO SÉCULO XVII EM DIANTE	
Panorama Cultural VII: Puritanos e lobos do mar 334 (<i>A expansão da Europa</i>)	
9 A ALVORADA DA MATEMÁTICA MODERNA..... 340	
9-1 O século XVII; 9-2 Napier; 9-3 Logaritmos; 9-4 As cátedras de Henry Savile e Henry Lucas; 9-5 Harriot e Oughtred; 9-6 Galileu; 9-7 Kepler; 9-8 Desargues; 9-9 Pascal.	
EXERCÍCIOS..... 366	
TEMAS 379	
BIBLIOGRAFIA 379	
10 A GEOMETRIA ANALÍTICA E OUTROS	
DESENVOLVIMENTOS PRÉ-CÁLCULO 382	
10-1 Geometria analítica; 10-2 Descartes;- 10-3 Fermat; 10-4 Roberval e Torricelli; 10-5 Huygens; 10-6 Alguns matemáticos franceses e italianos do século XVII; 10-7 Alguns matemáticos da Alemanha e dos Países Baixos no século XVII; 10-8 Alguns matemáticos britânicos do século XVII.	
EXERCÍCIOS..... 405	
TEMAS 414	
BIBLIOGRAFIA 414	
11 O CÁLCULO E CONCEITOS RELACIONADOS 417	
11-1 Introdução; 11-2 Paradoxos de Zenão; 11-3 O método de exaustão de Eudoxo; 11-4 O método de equilíbrio de Arquimedes; 11-5 Primeiros passos da integração na Europa Ocidental; 11-6 O método dos indivisíveis de Cavalieri; 11-7 Os primeiros passos da diferenciação; 11-8 Wallis e Barrow; 11-9 Newton; 11-10 Leibniz.	
EXERCÍCIOS..... 445	
TEMAS 452	
BIBLIOGRAFIA 453	

Panorama Cultural VIII: A revolta da classe média.....	456
<i>(A Europa e a América no século XVIII)</i>	
12 O SÉCULO XVIII E A EXPLORAÇÃO DO CÁLCULO	461
12-1 Introdução e justificativa; 12-2 A família Bernoulli;	
12-3 De Moivre e a probabilidade; 12-4 Taylor e Maclaurin;	
12-5 Euler; 12-6 Clairaut, d'Alembert e Lambert; 12-7 Agnesi e	
du Châtelet; 12-8 Lagrange; 12-9 Laplace e Legendre;	
12-10 Monge e Carnot; 12-11 O sistema métrico; 12-12 Resumo.	
EXERCÍCIOS.....	495
TEMAS	510
BIBLIOGRAFIA	511
Panorama Cultural IX: A revolução industrial	514
<i>(O século XIX)</i>	
13 AS PRIMEIRAS DÉCADAS DO SÉCULO XIX E A	
LIBERTAÇÃO DA GEOMETRIA E DA ÁLGEBRA.....	519
13-1 O príncipe dos matemáticos; 13-2 Germain e Somerville;	
13-3 Fourier e Poisson; 13-4 Bolzano; 13-5 Cauchy; 13-6 Abel e Galois;	
13-7 Jacobi e Dirichlet; 13-8 Geometria não Euclidiana; 13-9 A libertação	
da geometria; 13-10 A emergência de estruturas algébricas;	
13-11 A libertação da álgebra; 13-12 Hamilton, Grassmann,	
Boole e De Morgan; 13-13 Cayley, Sylvester e Hermite;	
13-14 Academias, sociedades e periódicos.	
EXERCÍCIOS.....	566
TEMAS	580
BIBLIOGRAFIA	581
14 AS DÉCADAS POSTERIORES DO SÉCULO XIX E A	
ARITMETIZAÇÃO DA ANÁLISE	585
14-1 Sequência de Euclides; 14-2 Impossibilidade da resolução dos	
três problemas famosos com instrumentos euclidianos; 14-3 Compasso	
ou régua apenas; 14-4 Geometria projetiva; 14-5 Geometria analítica;	
14-6 Geometria n -dimensional; 14-7 Geometria diferencial;	
14-8 Felix Klein e o programa de Erlanger; 14-9 A aritmetização da análise;	
14-10 Weierstrass e Riemann; 14-11 Cantor, Kronecker e Poincaré;	
14-12 Sonja Kovalevsky, Emmy Noether e Charlotte Scott;	
14-13 Os números primos.	

EXERCÍCIOS.....	625
TEMAS	648
BIBLIOGRAFIA	648
Panorama Cultural X: O átomo e a roda de fiar.....	652
(O século XX)	
15 NO SÉCULO XX	655
15-1 Deficiências lógicas dos Elementos de Euclides; 15-2 Axiomática;	
15-3 Evolução de alguns conceitos básicos; 15-4 Números transfinitos;	
15-5 Topologia; 15-6 Lógica matemática; 15-7 Antinomias da teoria	
dos conjuntos; 15-8 Filosofias da matemática; 15-9 Computadores;	
15-10 A matemática moderna e o grupo Bourbaki; 15-11 A árvore da	
matemática; 15-12 E doravante?	
EXERCÍCIOS.....	696
TEMAS	714
BIBLIOGRAFIA	715
BIBLIOGRAFIA GERAL	724
TABELA CRONOLÓGICA.....	729
RESPOSTAS E SUGESTÕES PARA A RESOLUÇÃO DE EXERCÍCIOS.....	742
ÍNDICE REMISSIVO	780

Prefácio

Esta edição sem dúvida ganhou muito com a inclusão de um grande número de aprimoramentos, desde ampliações e atualizações históricas até a introdução de algumas novas seções e a expansão de outras que já existiam. Acrescentou-se muito material ilustrativo novo e se deu às mulheres uma atenção mais digna de sua importância.

É bem provável que não haja uma seção sequer dos 15 capítulos do livro que não tenha sofrido alguma ampliação ou atualização. Esses melhoramentos são tão numerosos que seria demais citar todos aqui. Dentre as mudanças maiores, cumpre mencionar uma expansão considerável da discussão do conteúdo dos *Elementos* de Euclides no Capítulo 5, o tratamento completo da matemática chinesa no Capítulo 7, a abordagem dos logaritmos no Capítulo 9, uma seção inteiramente nova sobre Maria Agnesi e a Marquesa du Châtelet no Capítulo 12, um balanço sobre as contribuições de Argand e Wessel à representação geométrica dos números complexos no Capítulo 13, uma nova seção no Capítulo 13 dedicada a Sophie Germain e Mary Somerville, outra seção nova no Capítulo 13 dedicada a Bolzano, uma ampliação considerável no Capítulo 13 do material sobre a libertação da geometria no século XIX, uma reformulação completa da seção sobre geometria diferencial no Capítulo 14, a inclusão do material sobre Grace Chisholm e Charlotte Scott no Capítulo 14 e uma nova seção de encerramento do livro dedicada a prognosticar o futuro da matemática.

Constituem um acréscimo muito significativo ao livro os Panoramas Culturais escritos por Jamie Eves. Na verdade eles vêm atender a solicitações de usuários de edições anteriores do livro para os quais um aprofundamento do cenário cultural das várias eras e épocas da história da matemática traria muitos benefícios para os alunos. Um aluno avisado deverá ler com atenção cada Panorama Cultural antes de se enfiar no material histórico do capítulo associado.

Quanto a ilustrações, acrescentaram-se 10 novas peças de material pictórico e 16 novas fotografias de matemáticos (totalizando agora 76). Finalmente, a bibliografia foi atualizada de maneira considerável.

O leitor que deseje descrições mais detalhadas dos vários aspectos do livro poderá consultar a Introdução que precede imediatamente o Capítulo 1.

Como das edições anteriores, é com prazer que outra vez expresso minha satisfação com a calorosa acolhida que o livro obteve junto aos professores em geral. Desejo agradecer em especial aos que se preocuparam escrevendo-me palavras de encorajamento e enviando-me sugestões para posteriores melhoramentos no livro. Cada nova edição deste trabalho tem levado grandemente em conta uma seleção organizada dessas sugestões.

Há muitas outras pessoas que foram particularmente úteis. Entre elas estão Duane E. Deal da Universidade Estadual de Bali, Florence D. Fasanelli da Escola Sidwell Friends, David E. Kullman da Universidade de Miami e Gregorio Fuentes da Universidade de Maine, cada um deles responsável por valiosas sugestões visando o aprimoramento do texto. Gostaria de agradecer em especial ao professor Deal que, dedicadamente, não poupou tempo para me oferecer material de alto nível com vistas a enriquecer diversas partes do livro. Não poderia deixar de registrar as recomendações oportunas e o material de valor sobre a matemática da China antiga que nos foram enviados por Ouyang Jiang e Zhang Liangjin. A livraria e a biblioteca da Universidade de Maine em Machias e o Serviço de Informações Bibliográficas da Universidade de Maine em Orono foram de grande utilidade.

É com satisfação especial que agradeço ao meu filho Jamie H. Eves por ter valorizado o livro com os Panoramas Culturais. Foi uma grande vantagem poder contar com a colaboração de sua cultura ampla, profunda e entusiástica no campo da história.

Deixo, por fim, meu reconhecimento sincero à eficiente equipe da Editora Universitária Saunders por sua ajuda e cooperação excelentes.

Fox Hollow, Lubec, Maine
Verão, 1989

H. E.

INTRODUÇÃO À HISTÓRIA
DA MATEMÁTICA

Introdução

Este livro difere das muitas histórias da matemática existentes por não se tratar primordialmente de um trabalho de prateleira para consulta, mas sim de uma tentativa de *introduzir* a história da matemática aos alunos de graduação dos cursos superiores de matemática. Assim sendo, além da narrativa histórica, há muitos expedientes pedagógicos visando assistir, motivar e envolver o aluno. Descrevamos alguns desses expedientes e comentemos algumas características do livro.

1. Acreditando que um curso superior de história da matemática deve, antes de nada, ser um curso de *matemática*, fez-se um esforço para incluir um montante considerável de matemática genuína no livro. Espera-se que o estudante, ao usar este livro, aprenda muita matemática, além de história.

2. Entre os expedientes pedagógicos do livro, talvez os Exercícios* arrolados ao fim de cada capítulo representem o mais importante. Cada Exercício contém vários problemas e questões relacionados entre si e concernentes a alguma parte do material ligado ao capítulo. Parte-se do pressuposto de que, discutindo muitos desses Exercícios em aula e passando outros tantos para serem trabalhados em casa, o curso se tornará mais concreto e significativo para o estudante, posto que essas atividades levarão à cristalização de muitos conceitos historicamente importantes. Por exemplo, o estudante pode atingir um entendimento e uma apreciação melhores dos sistemas de numeração trabalhando efetivamente com os sistemas. Também, em vez de apenas ler que os gregos antigos resolviam equações quadráticas geometricamente, ele pode resolver algumas delas pelo método grego e, em fazendo isso, chegar a uma apreciação mais profunda das realizações da matemática grega. Alguns dos Exercícios dizem respeito a problemas e procedimentos historicamente importantes, outros fornecem material de valor para futuros professores da escola secundária ou superior e outros ainda têm finalidade meramente recreativa, havendo inclusive alguns com o papel de servir de subsídio a pesquisas de iniciação científica. Um grande número de professores de *high-schools*** e de faculdades tem usado o material desses Exercícios para, ao mesmo tempo, tornar mais interessantes e mais robustos os cursos que ministram. Esses Exercícios têm sido usados também, e amplamente,

* No original "Problem Studies", cuja tradução literal mais correta talvez fosse "Estudos de Problemas". Optamos pela tradução "Exercícios" mas fica o registro do caráter especial desse expediente pedagógico no texto presente. (N. T.)

** Fase escolar nos Estados Unidos que corresponde, aproximadamente, ao nosso segundo grau. (N. T.)

por centros estudantis ligados a cursos superiores de matemática; e muitos alunos os têm usado para desenvolver atividades com vistas a feiras de matemática promovidas pelas *high-schools*.

3. Há bem mais Exercícios do que se poderia abarcar em um ou dois semestres, e seu grau de dificuldade é bastante diversificado. Isso permite ao professor selecionar problemas e questões que se ajustem à capacidade de seus alunos e mudar as tarefas de ano para ano.

4. Ao fim do livro encontra-se um conjunto de dicas e sugestões para a resolução de muitos Exercícios. Espera-se que elas não sejam tão amplas a ponto de roubar o prazer da resolução. Um bom exercício, além de fugir ao rotineiro, deve ser instigante e não muito fácil de resolver e ele deve exigir, inclusive, tempo para elucubrações.

5. É interessante registrar que, com base no conceito de que os problemas constituem o âmago da matemática¹, já se deram cursos em faculdades baseados tão somente nos Exercícios deste livro.

6. Muitos professores de história da matemática gostam de passar temas a serem desenvolvidos como trabalhos por seus alunos; por isso, ao fim de cada capítulo, logo após os Exercícios, se dá uma lista de Temas relacionados com o material coberto naquela unidade. Trata-se de simples sugestões, uma vez que nenhum professor teria dificuldades em elaborar, por si próprio, uma lista até mais ampla. Cada Tema desses deverá exigir, para ser desenvolvido, outras leituras afora a deste texto; o aluno poderá então achar necessário se aprofundar na literatura arrolada na Bibliografia do capítulo. Muitos desses temas redundaram em excelentes artigos, havendo diversos deles, escritos por alunos, que mereceram publicação em jornais matemáticos e pedagógicos.

7. É um axioma que a história de uma determinada matéria não pode ser devidamente apreciada sem que se tenha pelo menos um razoável conhecimento da própria matéria². Consequentemente, houve um empenho no sentido de explicar o material focalizado, especialmente nos últimos capítulos, quando ele se torna mais avançado. Essa é uma das maneiras de um aluno principiante poder aprender um volume considerável de matemática, assim como de história, a partir do estudo deste livro.

8. Perceber-se-á que os conceitos definidos no texto são colocados em destaque apresentando-os em *negrito*.

¹ Ver P. R. Halmos, "The heart of mathematics", *The American Mathematical Monthly*, nº 87, 1980, pp. 519-24.

² É interessante e pertinente que, reciprocamente, seja impossível uma apreciação verdadeira de um ramo da matemática sem algum conhecimento da história desse ramo, pois a matemática é, em grande parte, um estudo de ideias, e uma compreensão autêntica das ideias não é possível sem uma análise de suas origens. Um exemplo particularmente óbvio dessa observação é o estudo da geometria não euclidiana. Com muita propriedade J. W. L. Glaisher disse: "Estou certo de que nenhuma matéria perde tanto quanto a matemática ao se dissociá-la de sua história".

9. Apresenta-se o material histórico em ordem essencialmente cronológica, com desvios eventuais determinados por considerações pedagógicas e lógicas ou pela vontade de alguns leitores e professores. Em alguns lugares onde poderia ser desejável um desenvolvimento cronológico mais direto, há sinalizações claras a respeito juntamente com instruções de como proceder para rearranjar a sequência dos assuntos.

10. O leitor perceberá que um conhecimento básico da aritmética, da álgebra, da geometria e da trigonometria do primeiro e segundo graus é, em geral, suficiente para uma compreensão adequada dos primeiros nove capítulos. Para o Capítulo 10 é necessário conhecer os rudimentos da geometria analítica plana, assim como é preciso conhecer os conceitos básicos do cálculo para os capítulos seguintes (11 a 15). Espera-se que os conceitos e desenvolvimentos de natureza mais avançada envolvidos no livro estejam suficientemente explicados nos pontos onde são introduzidos. É desejável um certo grau de maturidade matemática, e se nove, dez, onze ou todos os quinze capítulos serão cobertos, depende da quantidade de aulas e da preparação prévia dos alunos. Quanto a isso, os Exercícios formam um elemento elástico, pois eles poderão ser explorados (incluídos ou omitidos) segundo os ditames da conveniência e do tempo.

11. Positivamente, não é fácil cobrir a história da matemática desde a Antiguidade até os tempos modernos num curso semestral de três horas-aula semanais; isso requeria muita leitura por parte do aluno e um desprezo quase que completo do problema material. O ideal seria oferecer-se um curso anual sobre o assunto, desenvolvendo-se no primeiro semestre a Parte 1 (os primeiros oito capítulos) ou a Parte 1 juntamente com alguns tópicos escolhidos dos Capítulos 9, 10 e 11, e no segundo semestre a Parte 2 ou o material restante. Os alunos mais avançados de um bacharelado em matemática poderiam cursar os dois semestres; para um aluno de licenciatura em matemática poderia ser suficiente cursar apenas o primeiro semestre.

12. A história da matemática é tão vasta que apenas uma *introdução* à matéria é possível em nível de graduação, mesmo num curso anual. Em vista disso anexou-se a cada capítulo, em seu final, uma bibliografia referente ao material desse capítulo. A Bibliografia Geral, que segue imediatamente o último capítulo, envolve todos, ou quase todos, os capítulos. Deve-se observar que a Bibliografia Geral, a despeito de ser extensa, não tem a pretensão de ser completa; ela foi elaborada tão somente como ponto de partida para uma busca de material suplementar. Fornecem-se no livro, em locais apropriados e em notas de rodapé, muitas referências de periódicos. Perto do final da Bibliografia Geral há uma fonte excelente de referências de periódicos; são muito numerosas as referências dessa espécie e um aluno curioso logo as encontrará.

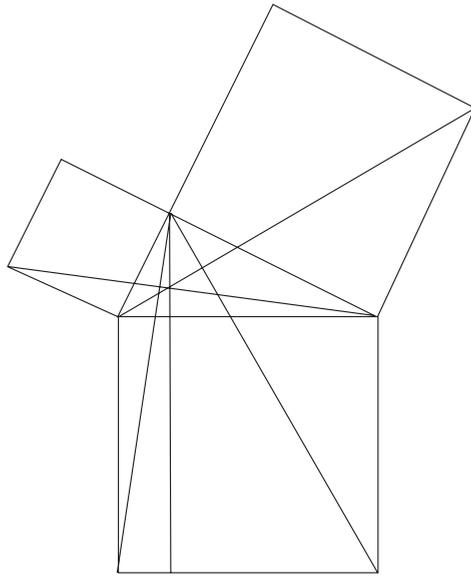
13. Uma grande armadilha para quem escreve um livro como este é a inclusão de mais material do que poderia ser coberto e/ou assimilado dentro dos limites de tempo do curso; um escritor simplesmente conhece bastante sobre seu campo. Não é fácil alcançar o delicado equilíbrio entre um tratamento muito breve e um outro muito extenso — a melhor maneira de se conseguir isso talvez seja através da experiência didática. Ninguém está mais inteirado do que o autor sobre aqueles muitos tópicos que, devido aos objetivos em vista e à clientela do livro, devem merecer menos importância ou até ser suprimidos. Se um professor sentir profundamente que certo material omitido

deveria ser incluído em seu curso, que o introduza sem hesitações caso tenha condições para tanto. Um livro-texto não deve ter a pretensão de substituir o professor ou de interferir no ensino criativo; ele serve apenas como um instrumento de ajuda.

14. Os Panoramas Culturais de autoria de Jamie H. Eves podem ser incluídos ou omitidos à escolha do professor. Eles foram inseridos no texto para atender à expectativa daqueles que sentem que a matemática não se desenvolve no vácuo. Como alguns professores podem preferir deixar de lado os Panoramas Culturais, algo do material que neles figura se repete no texto propriamente dito.

PARTE I

ANTES DO SÉCULO XVII



Panorama Cultural

Os caçadores das savanas

A Idade da Pedra — c. 5 milhões-3000 a.C.
(Para acompanhar o Capítulo 1)

Os primeiros povos viviam da caça de pequenos animais selvagens e das frutas, castanhas e raízes que colhiam. Habitavam, em geral, os espaços abertos das savanas, verdadeiros oceanos de uma erva alta que cobria a maior parte das porções habitáveis da África, sul da Europa, sul da Ásia e América Central. Eram nômades e constantemente se deslocavam de um lugar para outro à procura de alimento e em resposta às mudanças climáticas. Sua cultura era forjada no cadinho de um mundo duro e hostil onde a busca do alimento era uma constante indeclinável. Tudo tinha que se adaptar à caça: seus instrumentos de pedra, madeira, osso e carapaça de animais eram desenhados ou para a caça ou para a preparação de alimentos; o fogo, que dominaram, era usado para cozer e para o aquecimento; sua arte retratava cenas de caçadas; sua religião era uma tentativa tímida de entender e submeter a imensidão rude que os cercava e apenas obscuramente se prendia à ideia de destino final.

Não sabemos ao certo quando a Idade da Pedra começou. Talvez já uns 5 milhões de anos antes de Cristo, quando o *Australopithecus*, um “quadrúpede em pé” ancestral do homem, que viveu na África, pôs-se a construir machados e facas de pedra toscos, golpeando um seixo contra outro. Certamente por volta de 400 000 a.C. o *Homo erectus* na China já construía rotineiramente machados, facas e raspadeiras de pedra. O *Homo erectus* também procurou abrigo das temperaturas que castigavam as savanas em cavernas perto da atual Pequim, um avanço que teve continuidade com seu primo, o *Homo neanderthalensis*, que viveu na Europa e no Oriente Médio entre aproximadamente 110 000 a.C. e 35 000 a.C. O *Homo neanderthalensis* aquecia suas cavernas com fogo e cozia os animais que capturava nas savanas. Preservou registros de suas caçadas em pinturas murais elegantes e detalhadas. Por volta de 30 000 a.C. o *Homo sapiens* (o novo homem) substituiu as moradias em cavernas por estruturas móveis — barracas de peles de animais com cobertura de madeira — que podia levar consigo nas caçadas. Pela mesma época começou a esculpir estatuetas da fertilidade e outros ícones religiosos em pedra.

Não se pode precisar com exatidão o fim da Idade da Pedra. Algumas culturas persistiram na Idade da Pedra em algumas partes do mundo até o século XIX ou XX. Quando os conquistadores europeus chegaram ao sul da África, à Austrália e

às Américas entre os séculos XVI e XVII a maior parte dos povos que encontraram vivia na Idade da Pedra. Em meados do século XX alguns caçadores chegaram por acaso aos Tasadays, uma tribo até então “não descoberta” e que vivia embrenhada no interior das florestas de uma das ilhas do arquipélago das Filipinas ao nível de Idade da Pedra. Por uma convenção histórica, porém, costuma-se situar o fim da Idade da Pedra aproximadamente em 3000 a.C. quando no Oriente Médio, na Índia e na China emergiram cidades com culturas capazes de fundir metais.

Como todas as épocas históricas, a Idade da Pedra não foi estática. A sociedade e a cultura foram mudando com o tempo para adaptar-se a um mundo em transição. Os historiadores esquematizam essas mudanças dividindo a Idade da Pedra em três períodos. Durante o Paleolítico, ou Antiga Idade da Pedra (c. 5 milhões-10 000 a.C.) o *Homo sapiens* evoluiu de criaturas menores e mais frágeis e desenvolveu a estrutura socioeconômica da Idade da Pedra. No período Mesolítico, ou Média Idade da Pedra, (c. 10 000-7000 a.C.) a economia baseada no binômio caçar/colher cristalizou-se. No período Neolítico ou Nova Idade da Pedra (c. 7000-3000 a.C.) a Idade da Pedra começou a declinar e a dar lugar às Idades do Bronze e do Ferro, à medida que os povos começaram a se afastar da forma de sociedade calcada no caçar/colher, para outra que envolvia modos primitivos de agricultura e domesticação de animais. O Paleolítico foi uma era de transição de um mundo de pré-humanos para uma sociedade de caçadores humanos. O Neolítico foi também um período de transição: de uma sociedade de caçadores para uma de agricultores.

Por ter sido uma época em que quase todas as pessoas eram caçadores nômades, a Idade da Pedra registrou limitados avanços científicos e intelectuais. Mas isso não se deu porque faltasse inteligência às pessoas na Idade da Pedra. Por volta de 20 000 a.C. os caçadores das savanas haviam desenvolvido uma cultura complexa que incluía a feitura de ferramentas, linguagem, religião, arte, música e comércio. Os progressos na matemática e na ciência, todavia, eram obstados pelas estruturas social e econômica daqueles tempos remotos. Como os povos da Idade da Pedra eram caçadores e não agricultores, tinham de se deslocar em consonância com as estações e com o sazonalidade de frutas e castanhas. Só tinham condições de levar consigo ferramentas pequenas, fáceis de transportar, roupas e objetos pessoais. Não havia lugar nessa sociedade para o volumoso equipamento necessário para fundir metais nem para as proporções de uma biblioteca; daí porque na Idade da Pedra não se desenvolveram ferramentas metálicas nem a linguagem escrita. Não havia cidades, e as savanas só podiam fornecer alimentos suficientes para cerca de 40 pessoas por centena de milha quadrada. Nessa vida ocupada, e muitas vezes curta, um caçador não tinha tempo para ponderar questões de filosofia e ciência. Sem dúvida, algum progresso científico se verificou durante a Idade da Pedra. As pessoas comerciavam entre si e havia necessidade de anotar a parte de cada família na caçada; ambas as atividades dependiam da ideia de contar, um prelúdio do pensamento científico. Alguns povos na Idade da Pedra, como a tribo Sioux, tinham calendários pictográficos que registravam várias décadas de história. Todavia, afora os sistemas de contagem primitivos, tudo

o mais teve de esperar o desenvolvimento da agricultura, intensiva e em grande escala, que requeria uma aritmética mais sofisticada.

No último milênio da Idade da Pedra, durante o Neolítico, a humanidade passou do estágio de colher simples e naturalmente frutas silvestres, castanhas, raízes e vegetais para o de efetivamente plantar sementes e colher a safra. O homem do Neolítico era todavia ainda primordialmente caçador e colhedor e seus campos pequenos e mal arrumados assemelhavam-se mais a jardins meio abandonados do que a fazendas. Esses jardins do fim da Idade da Pedra com certeza se pareciam muito com os milharais plantados pelos índios americanos e descritos pelos conquistadores europeus do século XVI, com plantas de várias espécies plantadas no mesmo campo.

Para recapitular, a Idade da Pedra durou vários milhares de anos, começando talvez já em 5 milhões a.C. e indo até por volta de 3000 a.C. Num mundo de vastas pastagens e savanas onde abundavam os animais selvagens e as pessoas eram principalmente caçadores e colhedores. Suas vidas eram agrestes e difíceis, de maneira que elas viviam demasiado ocupadas e em permanente agitação para poderem desenvolver tradições científicas. Depois de 3000 a.C. emergem comunidades agrícolas densamente povoadas ao longo do rio Nilo na África, dos rios Tigre e Eufrates no Oriente Médio e ao longo do rio Amarelo na China. Essas comunidades criaram culturas nas quais a ciência e a matemática começam a se desenvolver.

Sistemas de numeração

1.1 Contagem primitiva

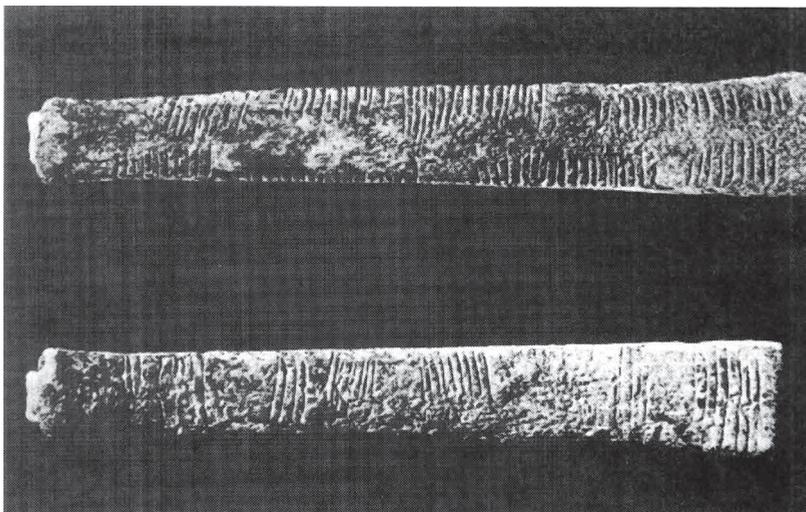
Ao se fazer um relato cronológico do desenvolvimento da matemática, a questão de por onde começar se impõe. Deve-se iniciar com as primeiras deduções sistemáticas em geometria, tradicionalmente creditadas a Tales de Mileto, por volta de 600 a.C.? Ou se deve recuar mais no tempo e iniciar com a obtenção de certas fórmulas de mensuração feitas pelas civilizações pré-helênicas da Mesopotâmia e do Egito? Ou se deve recuar ainda mais no tempo e iniciar com os primeiros esforços tateantes feitos pelo homem pré-histórico visando a sistematização das ideias de grandeza, forma e número? Ou se pode dizer que a matemática teve início em épocas pré-humanas com a manifestação de senso numérico e reconhecimento de modelos, embora muito limitadamente, por parte de alguns animais, pássaros e insetos? Ou mesmo antes disso, nas relações numéricas e espaciais das plantas? Ou até antes, nas nebulosas espiraladas, nas trajetórias de planetas e cometas e na cristalização de minerais em épocas pré-orgânicas? Ou será que a matemática, como acreditava Platão, sempre existiu, estando meramente a aguardar sua descoberta? Cada uma dessas origens possíveis comporta uma defesa¹.

Como usualmente se considera como a matemática mais antiga aquela resultante dos primeiros esforços do homem para sistematizar os conceitos de grandeza, forma e número, é por aí que começaremos, focalizando de início o surgimento no homem primitivo do conceito de *número* e do processo de *contar*.

O conceito de número e o processo de contar desenvolveram-se tão antes dos primeiros registros históricos (há evidências arqueológicas de que o homem, já há uns 50 000 anos, era capaz de contar) que a maneira como ocorreram é largamente conjectural. Não é difícil, porém, imaginar como isso provavelmente se deu. É razoável admitir que a espécie humana, mesmo nas épocas mais primitivas, tinha algum senso numérico, pelo menos ao ponto de reconhecer *mais* e *menos* quando se acrescentavam ou retiravam alguns objetos de uma coleção pequena, pois há estudos que mostram que alguns animais são dotados desse senso. Com a evolução gradual da sociedade, tornaram-se inevitáveis contagens simples. Uma tribo tinha que saber quantos eram seus membros e quantos eram seus inimigos e tornava-se necessário a um homem saber se seu rebanho

¹ Ver, por exemplo, D. E. Smith, *History of Mathematics*, vol. 1, cap. 1 e Howard Eves, *In Mathematical Circles* (1ª, 2ª, 3ª e 4ª itens), ambos citados na Bibliografia Geral ao fim do livro.

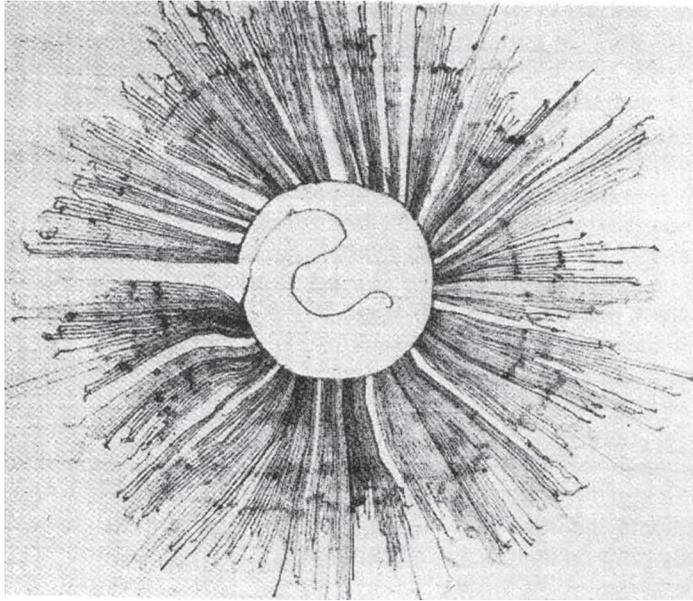
de carneiros estava diminuindo. É provável que a maneira mais antiga de contar se baseasse em algum método de registro simples, empregando o princípio da correspondência biunívoca. Para uma contagem de carneiros, por exemplo, podia-se dobrar um dedo para cada animal. Podia-se também contar fazendo-se ranhuras no barro ou numa pedra, produzindo-se entalhes num pedaço de madeira ou fazendo-se nós numa corda. Então, talvez mais tarde, desenvolveu-se um arranjo de sons vocais para registrar verbalmente o número de objetos de um grupo pequeno. E mais tarde ainda, com o aprimoramento da escrita, foram surgindo arranjos de símbolos para representar esses números. Esse desenvolvimento hipotético encontra respaldo em relatórios de antropólogos que estudaram povos primitivos em nossa época.



Duas vistas do osso Ishango, com mais de 8000 anos de idade, encontrado em Ishango, às margens do lago Edward, no Zaire, mostrando números preservados por meio de entalhes no osso (Dr. de Heinzelin)

Nos mais remotos estágios do período de contagem vocal, usavam-se sons (palavras) diferentes para, por exemplo, *dois* carneiros e *dois* homens. (Considere, por exemplo, em português: *parelha* de cavalos, *junta* de bois, *par* de sapatos, *casal* de coelhos.) A abstração da propriedade comum *dois*, representada por algum som considerado independentemente de qualquer associação concreta, provavelmente levou muito tempo para acontecer. Nossas atuais palavras-número de início muito provavelmente se referiam a conjuntos de certos objetos concretos, mas essas ligações, exceto talvez no que se refira ao cinco, perderam-se para nós².

² Para uma alternativa interessante à visão evolutiva clássica, ver “Euthomematics”, de Marcia e Robert Ascher, em *History of Science*, vol. 24, nº 2, jun., 1980, pp. 125-44.



Um quipo de indígenas peruanos usado para recenseamento, mostrando números registrados por meio de nós em cordas. Nós maiores são múltiplos dos menores, e a cor da corda pode distinguir homens de mulheres (Coleção Musée de L'Homme, Paris)

1.2 Bases

Quando se tornou necessário efetuar contagens mais extensas, o processo de contar teve de ser sistematizado. Isso foi feito dispondo-se os números em grupos básicos convenientes, sendo a ordem de grandeza desses grupos determinada em grande parte pelo processo de correspondência empregado. Esquemmatizando-se as ideias, o método consistia em escolher um certo número b como base e atribuir nomes aos números $1, 2, \dots, b$. Para os números maiores do que b os nomes eram essencialmente combinações dos nomes dos números já escolhidos.

Como os dedos do homem constituíam um dispositivo de correspondência conveniente, não é de estranhar que o 10 acabasse sendo escolhido frequentemente o número b da base. Considerem-se, por exemplo, as palavras-números atuais na língua inglesa, formadas tomando-se 10 como base. Há os nomes especiais *one* (um), *two* (dois), ..., *ten* (dez) para os números 1, 2, 10. Quando se chega a 11 a palavra usada é *eleven*, que, segundo os filólogos, deriva de *ein lifon*, cujo significado é “um acima de dez”. Analogamente, *twelve* (doze) provém de *twe lif* (“dois acima de dez”). Depois se tem *thirteen* (“três e dez”) para 13, *fourteen* (“quatro e dez”) para 14, até *nineteen* (“nove e dez”) para 19.

Chega-se então a *twenty* (*twe-tig*, ou “dois dez”), *twenty-one* (“dois dez e um”) e assim por diante. A palavra *hundred* (cem), segundo parece, deriva originalmente de uma outra que significa “dez vezes” (dez).

£1000		entalhe em v com a largura de uma mão
£100		entalhe curvo com a largura de um polegar
£20		entalhe em v com a largura de um dedo mínimo
£1		entalhe em v com a largura de um grão de cevada maduro
s		entalhe menor mas ainda visível
d		corte sem remoção da madeira
£50		nota-se o semientalhe para £10

Desenho mostrando o sistema oficial de entalhes usado para registros computacionais pelo Tesouro Britânico no século XII. Este sistema de registros manteve-se em uso até 1826

Há evidências de que 2, 3 e 4 serviram como bases primitivas. Por exemplo, há nativos de Queensland que contam “um, dois, dois e um, dois e dois, muito”, e alguns pigmeus africanos que contam “*a, oa, ua, oa-oa, oa-oa-a e oa-oa-oa*” para 1, 2, 3, 4, 5 e 6. Uma certa tribo da Terra do Fogo compõe seus primeiros e poucos nomes de números na base 3 e algumas da América do Sul usam de maneira análoga o 4.

Como seria de esperar, o *sistema quinário*, ou sistema de numeração de base 5, foi o primeiro a ser usado extensivamente. Até hoje algumas tribos da América do Sul contam com as mãos: “um, dois, três, quatro, mão, mão e um” e assim por diante. Os Yukaghirs da Sibéria usam uma escala mista para contar “um, dois, três, três e um, cinco, dois três, um mais, dois três e dois, dez faltando um, dez”. Ainda no início do século XIX se encontravam calendários de camponeses germânicos baseados no sistema quinário.

Há evidências também de que o 12 pode ter sido usado como base em épocas pré-históricas, principalmente em relação a medidas. Essa base pode ter sido sugerida pelo número aproximado de lunações de um ano ou, talvez, pelo fato de o 12 ter tantos divisores inteiros. De qualquer maneira, 12 é o número de polegadas em um pé, de onças numa libra antiga, de pences em um *shilling*, de horas de um relógio, de meses num ano, e as palavras dúzia e grossa indicam unidades de ordem superior.

O *sistema vigesimal* (base 20) também foi amplamente usado, e remonta aos dias em que o homem andava descalço. Esse sistema foi usado por índios americanos, sendo

mais conhecido pelo bem desenvolvido sistema de numeração maia. As palavras-número francesas *quatre-vingt* (oitenta) em vez de *huitante* e *quatre-vingt-dix* (noventa) em vez de *nonante* são traços da base 20 dos celtas. Também se encontram traços no gaélico, no dinamarquês e no inglês. Os groenlandeses usam “um homem” para 20, “dois homens” para 40 e assim por diante. Em inglês há a palavra *score* (uma vintena), frequentemente usada.

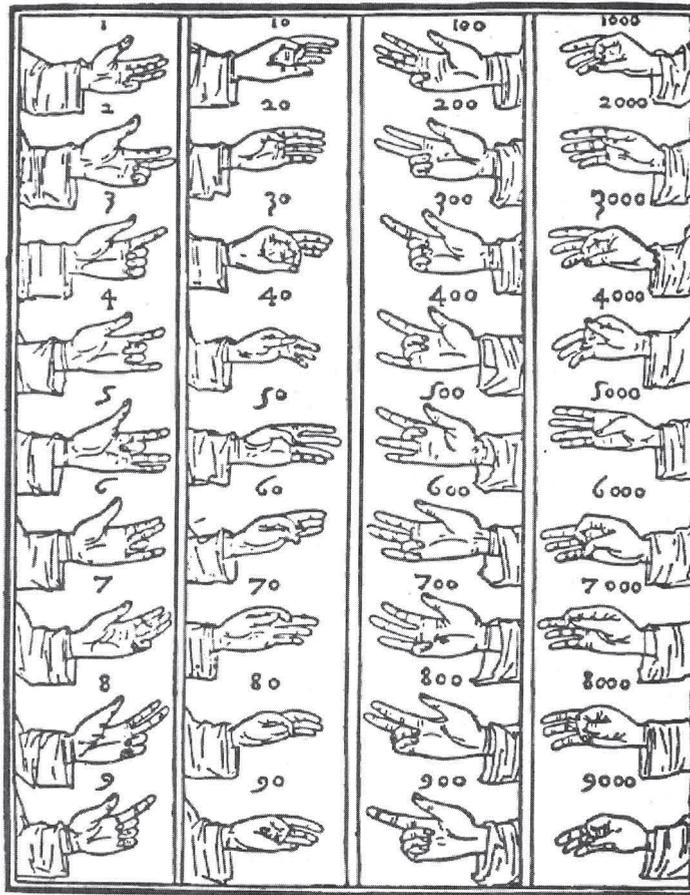
O sistema *sexagesimal* (base 60) foi usado pelos babilônios, sendo ainda empregado na medida do tempo e de ângulos em minutos e segundos.

1.3 Números digitais e números escritos

Além dos números falados, numa certa época usaram-se largamente os *números digitais* (representados por meio de dedos). Com efeito, a expressão de números por meio de várias posições dos dedos e das mãos talvez preceda os símbolos numéricos ou os nomes dos números. Assim, os símbolos escritos primitivos para 1, 2, 3 e 4 eram invariavelmente o número conveniente de riscos verticais ou horizontais, representando o número correspondente de dedos levantados ou estendidos, remontando a palavra *dígito* (isto, é “dedo”), para indicar os algarismos de 1 a 9, à mesma origem.

Com o tempo, os números digitais foram estendidos de modo a abranger os números maiores que ocorriam nas transações comerciais; perto da Idade Média eles tinham se tornado internacionais. No desenvolvimento final, os números 1, 2, 9 e 10, 20, 90 eram representados na mão esquerda e os números 100, 200, 900 e 1000, 2000, 9000 na mão direita. Os livros de aritmética da Renascença traziam figuras dos números digitais. Por exemplo, usando a mão esquerda, representava-se o 1 dobrando-se parcialmente para baixo o dedo mínimo; o 2 dobrando-se parcialmente para baixo os dedos médio e anular; o 3 dobrando-se parcialmente para baixo os dedos mínimo, anular e médio; o 4 dobrando-se para baixo os dedos médio e anular; o 5 dobrando-se para baixo o dedo médio; o 6 dobrando-se para baixo o dedo anular; o 7 dobrando-se completamente para baixo o dedo mínimo; o 8 dobrando-se completamente para baixo os dedos mínimo e anular; e o 9 dobrando-se completamente para baixo os dedos mínimo, anular e médio.

Embora os números digitais tivessem se originado em épocas muito remotas, ainda são usados hoje por alguns povos primitivos da África, por árabes e por persas. Nas Américas do Sul e do Norte, alguns indígenas e algumas tribos de esquimós ainda usam os dedos. Os números digitais tinham a vantagem de transcender diferenças de linguagem mas, como os números vocais, deixavam a desejar quanto à permanência e não eram convenientes para a realização de cálculos. Já mencionamos o uso de marcas e entalhes como maneiras primitivas de registrar números. Esses expedientes provavelmente representam a primeira tentativa por parte do homem de escrever. De qualquer maneira, desses primeiros esforços no sentido de fazer registros permanentes de números resultaram vários sistemas de numeração escritos. Um número escrito chama-se *numeral*. Voltaremos agora nossa atenção para uma classificação simples dos sistemas de numeração antigos.



Números digitais. As duas primeiras colunas representam a mão esquerda, as outras duas a mão direita. Ilustração tirada da *Suma de Pacioli*, 1491

1.4 Sistemas de agrupamentos simples

Talvez o mais antigo tipo de sistema de numeração a se desenvolver tenha sido aquele chamado *sistema de agrupamentos simples*. Nessa modalidade de sistema escolhe-se um número b como base e adotam-se símbolos para $1, b, b^2, b^3$ etc. Então, qualquer número se expressa pelo uso desses símbolos *aditivamente*, repetindo-se cada um deles o número necessário de vezes. A ilustração seguinte tornará claro o princípio subjacente. Os hieróglifos egípcios, cujo emprego remonta a cerca do ano 3400 a.C. e usados principalmente para fazer inscrições em pedras, fornecem um exemplo de sistema de agrupamentos simples. Embora os hieróglifos fossem usados às vezes para escrever em outros materiais que não pedras, os egípcios cedo desenvolveram duas formas de escrita consideravelmente mais rápidas para trabalhos em papiro, madeira e cerâmica. A mais

antiga dessas formas era uma escrita cursiva, conhecida como *hierática*, derivada da hieroglífica e usada pelos sacerdotes. Da hierática mais tarde resultou a escrita *demótica*, que foi adotada para usos gerais. Os sistemas de numeração hierático e demótico não pertencem ao tipo de agrupamentos simples.

A base usada no sistema de numeração hieroglífico egípcio é a 10. Os símbolos adotados para 1 e para as primeiras potências de 10 são

1		um bastão vertical
10		uma ferradura
10^2		um rolo de pergaminho
10^3		uma flor de lótus
10^4		um dedo encurvado
10^5		um barbato
10^6		um homem espantado

Assim, qualquer número expressava-se pelo uso desses símbolos aditivamente, repetindo-se cada um deles o número necessário de vezes. Por exemplo

$$13015 = 1(10^4) + 3(10^3) + 1(10) + 5 = \text{bent finger} \text{ } \text{lotus} \text{ } \text{lotus} \text{ } \text{lotus} \text{ } \text{shoelace} \text{ } \text{vertical staff} \text{ } \text{vertical staff} \text{ } \text{vertical staff}$$

Escrevemos esse número da esquerda para direita, embora para os egípcios fosse mais habitual escrever da direita para a esquerda.

Os babilônios antigos, carecendo de papiros e tendo pouco acesso a pedras convenientes, recorreram principalmente à argila como material de escrita. As inscrições eram impressas em tábulas de argila úmidas com estilos cujas extremidades podem ter sido triângulos isósceles penetrantes. Inclinando-se ligeiramente o estilo da posição vertical, podia-se pressionar a argila ou com o ângulo do vértice ou com um dos ângulos da base do triângulo, produzindo-se assim duas formas de caracteres assemelhadas a cunhas (*cuneiformes*). As tábulas eram então cozidas num forno até endurecer, obtendo-se assim registros permanentes. Em tábulas cuneiformes do período 2000 a.C. a 200 a.C.

os números menores do que 60 se expressavam por um sistema de agrupamentos simples de base 10, e é interessante que muitas vezes se simplificava a escrita pelo uso de um símbolo subtrativo. O símbolo subtrativo e os símbolos para o 1 e o 10 eram



respectivamente, em que o símbolo para o 1 e as duas partes que formavam o símbolo subtrativo se obtinham pelo uso do ângulo do vértice do triângulo isósceles, e o símbolo do 10 se obtinha pelo uso do ângulo da base. Como exemplos de números escritos com o emprego desses símbolos temos

$$25 = 2(10) + 5 = \left\langle\left\langle \triangleright\triangleright\triangleright\triangleright\right\rangle\right\rangle$$

e

$$38 = 40 - 2 = \left\langle\left\langle\left\langle\left\langle \triangleright\triangleright\right\rangle\right\rangle\right\rangle\right\rangle$$

O método empregado pelos babilônios para escrever números grandes será visto na Seção 1-7.

Os numerais gregos, áticos ou herodiânicos, desenvolveram-se algum tempo antes do século III a.C. e constituem um sistema de agrupamentos simples de base 10 formado com as letras iniciais dos nomes dos números. Além dos símbolos I, Δ, H, X, M para 1, 10, 10², 10³, 10⁴, havia um símbolo especial para o 5. Esse símbolo especial é uma forma antiga de Π, a inicial da palavra grega *penete* (cinco), sendo Δ, H, X, M as iniciais de *deka* (dez), *hekaton* (cem), *kilo* (mil) e *myriad* (dez milhares). O símbolo do 5 era frequentemente usado sozinho ou em combinação com outros símbolos a fim de encurtar a representação numérica. Um exemplo nesse sistema de numeração é

$$2857 = \times \times \square \square \square \square \square \square \square \square \square \square$$

no qual se nota que o símbolo do 5 aparece uma vez sozinho e duas vezes em combinação com outros símbolos.

Como um exemplo final de um sistema de agrupamentos simples, ainda de base 10, figuram os familiares numerais romanos. Neste caso os símbolos básicos I, X, C, M para 1, 10, 10² e 10³ são acrescidos de V, L, D para 5, 50 e 500. O princípio subtrativo, segundo o qual um símbolo para uma unidade menor colocado antes de um símbolo para uma unidade maior significa a diferença entre as duas unidades, raramente

era utilizado nos tempos antigos e medievais. Seu uso pleno só começou nos tempos modernos. Por exemplo

$$1944 = \text{MDCCCCXXXIII}$$

ou, em notação mais moderna, de quando o princípio subtrativo se tornou comum,

$$1944 = \text{MCMXLIV}.$$

No uso do princípio subtrativo deve-se levar em conta, porém, a seguinte regra: o I só pode preceder o V ou X, o X só pode preceder o L ou o C e o C só pode preceder o D ou o M.

Não tem faltado imaginação nas tentativas de descrever os símbolos numéricos romanos. Entre as explicações mais plausíveis, aceitas por muitas autoridades em história latina e epigrafia, está a de que I, II, III e IIII procedem dos dedos erguidos da mão. O símbolo X pode-se compor de dois V ou pode ter sido sugerido por duas mãos cruzadas ou dois polegares cruzados, ou da prática comum, quando da contagem por traços, de cruzar grupos de dez. Há alguma evidência de que os símbolos originais para 50, 100 e 1000 podem ter sido os aspirados gregos Ψ (*psi*), θ (*theta*) e Φ (*phi*). Foram formas mais antigas de *psi*

$$\downarrow, \perp, \perp, \perp,$$

todas usadas para o 50 em inscrições primitivas. O símbolo θ para o 100 provavelmente evoluiu para o símbolo, algo semelhante, C, sob a influência do fato de que C é a inicial da palavra latina *centum* (cem). Um símbolo usado comumente em tempos primitivos para o 1000 é $\subset\supset$, que podia ser uma variante de Φ . O símbolo para o 1000 tornou-se M sob influência do fato de que se trata da inicial da palavra latina *mille* (mil). Cinco centenas, sendo a metade de 1000, eram representadas por \supset , que mais tarde transformou-se em D. Remonta ao ano 1715 o último uso encontrado dos símbolos $\subset\supset$ e \supset para 1000 e 500.

1.5 Sistemas de agrupamentos multiplicativos

Há exemplos em que um sistema de agrupamentos simples evoluiu para o que pode ser chamado *sistema de agrupamentos multiplicativo*. Nesse tipo de sistema, após se escolher uma base b , adotam-se símbolos para 1, 2, $b - 1$ e um segundo conjunto de símbolos para $b, b^2, b^3 \dots$. Empregam-se os símbolos dos dois conjuntos *multiplicativamente* de maneira a mostrar quantas unidades dos grupos de ordem superior são necessárias. Assim, designando-se os primeiros nove números pelos símbolos habituais, mas designando-se 10, 100 e 1000 por a, b e c , então num sistema de agrupamentos multiplicativo se escreveria

$$5625 = 5c6b2a5.$$

O sistema de numeração chinês-japonês tradicional é um exemplo de sistema de agrupamentos multiplicativo de base 10. Escritos verticalmente, os símbolos dos dois grupos básicos e o número 5625 são mostrados abaixo.

Carecendo de um material de escrita como o papel, os chineses e japoneses antigos registravam seus achados em lâminas de bambu. A parte do caule do bambu situada entre dois nós era rachada longitudinalmente em tiras estreitas. Depois que essas tiras eram secas e raspadas, elas eram colocadas lado a lado e amarradas por quatro cordões transversais. A estreiteza das tiras fazia com que os caracteres fossem arranjados verticalmente, de cima para baixo, dando origem ao costume de escrever que perdurou até tempos mais modernos, quando as lâminas de bambu foram substituídas pela tinta e o papel, materiais de escrita mais convenientes.

Exemplo: 5625

1	一	10	十	五
2	二	10 ²	百	千
3	三	10 ³	千	六
4	四			百
5	五			二
6	六			十
7	七			五
8	八			
9	九			

1.6 Sistemas de numeração cifrados

Num *sistema de numeração cifrado*, depois de se escolher uma base b , adotam-se símbolos para $1, 2, \dots, b-1; b, 2b, \dots, (b-1)b; b^2, 2b^2, \dots, (b-1)b^2$; e assim por diante. Embora se devam memorizar muitos símbolos nesse tipo de sistema, a representação dos números é compacta.

O sistema de numeração grego, conhecido como jônico ou alfabético, cujas origens situam-se já por volta do ano 450 a.C., é um exemplo desse sistema cifrado. Ele é decimal e emprega 27 caracteres — as 24 letras do alfabeto grego mais três outras obsoletas: *digamma*, *koppa* e *sampi*. Embora se usassem letras maiúsculas (as minúsculas só muito mais tarde vieram a substituí-las), o sistema será ilustrado aqui com letras minúsculas. As seguintes equivalências têm que ser memorizadas:

1	α	alpha (alfa)	10	ι	iota	100	ρ	rho
2	β	beta	20	κ	kappa	200	σ	sigma
3	γ	gamma (gama)	30	λ	lambda	300	τ	tau
4	δ	delta	40	μ	mu	400	υ	upsilon
5	ϵ	epsilon	50	ν	nu	500	ϕ	phi
6	obsoleta	digamma	60	ξ	xi	600	χ	chi
7	ζ	zeta	70	\omicron	omicron	700	ψ	psi
8	η	eta	80	π	pi	800	ω	omega
9	θ	theta (teta)	90	obsoleta	koppa	900	obsoleta	sampi

Como exemplos do uso desses símbolos temos:

$$12 = \iota\beta, 21 = \kappa\alpha, 247 = \sigma\mu\zeta.$$

Para números maiores faziam-se acompanhar os símbolos de barras ou acentos. Os símbolos obsoletos de digamma, koppa e sampi são

$$\wp, \phi, \lambda.$$

Também são cifrados os sistemas de numeração egípcio (hierático e demótico), cóptico, hindu-brâmane, hebreu, sírio e arábico antigo. Os últimos três, como o jônico grego, eram sistemas de numeração *alfabéticos*.

1.7 Sistemas de numeração posicionais

Nosso próprio sistema de numeração é um exemplo de um *sistema de numeração posicional*. Para esse sistema, depois de se escolher uma base b , adotam-se símbolos para $0, 1, 2, \dots, b-1$. Assim, há no sistema b símbolos básicos, no caso de nosso sistema frequentemente chamados *dígitos*. Qualquer número N pode ser escrito de maneira única na forma

$$N = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \dots + a_2 b^2 + a_1 b + a_0,$$

na qual $0 \leq a_i < b, i = 0, 1, \dots, n$. Por isso então representamos o número N na base b pela sequência de símbolos

$$a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$$

Assim, um símbolo básico em qualquer numeral dado representa um múltiplo de alguma potência da base, potência essa que depende da posição ocupada pelo símbolo básico. Em nosso próprio sistema de numeração *indo-arábico*, por exemplo, 2 em 206 representa $2(10^2)$ ou 200, ao passo que em 27 o 2 representa $2(10)$ ou 20. Deve-se notar que para clareza completa necessita-se de um símbolo para o zero, a fim de indicar a ausência possível de alguma potência da base. Um sistema de numeração posicional é uma consequência lógica, embora não necessariamente histórica, de um sistema de agrupamentos multiplicativo.

Os babilônios antigos desenvolveram, em algum momento entre 3000 e 2000 a.C., um sistema sexagesimal que empregava o princípio posicional. O sistema de numeração babilônico é, porém, misto, na medida em que, embora os números superiores a 60 fossem escritos de acordo com o princípio posicional, os 60 números correspondentes ao grupo básico eram escritos nos moldes de um sistema de agrupamento simples decimal, conforme explanação dada na Seção 1-4. Como ilustração temos

$$524\ 551 = 2(60^3) + 25(60^2) + 42(60) + 31 = \text{▼▼◀◀▼▼▼▼◀◀▼▼▼▼▼▼}$$

Esse sistema de numeração posicional ressentiu-se, até depois do ano 300 a.C., da falta de um símbolo para o zero que representasse as potências ausentes de 60, levando assim a possíveis mal-entendidos na expressão de um número dado. Finalmente introduziu-se um símbolo, consistindo em duas cunhas pequenas, inclinadas, mas esse símbolo só era usado para indicar uma potência ausente de 60 *dentro* de um número, nunca quando ela ocorresse no seu *final*. Esse símbolo era, portanto, apenas um *zero* parcial, pois um zero verdadeiro serve para indicar as potências ausentes da base tanto no meio como no final dos números, como é o caso de nossos $30\overset{0}{4}$ e 340 . No sistema de numeração babilônico, então, $10\ 80\overset{0}{4}$ apareceria como

$$10\ 80\overset{0}{4} = 3(60^2) + 0(60) + 4 = \text{▼▼▼◀▼▼}$$

e $11\ 040$ como

$$11\ 040 = 3(60^2) + 4(60) = \text{▼▼▼▼▼▼}$$

em vez de



Muito interessante é o sistema de numeração maia. De origem remota e desconhecida, foi descoberto pelas expedições espanholas a Yucatán no início do século XVI. Esse sistema é essencialmente vigesimal, mas seu segundo grupo vale $(18)(20) = 360$ em vez de $20^2 = 400$. Os grupos de ordem superior são da forma $(18)(20^n)$. A explicação para essa discrepância provavelmente reside no fato de o ano maia consistir em 360 dias. O símbolo para o zero dado na tabela abaixo, ou alguma variante desse símbolo, era usado consistentemente. Escreviam-se os vinte números do grupo básico de maneira muito simples por meio de pontos e traços (seixos e gravetos) de acordo com o seguinte esquema de agrupamentos em que o ponto representa o 1 e o traço o 5.

1	•	6	—•	11	—•—	16	—•—•—
2	••	7	—••	12	—••—	17	—••—•—
3	•••	8	—•••	13	—•••—	18	—•••—•—
4	••••	9	—••••	14	—••••—	19	—••••—•—
5	—	10	—	15	—	0	○

A seguir um exemplo de um número grande, escrito verticalmente à maneira maia

$$43\,487 = 6(18)(20^2) + 0(18)(20) + 14(20) + 7 = \begin{array}{c} \bullet \\ \text{—} \\ \text{—} \\ \bullet\bullet\bullet\bullet \\ \bullet\bullet \\ \text{—} \\ \text{—} \end{array}$$

O sistema de base mista que descrevemos era usado pela classe sacerdotal. Há relatos de um sistema vigesimal puro usado pelo povo comum mas que não sobreviveu em forma escrita.

1.8 Computação primitiva

Muitos dos modelos de computação usados hoje na aritmética elementar, tais como para a realização de multiplicações e divisões, somente surgiram no século XV. Duas razões são em geral aventadas para explicar esse desenvolvimento tardio: as dificuldades intelectuais e as dificuldades materiais encontradas nesse trabalho.

As dificuldades intelectuais devem ser em parte desprezadas. A impressão de que os sistemas de numeração antigos não eram favoráveis mesmo aos cálculos mais simples é em grande parte baseada na falta de familiaridade com esses sistemas. É claro que a adição e a subtração num sistema de agrupamentos simples requer apenas a capacidade de contar o número de símbolos de cada espécie e a conversão, a seguir, em unidades de ordem superior. Não se necessita de nenhuma memorização de combinações de números.³ Num sistema de numeração cifrado, memorizando-se o suficiente das tábuas de adição e multiplicação, o trabalho pode ser levado a efeito em grande parte como o fazemos hoje. O matemático francês Paul Tannery adquiriu habilidade considerável na multiplicação com o sistema de numeração jônico grego e concluiu mesmo que aquele sistema tinha algumas vantagens sobre o que usamos.

As dificuldades materiais encontradas foram, porém, bastante reais. Sem um suprimento abundante e conveniente de materiais adequados à escrita, qualquer desenvolvimento muito extensivo dos processos aritméticos estava sujeito a impedimentos. Deve-se lembrar que o hoje comum papel de polpa industrializado só existe há menos de cem anos. O antigo papel feito de trapos era produzido manualmente e consequentemente era caro e escasso, isso sem falar que só foi introduzido na Europa no século XII, embora seja provável que os chineses já o conhecessem um milênio antes.

Os antigos egípcios inventaram um primitivo material de escrita parecido com o papel — o *papiro*, que por volta do ano 650 a.C. já havia sido introduzido na Grécia. Esse material era feito de um junco aquático chamado *papu*. Os talos desse junco eram cortados em longas e delgadas tiras que eram colocadas lado a lado para formar uma folha. Outra camada de tiras era colocada por cima e a peça era então embebida em água, após o que era imprensada e posta a secar ao sol. É provável que devido a uma goma natural da planta as camadas mantivessem-se unidas. Após a secagem as folhas eram preparadas para a escrita mediante um laborioso processo de alisamento feito com um objeto redondo e rígido. O papiro era demasiado valioso para ser usado abundantemente como simples papel rascunho.

Outro material de escrita primitivo era o pergaminho, feito de peles de animais, em geral carneiros e cordeiros. Naturalmente era raro e difícil de se obter. Mais valioso ainda era o papel pergaminho, um material feito da pele de vitelos. O pergaminho era efetivamente tão caro que na Idade Média surgiu o costume de raspar a tinta de velhos manuscritos em pergaminho para poder usá-los outra vez. Tais manuscritos são chamados *palimpsestos* (*palin*, outra vez; *psao*, raspado). Em alguns casos, com a passagem dos anos, o escrito original de um palimpsesto reaparecia por baixo do tratamento posterior. Algumas restaurações interessantes foram feitas dessa maneira.

Pequenas pranchas, carregando uma fina camada de cera, juntamente com um estilo, compuseram o material de escrita dos romanos de cerca de dois milênios atrás. Antes e durante o Império Romano usaram-se frequentemente tabuleiros de areia para

³ Para o desempenho em multiplicações e divisões com numerais romanos ver, por exemplo, "Arithmetic with Roman numerals" de James G. Kennedy, *The American Mathematical Monthly*, 88, 1981, p. 29-33.

cálculos simples e para traçados de figuras geométricas. E, obviamente, muito cedo se usaram pedras e argila para registros escritos.

O meio de contornar essas dificuldades intelectuais e materiais foi a invenção do *ábaco* (do grego *abax*, “tabuleiro de areia”), que pode ser considerado o mais antigo instrumento de computação mecânico usado pelo homem. Muitas formas de ábaco aparecem em várias partes do mundo antigo e medieval. Descrevamos uma forma rudimentar de ábaco e ilustremos seu uso numa adição e numa subtração de alguns números romanos. Tracemos quatro segmentos de reta verticais paralelos e os rotulemos, da esquerda para a direita, por M, C, X e I e tomemos uma coleção conveniente de fichas como, por exemplo, pedras de algum tipo de jogo. Uma ficha representará 1, 10, 100 ou 1000 unidades conforme esteja colocada na linha I, X, C ou M. Para reduzir o número de fichas que podem aparecer subsequentemente num segmento, convencionamos substituir cada cinco fichas de um segmento por uma ficha a ser colocada no espaço exatamente à esquerda desse segmento. Então todo número menor que 10 000 pode ser representado em nosso quadro de linhas, colocando-se no máximo quatro fichas em cada segmento e no máximo uma ficha no espaço à esquerda de cada segmento.

Efetuemos a adição de

MDCCLXIX e MXXXVII.

Representemos o primeiro desses números por fichas no quadro, como se ilustra na parte esquerda da Figura 1. Vamos agora somar a ele o segundo número, operando da direita para a esquerda. Para somar *VII*, ponhamos outra ficha entre os segmentos *X* e *I* e mais duas fichas no segmento *I*. O segmento *I* tem agora seis fichas. Removemos cinco delas em lugar das quais colocamos outra ficha entre os segmentos *X* e *I*. Das três fichas agora entre os segmentos *X* e *I* “transportamos” duas, na forma de uma única ficha, para o segmento *X*. Somamos agora o *XXX* pondo mais três fichas no segmento *X*. Como agora temos um total de cinco fichas no segmento *X* podemos substituí-las por uma única ficha entre os segmentos *C* e *X*. As duas fichas que se têm agora entre *C* e *X* são substituídas por uma única ficha no segmento *C*. Para, finalmente, somar o *M* basta pôr outra ficha no segmento *M*. A parte direita da Figura 1 ilustra o aspecto final de nosso quadro e a soma pode ser lida como *MMDCCCVI*. Dessa forma obtivemos a soma de dois números por meio de simples operações mecânicas, sem a necessidade de papel rascunho.

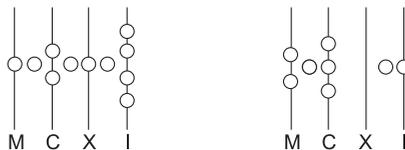


Figura 1

A subtração se efetua de maneira análoga, salvo que, neste caso, em vez de “transportar” para a esquerda, pode vir a ser necessário “emprestar” da esquerda.

A representação de um número no sistema de numeração indo-arábico se faz de maneira muito simples, bastando registrar em ordem o número de fichas dos vários segmentos do ábaco. O símbolo 0 representa um segmento sem nenhuma ficha. Nossos atuais modelos de adição e subtração, tanto quanto os conceitos de “transportar” e “emprestar”, podem ter se originado nos processos de efetuar essas operações por meio do ábaco. Uma vez que no sistema de numeração indo-arábico trabalhamos com símbolos em vez de com fichas, torna-se necessário memorizar as combinações simples de números ou recorrer a uma tábua de adição elementar.

1.9 O sistema de numeração indo-arábico

O sistema de numeração indo-arábico tem esse nome devido aos hindus, que o inventaram, e devido aos árabes, que o transmitiram para a Europa Ocidental. Os mais antigos exemplos de nossos atuais símbolos numéricos encontram-se em algumas colunas de pedra erigidas na Índia por volta do ano 250 a.C. pelo rei Açoka. Outros exemplos primitivos na Índia, se corretamente interpretados, encontram-se em registros talhados por volta do ano 100 a.C. nas paredes de uma caverna numa colina perto de Poona e em algumas inscrições de por volta do ano 200 d.C., gravadas nas cavernas de Nasik. Essas primeiras amostras não contêm nenhum zero e não utilizam a notação posicional. Contudo, a ideia de valor posicional e um zero devem ter sido introduzidos na Índia algum tempo antes do ano 800 d.C., pois o matemático persa Al-Khowârizmî descreveu de maneira completa o sistema hindu num livro do ano 825 d.C.

Como e quando os novos símbolos numerais entraram na Europa são questões ainda não decididas. Muito provavelmente eles foram levados por comerciantes e viajantes pelas costas do Mediterrâneo. Esses símbolos se encontram num manuscrito espanhol do século X, sendo possível que tenham sido introduzidos na Espanha pelos árabes que invadiram a península ibérica no ano 711 d.C., onde permaneceram até 1492 d.C. Mas foi uma tradução latina do tratado de Al-Khowârizmî, feita no século XII, seguida de alguns trabalhos europeus sobre o assunto, o que fez com que o sistema se disseminasse mais amplamente.

Os quatro séculos seguintes assistiram a uma verdadeira batalha entre abacistas e algoristas, como eram chamados os defensores do novo sistema, mas em torno do ano 1500 as atuais regras de computação acabaram se impondo. Mais um século e os abacistas haviam sido quase esquecidos, sendo que perto do século XVIII não restava mais nenhum traço do ábaco na Europa Ocidental. Seu reaparecimento, como uma curiosidade, deveu-se ao geômetra francês Poncelet, que levou um espécime para a França depois de ser libertado como prisioneiro de guerra na Rússia, onde participara da campanha napoleônica.

Até que os símbolos dos numerais indo-arábicos se estabilizassem, com a invenção da imprensa de tipos móveis, muitas modificações em sua grafia se verificaram. Nossa

palavra *zero* provavelmente provém da forma latinizada *zephirum* derivada de *sifr* que é uma tradução para o árabe de *sunya*, que em hindu significa “vazio” ou “vácuo”. A palavra árabe *sifr* foi introduzida na Alemanha, no século XIII, por Nemorarius, como *cifra**.



O abacista versus o algorista
(De Margarita Philosophica, de Gregor Reisch, Strasburgo, 1504)

* Em português *cifra* significa, entre outras coisas, zero (N. T.)

1.10 Bases arbitrárias

Lembremos que para representar um número num sistema de numeração posicional de base b precisamos de símbolos básicos para os inteiros de 0 até $b-1$. Embora a base $b = 10$ seja uma parte importante de nossa cultura, a escolha do 10 é de fato bastante arbitrária, e outras bases têm grande importância, tanto prática como teórica. Se $b \leq 10$, podemos usar os algarismos usuais. Assim, por exemplo, podemos considerar 3012 como um número expresso na base 4 com os símbolos 0, 1, 2 e 3. Para tornar claro que se trata de um número expresso na base 4 escrevemos $(3012)_4$. Quando não se usa nenhum índice subentende-se que o número está expresso na base usual 10. Se $b > 10$, devemos acrescentar aos nossos algarismos outros símbolos básicos, pois necessita-se de b símbolos básicos. Assim, se $b = 12$, podemos tomar 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, t , e como símbolos básicos, nos quais t e e são os símbolos para o dez e para o onze, respectivamente. Como exemplo poderíamos considerar $(3t1e)_{12}$.

É fácil passar um número de uma dada base para a base usual 10. Por exemplo

$$(3012)_4 = 3(4^3) + 0(4^2) + 1(4) + 2 = 198$$

e

$$(3t1e)_{12} = 3(12^3) + 10(12^2) + 1(12) + 11 = 6647.$$

A seguir mostraremos como passar um número da base usual para uma base b . Se N é o número, temos de determinar os inteiros a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 na expressão

$$N = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \dots + a_2 b^2 + a_1 b + a_0,$$

em que $0 \leq a_i < b$. Dividindo a igualdade acima por b obtemos

$$\begin{aligned} N/b &= a_n b^{n-1} + a_{n-1} b^{n-2} + \dots + a_2 b + a_1 + a_0/b \\ &= N' + a_0/b. \end{aligned}$$

Isto é, o resto a_0 dessa divisão é o último algarismo da representação desejada. Dividindo-se N' por b obtém-se

$$N'/b = a_n b^{n-2} + a_{n-1} b^{n-3} + \dots + a_2 + a_1/b,$$

e o resto dessa divisão é o vizinho do último dígito na representação desejada. Procedendo dessa maneira obteremos todos os dígitos a_0, a_1, \dots, a_n . Esse procedimento pode ser sistematizado de maneira bastante conveniente como se mostra a seguir. Suponhamos, por exemplo, que se pretenda expressar 198 na base 4. Encontramos:

$$\begin{array}{r}
 198 \overline{) 4} \\
 2 \quad 49 \overline{) 4} \\
 \quad 1 \quad 12 \overline{) 4} \\
 \qquad 0 \quad 3 \overline{) 4} \\
 \qquad \qquad 3 \quad 0
 \end{array}$$

Como os restos sucessivos são 2, 1, 0 e 3, a representação desejada é $(3012)_4$. Suponhamos agora que se pretenda representar 6647 na base 12, onde, de novo, se empregarão *t* e *e* para representar *dez* e *onze*, respectivamente. Obtemos:

$$\begin{array}{r}
 6647 \overline{) 12} \\
 e = 11 \quad 553 \overline{) 12} \\
 \quad 1 \quad 46 \overline{) 12} \\
 \qquad t = 10 \quad 3 \overline{) 12} \\
 \qquad \qquad 3 \quad 0
 \end{array}$$

A representação pedida é, portanto, $(3t1e)_{12}$.

Há a propensão a esquecer, quando se está somando ou multiplicando em nosso sistema de numeração, que o trabalho real é efetuado mentalmente e que os símbolos numéricos são usados simplesmente para registrar os resultados mentais. Nosso êxito e eficiência ao efetuar tais operações aritméticas dependem de quão bem tenhamos em mente as tábuas de adição e multiplicação a cujo aprendizado são dedicadas tantas horas das primeiras séries escolares. Com tábuas correspondentes construídas para uma base *b* podemos igualmente efetuar adições e multiplicações no novo sistema sem, em momento nenhum, ter que fazer a transformação para o sistema decimal.

Ilustremos esse fato com a base 4. Primeiro construímos as tábuas da adição e da multiplicação correspondentes.

Adição					Multiplicação				
	0	1	2	3		0	1	2	3
0	0	1	2	3	0	0	0	0	0
1	1	2	3	10	1	0	1	2	3
2	2	3	10	11	2	0	2	10	12
3	3	10	11	12	3	0	3	12	21

Com referência a essas tábuas, a soma de 2 com 3 é 11 e o produto de 2 por 3 é 12. Usando essas tábuas, exatamente como estamos habituados a usar as tábuas correspondentes da base 10, podemos efetuar adições e multiplicações. Por exemplo, para a multiplicação de $(3012)_4$ por $(233)_4$ temos, omitindo o índice 4,

$$\begin{array}{r}
 3012 \\
 233 \\
 \hline
 21102 \\
 21102 \\
 \hline
 12030 \\
 \hline
 2101122
 \end{array}$$

Para se efetuarem as operações inversas, subtração e divisão, necessita-se de considerável familiaridade com as tábuas. Isso, obviamente, também é válido para a base 10; a razão das dificuldades encontradas no ensino dessas operações nos graus elementares reside nesse fato.

Exercícios

1.1 Palavras-número

Forneça as explicações para as seguintes palavras-número primitivas.

(a) Para uma tribo papua do sudeste da Nova Guiné foi necessário traduzir a passagem da Bíblia (João 5:5): “Estava ali um homem que, há trinta e oito anos, se encontrava enfermo” da seguinte maneira: “Um homem caiu doente um homem, ambas as mãos, 5 e 3 anos”.

(b) Na Nova Guiné britânica, o número 99 se exprime como “quatro homens mortos, duas mãos até o fim, um pé completo e quatro”.

(c) A tribo Kamayura da América do Sul usa a palavra “dedo-máximo” para o 3, de modo que “3 dias” se exprime por “dedo-máximo dias”.

(d) Os zulus da África do Sul usam a seguinte equivalência: 6 (“polegar recolhido”), 7 (“ele apontado”).

(e) Os malinké do Sudão Ocidental usam a palavra *dibi* para 40. Essa palavra significa literalmente “um colchão”.

(f) A tribo Mandingo da África Ocidental usa a palavra *kononto* para 9. Essa palavra significa literalmente “para alguém que está no ventre”.

1.2 Números escritos

Escreva 574 e 475 em numerais (a) hieroglíficos egípcios, (b) romanos, (c) gregos áticos, (d) cuneiformes babilônicos, (e) tradicionais chineses-japoneses, (f) gregos alfabéticos, (g) maias.

Indique em numerais romanos: (h) $1/4$ de MCXXVIII, (i) 4 vezes XCIV.

Indique em numerais gregos alfabéticos: (j) $1/8$ de $\tau\delta$, (k) 8 vezes $\rho\kappa\alpha$.

1.3 Sistema de numeração grego alfabético

(a) Quantos símbolos diferentes devem ser memorizados para escrever os números menores do que 1000 no sistema alfabético grego? E no sistema hieroglífico egípcio? E no sistema babilônico cuneiforme?

(b) No sistema de numeração grego alfabético os números 1000, 2000, ..., 9000 eram muitas vezes representados apostofrando-se os símbolos de 1, 2, ..., 9. Assim o 1000 poderia aparecer como α' . O símbolo para 10 000, ou *miriade*, era M. Usava-se o princípio da multiplicação para os múltiplos de 10 000. Assim 20 000, 300 000 e 4 000 000 eram indicados por βM , λM e νM . Escreva com numerais gregos alfabéticos os números 5780, 72 803, 450 082 e 3 257 888.

(c) Faça uma tábua da adição até $10 + 10$ e uma tábua da multiplicação até 10×10 para o sistema de numeração grego alfabético.

1.4 Sistemas de numeração antigos e hipotéticos

(a) Como uma alternativa aos símbolos de numerais cuneiformes, os babilônios às vezes usavam símbolos de numerais *circulares*, assim chamados por serem formados de impressões em forma circular feitas com um estilo de extremidade circular numa tábua de argila. Nesse caso os símbolos para o 1 e o 10 eram $\overline{\text{D}}$ e O . Escreva com numerais babilônicos circulares os números: 5780, 72 803, 450 082 e 3 257 888.

(b) Enuncie uma regra simples para multiplicar por 10 um número expresso em numerais hieroglíficos.

(c) Um sistema de numeração muito interessante é o *chinês científico* (ou *em barras*) que provavelmente remonta no tempo a mais de dois milênios. O sistema é essencialmente posicional, de base 10. A Figura 2 mostra como se representam os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 quando aparecem em posições ímpares (unidades, centenas etc.). Mas esses dígitos, quando aparecem em posições pares (dezenas, milhares etc.), são representados como mostra a Figura 3. Nesse sistema passou-se a usar um círculo, O , como zero a partir da dinastia Sung (960-1126). Escreva, com numerais em barra, os números 5780, 72 803, 450 082 e 3 257 888.



Figura 2

(d) Num sistema de agrupamentos simples de base 5 representemos 1, 5, 5^2 e 5^3 por /, *, \supset e \subset . Expresse os números 360, 252, 78 e 33 nesse sistema.

(e) Num sistema de numeração posicional de base 5 representemos 0, 1, 2, 3 e 4 por #, /, *, \supset e \subset . Expresse os números 360, 252, 78 e 33 nesse sistema.



Figura 3

1.5 Números digitais

(a) A representação de números por meio de dedos foi usada por muitos séculos; desse uso desenvolveram-se processos para a realização de cálculos simples. Um desses processos, que permite obter o produto de dois números entre 5 e 10, servia para reduzir o trabalho de memorização ligado a tábuas de multiplicação. Por exemplo, para multiplicar 7 por 9, erga $7 - 5 = 2$ dedos de uma das mãos e $9 - 5 = 4$ da outra. A soma $2 + 4 = 6$ dos dedos erguidos fornece as dezenas, ao passo que o produto 3×1 dos dedos fechados fornece as unidades do produto que é, portanto, 63. Esse processo ainda é utilizado por alguns camponeses europeus. Prove que ele sempre conduz a resultados corretos.

(b) Explique o quebra-cabeça do século IX às vezes atribuído a Alcuíno (c. 775): “Eu vi um homem com 8 em sua mão, e do 8 ele tirou 7, e o que restou foi 6”.

(c) Explique o texto seguinte, encontrado na décima sátira de Juvenal: “Feliz de fato é ele que retardou tanto a hora de sua morte que ao fim enumerou seus anos sobre sua mão direita”.

1.6 Notação posicional para frações

Os números fracionários podem ser expressos, na base usual, por dígitos que seguem a vírgula decimal. Pode-se usar também a mesma notação para outras bases; portanto, da mesma forma que 0,3012 representa

$$3/10 + 0/10^2 + 1/10^3 + 2/10^4$$

a expressão $(0,3012)_b$ representa

$$3/b + 0/b^2 + 1/b^3 + 2/b^4.$$

Uma expressão como $(0,3012)_b$ pode ser chamada de *fração posicional* na base b . No caso $b = 10$ o nome usado é *fração decimal*.

- (a) Mostre como transformar uma fração posicional na base b numa fração decimal.
- (b) Mostre como transformar uma fração decimal numa fração posicional na base b .
- (c) Aproxime até a quarta casa, como frações decimais, as frações posicionais $(0,3012)_4$ e $(0,3t1e)_{12}$.
- (d) Aproxime até a quarta casa, como fração posicional, primeiro na base 7 e depois na base 12, a fração decimal 0,4402.

1.7 Aritmética em outras bases

- (a) Construa as tábuas de adição e multiplicação nas bases 7 e 12.
- (b) Efetue a adição e a multiplicação de $(3406)_7$ e $(251)_7$, primeiro usando as tábuas da parte (a) e depois fazendo a conversão para a base 10. Faça o mesmo com $(3t04e)_{12}$ e $(51tt)_{12}$.
- (c) Podemos aplicar as tábuas da base 12 para problemas de mensuração simples envolvendo pés e polegadas. Por exemplo, se tomarmos um pé como unidade, então 3 pés e 7 polegadas* se tornam $(3,7)_{12}$. Para encontrar, com a máxima aproximação até polegadas quadradas, a área de um retângulo de 3 pés e 7 polegadas de base por 2 pés e 4 polegadas de altura, podemos multiplicar $(3,7)_{12}$ por $(2,4)_{12}$ e então converter o resultado em pés quadrados e polegadas quadradas. Complete esse exemplo.

1.8 Problemas envolvendo notação em outras bases

- (a) Expresse $(3012)_5$ na base 8.
- (b) Em que base se tem $3 \times 3 = 10$? E $3 \times 3 = 11$? E $3 \times 3 = 12$?
- (c) Pode um número par ser representado em alguma base por 27? E por 37? Pode um número ímpar ser representado em alguma base por 72? E por 82?
- (d) Determine b de maneira que $79 = (142)_b$. Determine b de maneira que $72 = (2200)_b$.
- (e) Um número de três algarismos na base 7 se expressa pelos mesmos algarismos, porém na ordem contrária, na base 9. Determine os três algarismos.
- (f) Qual a menor base em que 301 representa um inteiro quadrado?
- (g) Se $b > 2$, mostre que $(121)_b$ é um inteiro quadrado. Se $b > 4$, mostre que $(40001)_b$ é divisível por $(221)_b$.

* 1 pé = 12 polegadas. (N. T.)

1.9 Alguns aspectos recreativos da base binária

O sistema de numeração posicional binário tem aplicações em vários ramos da matemática. Há também muitos jogos e quebra-cabeças, como o bem conhecido jogo *Nim* e o quebra-cabeça dos *anéis chineses*, cujas soluções dependem desse sistema. Seguem-se dois quebra-cabeças simples dessa natureza.

(a) Mostre como se pode pesar, com uma balança de pratos simples, um peso w de um número inteiro de libras, usando-se pesos de uma libra, duas libras, 2^2 libras, 2^3 libras e assim por diante, havendo apenas um peso de cada tipo.

(b) Considere as quatro fichas seguintes, formadas por números de 1 a 15.

1	9	2	10	4	12	8	12
3	11	3	11	5	13	9	13
5	13	6	14	6	14	10	14
7	15	7	15	7	15	11	15

Na primeira ficha estão todos os números cujo último algarismo na base binária é 1; na segunda estão todos os números cujo segundo algarismo, a partir da direita, é 1; na terceira estão aqueles cujo terceiro algarismo, a partir da direita, é 1; e na quarta aqueles cujo quarto algarismo, a partir da direita, é 1. Pede-se então que alguém pense num número N de 1 a 15 e para dizer em que fichas se encontra esse número. Fica fácil então descobrir o número N : basta somar os números que ficam no topo, à esquerda, das fichas em que ele aparece. Construa um conjunto semelhante de seis fichas para descobrir qualquer número de 1 a 63. Já se observou que, se os números fossem escritos em fichas pesando 1, 2, 4, ... unidades, então um autômato, na forma de uma balança postal, automaticamente expressaria o número N .

1.10 Alguns truques numéricos

Muitos dos truques numéricos, nos quais se deve “adivinhar um número escolhido”, têm explicações que dependem de nosso próprio sistema posicional. Descubra os seguintes truques dessa natureza:

(a) Pede-se a uma pessoa que pense num número de dois algarismos. Solicita-se então a ela para multiplicar o algarismo das dezenas do número pensado por 5, somar 7, dobrar, somar o algarismo das unidades do número original e anunciar o resultado final. Subtraindo-se 14 desse resultado, descobre-se o número pensado.

(b) Pede-se a alguém que pense num número de três algarismos. Solicita-se a esse alguém para multiplicar o algarismo das centenas por 2, somar 3, multiplicar por 5,

somar 7, somar o algarismo das dezenas, multiplicar por 2, somar 3, multiplicar por 5, somar o algarismo das unidades e anunciar o resultado. Subtraindo-se secretamente 235 desse resultado, obtém-se o número pensado.

(c) Solicita-se a alguém que pense num número de três algarismos tal que o algarismo das unidades e o das centenas sejam diferentes. Pede-se então que esse alguém encontre a diferença entre o número pensado e o número obtido invertendo-se a ordem dos algarismos. Após a revelação do último algarismo dessa diferença, pode-se dizer com certeza qual é a diferença. Como se faz isso?

Temas

- 1/1 Possível senso numérico no mundo animal.
- 1/2 Evidências linguísticas do uso, em alguma época, de bases diferentes da decimal.
- 1/3 Vantagens e desvantagens de bases diferentes da decimal.
- 1/4 A história dos materiais de escrita.
- 1/5 A luta entre abacistas e algoristas.
- 1/6 Números e aritmética digitais.
- 1/7 A aritmética no ábaco.
- 1/8 O quipo antigo.
- 1/9 Aritmética maia.
- 1/10 Barras de calcular.
- 1/11 O zero babilônico.
- 1/12 Tabus numéricos.
- 1/13 O mistério da pedra de Kensington.
- 1/14 Algumas origens fantasiosas dos nossos símbolos numerais.
- 1/15 Confronto entre o ábaco e a calculadora eletrônica de mesa.

*Bibliografia*⁴

ANDREWS, F. E. *New Numbers*. Nova York, Harcourt, Brace & World, 1935.

ASCHER, Mareia e ASCHER, Robert. *Code of the Quipu: A Study in Media, Mathematics and Culture*. Ann Arbor (Michigan), University of Michigan Press, 1981.

⁴ Ver bibliografia geral como suplemento desta e das bibliografias nos capítulos seguintes.

- BALL, W. W. R. e COXETER, H. S. R.. *Mathematical Recreations and Essays*. 12ª ed. Toronto, University of Toronto Press, 1974. Reimpresso por Dover, Nova York.
- CAJORI, Florian. *A History of Mathematical Notations*. Chicago, Open Court Publishing, 1928-1929, 2 vols.
- CLOSS, M. P. (ed.). *Native American Mathematics*. Austin (Tex.), University of Texas Press, 1986.
- COHEN, P. C. *A Calculating People: The Spread of Numeracy in North America*. Chicago, University of Chicago Press, 1983.
- CONANT, L. L. *The Number Concept: Its Origin and Development*. Nova York, MacMillan, 1923.
- DANTZIG, Tobias. *Number: The Language of Science*. Nova York, MacMillan, 1946.
- FLEGG, Graham. *Numbers: Their History and Meanings*. Glasgow, Andrew Deutch Ltd.; Nova York, Schocken Books, 1983.
- FREITAG, H. T. e FREITAG, A. H.. *The Number Story*. Washington, D.C., National Council of Teachers of Mathematics, 1960.
- GALLENKAMP, Charles. *Maya*. Nova York, McKay, 1959.
- GATES, W. E. *Yucatan Before and After the Conquest, by Friar Diego de Landa, etc.* Maya Society Publications, nº 20, Baltimore The Maya Society, 1937.
- GLASER, Anton. *History of Binary and Other Nondecimal Numeration*. Publicado por Anton Glaser, 1237 Whitney Road, Southampton, Pensilvânia 18.966, 1971.
- HILL, G. F. *The Development of Arabic Numerals in Europe*. Nova York, Oxford University Press, 1915.
- IFRAH, Georges. *From One to Zero: A Universal History of Numbers*. Trad. para o inglês por Lowell Bair. Nova York, Viking Press, 1985.
- KARPINSKI, Louis Charles. *The History of Arithmetic*. Nova York, Russell & Russell, 1965.
- KRAITCHIK, Maurice. *Mathematical Recreations*. Nova York, W. W. Norton, 1942.
- LARSON, H. D. *Arithmetics for Colleges*. Nova York, Macmillan, 1950.
- LOCKE, L. Leland. *The Ancient Quipu or Peruvian Knot Record*. Nova York, American Museum of Natural History, 1923.
- MENNINGER, Karl. *Number Words and Number Symbols, A Cultural History of Numbers*. Cambridge (Mass.), M. I. T. Press, 1969.
- MORLEY, S. G. *An Introduction to the Study of the Maya Hieroglyphs*. Washington, D.C., Government Printing Office, 1915.
- . *The Ancient Maya*. Stanford (Calif.), Stanford University Press, 1956.
- ORE, Oystein. *Number Theory and Its History*. Nova York, McGraw-Hill, 1948.
- PULLAN, J. M. *The History of the Abacus*. Nova York, Praeger, 1968.
- RINGENBERG, L. A. *A Portrait of 2*. Washington, D.C., National Council of Teachers of Mathematics, 1956.

- SCRIBA, Christopher. *The Concept of Number*. Mannheim, Bibliographisches Institut, 1968.
- SMELTZER, Donald. *Man and Number*. Nova York, Emerson Books, 1958.
- SMITH, D. E. *Number Stories of Long Ago*. Washington, D.C., National Council of Teachers of Mathematics, 1958.
- SMITH, D. E. e GINSBURG, Jekuthiel. *Numbers and Numerals*. Washington, D.C., National Council of Teachers of Mathematics, 1958.
- SMITH, D. E. e KARPINSKI, L. C. *The Hindu-Arabic Numerals*. Boston, Ginn, 1911.
- SWAIN, R. L. *Understanding Arithmetic*. Nova York, Holt, Rinehart and Winston, 1957.
- TERRY, G. S. *Duodecimal Arithmetic*. Londres, Longmans, Green, 1938.
- . *The Dozen System*. Londres, Longmans, Green, 1941.
- THOMPSON, J. E. S. “Maya arithmetica”. *Contributions to American Anthropology and History*. Washington, D.C., Carnegie Institution of Washington Publication, vol. 36, nº 528, 1941, pp. 37-62.
- . *The Rise and Fall of Maya Civilization*. Norman (Okla.), University of Oklahoma Press, 1954.
- VON HAGEN, Victor M. *Maya: Land of the Turkey and the Deer*. Cleveland, Word Publishing, 1960.
- YOSHINO, Y. *The Japanese Abacus Explained*. Nova York, Dover, 1963.
- ZASLAVSKY, Claudia. *Africa Counts: Number and Pattern in African Culture*. Boston, Prindle, Weber & Schmidt, 1973. Republicado por Lawrence-Hill & Company, Westport (Conn.).

Panorama Cultural II

A Revolução Agrícola

Os berços da civilização — c. 3000-525 a.C.
(Para acompanhar o Capítulo 2)

Perto do final da Idade da Pedra, em certas partes do mundo, os povos foram impedidos para uma agricultura intensiva e em grande escala, em virtude de mudanças no clima do mundo. As vastas e ervosas savanas onde os caçadores da Idade da Pedra viviam começaram a se contrair no fim do período Neolítico, como acontece ainda hoje. Em alguns lugares, as florestas em expansão começaram a invadir as savanas; em outros lugares as savanas se tornaram áridas e sem vida, transformando-se em desertos. Conforme seu meio ambiente mudava, o homem adaptava-se como podia. Na Europa, sul da África, sudeste da Ásia e a leste das Américas do Norte e do Sul, os povos deslocaram-se para novas florestas e tornaram-se caçadores dos bosques, o que requeria uma adaptação menor.

Nos crescentes desertos do norte da África, do Oriente Médio e da Ásia Central, porém, a transformação não foi tão simples. Conforme a vegetação murchava e os ribeiros secavam, conforme dunas de areia enormes punham-se em marcha a partir dos centros dos novos desertos, os animais que haviam vivido nessas regiões deixavam-nas, abrindo caminho para algum oásis, e seguindo em frente quando o oásis secava. Os homens seguiam os animais em sua fuga ante o avanço das imensas dunas, eventualmente estabelecendo-se nas margens dos desertos em regiões úmidas semelhantes a oásis. Esses novos lugares eram como cisternas para todas as formas de vida, incluindo os seres humanos, e grande número de homens e mulheres passaram a viver neles depois de sua fuga do deserto. Na África, com o avanço do deserto do Sahara, que fora outrora uma pradaria ondulante, o vale do rio Nilo oferecia água para os animais que migravam e para seus caçadores humanos. No Oriente Médio, os rios Tigre e Eufrates, dividindo um único vale, formavam uma cisterna para aqueles que fugiam do crescente deserto Árabe. O vale do rio Indo, na periferia do deserto de Thar na Índia e o vale do rio Amarelo na China, junto ao deserto de Gobi, também serviam de cisternas. Nas Américas, embora em época posterior, a planície costeira do Pacífico tornou-se seca e murcha, e os povos escalaram os altos picos da serra Madre no México e América Central e os Andes no Peru e na Colômbia onde as montanhas elevadas arranhavam as nuvens e a chuva rompia livre. Hoje verifica-se um processo de desertificação semelhante e em escala terrível na África, onde o Saara outra vez

avança e os povos das pastagens ressequidas são empurrados para campos de refugiados ao longo do rio Níger e do alto Nílo.

As civilizações que emergiram dessas cisternas diferiam amplamente das sociedades de caçadores/colhedores da Idade da Pedra. A densidade populacional tornara-se alta demais para permitir que se continuasse sobrevivendo como caçadores e colhedores. Para se precaverem da fome, os povos desses lugares tiveram de encontrar outros meios de obter alimentos. Não é de surpreender, pois, que se voltassem para a agricultura intensiva que podia alimentar populações de até 40 pessoas por milha quadrada. Isso foi uma espécie de “Revolução Agrícola” que precipitou profundas modificações culturais.

Uma das mudanças foi a criação da escrita. O cultivo da terra significou irrigação dos vales do norte da África e do Oriente Médio onde a chuva era muito escassa; as periódicas cheias do Amarelo, do Nílo, do Tigre e do Eufrates significaram construções de barragens — atividade que requeria não só cooperação e a arte da engenharia como também, igualmente, um sistema de preservação de registros. Os agricultores precisavam saber quando as enchentes ou a estação das chuvas chegariam, e isso significava calendários e almanaques. Os proprietários de terra mantinham anotações escritas sobre a produção agrícola e traçavam mapas que especificavam as valas de irrigação. Os agricultores rezavam aos deuses para que as cheias e as chuvas pudessem vir conforme as tabelas e, no processo, observavam o movimento das estrelas. Todas essas atividades deram origem a novas classes de homens educados: sacerdotes, escribas e astrólogos.

Junto com a capacidade de ler e escrever veio a necessidade de novas tecnologias. Os primeiros engenheiros planejaram barragens e sistemas de irrigação. Os arados de metal eram melhores do que os de madeira; o homem aprendeu a forjar o bronze por volta de 3000 a.C. e o ferro por volta de 1100 a.C. A necessidade de instrumentos especializados gerou a necessidade de mais uma nova classe social: os artesãos especializados.

Outra importante mudança foi a adoção de um estilo de vida sedentário. Ao contrário dos caçadores e colhedores, os agricultores não precisavam viajar grandes distâncias à procura de alimentos. Eles construíam aldeias e vilas permanentes e pequenas cidades brotavam ao longo das margens dos rios. Perto de 2500 a.C. as cidades de Mênfis e Tebas despontavam como as metrópoles líderes do Egito; não muito depois o faraó Pepi II (?-c. 2200 a.C.) construiu a cidade de Heracleópolis para ser sua capital. No vale do Tigre e do Eufrates, despontou primeiro a cidade de Ur, por volta de 3000 a.C. Embora pequenas para os padrões modernos, essas primeiras cidades se agigantavam em face dos antigos lugarejos do Neolítico. Ur tinha 24 000 habitantes e uma área de 150 acres. As cidades propiciavam condições para mercados onde agricultores e artesãos podiam trocar bens, surgindo daí, para facilitar o processo, uma classe de mercadores.

Pela primeira vez na história, alguns povos tinham tempo de lazer. Enquanto os agricultores, que formavam a maioria da população durante a Revolução Agrícola, gastavam o dia todo no trabalho, outras pessoas — reis, sacerdotes, mercadores e

escribas — tinham tempo ao fim do dia para ponderar sobre os mistérios da natureza e da ciência. Por fim, todos os ingredientes para o progresso científico estavam reunidos: escrita, necessidade de novas tecnologias, ambientes urbanos e tempo de lazer. É natural, portanto, que os historiadores se refiram ao Egito, à Índia, à China e ao Oriente Médio antigo como “berços da civilização”. (Os desertos nas Américas apareceram mais tarde do que os do hemisfério oriental; daí porque a Revolução Agrícola no ocidente demorou mais a vir. Hoje, porém, os historiadores reconhecem que o México e o Peru, durante os dias dos maias e dos incas, e seus antepassados, também foram “berços da civilização”).

Os agricultores desenvolveram novas formas de organização política. Na Idade da Pedra o “governo” havia sido a tribo ou o clã — um bando pequeno de homens e mulheres ligados entre si por laços de parentesco sob a direção nominal de um chefe. As complexas atividades paralelas ao plantio (cultivo de áreas comuns, construção de celeiros, escavação de valas para a irrigação, regulamentação dos mercados para proteger compradores incautos, apaziguamento dos deuses) requeriam um sistema mais centralizado de governo. Substituíram-se as tribos por cidades-Estado, reinos e pequenos impérios e o chefe tribal foi suplantado por vastas burocracias.

A cidade-Estado, que foi a forma de governo mais comum na infância da civilização, consistia em uma única cidade ou vila e a zona rural que a cercava. Minúscula para os padrões modernos, as cidades-Estado eram tão pequenas que, na sua forma ideal, conforme foram descritas pelo filósofo chinês Confúcio (551-479 a.C.), um cidadão deveria ouvir os galos cantando em países das regiões vizinhas. Cada um dos berços da civilização foi dividido, mais cedo ou mais tarde, em cidades-Estado: o Egito entre 2200 a.C. e 2050 a.C., e outra vez entre 1786 a.C. e 1575 a.C., o vale dos rios Tigre e Eufrates entre aproximadamente 3000 a.C. e 2150 a.C.; a China de 600 a.C. (ou antes) até 221 a.C. O mais das vezes uma cidade-Estado era governada por uma oligarquia, um grupo pequeno de cidadãos ricos. Umhas poucas eram, porém, monarquias e algumas outras teocracias (onde o poder era exercido por uma classe de sacerdotes). Bem poucas eram repúblicas, com uma participação ampla dos cidadãos nos negócios do Estado. Visitaremos algumas dessas repúblicas na Grécia, em Roma e em Cartago nos Panoramas Culturais III e IV.

Em cada um dos berços da civilização, as cidades-Estado eventualmente deram origem a impérios em expansão. De acordo com a tradição, o Egito foi unificado sob um único faraó em 3100 a.C, no início da Revolução Agrícola, embora, ao que parece, o reinado tivesse se desintegrado por volta de 2200 a.C. numa coleção de pequenos principados governados por nobres de grau inferior chamados nomarcas. Em 1575 a.C. o Egito foi reunificado sob um governo único e absoluto e permaneceria assim até ser conquistado pela Pérsia em 525 a.C. Como no caso do Egito, consta da tradição que a China na Antiguidade era um país unido sob a misteriosa dinastia Hsia, sobre a qual realmente pouco se conhece. Entre 1500 a.C. e 1027 a.C., as terras ao longo do rio Amarelo eram governadas da cidade de An-Yang pela dinastia Shang e, depois disso, pela dinastia Chou. Por volta de 600 a.C. o poder Chou de-

clinar e a China tornara-se na realidade um conjunto de cidades-Estado permanecendo assim até ser unificada em 221 a.C. pela dinastia Chin. Esta deu lugar, 15 anos mais tarde, à dinastia Han que estabeleceu um império que iria durar até o ano 221 d.C. Tanto no Egito como na China não se tem certeza sobre se as dinastias tradicionais dos primeiros tempos representavam impérios centralizados ou se acontecia simplesmente de certas cidades-Estado mais fortes dominarem seus vizinhos; mais tarde, porém, verifica-se a presença de dinastas que governavam grandes e coesivos impérios como autocratas poderosos. A unificação do vale dos rios Tigre e Eufrates no Oriente Médio num império foi levada a termo pela primeira vez pelo guerreiro Sargão I (c. 2276-2221 a.C.), embora seu reinado se fragmentasse logo após a sua morte. Uma unificação permanente só se deu quando os invasores amoritas conquistaram o vale em aproximadamente 2000 a.C. e formaram o império babilônico. Desconhece-se que sistemas políticos existiram no vale do rio Indo.

Os benefícios da nova civilização agrícola não eram desfrutados igualmente por todos. Havia divisões de classes rígidas. A maioria do povo, provavelmente mais do que 90%, era constituída de lavradores pobres. Estes não sabiam ler ou escrever. Muitas vezes sequer eram donos da terra que cultivavam, que pertencia a algum suserano. Trabalhavam incessantemente e mal dispunham de tempo para descanso ou lazer. Embora fizessem a maior parte do trabalho, pouco acesso tinham ao conforto material e à riqueza que se concentrava nas mãos de uma pequena classe superior constituída de senhores, sacerdotes e guerreiros (a primeira guerra que a história registra é uma batalha sobre uma vala de irrigação no Oriente Médio, por volta de 2000 a.C.), mercadores e artífices. Abaixo ainda dos agricultores na escala social estavam os escravos, geralmente vítimas das guerras de conquista e as mulheres que, com poucas exceções, eram tratadas apenas como trabalhadoras e geradoras de crianças e não tinham nenhuma oportunidade de se alçarem intelectualmente.

Nem todas as sociedades agrícolas eram idênticas. Nas bordas dos vales cultivados viviam tribos de pastores nômades que periodicamente faziam guerra a seus vizinhos que viviam do trato da terra. Os nômades arianos da Ásia Central possivelmente varreram a civilização do rio Indo na Índia. O Oriente Médio assistiu à invasão de inúmeras hostes em sucessivas ondas de cavaleiros vindos do deserto Árabe ou guerreiros ferozes vindos das montanhas Zagros. Cada novo conquistador arvorava-se em classe governante e adotava os costumes e modos do povo derrotado. Dentre os conquistadores estavam os amoritas, que invadiram o vale dos rios Tigre e Eufrates por volta de 2000 a.C., assimilaram a cultura local e produziram o código Hamurabi de leis. Os amoritas fundaram a cidade de Babilônia e dela governaram um grande império que durou um milênio, até que os assírios conquistassem a região entre os dois rios. Os assírios, por sua vez, foram derrotados por uma revolta ocorrida proximamente ao ano 600 a.C., tendo os rebeldes criado o império caldeu ou neobabilônico. Em 550 a.C. os persas se congregaram nas montanhas Zagros de onde partiram para a conquista da Babilônia. A China sofreu ameaças de invasões vindas do deserto de Gobi mas diligenciou sempre para manter afastados os supostos conquistadores.

Em suma, o período de 3000 a 525 a.C. testemunhou o nascimento de uma nova civilização humana cuja centelha foi uma Revolução Agrícola. Novas sociedades baseadas na economia agrícola emergiram das névoas da Idade da Pedra nos vales dos rios Nilo, Amarelo, Indo e Tigre e Eufrates. Esses povos criaram escritas; trabalharam metais; construíram cidades; desenvolveram empiricamente a matemática básica da agrimensura, da engenharia e do comércio; e geraram classes superiores que tinham tempo bastante de lazer para se deter e considerar os mistérios da natureza. Depois de milhões de anos, afinal a humanidade tomava a trilha das realizações científicas.

A matemática babilônica e egípcia

2.1 O Oriente antigo

A matemática primitiva necessitava de um embasamento prático para se desenvolver, e esse embasamento veio a surgir com a evolução para formas mais avançadas de sociedade. Foi ao longo de alguns dos grandes rios da África e da Ásia que se deu o aparecimento de novas formas de sociedade: o Nilo na África, o Tigre e o Eufrates na Ásia Ocidental, o Indo e depois o Ganges no sul da Ásia Central e o Howang Ho e depois o Yangtze na Ásia Oriental. Com a drenagem de pântanos, o controle de inundações e a irrigação era possível transformar as terras ao longo desses rios em regiões agricultáveis ricas. Projetos extensivos dessa natureza não só serviram para ligar localidades anteriormente separadas, como também a engenharia, o financiamento e a administração desses projetos, e os propósitos que os motivaram requeriam o desenvolvimento de considerável tecnologia e da matemática concomitante. Assim, pode-se dizer que a matemática primitiva originou-se em certas áreas do Oriente Antigo primordialmente como uma ciência prática para assistir a atividades ligadas à agricultura e à engenharia. Essas atividades requeriam o cálculo de um calendário utilizável, o desenvolvimento de um sistema de pesos e medidas para ser empregado na colheita, armazenamento e distribuição de alimentos, a criação de métodos de agrimensura para a construção de canais e reservatórios e para dividir a terra e a instituição de práticas financeiras e comerciais para o lançamento e a arrecadação de taxas e para propósitos mercantis¹.

Como vimos, a ênfase inicial da matemática ocorreu na aritmética e na mensuração práticas. Uma arte especial começou a tomar corpo para o cultivo, aplicação e ensino dessa ciência prática. Nesse contexto, todavia, desenvolvem-se tendências no sentido da abstração e, até certo ponto, passou-se então a estudar a ciência por si mesma. Foi dessa maneira que a álgebra evoluiu ao fim da aritmética e a geometria teórica originou-se da mensuração.

¹ Há uma tese alternativa que localiza a origem da matemática em rituais religiosos — sendo posteriores as contribuições da agricultura, comércio e agrimensura. Ver “The ritual origin of geometry”, *Archive for History of Exact Sciences*, nº 1, 1962, pp. 488-527, e “The ritual origin of counting”, *Archive for History of Exact Sciences*, nº 2, 1962, pp. 1-40, de A. Seidenberg. Outra tese que pode ser aventada é a que situa na arte, a linguagem universal do homem, a origem da matemática.

Deve-se notar, contudo, que nenhum exemplo do que hoje chamamos demonstração pode ser encontrado na matemática oriental antiga. Em vez de um argumento encontra-se meramente a descrição de um processo. Instrui-se: “Faça assim e assim”. Além disso, exceto possivelmente em alguns casos, essas instruções não eram dadas na forma de regras gerais, mas simplesmente aplicadas a sequências de casos específicos. Assim, se é para explicar a resolução de uma equação quadrática, não se encontram nem a dedução do processo usado nem a descrição geral do processo, mas ao invés disso nos são oferecidas várias equações específicas e somos informados, passo a passo, como proceder para resolver cada um dos exemplos. Por mais insatisfatório que o procedimento “faça assim e assim” possa nos parecer, não deveria causar estranheza, pois é em grande medida o procedimento que nós mesmos usamos no ensino de partes da matemática elementar no primeiro e segundo graus.

Há dificuldades em localizar no tempo as descobertas feitas no Oriente Antigo. Uma dessas dificuldades reside na natureza estática da estrutura social e no prolongado isolamento de certas áreas. Outra dificuldade se deve aos materiais de escrita sobre os quais as descobertas se preservaram. Os babilônios usavam tábulas de argila cozida e os egípcios usavam pedra e papiros, tendo estes últimos felizmente existência duradoura em virtude do pouco comum clima seco da região. Mas os primitivos chineses e indianos usavam material muito perecível, como casca de árvore e bambu. Assim, enquanto se dispõe de apreciável quantidade de informações definidas sobre a matemática dos antigos babilônios e egípcios, muito pouco se conhece sobre essa matéria, com certo grau de certeza, no que diz respeito à China e à Índia na mesma época. Consequentemente este capítulo, que se dedica amplamente à matemática dos séculos pré-helênicos, se limitará à Babilônia e ao Egito.

BABILÔNIA

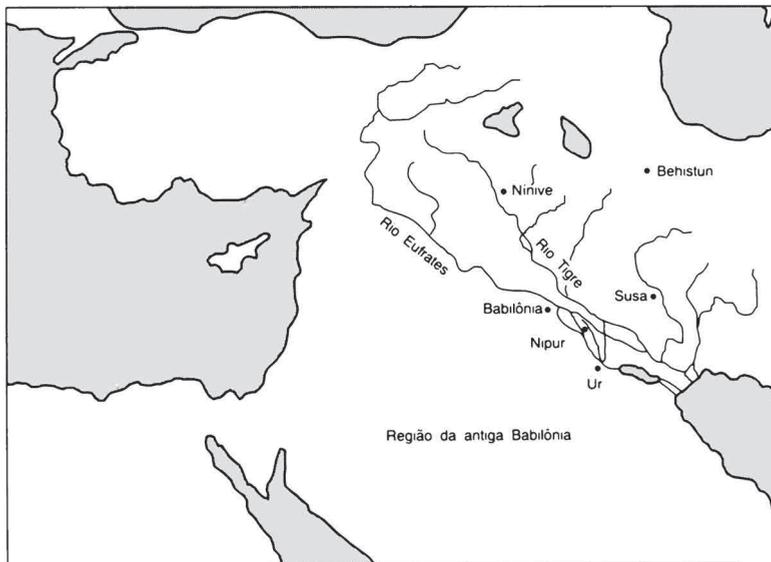
2.2 Fontes

Os arqueólogos vêm trabalhando na Mesopotâmia sistematicamente desde antes da metade do século XIX, tendo já desenterrado mais de meio milhão de tábulas de argila. Somente no sítio da antiga Nipur foram escavadas mais de 50 000 tábulas. Os museus de Paris, Berlim e Londres e as Universidades de Yale, Colúmbia e Pensilvânia têm excelentes coleções dessas tábulas. Estas são de tamanho variável, desde as pequenas de umas poucas polegadas quadradas até algumas do tamanho aproximado deste livro, sendo a espessura destas últimas, em torno de seu centro, de aproximadamente uma polegada e meia. Os escritos às vezes aparecem em apenas uma das faces da tabu-la, às vezes em ambas e frequentemente em seu contorno arredondado.

Das cerca de meio milhão de tábulas, quase 400 foram identificadas como estritamente matemáticas, constituídas que são de tábuas e listas de problemas matemáticos.

Devemos nosso conhecimento da matemática babilônica antiga² ao sábio trabalho de decifrar e interpretar muitas dessas tábulas matemáticas.

Somente pouco antes de 1800, quando viajantes europeus notaram as inscrições que acompanham um monumental baixo-relevo esculpido uns 300 pés* acima do solo num grande rochedo calcáreo perto da aldeia de Behistun, na região noroeste do atual Irã, é que começaram as tentativas bem-sucedidas de decifrar a escrita cuneiforme. O quebra-cabeça das inscrições foi finalmente desvendado em 1846 pela pertinácia notável de Sir Henry Creswicke Rawlinson (1810-1895), um diplomata inglês e assiriologista que aperfeiçoou uma chave sugerida anteriormente pelo arqueólogo e filólogo alemão Georg Friedrich Grotefend (1775-1853). As inscrições estão gravadas em 13 painéis sobre uma superfície lisa de 150 pés por 100 pés em três línguas: persa antigo, elamita e acadiano, todas as quais empregavam escrita cuneiforme. O relevo e as inscrições foram executados em 516 a.C. sob as ordens de Dario, o Grande.



Com a capacidade de ler textos cuneiformes das tábulas babilônicas escavadas, concluiu-se que estas dizem respeito a todas as fases e interesses da vida diária e percorrem muitos períodos da história babilônica. Há textos matemáticos que datam talvez de 2100 a.C., no último período sumério; um segundo e bastante grande

² Deve-se entender que se usa o termo descritivo *babilônico* meramente por conveniência, pois muitos povos além dos babilônios, como os sumérios, os acadianos, os caldeus, os assírios e outros povos antigos que habitaram a área, numa época ou outra, também se incluem na designação geral.

* 1 pé = 30,48 cm, aproximadamente. (N. T.)

grupo da sucessiva Primeira Dinastia Babilônica, a era do rei Hamurabi, chegando até por volta de 1600 a.C.; e um terceiro e generoso suprimento estendendo-se de aproximadamente 600 a.C. a 300 d.C., cobrindo o império neobabilônico do rei Nabucodonosor e as eras persa e selêucida que se seguiram. A lacuna entre o segundo e o terceiro grupos coincide com um período especialmente turbulento da história babilônica. A maior parte de nosso conhecimento sobre o conteúdo dessas tábulas matemáticas não é anterior a 1935 e se deve grandemente aos notáveis achados de Otto Neugebauer e F. Thureau-Dangin. Como o trabalho de interpretar essas tábulas ainda prossegue, é bastante provável que novas e igualmente notáveis descobertas venham a acontecer num futuro próximo.

2.3 Matemática agrária e comercial

Mesmo as tábulas mais antigas mostram um alto grau de habilidade computacional e deixam claro que o sistema sexagesimal posicional já estava de longa data estabelecido. Há muitos textos desses primeiros tempos que tratam da distribuição de produtos agrícolas e de cálculos aritméticos baseados nessas transações. As tábulas mostram que os sumérios antigos estavam familiarizados com todos os tipos de contratos legais e usuais, como faturas, recibos, notas promissórias, crédito, juros simples e compostos, hipotecas, escrituras de venda e endossos. Há tábulas que são documentos de empresas comerciais e outras que lidam com sistemas de pesos e medidas.

Muitos processos aritméticos eram efetuados com a ajuda de várias tábuas. Das 400 tábulas matemáticas cerca de metade eram tábuas matemáticas. Estas últimas envolvem tábuas de multiplicação, tábuas de inversos multiplicativos, tábuas de quadrados e cubos e mesmo tábuas de exponenciais. Quanto a estas, provavelmente eram usadas, juntamente com a interpolação, em problemas de juros compostos. As tábuas de inversos eram usadas para reduzir a divisão à multiplicação.

Que o calendário usado pelos babilônios já estava estabelecido muitos séculos antes fica evidenciado pelo fato de que o ano nesse calendário começava no equinócio vernal e que o primeiro mês recebia o nome de Touro. Ora, o Sol encontrava-se em Touro nesse equinócio por volta do ano 4700 a.C. Assim, parece seguro dizer que os babilônios já contavam com um certo tipo de aritmética perto do quarto ou quinto milênio a.C.

Para exemplos relativos à construção e uso de tábuas para transações comerciais, por parte dos babilônios, ver Exercícios 2.1 e 2.2.

2.4 Geometria

A geometria babilônica se relaciona intimamente com a mensuração prática. De numerosos exemplos concretos infere-se que os babilônios do período 2000 a.C. a 1600 a.C. deviam estar familiarizados com as regras gerais da área do retângulo, da área do triângulo retângulo e do triângulo isósceles (e talvez da área de um triângulo genérico), da área de um trapézio retângulo, do volume de um paralelepípedo reto-retângulo e, mais

geralmente, do volume de um prisma reto de base trapezoidal. Considerava-se uma circunferência como o triplo de seu diâmetro e a área do círculo como um duodécimo da área do quadrado de lado igual à circunferência respectiva (regras corretas para $\pi = 3$) e se obtinha o volume de um cilindro circular reto como o produto da base pela altura. O volume de um tronco de cone e o de um tronco de pirâmide quadrangular regular eram calculados erradamente como o produto da altura pela semissoma das bases. Os babilônios também tinham conhecimento de que os lados correspondentes de dois triângulos retângulos semelhantes são proporcionais, que a perpendicular baixada do vértice de um triângulo isósceles em que incidem os lados congruentes divide ao meio a base e que um ângulo inscrito numa semicircunferência é reto. E também conheciam o teorema de Pitágoras (com relação a isto ver Seção 2-6). Há uma tábula recentemente descoberta na qual se usa $3 \frac{1}{8}$ como estimativa para π [ver Exercício 2.5 (b)].

A marca principal da geometria babilônica é seu caráter algébrico. Os problemas mais intrincados expressos em terminologia geométrica são essencialmente problemas de álgebra não triviais. Podem-se encontrar problemas típicos comprovando esse fato nos Exercícios 2.3 e 2.4. Há muitos problemas que dizem respeito a uma transversal paralela a um lado de um triângulo retângulo e que levam a equações quadráticas; há outros que levam a sistemas de equações simultâneas, um deles formado de dez equações com dez incógnitas. Há uma tabula em Yale, possivelmente de 1600 a.C., na qual aparece uma equação cúbica geral na discussão de volumes de troncos de uma pirâmide, como consequência da eliminação de z num sistema de equações do tipo

$$z(x^2 + y^2) = A, \quad z = ay + b \quad x = c.$$

Indubitavelmente devemos aos babilônios antigos a divisão da circunferência de um círculo em 360 partes iguais. Diversas explicações já foram aventadas para a razão dessa escolha, mas nenhuma é tão plausível como a que se segue, sustentada pela imensa autoridade de Otto Neugebauer. Nos remotos tempos dos sumérios, existia uma unidade de medida grande, uma espécie de *milha babilônica*, igual a sete das milhas atuais. Como a milha babilônica era usada para medir distâncias mais longas, era natural que viesse a se transformar numa unidade de tempo, a saber, o tempo necessário para se percorrer uma milha babilônica. Mais tarde, talvez no primeiro milênio a.C., quando a astronomia babilônica atingiu o estágio de manter registros sistemáticos de fenômenos celestes, a milha-tempo babilônica foi adotada para a mensuração de espaços de tempo. Como se determinou que um dia era formado de 12 milhas-tempo, e um dia completo equivale a uma revolução do céu, dividiu-se um ciclo completo em 12 partes iguais. Mas, por conveniência, a milha-tempo babilônica fora dividida em 30 partes iguais. Dessa forma chegamos a $(12)(30) = 360$ partes iguais num ciclo completo.

2.5 Álgebra

Perto do ano 2000 a.C. a aritmética babilônica já havia evoluído para uma álgebra retórica bem desenvolvida. Não só se resolviam equações quadráticas, seja pelo méto-

do equivalente ao de substituição numa fórmula geral, seja pelo método de completar quadrados, como também se discutiam algumas cúbicas (grau três) e algumas biquadradas (grau quatro). Encontrou-se uma tábua que fornece, além de uma tábua de quadrados e de cubos dos inteiros de 1 a 30, também a sequência de valores de $n^2 + n^3$ correspondente a esse intervalo. São dados muitos problemas que levam a cúbicas da forma $x^3 + x^2 = b$, os quais podem ser resolvidos usando-se a tábua de $n^3 + n^2$. O Exercício 2.4 refere-se a possíveis utilizações dessa tábua.

Algumas das tábuas da coleção Yale, datando de cerca de 1600 a.C., catalogam centenas de problemas não resolvidos envolvendo equações simultâneas que levam à resolução de equações biquadradas. Como exemplo temos

$$xy = 600, \quad 150(x - y) - (x + y)^2 = -1000.$$

Como outra ilustração das mesmas tábuas temos um par de equações da forma

$$xy = a, \quad bx^2/y + cy^2/x + d = 0$$

que leva a uma equação de grau seis em x , mas é quadrática em x^3 .

Neugebauer encontrou dois problemas interessantes sobre sequências numa tábua do Louvre datando de por volta de 300 a.C. Um deles afirma que

$$1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^9 = 2^9 + 2^9 - 1$$

e o outro que

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 10^2 = \left[1\left(\frac{1}{3}\right) + 10\left(\frac{2}{3}\right) \right] 55 = 385.$$

Seria de admirar se os babilônios tivessem conhecimento das fórmulas

$$\sum_{i=0}^n r^i = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}$$

e

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{2n+1}{3} \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

A primeira dessas fórmulas era conhecida dos gregos contemporâneos e Arquimedes encontrou uma praticamente equivalente à segunda.

Os babilônios deram algumas aproximações interessantes de raízes quadradas de números não quadrados perfeitos, como $17/12$ para $\sqrt{2}$ e $17/24$ para $1/\sqrt{2}$. Talvez eles usassem a fórmula de aproximação

$$(a^2 + b)^{1/2} \approx a + b/2a.$$

Uma notável aproximação de $\sqrt{2}$ é

$$1 + 24/60 + 51/60^2 + 10/60^3 = 1,4142136,$$

encontrada na tábula 7289 de Yale, de cerca de 1600 a.C. (ver Exercício 2.7).

Há tábulas astronômicas do século III a.C. que fazem uso explícito da regra de sinais da multiplicação.

Podemos concluir, em suma, que os babilônios eram infatigáveis construtores de tábuas, calculistas extremamente hábeis e certamente mais fortes em álgebra do que em geometria. É impressionante a profundidade e a diversidade dos problemas considerados por eles.

2.6 *Plimpton 322*

Talvez a mais notável das tábulas matemáticas babilônicas já analisadas seja aquela conhecida como *Plimpton 322*. O nome indica que se trata da tábula da coleção G. A. Plimpton da Universidade de Colúmbia, catalogada sob o número 322. A tábula foi escrita no período Babilônico Antigo (aproximadamente entre 1900 e 1600 a.C.) e os primeiros a descrever seu conteúdo foram Neugebauer e Sachs em 1945³.

A Figura 4 dá uma ideia da forma da tábula. Infelizmente perdeu-se um pedaço de todo o seu lado esquerdo devido a uma rachadura; além disso a tábula posteriormente foi danificada com a perda de uma lasca profunda em seu lado direito, à altura da metade, e por um descamamento no canto superior esquerdo. Exames revelaram a existência de cristais de uma cola moderna ao longo da rachadura do lado esquerdo. Isso sugere que a tábula provavelmente estava inteira quando foi desenterrada e que posteriormente se quebrou, tendo havido uma tentativa de colar as duas partes que, por fim, acabaram se separando. Assim, é possível que a parte que falta ainda exista mas que, como uma agulha num palheiro, perdeu-se em algum lugar entre as coleções dessas tábulas antigas. Brevemente veremos que seria muito interessante se essa parte que falta fosse encontrada.

A tábula contém três colunas praticamente completas de caracteres que, por conveniência, estão reproduzidos na Figura 4 em nossa notação decimal. Há uma quarta,

³ Mais recentemente Jöran Friberg fez um estudo mais detalhado da tabula. Ver "Methods and traditions of Babylonian mathematics", *Historia Mathematica*, 8, nº 3, ago., 1981, pp. 277-318.

mas incompleta, coluna de caracteres ao longo do lado quebrado. Posteriormente reconstruiremos essa coluna.

119	169	1
3367	4825 (115221)	2
4601	6649	3
12709	18541	4
65	97	5
319	481	6
2291	3541	7
799	1249	8
481 (541)	769	9
4961	8161	10
45	75	11
1679	2929	12
161 (25921)	289	13
1771	3229	14
56	106 (53)	1

Figura 4

É claro que a coluna da extrema direita serve apenas para numerar as linhas. As duas colunas seguintes parecem, à primeira vista, bastante aleatórias. Logo se descobre, porém, que os números correspondentes dessas colunas, com quatro infelizes exceções, constituem a hipotenusa e um cateto de triângulos retângulos de lados inteiros. As quatro exceções estão anotadas na Figura 4 colocando-se os registros originais entre parênteses à direita dos registros corretos. E difícil explicar a exceção da segunda linha⁴, mas nos outros casos isso pode ser feito facilmente. Assim, na nona linha, 481 e 541 aparecem como (8,1) e (9,1) no sistema sexagesimal. Obviamente a ocorrência do 9 em vez do 8 pode ter sido um mero lapso cometido com o estilo ao se escreverem esses números em escrita cuneiforme. O número na linha 13 é o quadrado do valor correto e o da última linha é metade do valor correto.

Um terço de números inteiros, como (3,4,5), cujos termos são lados de um triângulo retângulo, é chamado *terno pitagórico*. Se o único fator inteiro positivo comum aos elementos de um terço pitagórico é a unidade, então esse terço se diz *primitivo*. Assim (3,4,5) é um terço pitagórico primitivo, ao passo que (6,8,10) não é. Um dos grandes feitos matemáticos dos gregos, posterior muitos séculos à tábula *Plimpton 322*, foi mostrar que todos os ternos pitagóricos primitivos (a , b , c) são dados parametricamente por

$$a = 2uv, \quad b = u^2 - v^2 \quad c = u^2 + v^2$$

onde u e v são primos entre si, um é par o outro é ímpar e $u > v$. Assim, para $u = 2$ e $v = 1$, obtemos o terço primitivo $a = 4$, $b = 3$ e $c = 5$.

⁴ Para explicações ver R. J. Gillings, *The Australian Journal of Science*, nº 16, 1953, pp. 34-6 ou Otto Neugebauer, *The exact sciences in antiquity*, 2ª ed. 1962.



Plimpton 322 (Universidade de Colúmbia)

Suponhamos que se calcule o outro cateto a dos triângulos retângulos de lados inteiros determinados pela hipotenusa c e o cateto b da tábula Plimpton. Encontram-se os seguintes ternos pitagóricos:

a	b	c	u	v
120	119	169	12	5
3456	3367	4825	64	27
4800	4601	6649	75	32
13 500	12 709	18 541	125	54
72	65	97	9	4
360	319	481	20	9
2700	2291	3541	54	25
960	799	1249	32	15
600	481	769	25	12
6480	4961	8161	81	40
60	45	75	2	1
2400	1679	2929	48	25
240	161	289	15	8
2700	1771	3229	50	27
90	56	106	9	5

Perceber-se-á que todos esses ternos, exceto os das linhas 11 e 15, são primitivos. Para fins de exame incluímos também uma lista dos valores dos parâmetros u e v que levam a esses ternos pitagóricos. Parece evidente que os babilônios desse remoto período tinham ciência da representação paramétrica geral dos ternos pitagóricos primitivos como foi dada acima. Essa evidência se reforça quando notamos que u e v , e também a (pois $a = 2uv$), são números sexagesimais *regulares* (ver Exercício 2.1). Parece deliberado que a tábua tivesse sido construída escolhendo-se números regulares pequenos para os parâmetros u e v .

A escolha de u e v deve ter sido motivada por algum processo subsequente envolvendo divisão, pois os números regulares aparecem em tábuas de inversos multiplicativos e são usados para reduzir a divisão à multiplicação. Um exame da quarta, e parcialmente destruída coluna, dá a resposta. Pois descobre-se que essa coluna contém os valores de $(c/a)^2$ para os diferentes triângulos. Para se efetuar essa divisão, o lado a , e portanto os números u e v têm que ser regulares.

Vale a pena examinar a coluna de valores $(c/a)^2$ um pouco mais a fundo. Essa coluna, obviamente, é uma tábua que fornece o quadrado da secante do ângulo B oposto ao lado b do triângulo retângulo. Como o lado a é regular, $\sec B$ tem uma representação sexagesimal finita. Além do mais, ocorre que, com a particular escolha dos triângulos como se deu, aqueles valores de $\sec B$ formam uma surpreendente sequência regular que decresce de quase exatos $1/60$ quando se passa de uma linha da tábua para a próxima, decrescendo os ângulos correspondentes de 45° para 31° . Temos assim uma tábua de secantes para ângulos de 45° a 31° , formada por meio de triângulos retângulos de lados inteiros, em que se verifica uma variação em saltos regulares na função em vez de no ângulo correspondente. Tudo isso é verdadeiramente notável. Parece altamente provável que houvesse tábuas acompanhantes que davam informações análogas para ângulos variando de 0° a 15° e de 16° a 30° .

A análise da *Plimpton 322* mostra o exame minucioso a que algumas tábulas matemáticas babilônicas devem ser submetidas. Em épocas anteriores, essa tábua poderia ter sido sumariamente desprezada como sendo um mero registro comercial.

EGITO

2.7 Fontes e datas

São muito diferentes as histórias políticas do Egito e da Babilônia antigos. Esta última era aberta a invasões de povos vizinhos e, como consequência, havia períodos de muita turbulência em que um império sucedia a outro. O Egito antigo, ao contrário, manteve-se em isolamento, protegido naturalmente de invasões estrangeiras, governado pacífica e ininterruptamente por uma sucessão de dinastias. Ambos eram sociedades essencialmente teocráticas governadas por burocratas ricos e poderosos, íntimos da classe sacerdotal. A maior parte do trabalho manual era feita por uma classe escrava numerosa,

que na Babilônia resultava principalmente da derrubada de um império e assunção do poder por algum povo invasor, e no Egito da importação deliberada de nações estrangeiras. Era principalmente essa classe escrava que cavava e mantinha em funcionamento o sistema de irrigação, construía as zigurates na Babilônia e erigia os grandes templos e as pirâmides do Egito. A agrimensura e a engenharia práticas, com sua matemática concomitante, foram criadas para auxiliar no planejamento e na execução desses trabalhos.

Contrariamente à opinião popular, a matemática no Egito antigo nunca alcançou o nível obtido pela matemática babilônica. Esse fato pode ser consequência do desenvolvimento econômico mais avançado da Babilônia. A Babilônia localizava-se numa região que era rota de grandes caravanas, ao passo que o Egito se manteve em semi-isolamento. Nem tampouco o sereno rio Nilo necessitava de obras de engenharia e esforços administrativos na mesma extensão que os caprichosos Tigre e Eufrates.

Não obstante, até que se decifrassem tantas tábulas matemáticas babilônicas, o Egito foi por muito tempo o mais rico campo de pesquisas históricas sobre a Antiguidade. As razões disso podem ser apontadas na veneração que os egípcios tinham por seus mortos e no pouco comum clima seco da região. A primeira levou à construção de tumbas e templos perenes com paredes gravadas com ricas inscrições; a segunda razão teve um papel primordial na preservação de muitos papiros que, de outra forma, teriam perecido.

Segue-se uma lista cronológica de alguns itens tangíveis relacionados com a matemática do Egito antigo. Além desses, há inscrições e papiros de menor importância em grande número, que também contribuíram para nosso conhecimento.

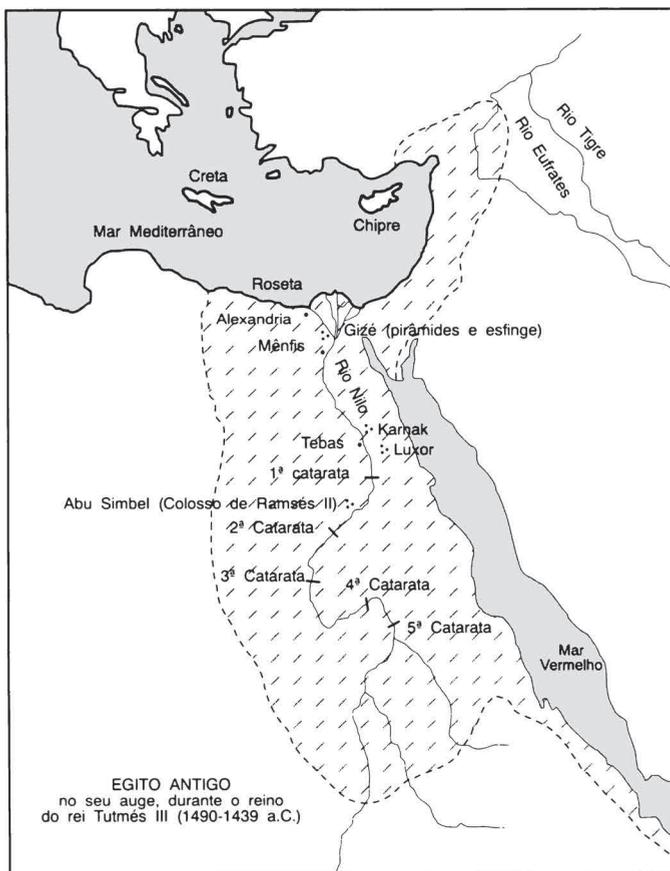
1. 3100 a.C. Num museu de Oxford há um cetro real egípcio datando dessa época. Nesse cetro estão gravados em hieróglifos egípcios alguns números da ordem de centenas de milhares e milhões, superestimando os resultados de uma vitoriosa campanha militar.

2. 2600 a.C. A grande pirâmide de Gizé foi construída por volta de 2600 a.C. e indubitavelmente envolvia alguns problemas de matemática e de engenharia. A estrutura cobre uma área de 13 acres ($\approx 52\,611\text{ m}^2$) e contém mais de 2 milhões de blocos de pedras com, em média, 2,5 toneladas de peso cada um, ajustados entre si muito cuidadosamente. Esses blocos eram transportados de uma pedreira de rocha de arenito situada do outro lado do Nilo. Os tetos de certas câmaras eram constituídos de blocos de granito de 54 toneladas, medindo 27 pés de comprimento por 4 pés de largura, trazidos de uma pedreira situada a 600 milhas* de distância, e colocados a 200 pés do rés do chão. Segundo consta, o erro relativo envolvendo os lados da base quadrada é inferior a $1/14\,000$ e o erro relativo envolvendo os ângulos retos dos vértices da base não excede $1/27\,000$. Esses dados pressupõem uma perícia profunda na arte da engenharia, mas essa estatística impressionante se atenua consideravelmente quando se toma ciência de que tal tarefa foi realizada por um exército de 100 000 trabalhadores num período de 30 anos.

A Grande Pirâmide é a maior das três pirâmides situadas no deserto, em Gizé, nas proximidades da atual Cairo. Essas imensas estruturas foram construídas como túmu-

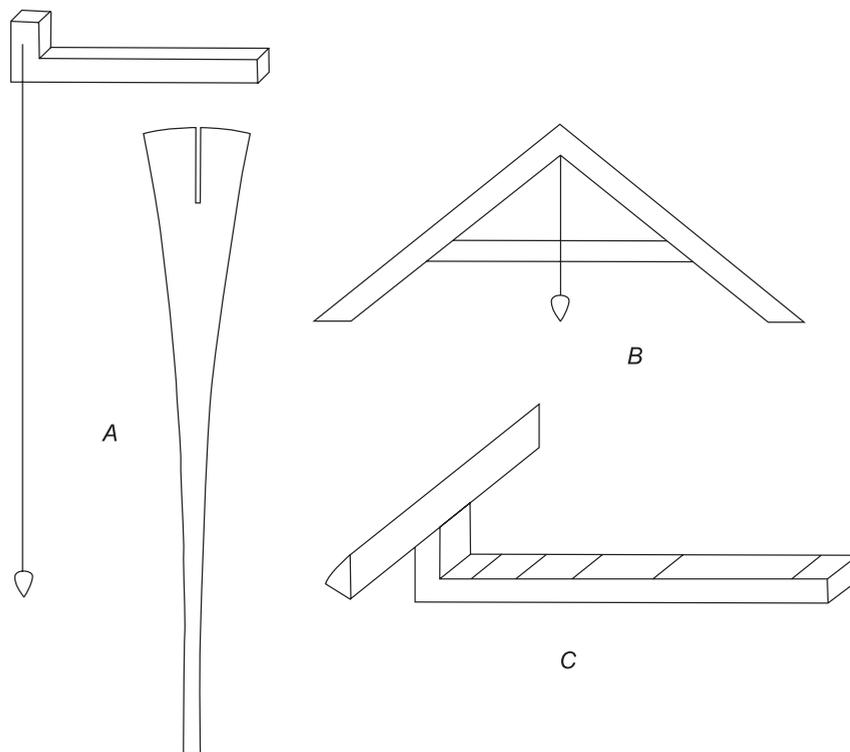
* 1 milha $\approx 1609\text{ m}$; 1 pé $\approx 30,48\text{ cm}$ (N. T.).

los reais. Os egípcios acreditavam numa vida após a morte que dependia da conservação do corpo morto. Embalsamavam-se então os corpos, e os objetos e valores do dia a dia eram colocados no túmulo para uso após a morte.



A Grande Pirâmide (originalmente, perto de 481 pés de altura) foi construída para abrigar o corpo do faraó Khufu (Quéops). As duas outras menores, em Gizé, foram construídas como túmulos de Khafre (Quéfren) e Menkaure (Miquerinos), os sucessores imediatos de Khufu. Ainda há perto de 80 pirâmides no Egito. A Grande Pirâmide tornou-se conhecida como uma de Sete Maravilhas do Mundo Antigo⁵.

⁵ As Sete Maravilhas do Mundo Antigo são: (1) A Grande Pirâmide do Egito, (2) Os Jardins Suspensos da Babilônia, (3) A estátua de Zeus em Olímpia, (4) O Templo de Diana em Éfeso, (5) o Mausoléu de Halicarnasso, (6) O Colosso de Rodes e (7) O Farol de Alexandria. De todas elas resta apenas a Grande Pirâmide.



Esboços de alguns instrumentos egípcios antigos.

A. Instrumento astronômico mais antigo existente (fio de prumo e colimador) (*Museu de Berlim*). Com a ajuda do fio de prumo, um observador podia manter a barra verticalmente sobre um dado ponto e observar pelo corte algum objeto, como a Estrela Polar.

B. Um nível (*exibido no Museu do Cairo*).

C. O mais antigo relógio de sol existente (*no Museu de Berlim*). De manhã a parte transversal se voltaria para o leste e à tarde para o oeste.

3. 1850 a.C. Essa é a data aproximada do papiro Moscou ou Golenishev, um texto matemático que contém 25 problemas já antigos quando o manuscrito foi compilado. O papiro, que foi adquirido no Egito em 1893 pelo colecionador russo Golenishev, agora se encontra no Museu de Belas-Artes de Moscou. Ele foi publicado com um comentário editorial em 1930. Tem cerca de 18 pés de comprimento por cerca de três polegadas de altura. Para uma amostra dos problemas do papiro, ver Exercícios 2.14 e 2.15. Aquele discutido no Exercício 2.14 é particularmente notável.

4. 1850 a.C. Data dessa época o mais antigo instrumento astronômico existente, um misto de fio de prumo e colimador. Encontra-se preservado no Museu de Berlim.

5. 1650 a.C. Essa é a data aproximada do papiro Rhind (ou Ahmes), um texto matemático na forma de manual prático que contém 85 problemas copiados em escrita hierática pelo escriba Ahmes de um trabalho mais antigo. O papiro foi adquirido no Egito

pelo egiptólogo escocês A. Henry Rhind, sendo mais tarde comprado pelo Museu Britânico. Esse papiro e o papiro Moscou são nossas principais fontes de informações referentes à matemática egípcia antiga. O papiro Rhind foi publicado em 1927. Tem cerca de 18 pés de comprimento por cerca de 13 polegadas de altura. Porém, quando o papiro chegou ao Museu Britânico ele era menor, formado de duas partes, e faltava-lhe a porção central. Cerca de quatro anos depois de Rhind ter adquirido seu papiro, o egiptólogo americano Edwin Smith comprou no Egito o que pensou que fosse um papiro médico. A aquisição de Smith foi doada à Sociedade Histórica de Nova York em 1932, quando os especialistas descobriram por sob uma camada fraudulenta a parte que faltava do papiro Ahmes. A Sociedade, então, doou o rolo de pergaminho ao Museu Britânico, completando-se assim todo o trabalho de Ahmes.

O papiro Rhind é uma fonte primária rica sobre a matemática egípcia antiga; descreve os métodos de multiplicação e divisão dos egípcios, o uso que faziam das frações unitárias, seu emprego da regra de falsa posição, sua solução para o problema da determinação da área de um círculo e muitas aplicações da matemática a problemas práticos. O leitor encontrará muito desse material nas seções seguintes e nos Exercícios 2.9, 2.11, 2.12 e 2.13.

6. 1500 a.C. O material do maior obelisco existente, erigido diante do Templo do Sol, em Tebas, foi extraído de uma pedreira por volta dessa época. Ele tem 105 pés de altura, base quadrada de lado igual a 10 pés e pesa cerca de 430 toneladas.

7. 1500 a.C. O Museu de Berlim possui um relógio de sol que data dessa época. É o relógio de sol mais antigo que existe.

8. 1350 a.C. O papiro Rollin, que remonta aproximadamente ao ano 1350 a.C., e agora é patrimônio do Louvre, contém algumas enumerações elaboradas sobre alimentos, mostrando a utilização prática de números grandes nessa época.

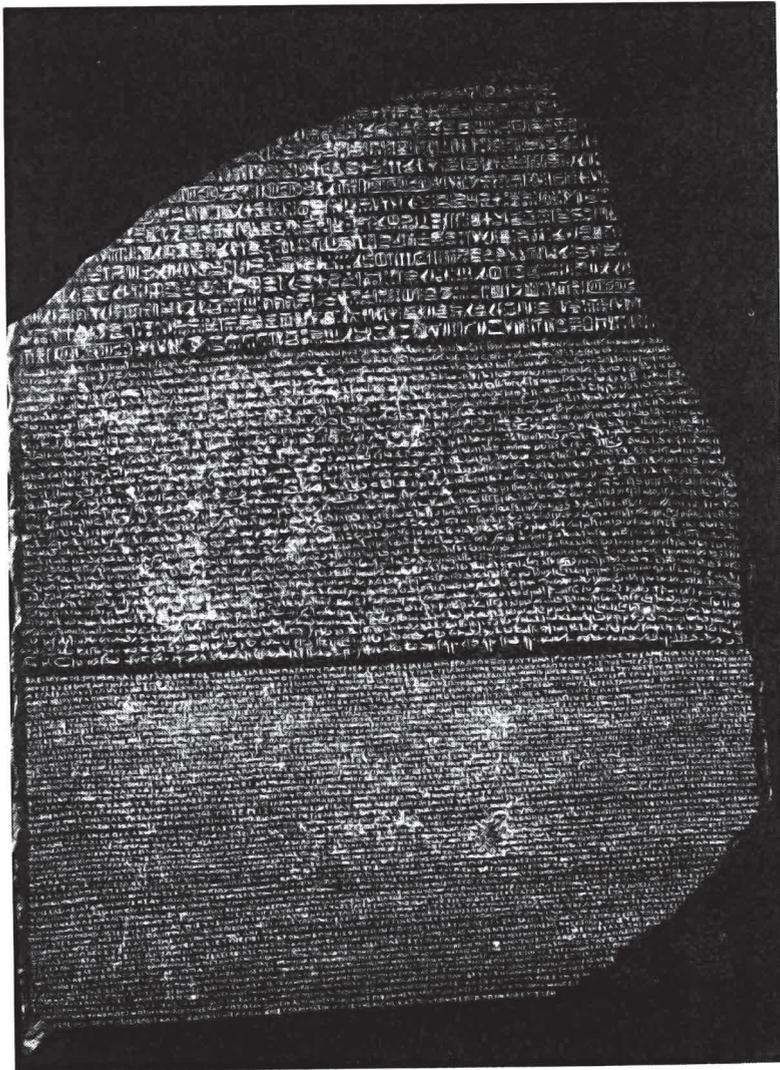
9. 1167 a.C. Essa é a data do papiro Harris, um documento preparado por Ramsés IV, quando ascendeu ao trono. Ele relata as grandes obras de seu pai Ramsés III. A listagem da riqueza dos templos à época fornece um dos melhores exemplos de enumerações práticas a chegar até nós do Egito antigo.

Dentre as grandes estruturas do Egito antigo que envolvem façanhas de engenharia figuram o Colosso de Ramsés II em Abu Simbel, a Grande Esfinge situada perto da Grande Pirâmide de Gizeh e o templo de Amon-Re em Karnak. O Grande Vestíbulo do templo foi concluído nos anos 1200 a.C. por Ramsés II; com suas colunas de 78 pés de altura, é o maior vestíbulo colunar jamais construído pelo homem.

Fontes egípcias mais recentes do que as citadas acima não mostram nenhum avanço apreciável, seja em termos de conhecimentos matemáticos, seja em termos de técnicas matemáticas. Na verdade, há exemplos que revelam uma regressão bem pronunciada.

Em 1799, durante a campanha funesta de Napoleão no Egito, engenheiros franceses que escavavam o solo, perto do braço Roseta do delta do Nilo, para as fundações de um forte, encontraram um fragmento basáltico polido que iria propiciar a decifração dos caracteres hieroglíficos e demóticos. Essa pedra, que mede três pés e sete polegadas

por dois pés e seis polegadas, contém inscrições com uma mensagem repetida em hieróglifos egípcios, em caracteres demóticos egípcios e em grego. Tomando o grego como chave foi possível decifrar a escrita egípcia antiga. O autor desse feito foi o sábio francês Jean François Champollion (1790-1832). A pedra (conhecida como Pedra de Roseta) foi gravada em 196 a.C. e, como resultado do tratado de capitulação, quando a França foi derrotada pela Inglaterra, encontra-se agora no Museu Britânico.



Pedra de Roseta (196 a.C.)
(Cortesia dos curadores do Museu Britânico)

2.8 Aritmética e álgebra

Todos os 110 problemas incluídos nos papiros Moscou e Rhind são numéricos, e boa parte deles é muito simples. Embora a maioria tenha origem prática, há alguns de natureza teórica.

Uma das consequências do sistema de numeração egípcio é o caráter aditivo da aritmética dependente. Assim, a multiplicação e a divisão eram em geral efetuadas por uma sucessão de duplicações com base no fato de que todo número pode ser representado por uma soma de potências de 2. Como exemplo de multiplicação achemos o produto de 26 por 33. Como $26 = 16 + 8 + 2$, basta somarmos os múltiplos correspondentes de 33. O trabalho pode ser disposto como se segue:

$$\begin{array}{r}
 1 \quad 33 \\
 * 2 \quad 66 \\
 4 \quad 132 \\
 * 8 \quad 264 \\
 * 16 \quad 528 \\
 \hline
 858
 \end{array}$$

Somando-se os múltiplos adequados de 33, isto é, aqueles indicados com asteriscos, chega-se à resposta 858. E para, digamos, dividir 753 por 26, dobramos sucessivamente o divisor 26 até o ponto em que o próximo dobro exceda o dividendo 753. O procedimento está exposto abaixo.

$$\begin{array}{r}
 1 \quad 26 \\
 * 2 \quad 52 \\
 * 4 \quad 104 \\
 * 8 \quad 208 \\
 * 16 \quad 416 \\
 \hline
 28
 \end{array}$$

Ora, como

$$\begin{aligned}
 753 &= 416 + 337 \\
 &= 416 + 208 + 129 \\
 &= 416 + 208 + 104 + 25
 \end{aligned}$$

vemos, observando as linhas com asteriscos na coluna acima, que o quociente é $16 + 8 + 4 = 28$ e que o resto é 25. O processo egípcio de multiplicação e divisão não só elimina a necessidade de aprender uma tábua de multiplicação, como também se amolda tanto ao ábaco que perdurou enquanto esse instrumento esteve em uso e mesmo depois.

Os egípcios esforçaram-se para evitar algumas das dificuldades computacionais encontradas com frações representando-as, com exceção de $2/3$, como soma das frações chamadas *unitárias*, ou seja, aquelas de numerador igual a 1. Essa redução tornava-se possível graças ao emprego de tábuas que davam a representação desejada para frações do tipo $2/n$, as únicas necessárias devido à natureza diádica da multiplicação egípcia. Os problemas do papiro Rhind são precedidos de uma dessas tábuas para todos os ímpares n de 5 a 101. Assim, encontramos $2/7$ expresso como $1/4 + 1/28$, $2/97$ como $1/56 + 1/679 + 1/776$ e $2/99$ como $1/66 + 1/198$. Apenas uma decomposição é dada para cada caso. A tábua é utilizada em alguns dos problemas do papiro.

As frações unitárias eram indicadas, na notação hieroglífica egípcia, pondo-se um símbolo elíptico sobre o número do denominador. Um símbolo especial era usado também para a fração excepcional $2/3$ e um outro símbolo às vezes aparecia para $1/2$. Esses símbolos são mostrados a seguir em composição com os numerais modernos correspondentes.

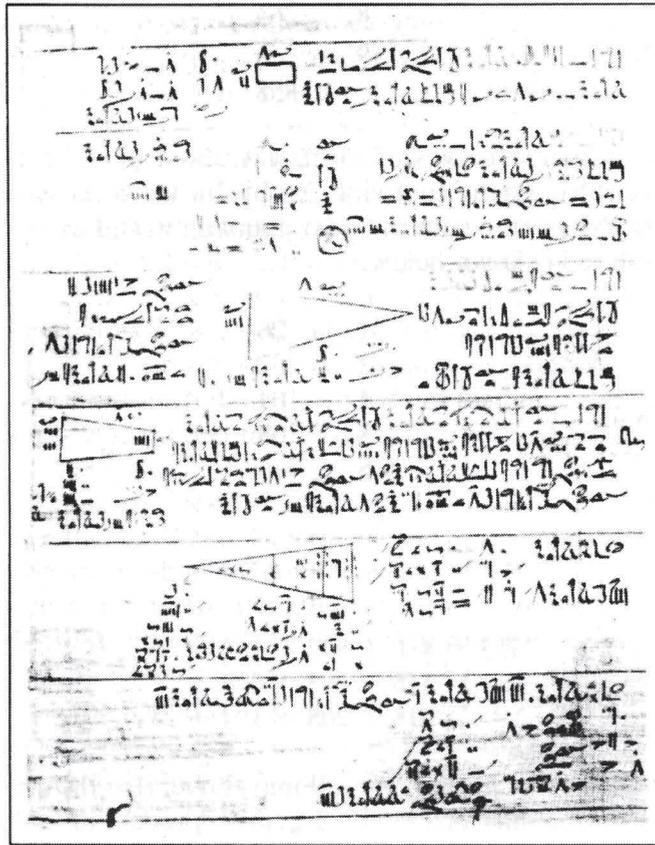
$$\begin{aligned} \text{○} &= \frac{1}{3}, & \text{○} &= \frac{1}{4}, \\ \text{○} &\text{ ou } \text{—} & &= \frac{1}{2}, \\ \text{⊕} &= \frac{2}{3}, \end{aligned}$$

Há teorias interessantes para explicar como os egípcios obtinham suas decomposições em frações unitárias (ver Exercício 2.9).

Muitos dos 110 problemas dos papiros Rhind e Moscou mostram sua origem prática ao lidar com questões sobre o quão substanciosos eram o pão e a cerveja, sobre balanceamento de rações para gado e aves domésticas e sobre armazenamento de grãos. Para muitos desses problemas a resolução não exigia mais do que uma equação linear simples e o método empregado ficou conhecido mais tarde na Europa como regra de falsa posição. Assim, para resolver

$$x + x/7 = 24$$

assume-se um valor conveniente para x , digamos $x = 7$. Então $x + x/7 = 8$, em vez de 24. Como 8 deve ser multiplicado por 3 para se obter 24, o valor correto de x deve ser $3(7)$ ou 21.



Uma parte do *papiro Rhind* (Museu Britânico)

Há alguns problemas teóricos a respeito de progressões aritméticas e geométricas. (Ver, por exemplo, o Exercício 2.12 (c) e a Seção 2-10.) Um papiro que data por volta de 1950 a.C., encontrado em Kahun, contém o seguinte problema: “Uma dada superfície de 100 unidades de área deve ser representada como a soma de dois quadrados cujos lados estão entre si como $1 : 3/4$ ”. Nesse caso temos $x^2 + y^2 = 100$ e $x = 3y/4$. A eliminação de x fornece uma equação quadrática em y . Podemos, porém, resolver o problema por falsa posição. Para isso tomemos $y = 4$. Então $x = 3$ e $x^2 + y^2 = 25$ em vez de 100. Por conseguinte devemos fazer a correção de x e y dobrando os valores iniciais, o que dá $x = 6$ e $y = 8$.

Há um certo simbolismo na álgebra egípcia. No papiro Rhind encontram-se símbolos para *mais* e *menos*. O primeiro deles representa um par de pernas caminhando da esquerda para a direita, o sentido normal da escrita egípcia, e o outro representa um par de pernas caminhando da direita para a esquerda, em sentido contrário à escrita egípcia. Empregavam-se também símbolos, ou ideogramas, para *igual* e para a *incôgnita*.

2.9 Geometria

26 dos 110 problemas dos papiros Moscou e Rhind são geométricos. Muitos deles decorrem de fórmulas de mensuração necessárias para o cálculo de áreas de terras e volumes de grãos. Assume-se que a área de um círculo é igual à de um quadrado de lado igual a $8/9$ do diâmetro e que o volume de um cilindro reto é o produto da área da base pelo comprimento da altura. Investigações recentes parecem mostrar que os egípcios sabiam que a área de um triângulo qualquer é o semiproduto da base pela altura. Alguns dos problemas parecem envolver a cotangente do ângulo diedro entre a base e uma face da pirâmide (ver Exercício 2.11), e outros mostram algum conhecimento da teoria das proporções. Contrariando histórias muito repetidas e aparentemente infundadas, não se encontrou nenhuma evidência documental de que os egípcios tinham ciência, mesmo que num caso particular, do teorema de Pitágoras. Em fontes egípcias posteriores usava-se a fórmula incorreta $K = (a + c)(b + d)/4$ para a área de um quadrilátero arbitrário cujas medidas dos lados sucessivos eram a, b, c, d .

É realmente notável a existência no papiro Moscou de um exemplo correto da fórmula do volume de um tronco de pirâmide de bases quadradas (ver Exercício 2.14(a)). Nenhum outro exemplo inquestionavelmente genuíno dessa fórmula foi encontrado na matemática oriental antiga, e muitas conjecturas foram aventadas a respeito de como ela teria sido descoberta. Com propriedade E. T. Bell refere-se a esse exemplo como “a maior pirâmide do Egito”.

2.10 Um curioso problema do papiro Rhind

Embora não se tivesse encontrado muita dificuldade para decifrar e então interpretar a maioria dos problemas do papiro Rhind há um, o de número 79, cuja interpretação não é tão precisa. Nesse problema figura o seguinte conjunto curioso de dados:

	Bens
Casas	7
Gatos	49
Ratos	343
Espigas de trigo	2 401
Hecates de grãos	16 807
	19 607

Facilmente se reconhecem os números como as cinco primeiras potências de 7, juntamente com sua soma. Devido a isso inicialmente pensou-se que o escriba talvez estivesse introduzindo a terminologia simbólica *casas, gatos* etc. para representar *primeira potência, segunda potência* e assim por diante.

Em 1907, porém, o historiador Moritz Cantor deu uma interpretação mais interessante e mais plausível. Ele viu no problema um precursor de um popular problema da Idade Média e que figura no *Liber abaci* (1202) de Leonardo Fibonacci. Dentre os muitos problemas dessa obra há o seguinte: “Há sete senhoras idosas na estrada de Roma. Cada senhora tem sete mulos; cada mulo transporta sete sacos; cada saco contém sete pães; com cada pão há sete facas; para cada faca há sete bainhas. Entre mulheres, mulos, sacos, pães, facas e bainhas, quantos estão na estrada de Roma?” Como versão posterior e mais familiar do mesmo problema se têm os versos infantis ingleses:

*As I was going to St. Ives
I met a man with seven wives;
Every wife had seven sacks;
Every sack had seven cats;
Every cat had seven kits.
Kits, cats, sacks, and wives,
How many were going to St. Ives?**

De acordo com a interpretação de Cantor, o problema original do papiro Rhind podia então receber uma formulação algo assim: “Uma relação de bens consistia em sete casas; cada casa tinha sete gatos; cada gato comeu sete ratos; cada rato comeu sete espigas de trigo; e cada espiga de trigo produzia sete hecates de grãos. Casas, gatos, ratos, espigas de trigo e hecates de grãos, quanto havia disso tudo?”

Eis aí, então, um problema que parece ter se preservado em meio aos quebra-cabeças do folclore universal. Aparentemente já era antigo quando Ahmes o transcreveu; e era cerca de três milênios mais velho quando Fibonacci o incorporou, numa outra versão, ao seu *Liber abaci*. Quase oito séculos depois pode ser lido em língua inglesa, na forma de versos infantis. Não pode deixar de causar espanto que as características inusitadas dos antigos versos ingleses também tivessem ocorrido num problema egípcio de mais de 4000 anos.

Veza por outra surgem nas revistas atuais quebra-cabeças que derivam de outros que remontam aos tempos medievais. Em alguns casos é impossível determinar quanto é preciso recuar no tempo para alcançar suas origens⁶.

* Quando ia a Santo Ivo/ Encontrei um homem com sete mulheres;/ Cada mulher tinha sete sacos;/ Cada saco tinha sete gatos;/ Cada gato tinha sete gatinhos./ Gatinhos, gatos, sacos e mulheres./ Quantos iam para Santo Ivo? (N. T.)

⁶ Ver D. E. Smith, “On the origin of certain typical problems”, *The American Mathematical Monthly*, nº 24, fev., 1917, pp. 64-71.

Exercícios

2.1 Números regulares

Um número se diz *regular* (sexagesimalmente) se seu inverso multiplicativo admite uma representação sexagesimal finita (isto é, uma representação finita quando expresso como fração posicional na base 60). Com exceção de uma única tábula da coleção Yale, todas as tábuas de inversos multiplicativos contêm apenas inversos de números regulares. Uma tábula do Louvre, que data por volta do ano 300 a.C., contém um número regular de 7 casas sexagesimais e seu inverso de 17 casas sexagesimais.

(a) Mostre que uma condição necessária e suficiente para que n seja regular é que $n = 2^a 3^b 5^c$, onde a , b e c são inteiros não negativos.

(b) Expresse, por meio de representações sexagesimais finitas, os números $1/2$, $1/3$, $1/5$, $1/15$, $1/360$ e $1/3600$.

(c) Generalize (a) para números de uma base b qualquer.

(d) Faça uma lista dos números regulares sexagesimais menores do que 100 e uma dos números regulares decimais menores do que 100.

(e) Mostre que a representação decimal de $1/7$ tem período de seis algarismos. Quantos algarismos tem o período de representação sexagesimal de $1/7$?

2.2 Juros compostos

Há tábuas nas coleções de Berlim, de Yale e do Louvre que contêm problemas sobre juros compostos e há algumas tábuas em Istambul que parecem ter sido originalmente tábuas de a^n para n de 1 a 10 e para $a = 9, 16, 100$ e 225 . Com essas tábuas podem-se resolver equações exponenciais do tipo $a^x = b$.

(a) Numa tábula do Louvre, de cerca de 1700 a.C., há o seguinte problema: Por quanto tempo deve-se aplicar uma certa soma de dinheiro a juros compostos anuais de 20% para que ela dobre? Resolva esse problema por métodos modernos.

(b) Resolva o problema (a) primeiro encontrando $(1,2)^3$ e $(1,2)^4$ e então, por interpolação linear, determinando x tal que $(1,2)^x = 2$. Mostre que o resultado assim obtido está em concordância com a solução babilônica $3;47,13,20$ (expressa sexagesimalmente) do problema⁷.

⁷ Como ilustração, a expressão $9,20,8;30,10,23$ significa $9(60)^2 + 20(60) + 8 + 30/60 + 10/(60)^2 + 23/(60)^3$.

2.3 Equações quadráticas

(a) Um problema babilônico pede o lado de um quadrado se a diferença entre a área desse quadrado e seu lado é o número (sexagesimal) $14,30$. A resolução do problema é descrita como se segue: “Tome metade de 1, que é $0;30$; multiplique $0;30$ por $0;30$, o que dá $0;15$; some $0;15$ a $14,30$ obtendo $14,30;15$. Este último é o quadrado de $29;30$. A seguir some $0;30$ a $29;30$; o resultado é 30 , que é o lado do quadrado”. Mostre que a resolução babilônica equivale exatamente a resolver a equação quadrática

$$x^2 - px = q$$

mediante a fórmula

$$x = \sqrt{(p/2)^2 + q} + p/2 .$$

(b) Outro texto babilônico resolve a equação quadrática

$$11x^2 + 7x = 6;15$$

primeiro multiplicando ambos os membros por 11 para obter

$$(11x)^2 + 7(11)x = 1,8;45,$$

que, fazendo-se $y = 11x$, adquire a “forma normal”

$$y^2 + py = q.$$

Esta última é resolvida através da fórmula

$$y = \sqrt{(p/2)^2 + q} - p/2 .$$

Finalmente, $x = y/11$.

Mostre que qualquer equação quadrática $ax^2 + bx + c = 0$ pode ser reduzida, por uma transformação semelhante, a uma das formas normais

$$y^2 + py = q, \quad y = py + q \quad \text{ou} \quad y^2 + q = py,$$

onde p e q são ambos não negativos. A resolução dessas equações quadráticas de três termos ao que parece estava além da capacidade dos egípcios antigos.

2.4 Geometria algébrica

(a) O caráter algébrico dos problemas geométricos babilônicos fica ilustrado pelo seguinte, encontrado numa tábula de Strasburgo que data de 1800 a.C. aproximadamente. “Uma área A , que consiste na soma de dois quadrados, é 1000. O lado de um dos quadrados é 10 menos do que os $2/3$ do lado do outro quadrado. Quais os lados do quadrado?” Resolva esse problema.

(b) Numa tábula do Louvre, de cerca do ano 300 a.C., há quatro problemas relativos a retângulos de áreas unitárias e de um dado semiperímetro. Sejam x, y e a os lados e o semiperímetro respectivamente. Temos então

$$xy = 1, \quad x + y = a.$$

Resolva esse problema eliminando y e obtendo assim uma equação quadrática em x .

(c) Resolva o sistema de (b) usando a identidade

$$\left(\frac{x-y}{2}\right)^2 = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - xy.$$

Essencialmente é esse o método usado na tábula do Louvre. É interessante o fato de que essa identidade tenha aparecido contemporaneamente à Proposição 5, Livro II, dos *Elementos* de Euclides.

(d) Um problema dos Antigos Babilônios diz: “Um cateto de um triângulo retângulo é 50. Uma paralela ao outro cateto e a distância 20 dele corta o triângulo formando um trapézio retângulo de área 5,20. Determine os comprimentos das bases do trapézio”. Resolva esse problema.

(e) Outro problema dos Antigos Babilônios afirma que um trapézio isósceles de bases 14 e 50 e de lados 30 tem área 12,48. Verifique isso.

(f) Há ainda um outro problema dos Antigos Babilônios que diz respeito a uma escada de 0;30 de comprimento apoiada verticalmente contra uma parede. O problema pede que se calcule de quanto os pés da escada se afastarão da parede se sua extremidade escorregar para baixo, ao longo da parede, uma distância de 0;6. Resolva esse problema.

(g) Uma tábula selêucida, posterior 1500 anos, propõe um problema semelhante ao de (f). Neste caso trata-se de um bambu que está apoiado verticalmente contra uma parede. O problema pede o comprimento do bambu, supondo-se que sua extremidade superior escorrega parede abaixo 3 unidades quando sua extremidade inferior se afasta 9 unidades da parede. A resposta dada é 15 unidades. Essa resposta é correta?

2.5 As tábulas de Susa

(a) Em 1936 desenterrou-se em Susa, a cerca de 200 milhas da Babilônia, um grupo de tábulas dos Antigos Babilônios. Uma delas compara as áreas e os quadrados dos lados dos polígonos regulares de 3,4,5,6 e 7 lados. Para o pentágono, o hexágono e o heptágono as razões dadas são 1;40, 2;37,30 e 3;41. Teste a precisão desses valores.

(b) Na mesma tábua considerada em (a), a razão entre o perímetro de um hexágono regular e a circunferência do círculo circunscrito é dada como 0;57,36. Mostre que isso leva a 3;7,30 ou $3 \frac{1}{8}$ como aproximação de π .

(c) Numa das tábulas de Susa aparece o problema: “Determine o raio do círculo circunscrito ao triângulo de lados 50, 50 e 60”. Resolva esse problema.

(d) Outra tábua de Susa pede os lados x e y de um retângulo, dados $xy = 20,0$ e $x^3d = 14,48,53,20$, em que d é a diagonal do retângulo. Resolva esse problema.

2.6 Cúbicas

(a) Descobriu-se uma tábua babilônica que dá os valores de $n^3 + n^2$ para n de 1 a 30. Construa uma tábua dessas para n de 1 a 10.

(b) Encontre, por meio da tábua acima, uma raiz da equação cúbica $x^3 + 2x^2 - 3136 = 0$.

(c) Um problema babilônico cuja data aproximada é 1800 a.C. parece pedir a solução do sistema de equações $xyz + xy = 7/6$, $y = 2x/3$, $z = 12x$. Resolva esse sistema usando a tábua de (a).

(d) Otto Neugebauer acredita que os babilônios tinham capacidade bastante para reduzir uma equação cúbica geral à “forma normal” $+ n^2 = c$, embora não haja até agora nenhuma evidência de que eles tenham feito isso. Mostre como tal redução poderia ser feita.

(e) Com relação à tábua da parte (a), Neugebauer assinalou que os babilônios podem muito bem ter se dado conta da relação

$$\sum_{i=1}^n i^3 = \left(\sum_{i=1}^n i \right)^2$$

para vários valores de n . Demonstre essa relação por indução.

2.7 Aproximações da raiz quadrada

Sabe-se que a série infinita obtida pela expansão de $(a^2 + b)^{1/2}$ com o uso do teorema binomial converge para $(a^2 + b)^{1/2}$ se $-a^2 < b < a^2$.

(a) Estabeleça a fórmula de aproximação

$$(a^2 + b)^{1/2} \approx a + b/2a, \quad (0 < |b| < a^2).$$

(b) Tome $a = 4/3$ e $b = 2/9$ na fórmula da parte (a) e obtenha assim a aproximação racional babilônica de $\sqrt{2}$. Encontre uma aproximação racional de $\sqrt{5}$ tomando $a = 2$ e $b = 1$.

(c) Estabeleça a fórmula de aproximação (melhor do que a anterior)

$$(a^2 + b)^{1/2} \approx a + b/2a - b^2/2a^3 - b^3/8a^5, \quad (0 < |b| < a^2),$$

e aproxime $\sqrt{2}$ e $\sqrt{5}$ usando os mesmos valores de a e b tomados em (b).

(d) Tome $a = 3/2$ e $b = -(1/4)$ na fórmula de (a) e determine a aproximação babilônica antiga $17/12$ para $\sqrt{2}$.

(e) Tome $a = 17/12$ e $b = -(1/144)$ na fórmula de (a) e determine o valor $1;24,51,10$ para $\sqrt{2}$ conforme é dado na tabela da tábula Yale 7289.

2.8 Duplation e mediation

O processo egípcio de multiplicação evoluiu posteriormente para um método algo melhor conhecido por *duplation* e *mediation*, cujo objetivo era pinçar mecanicamente os múltiplos de um dos fatores que se precisavam somar a fim de obter o produto desejado. Assim, considerando-se o exemplo do texto, suponhamos que se pretenda multiplicar 26 por 33. Podemos sucessivamente mear o 26 e dobrar o 33 assim:

26	33
13	66 *
6	132
3	264 *
1	528 *
	858

Na coluna dos dobros somam-se os múltiplos de 33 correspondentes aos números ímpares da coluna das metades. Somamos assim 66, 264 e 528 para obter o produto desejado 858. O processo de *duplation* e *mediation* é utilizado por computadores eletrônicos de alta velocidade.

(a) Multiplique 424 por 137 usando *duplation* e *mediation*.

(b) Prove que o método *duplation e mediation* de multiplicação fornece sempre resultados corretos.

(c) Encontre, pelo método egípcio, o quociente e o resto da divisão de 1043 por 28.

2.9 Frações unitárias

(a) Mostre que $z/pq = 1/pr + 1/qr$, em que $r = (p + q)/z$. Esse método de encontrar decomposições possíveis de uma fração em duas frações unitárias está indicado num papiro escrito em grego, provavelmente em alguma ocasião entre 500 e 800 d.C., papiro esse encontrado em Akhmim, uma cidade junto ao rio Nilo.

(b) Tome $z = 2$, $p = 1$, $q = 7$ e obtenha a decomposição de $2/7$ em frações unitárias conforme é dada no papiro Rhind.

(c) Represente $2/99$ como soma de duas frações unitárias diferentes de três maneiras diferentes.

(d) Tomando $z = 1$, $p = 1$, $q = n$ na relação de (a), obtenha a relação mais particular

$$1/n = 1/(n + 1) + 1/n(n + 1)$$

e mostre que, quando n é ímpar, ela leva à representação de $2/n$ como soma de duas frações unitárias. Muitos dos registros do papiro Rhind podem ser obtidos dessa maneira.

(e) Mostre que se n é múltiplo de 3, então $2/n$ pode ser decomposta na soma de duas frações unitárias, sendo $1/(2n)$ uma delas.

(f) Mostre que se n é múltiplo de 5, então $2/n$ pode ser decomposta na soma de duas frações unitárias, sendo $1/(3n)$ uma delas.

(g) Mostre que para todo inteiro positivo n , $2/n$ pode ser expressa pela soma $1/n + 1/(2n) + 1/(3n) + 1/(6n)$. (Na tábua de $2/n$ do papiro Rhind, somente $2/101$ está expressa por essa decomposição.)

(h) Mostre que se um número racional pode ser representado como soma de frações unitárias de uma maneira, então ele pode ser representado como soma de frações unitárias de infinitas maneiras.

2.10 O processo de Sylvester

O matemático inglês J. J. Sylvester (1814-1817) estabeleceu o seguinte procedimento para expressar univocamente qualquer fração racional entre 0 e 1 como soma de frações unitárias:

1. Ache a maior fração unitária (isto é, aquela com menor denominador) menor que a fração dada.

2. Subtraia essa fração unitária da fração dada.

3. Ache a maior fração unitária menor que a diferença resultante.

4. Subtraia de novo, e continue com o processo.

5. Para achar a maior fração unitária menor que uma dada fração, divida o denominador desta última pelo seu numerador e tome o sucessor do quociente como denominador da fração unitária procurada.

(a) Expresse $2/7$ como soma de frações unitárias usando o processo de Sylvester. Note-se que a decomposição é a mesma dada na tábua $2/n$ do papiro Rhind.

(b) Expresse $2/97$ como soma de frações unitárias usando o processo de Sylvester. Note-se que a decomposição é diferente daquela dada na tábua $2/n$ do papiro Rhind.

(c) Estabeleça a regra dada no quinto passo do processo de Sylvester.

2.11 O *Seqt* de uma Pirâmide

(a) Os egípcios mediam a inclinação de uma face de uma pirâmide pela razão entre o “percurso” e a “elevação” — isto é, dando o afastamento da face oblíqua da vertical para cada unidade de altura. Tomava-se como unidade vertical o cúbito e como unidade horizontal a mão; havia 7 mãos num cúbito. Utilizando-se essas unidades de medida, chamava-se *seqt* da pirâmide a medida da inclinação. Mostre que o *seqt* de uma pirâmide é 7 vezes a cotangente do ângulo diedro formado pela base e a face da pirâmide.

(b) No problema 56 do papiro Rhind pede-se que se ache o *seqt* de uma pirâmide de 250 cúbitos de altura cujos lados da base medem 360 cúbitos. A resposta $5 \frac{1}{25}$ está correta?

(c) A grande pirâmide de Quéops tem uma base quadrada com lados de 440 cúbitos e sua altura é 280 cúbitos. Qual é o *seqt* dessa pirâmide?

(d) O problema 57 do papiro Rhind pede a altura de uma pirâmide de base quadrada cujo *seqt* é igual a 5 mãos e 1 dedo por cúbito e cujo lado da base mede 140 cúbitos. Resolva esse problema considerando que há 5 dedos numa mão.

2.12 Álgebra egípcia

Os seguintes problemas se encontram no papiro Rhind:

(a) “Se lhe perguntam o que é $2/3$ de $1/5$, tome o dobro e o sêxtuplo; esse é $2/3$ dele. Deve-se proceder assim para qualquer outra fração.” Interprete esse procedimento e prove a afirmação geral.

(b) “Uma quantidade, seus $2/3$, seu $1/2$ e seu $1/7$, somados, valem 33. Qual é a quantidade?” Resolva esse problema pela regra de falsa posição.

(c) “Divida 100 pães entre 5 homens de modo que as partes recebidas estejam em progressão aritmética e que um sétimo da soma das três partes maiores seja igual à soma das duas menores.” Resolva esse problema usando métodos modernos.

2.13 Geometria egípcia

(a) No papiro Rhind repetidamente a área de um círculo é tomada igual à de um quadrado de lado igual a $8/9$ do diâmetro. A que valor de π leva isso?

(b) Forme um octógono de um quadrado de lado igual a 9 unidades fazendo a trisseção dos lados e cortando os quatro cantos triangulares. Aparentemente a área do octógono difere muito pouco da área do círculo inscrito no quadrado. Mostre que a área do octógono é 63 unidades quadradas, donde a área do círculo não pode estar longe da de um quadrado de 8 unidades de lado. Há indícios no Problema 48 do papiro Rhind de que se chegou à fórmula dada em (a) para a área de um círculo dessa maneira.

(c) Prove que de todos os triângulos que têm um par de lados dados, o maior é aquele em que esses lados são perpendiculares.

(d) Denote os comprimentos dos lados AB, BC, CD, DA de um quadrilátero $ABCD$ por a, b, c, d e seja K a área do quadrilátero. Mostre que $K \leq (ad + bc)/2$, valendo a igualdade se, e somente se, os ângulos A e C são retos.

(e) Com as hipóteses de (d) mostre agora que $K \leq (a + c)(b + d)/4$, valendo a igualdade se, e somente se, $ABCD$ é retângulo. Assim, a fórmula egípcia para a área de um quadrilátero, citada na Seção 2-9, fornece um resultado maior que o correto para os quadriláteros que não são retângulos.

(f) Um documento existente, procedente de Edfu, posterior cerca de 1500 anos ao papiro Rhind, emprega a fórmula egípcia inexata para a área do quadrilátero. Dessa fórmula, como um corolário, o autor do documento deduz que a área de um triângulo é a semissoma de dois lados multiplicada pela metade do terceiro lado. Mostre como esse corolário pode ser deduzido. O corolário é correto?

(g) Parece saltar aos olhos que a área de um círculo pode estar a meio caminho entre as dos quadrados inscrito e circunscrito a ele. Mostre que isso equivale a fazer $\pi = 3$.

2.14 A grande pirâmide egípcia

(a) No Problema 14 do papiro Moscou, encontramos o seguinte exemplo numérico: “Se lhe for dito: Um tronco de pirâmide de altura vertical 6 por 4 na base e por 2 no topo. Você deve quadrar esse 4, resultando 16. Você deve dobrar 4, resultando 8. Você

deve quadrar 2, resultando 4. Você deve somar o 16, o 8 e o 4, resultando 28. Você deve tomar um terço de 6, resultando 2. Você deve tomar o dobro de 28, resultando 56. Veja, é 56. Você o encontrará corretamente”. Mostre que esse procedimento ilustra a fórmula geral

$$V = \left(\frac{1}{3}\right)h(a^2 + ab + b^2)$$

que dá o volume do tronco de pirâmide quadrangular em termos da altura h e dos lados a e b da base.

(b) Se m e n são dois números inteiros positivos, $m \leq n$, definimos *média aritmética*, *média heroniana* e *média geométrica* de m e n como $A = (m + n)/2$, $R = (m + \sqrt{mn} + n)/3$ e $G = \sqrt{mn}$. Mostre que $A \geq R \geq G$, verificando-se a igualdade se e somente se $m = n$.

(c) Assumindo a fórmula familiar do volume de uma pirâmide qualquer (volume igual a um terço do produto da base pela altura), mostre que o volume do tronco de pirâmide é dado pelo produto da altura do tronco, pela média heroniana de suas bases.

(d) Indiquemos por a , b e h os comprimentos de uma aresta da base inferior, uma aresta da base superior e a altura de um tronco de pirâmide quadrada regular T . Decomponha T em: (1) Um paralelepípedo retângulo P de base superior b^2 e altura h , (2) 4 prismas triangulares retos A , B , C e D cada um de volume $b(a - b)h/4$, (3) 4 pirâmides quadradas E , F , G , H cada uma de volume $(a - b)^2b/12$. Com isso obtenha a fórmula egípcia de (a) para o volume de T .

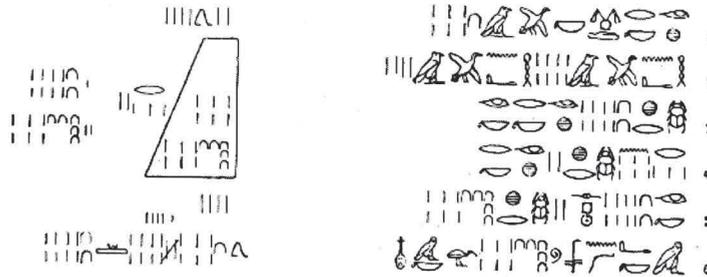
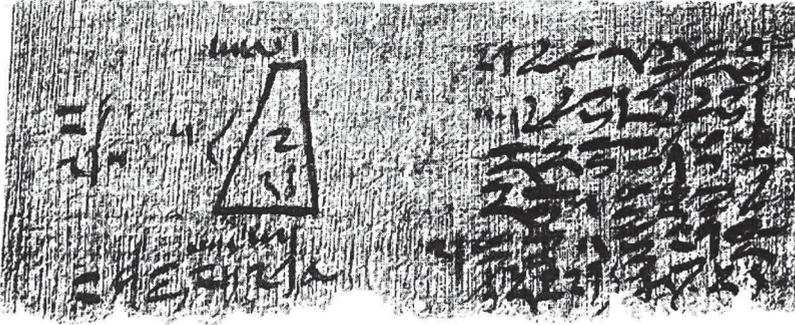
(e) Considere a decomposição do tronco dada em (d). Seccione P horizontalmente em 3 partes iguais de altura $h/3$ e denote uma dessas partes por J . Combine A , B , C , D num paralelepípedo retângulo Q de base $b(a - b)$ e altura h e seccione horizontalmente Q em três partes iguais, cada uma de altura $h/3$. Substitua E , F , G , H por um paralelepípedo retângulo R de base $(a - b)^2$ e altura $h/3$. Combine uma das partes de P com uma das partes de Q formando um paralelepípedo retângulo K de base ab e altura $h/3$. Combine uma parte de P , duas de Q e R formando um paralelepípedo retângulo L de base a^2 e altura $h/3$. O volume de T é então igual à soma dos volumes dos três paralelepípedos retângulos J , K , L . Usando esse fato, encontre a fórmula de (a) para o volume de T . Já se aventou a possibilidade de que a fórmula de (a) possa ter sido obtida dessa maneira. O procedimento guarda familiaridade com a fórmula do volume de uma pirâmide (quadrada regular).

2.15 Alguns problemas do papiro Moscou

Resolva os dois problemas seguintes do papiro Moscou:

(a) A área de um retângulo é 12 e a altura é $3/4$ da base. Quais são as dimensões?

(b) Um dos catetos de um triângulo retângulo é $2\frac{1}{2}$ vezes o outro e a área é 20. Quais são as dimensões?



Problema 14 do *papiro Moscou*, com a transcrição hieroglífica do texto hierático

2.16 O triângulo 3, 4, 5

Há registros de que os agrimensores egípcios antigos, do tempo dos faraós, construíam triângulos 3,4,5 com uma corda dividida em 12 partes iguais por 11 nós para demarcar ângulos retos. Como não há evidências documentais de que esses egípcios tivessem ciência ao menos de um caso particular do teorema de Pitágoras surge o seguinte problema, de caráter puramente acadêmico⁸: Mostrar, sem usar o teorema de Pitágoras, que o triângulo 3,4,5 é retângulo. Resolva esse problema por meio da Figura 5, que aparece no *Chóu-peï*, o mais antigo trabalho chinês conhecido, que pode remontar ao segundo milênio a.C.

⁸ Ver Victor Thébault, "A note on the Pythagorean theorem", *The Mathematics Teacher*, nº 43, out., 1950, p. 278.

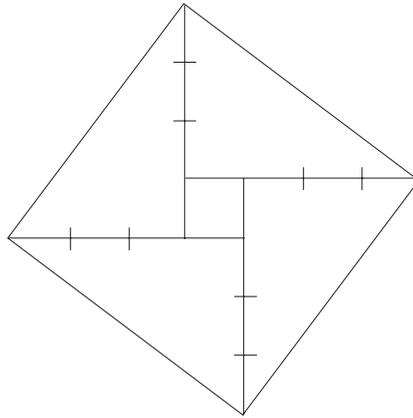


Figura 5

2.17 O papiro matemático Cairo

O chamado papiro matemático Cairo foi desenterrado em 1938 e investigado em 1962. O papiro, que data de 300 a.C. aproximadamente, contém 40 problemas de matemática, 9 dos quais lidam exclusivamente com o teorema de Pitágoras e mostra que os egípcios dessa época não só sabiam que o triângulo 3, 4, 5 é retângulo, mas que também acontecia o mesmo para os triângulos 5, 12, 13 e 20, 21, 29. Resolva os seguintes problemas encontrados no papiro matemático Cairo:

(a) Uma escada de 10 cúbitos está com seus pés a 6 cúbitos da parede. Que distância a escada alcança?

(b) Um retângulo de área 60 cúbitos quadrados tem diagonal de 13 cúbitos. Determine os lados do retângulo.

(c) Um retângulo de área 60 cúbitos quadrados tem diagonal de 15 cúbitos. Determine os lados do retângulo.

Segue-se o método usado pelo escriba para resolver (b) e (c): Denotando os lados, a diagonal e a área do retângulo por x , y , d e A , temos

$$x^2 + y^2 = d^2 \text{ e } xy = A,$$

que fornecem

$$x^2 + 2xy + y^2 = d^2 + 2A,$$

$$x^2 - 2xy + y^2 = d^2 - 2A$$

ou

$$(x + y)^2 = d^2 + 2A, \quad (x - y)^2 = d^2 - 2A.$$

Em (b), $d^2 + 2A$ e $d^2 - 2A$ são quadrados perfeitos, e pode-se encontrar prontamente valores para $x + y$, $x - y$, e assim por diante. Em (c), $d^2 + 2A$ e $d^2 - 2A$ não são quadrados perfeitos e o escriba usa a fórmula de aproximação

$$\sqrt{a^2 + b} \approx a + b/2a$$

chegando a

$$\sqrt{345} = \sqrt{18^2 + 21} \approx 18 + 21/36 = 18 + 1/2 + 1/12$$

e

$$\sqrt{105} = \sqrt{10^2 + 5} \approx 10 + 5/20 = 10 + 1/4.$$

Temas

- 2/1 O procedimento “faça assim e assim” no ensino de certas partes da matemática elementar hoje em dia.
- 2/2 Matemática indutiva (ou empírica) versus matemática dedutiva (demonstrativa).
- 2/3 O valor pedagógico da matemática indutiva.
- 2/4 A importância dos procedimentos indutivos na descoberta matemática.
- 2/5 A influência comparativa, na ascensão da geometria antiga, do interesse pela astronomia e da necessidade da agrimensura.
- 2/6 A importância dos rituais religiosos primitivos na origem da geometria.
- 2/7 Grotefend, Rawlinson e a Rocha de Behistun.
- 2/8 Napoleão, Champollion e a Pedra de Roseta.
- 2/9 A origem de certos problemas típicos.
- 2/10 Representação por frações unitárias.
- 2/11 A tábula babilônica 7289 da Coleção Yale.
- 2/12 Piramidologia.

Bibliografia

- AABOE, Asger. “Episodes from the early history of mathematics”. *New Mathematical Library*, nº 13, Nova York, Random House and L. W. Singer, 1964.
- BALL, W. W. R. e COXETER, H. S. M. *Mathematical Recreations and Essays*. 12ª ed. Toronto, University of Toronto Press, 1974.

- BRATTON, Fred. *A History of Egyptian Archaeology*. Nova York, Thomas Y. Crowell, 1968.
- BUDGE, E. A. W. *The Rosetta Stone*. Ed. rev. Londres, Harrison and Sons, 1950.
- BUNT, L. N. H.; JONES, P. S. e BEDIANT, J. D. *The Historical Roots of Elementary Mathematics*. Englewood Cliffs (N. J.), Prentice-Hall, 1976.
- CHACE, A. B.; BULI, L. S.; MANNING, H. P. e ARCHIBALD, R. C. (eds.) *The Rhind Mathematical Papyrus*. Buffalo (N. Y.), Mathematical Association of America, 1927-1929, 2 vols. Republicado, em grande parte, pelo National Council of Teachers of Mathematics, 1979.
- CHIERA, Edward. *They Wrote on Clay*. Chicago, University of Chicago Press, 1938.
- COOLIDGE, J. L. *A History of Geometrical Methods*. Nova York, Oxford University Press, 1940.
- GILLINGS, R. J. *Mathematics in the Time of the Pharaohs*. Cambridge (Mass.), M. I. T. Press, 1972.
- KRAITCHIK, Maurice. *Mathematical Recreations*. Nova York, W. W. Norton, 1942.
- NEUGEBAUER, Otto. *The Exact Sciences in Antiquity*. 2ª ed., Nova York, Harper and Row, 1962. Reimpresso por Dover, Nova York.
- NEUGEBAUER, Otto e SACHS, A. J. (eds.) *Mathematical Cuneiform Texts*. New Haven, American Oriental Society, 1946. American Oriental Series, vol. 29.
- ORE, Oystein. *Number Theory and Its History*. Nova York, McGraw-Hill, 1948.
- PARKER, R. A. *The Calendars of Ancient Egypt*. Chicago, University of Chicago Press, 1950.
- SANFORD, Vera. *The History and Significance of Certain Standard Problems in Algebra*. Nova York, Teachers College, Columbia University, 1927.
- VAN DER WAERDEN, B. L. *Science Awakening*. Trad. por Arnold Dresden. Nova York, Oxford University Press, 1961. Paperback, ed., Nova York, John Wiley, 1963.
- . *Geometry and Algebra in Ancient Civilizations*. Nova York, Springer-Verlag, 1983.

Panorama Cultural III

Os filósofos da Ágora

Grécia Helênica — c. 800-336 a.C.
(Para acompanhar os Capítulos 3 e 4)

Como vimos, uma Revolução Agrícola que se iniciou por volta de 3000 a.C. desencadeou um longo período de progresso intelectual e científico. Em regiões agrícolas chamadas “berços da civilização” (Oriente Médio, China e Egito) os povos construíram as primeiras cidades, desenvolveram projetos de irrigação e ergueram monumentos como as Pirâmides, a Esfinge e os Jardins Suspensos da Babilônia. Esses mesmos povos inventaram a escrita e deram início à matemática, à astrologia e à metalurgia. Sistemas complexos de governo, como as cidades-Estado e pequenos impérios, substituíram as tribos como principal forma de organização política. Provavelmente as realizações culturais mais impressionantes da Revolução Agrícola tiveram lugar na Grécia durante o Período Helênico (c. 800-336 a.C.) e na China nos primeiros tempos do Período Clássico (c. 600-221 a.C). Examinaremos a China no Panorama Cultural V: Os Impérios Asiáticos. Nas páginas seguintes focalizaremos a sociedade e a cultura na Grécia antiga.

Sem dúvida nenhuma, os maiores cientistas do mundo antigo viveram na pequena Grécia, uma reunião de cidades-Estado encarapitadas por sobre uma miscelânea de ilhas rochosas e penínsulas no extremo leste do mar Mediterrâneo, bem nos limites da civilização do Oriente Médio. A Revolução Agrícola alcançou a Grécia, vinda do Egito e do Oriente Médio, por volta de 2000 a.C., pouco depois da fundação do Império Babilônico pelos amoritas. Dentro de 300 anos havia despontado na ilha grega de Creta uma misteriosa civilização, altamente avançada, que dominava a escrita e a leitura. Essa civilização, chamada pelos historiadores de minoica, floresceu entre 1700 e 1200 a.C. A Grécia continental era habitada por um povo menos adiantado, mais guerreiro, mas também alfabetizado — os micênicos, que, de acordo com a lenda, haviam combatido na Guerra de Troia. Entre 1200 e 1150 a.C. essas civilizações foram destruídas abruptamente por invasores bárbaros vindos da Ásia, os dórios, uma tribo de pastores estreitamente aparentada com os arianos, que já mencionamos antes por terem suplantado a civilização do rio Indo na Índia. Os dórios instalaram-se nas terras que conquistaram e adotaram muito da cultura agrícola dos habitantes anteriores. A escrita, que desaparecera por ocasião do colapso das civilizações minoica e micênica,

foi reintroduzida por volta de 800 a.C. pelos mercadores fenícios do Oriente Médio. O período seguinte da história grega (de c. 800-336 a.C.), chamado Período Helênico pelos historiadores, apresentou um progresso intelectual e científico surpreendente — uma das épocas mais notáveis da história em termos de realizações humanas.

A Grécia Helênica era um mosaico de cidades-Estado e de pequenas fazendas dispersas. Não era uma planície ampla dividida por rios grandes e lamacentos, como o Egito e a Babilônia; ao contrário, era um país cortado por longas cadeias de montanhas íngremes e por baías sinuosas que penetravam fundo seu interior. Seus vales eram estreitos e pontilhados de grandes pedras, seus rios, rasos e seu solo, ressequido. Suas cidades-Estado separavam-se umas das outras por montanhas íngremes e alcantiladas; suas fazendas, em vales pequenos, eram divididas por afloramentos de rochas e por trechos de terra infértil. Devido em parte a seu isolamento e em parte às dimensões restritas das áreas circunvizinhas, as pequenas cidades e fazendas da Grécia Helênica estavam resguardadas de projetos expansionistas. É inegável que os gregos fizeram várias guerras, mas raramente uma cidade-Estado conseguia anexar outra. Alguns fazendeiros gregos ricos chegaram a formar grandes propriedades, mas nunca na escala observada no Egito ou na Babilônia. Nesse cadinho, onde poder e riqueza estavam dispersos, era viável a criação de repúblicas democráticas; e foi isso exatamente o que os gregos fizeram na cidade de Atenas sobranceira às ilhas que pontilhavam o golfo Sarônico.

Embora tivessem existido várias dezenas de cidades-Estado gregas, algumas se sobressaíram das demais. Corinto e Argos, ambas portos marítimos, eram centros comerciais de grande movimento. Mileto e Esmirna, situadas nas costas da Jônia, hoje Turquia, eram cidades-empório preeminentes. Rodes, Delos e Samos eram comunidades ilhoas que se dedicavam à pesca e ao comércio. Em Delfos habitava o oráculo de Apoio, o rei sol. Siracusa era a maior das colônias gregas na Itália. A aristocrática Tebas (não confundir com Tebas do Egito) era um centro agrícola importante. Olímpia promovia os famosos Jogos Olímpicos quadrienais. Porém, as cidades mais importantes da Grécia eram a comercial Atenas e a militarista Esparta.

Esparta localizava-se no interior, longe do mar, no pequeno e apertado vale do rio Eurotas, numa região chamada pelos gregos de Lacônia. No início do século VIII a.C. Esparta enfrentou séria escassez de alimentos; sua população crescera tanto que as reduzidas safras agrícolas produzidas por seu solo pedregoso e pobre não eram suficientes. Impelida pela fome, Esparta, em duas guerras sangrentas, invadiu e conquistou Messena, uma cidade-Estado vizinha e mais populosa, situada no vale próximo, do outro lado dos montes Taígetos. Os espartanos escravizaram os messênicos, chamados *hilotas*, e forçaram-nos a trabalhar os campos para produzir alimentos para seus novos senhores. De quando em quando os hilotas organizavam uma rebelião, mas todas eram reprimidas com brutal violência. Superados numericamente por seus escravos messênicos, os espartanos mantinham sempre grandes exércitos de prontidão e periodicamente faziam batidas nas aldeias hilotas. Os meninos espartanos bem cedo eram retirados do convívio dos pais, passando a viver por quase todo o resto de suas vidas em

regimentos militares com sua disciplina rígida. O exército espartano era temido em toda a Grécia por sua ferocidade e por suas façanhas militares, fazendo de Esparta a grande potência militar grega. Porém, embora inquestionavelmente os espartanos ocupassem a dianteira entre os gregos como soldados, as casernas mostraram-se um terreno infértil para o saber, e a herança intelectual deixada por eles é praticamente nula.

Embora Esparta tivesse o exército mais poderoso da Grécia Helênica, o grande centro cultural e comercial do mundo grego era a cidade-Estado de Atenas. Localizada numa pequena planície rochosa e seca sobranceira ao mar, Atenas, como Esparta, comportava tão somente uma agricultura pobre, e, antes do ano 600 a.C., viu-se assolada pela escassez de alimentos. A comunidade foi sacudida por uma guerra civil entre ricos e pobres. Em 594 a.C. a pequena classe média ateniense (mercadores, artesãos e alguns fazendeiros) engendrou a eleição do reformador Sólon (639?-599? a.C.) como arconte, ou líder. Sólon proscreveu a escravidão decorrente de dívidas (embora outras formas de escravidão persistissem), concedeu cidadania a artífices estrangeiros na expectativa de que pudessem ensinar suas aptidões aos naturais de Atenas, encorajou os fazendeiros a abandonar a deficitária produção de trigo e a plantar oliveiras e videiras em substituição e instituiu uma assembleia popular. Apesar dessas reformas a democracia não se instalou facilmente em Atenas e por várias vezes no século seguinte o poder foi arrebatado por déspotas em golpes de Estado. Em 510 a.C., depois de um desses golpes, uma nova constituição entrou em vigor. Essa constituição, mais democrática ainda que a de Sólon, dava direito de voto a todos os cidadãos adultos do sexo masculino. A democracia de Atenas não era completa (nem as mulheres e nem os escravos, que representavam um quarto da população, podiam votar), porém não houve nada superior no mundo antigo.

Depois de Sólon prosperidade e democracia andaram juntas em Atenas. O azeite e o vinho atenienses eram considerados os mais finos produzidos na região do mar Mediterrâneo. Acondicionados em jarras artísticas confeccionadas pelos talentosos artesãos da cidade, eram vendidos amplamente em toda a Grécia e fora dela. O mercado da cidade, a *ágora*, tornou-se o principal elo comercial do Mediterrâneo oriental. A vida intelectual de Atenas girava em torno da *ágora*. Ali, agricultores do interior, mercadores e artesãos das lojas da cidade e mercadores e marinheiros recém-chegados do cais misturavam-se e conversavam. Filósofos como Sócrates (469?-399 a.C.) e Platão (427?-347 a.C.), cientistas como Aristóteles (384-322 a.C.) e dramaturgos como Aristófanes (445?-385? a.C.) sentavam-se à sombra, cercados de discípulos, admiradores e cidadãos interessados e trocavam ideias. Embora a *ágora* ateniense fosse a maior da Grécia Helênica, outros mercados, em outras cidades comerciais, como Corinto, Rodes e Mileto, tinham uma função semelhante. Além do mais, como a população grega continuasse a crescer, fundaram-se novas cidades-Estado em lugares muito distantes como a Itália, Chipre e as costas do mar Negro, em empreendimentos de grande pioneirismo. Essas colônias, entre elas Siracusa e Nápoles (literalmente, “Nova Cidade”) na Itália, Marselha na Riviera francesa e Sinope na Turquia atual, também tinham suas *ágoras*-imitações em tamanho menor da de Atenas — onde se reuniam filósofos e cientistas.

Em 432 a.C. Atenas estava no auge de seu prestígio e poder sob a liderança de seu grande estadista Péricles (490?-429 a.C.). Tinha uma armada poderosa, construída para rechaçar duas invasões anteriores da Pérsia, uma em 490 a.C. e outra uma década mais tarde. A cidade estava à testa da Liga de Delos, uma rede política e comercial que incluía pelo menos uma dúzia de outras cidades-Estado gregas, e controlava inclusive os fundos da Liga.

Mas a prosperidade não durou muito. A Pérsia, como represália por suas derrotas, anexou Mileto, Esmirna e outras cidades gregas ao longo da costa jônica. E o que é pior, um ciúme crescente, por parte de Esparta, do poderio naval ateniense provocava atritos frequentes entre os dois estados. Em 431 a.C. entraram em guerra num conflito que durou até 404 a.C., arruinou ambos os países e envolveu a maior parte das outras cidades-Estado. Outras guerras se seguiram até 336 a.C., quando Alexandre, o Grande (356-323 a.C.) uniu toda a Grécia sob o Império Macedônio.

A despeito da desunião política, da escassez crônica de alimentos, da superpopulação e do quase permanente estado de guerra, o Período Helênico grego (c. 800-336 a.C.) testemunhou realizações intelectuais extraordinárias. Nas *ágoras* de Atenas e outras cidades-Estado, os filósofos ensinaram seus discípulos e lançaram novas ideias. Foi nessa época que se escreveram histórias reais pela primeira vez: a descrição otimista das gloriosas vitórias gregas sobre os invasores persas feita por Heródoto (484?-424? a.C.) e o relato angustiante da luta fratricida entre Esparta e Atenas feito por Tucídides (460?-400? a.C.). Foi também nesse período que se assistiu pela primeira vez ao emprego do raciocínio dedutivo em matemática — o que se deve a Tales de Mileto (640?-564? a.C.) e Pitágoras (586?-500? a.C.) —, que Hipócrates de Quios (a quem se deve o famoso juramento médico hipocrático) lançou os fundamentos da medicina moderna e que a lógica foi sistematizada num tratamento de Aristóteles. Foi um período de literatura e teatro excelentes, em que pontificaram dramaturgos como Sófocles (496?-406? a.C.) e Aristófanes (445?-385? a.C.). Naquelas cidadezinhas dos vales rochosos do extremo oriental do mar Mediterrâneo, há mais de 2000 anos, lançaram-se os fundamentos da sociedade ocidental.

A matemática pitagórica

3.1 O berço da matemática demonstrativa

Os últimos séculos do segundo milênio a.C. testemunharam muitas mudanças econômicas e políticas. Algumas civilizações desapareceram, o poder do Egito e da Babilônia declinou, e outros povos, especialmente os hebreus, os assírios, os fenícios e os gregos, passaram ao primeiro plano. A Idade do Ferro que se anunciava trazia consigo mudanças abrangentes no que se refere à guerra e a todas as atividades que exigiam instrumentos ou ferramentas. Inventou-se o alfabeto e se introduziram as moedas. O comércio foi crescentemente incentivado e se fizeram muitas descobertas geográficas. O mundo estava pronto para um novo tipo de civilização.

O aparecimento dessa nova civilização se deu nas cidades comerciais espalhadas ao longo das costas da Ásia Menor e, mais tarde, na parte continental da Grécia, na Sicília e no litoral da Itália. A visão estática do Oriente antigo sobre as coisas tornou-se insustentável e, numa atmosfera de racionalismo crescente, o homem começou a indagar *como* e *por quê*.

Pela primeira vez na matemática, como em outros campos, o homem começou a formular questões fundamentais como “*Por que* os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais?” e “*Por que* o diâmetro de um círculo divide esse círculo ao meio?”. Os processos empíricos do Oriente antigo, suficientes o bastante para responder questões na forma de *como*, não mais bastavam para as indagações mais científicas na forma de *por quê*. Algumas experiências com o método demonstrativo foram se consubstanciando e se impondo, e a feição dedutiva da matemática, considerada pelos doutos como sua característica fundamental, passou ao primeiro plano. Assim, a matemática, no sentido moderno da palavra, nasceu nessa atmosfera de racionalismo e em uma das novas cidades comerciais localizadas na costa oeste da Ásia Menor. Segundo a tradição a geometria demonstrativa começou com Tales de Mileto, um dos “sete sábios” da Antiguidade, durante a primeira metade do sexto século a.C.¹.

¹ Há alguns historiadores da matemática antiga, em particular Otto Neugebauer, que discordam dessa explicação tradicional evolucionária da origem da matemática demonstrativa e são favoráveis a uma explicação mais *revolucionária* segundo a qual a mudança teria se iniciado com a descoberta da irracionalidade de $\sqrt{2}$.

Segundo parece, Tales começou sua vida como mercador, tornando-se rico o bastante para dedicar a parte final de sua vida ao estudo e a algumas viagens. Diz-se que ele viveu por algum tempo no Egito, e que despertou admiração ao calcular a altura de uma pirâmide por meio da sombra (ver Exercício 3.1). De volta a Mileto ganhou reputação, graças a seu gênio versátil, de estadista, conselheiro, engenheiro, homem de negócios, filósofo, matemático e astrônomo. Tales é o primeiro personagem conhecido a quem se associam descobertas matemáticas. Em geometria, creditam-se a ele os seguintes resultados elementares:

1. Qualquer diâmetro efetua a bissecção do círculo em que é traçado.
2. Os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais.
3. Ângulos opostos pelo vértice são iguais.
4. Se dois triângulos têm dois ângulos e um lado em cada um deles respectivamente iguais, então esses triângulos são iguais. [Tales talvez tenha usado esse resultado na determinação que fez da distância de um navio à praia (ver Exercício 3.1).]
5. Um ângulo inscrito num semicírculo é reto. (Este resultado era do conhecimento dos babilônios cerca de 1400 anos antes.)

O valor desses resultados não deve ser aquilatado por eles mesmos, mas antes pela crença de que Tales obteve-os mediante alguns raciocínios lógicos e não pela intuição ou experimentalmente.

Observe-se, por exemplo, a questão da igualdade de um par de ângulos opostos pelo vértice. Pretendemos mostrar que na Figura 6 o ângulo a é igual ao ângulo b . Nos tempos pré-helênicos a igualdade desses dois ângulos era considerada provavelmente tão óbvia que, se acaso alguém tivesse dúvidas a respeito, bastaria para convencer esse alguém, recortar os ângulos e superpor um ao outro. Tales, ao contrário, preferiu estabelecer a igualdade dos ângulos a e b por raciocínio lógico, talvez em grande parte como se faz hoje nos textos de geometria elementar. Na Figura 6, a soma do ângulo a com o ângulo c é igual a um ângulo raso; o mesmo acontece com a soma dos ângulos b e c . Como todos os ângulos rasos são iguais, então o ângulo a é igual ao ângulo b (subtraindo-se iguais de iguais, então as diferenças são iguais). Estabeleceu-se assim a igualdade dos ângulos a e b por uma curta cadeia de raciocínios dedutivos, a partir de princípios mais básicos.

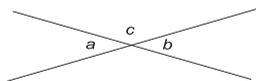


Figura 6

Tal como a respeito de outros grandes homens, contam-se sobre Tales muitas anedotas deliciosas que, se não são verdadeiras, pelo menos são oportunas. Houve uma ocasião em que demonstrou como é fácil ficar rico; prevendo uma safra de olivas muito abundante, obteve o monopólio de todas as prensas de azeite da região; na ocasião adequada alugou-as todas e ganhou uma fortuna. E há a história, recontada por Esopo,

do mulo recalcitrante que, ao transportar sal, submergia sua carga no ribeirão para dissolver seu conteúdo e assim poder seguir viagem mais descansadamente. Tales tirou-lhe esse hábito importuno fazendo-o transportar cargas de esponjas. A uma indagação de Sólon sobre por que jamais se casara respondeu mandando-lhe no dia seguinte uma mensagem falsa comunicando o falecimento súbito da filha favorita dele num acidente. Tales então tranquilizou o ferido e pesaroso pai explicando tudo e comentando: “Eu simplesmente desejava lhe dizer por que jamais me casei”.

Pesquisas recentes indicam que não há nenhuma evidência que sustente a história muitas vezes repetida de que Tales previu um eclipse solar ocorrido em 585 a.C.

3.2 *Pitágoras e os pitagóricos*

A história dos 300 primeiros anos da matemática grega foi obscurecida pela grandeza dos *Elementos* de Euclides, escritos por volta de 300 a.C. De fato, essa obra eclipsou tanto os trabalhos matemáticos gregos anteriores que eles acabaram sendo descartados e por fim se perderam para nós. Como observou certa vez o eminente matemático deste século, David Hilbert, pode-se medir a importância de um trabalho científico pelo número de publicações anteriores tornadas supérfluas por ele.

Consequentemente, ao contrário do que ocorre com a matemática antiga do Egito e da Babilônia, quase não se dispõe de nenhuma fonte primária para lançar luz sobre a primitiva matemática grega. Somos forçados a nos apoiar em manuscritos e relatos escritos vários séculos depois de os originais terem sido produzidos. Porém, a despeito dessa dificuldade, não faltaram sábios especializados na cultura clássica para construir uma descrição bastante consistente, embora algo hipotética, da história da matemática grega primitiva, e para restaurar de maneira bastante plausível muitos dos textos originais gregos. Esse trabalho exigiu engenhosidade e paciência espantosas, sendo levado a efeito através de comparações meticolosas dos textos derivados e do exame de inúmeros fragmentos documentais e observações esparsas feitas mais tarde por autores, filósofos e comentaristas².

É difícil avaliar o débito da matemática grega primitiva para com a matemática oriental; tampouco está satisfatoriamente elucidado o caminho de transmissão de uma para a outra. Que esse débito é consideravelmente maior do que outrora se supunha torna-se evidente a partir das pesquisas realizadas neste século em torno de registros históricos egípcios e babilônios. Os autores gregos não deixaram de manifestar seu respeito pela sabedoria oriental, e essa sabedoria era acessível a todos que pudessem viajar ao Egito e à Babilônia. Há também evidências internas de uma conexão com o Oriente. O misticismo grego primitivo em matemática deixa transparecer uma forte influência oriental e alguns escritos gregos mostram uma perpetuação helênica da tradição mais aritmética do Oriente. Há também fortes elos ligando a astronomia grega à da Mesopotâmia.

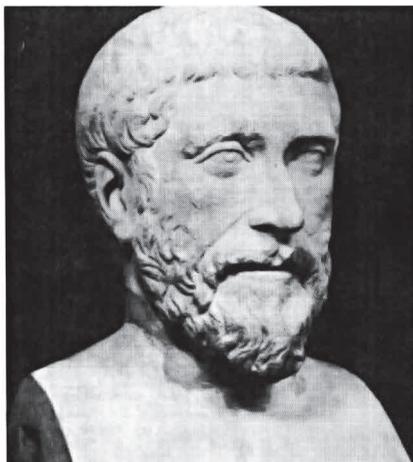
² É mister reconhecer nossa dívida, ao longo destas linhas, para com as investigações profundas e eruditas de homens como Paul Tannery, T. L. Heath, H. G. Zeuthen, A. Rome, J. L. Heiberg e E. Frank.

Nossa principal fonte de informações a respeito dos primeiros passos da matemática grega é o chamado *Sumário Eudemiano* de Proclo. Esse sumário consiste nas páginas de abertura do *Comentário sobre Euclides, Livro I*, de Proclo e é um breve resumo do desenvolvimento da geometria grega desde seus primeiros tempos até Euclides. Embora Proclo tivesse vivido no século V d.C., mais de um milênio depois do início da matemática grega, ele ainda teve acesso a muitos trabalhos históricos e críticos que de então para cá se perderam, salvo alguns fragmentos e alusões preservados por ele próprio e outros. Dentre esses trabalhos perdidos está um resumo de uma história aparentemente completa de geometria grega, já desaparecida à época de Proclo, cobrindo o período anterior a 335 a.C. e escrita por Eudemo, um discípulo de Aristóteles. O nome *Sumário Eudemiano* se deve a esse trabalho anterior. A descrição das realizações matemáticas de Tales, esboçada na seção precedente, foi extraída do *Sumário Eudemiano*.

O próximo matemático ilustre a ser mencionado no *Sumário Eudemiano* é Pitágoras, envolto numa névoa tal de misticismo por seus seguidores que pouco se sabe sobre ele com algum grau de certeza. Ao que parece Pitágoras nasceu por volta de 572 a.C. na ilha egeia de Samos. É possível que Pitágoras tenha sido discípulo de Tales, pois era 50 anos mais novo do que este e morava perto de Mileto, onde vivia Tales. Depois parece que residiu por algum tempo no Egito e pode mesmo ter-se abalanchado a viagens mais extensas. Ao retornar a Samos encontrou o poder nas mãos do tirano Polícrates e a Jônia sob o domínio persa; decidiu então emigrar para o porto marítimo de Crotona, uma colônia grega situada no sul da Itália. Lá ele fundou a famosa escola pitagórica, que, além de ser um centro de estudo de filosofia, matemática e ciências naturais, era também uma irmandade estreitamente unida por ritos secretos e cerimônias. Com o tempo, a influência e as tendências aristocráticas da irmandade tornaram-se tão grandes que forças democráticas do sul da Itália destruíram os prédios da escola fazendo com que a confraria se dispersasse. Segundo um relato, Pitágoras fugiu para Metaponto onde morreu, talvez assassinado, com uma idade avançada entre 75 e 80 anos de idade. A irmandade, embora dispersa, continuou a existir por pelo menos mais dois séculos.

A filosofia pitagórica baseava-se na suposição de que a causa última das várias características do homem e da matéria são os números inteiros. Isso levava a uma exaltação e ao estudo das propriedades dos números e da aritmética (no sentido de teoria dos números), junto com a geometria, a música e a astronomia, que constituíam as artes liberais básicas do programa de estudos pitagórico. Esse grupo de matérias tornou-se conhecido na Idade Média como *quadrivium*, ao qual se acrescentava o *trivium*, formado de gramática, lógica e retórica. Essas sete artes liberais vieram a ser consideradas como a bagagem cultural necessária de uma pessoa educada.

Como os ensinamentos da escola eram inteiramente orais e como era costume da irmandade atribuir todas as descobertas ao reverenciado fundador, é difícil agora saber exatamente que descobertas matemáticas se devem ao próprio Pitágoras e quais se devem a outros membros da confraria.



Pitágoras (Coleção David Smith)

3.3 *Aritmética pitagórica*

Os gregos antigos faziam distinção entre o estudo das relações abstratas envolvendo os números e a arte prática de calcular com números. Esta era conhecida como *logística* e aquele como *aritmética*. Essa distinção atravessou a Idade Média chegando até por volta do final do século XV, quando surgiram textos que tratavam as facetas teórica e prática da abordagem dos números sob a designação única de *aritmética*. É interessante que hoje *aritmética* tenha seu significado original na Europa Continental, ao passo que na Inglaterra e nos Estados Unidos o significado popular de aritmética corresponde à *logística* grega. Nos dois países citados usa-se a expressão *teoria dos números* para designar a faceta abstrata do estudo dos números.

Admite-se geralmente que os primeiros passos no sentido do desenvolvimento da teoria dos números e, ao mesmo tempo, do lançamento das bases do futuro misticismo numérico, foram dados por Pitágoras e seus seguidores movidos pela filosofia da fraternidade. Assim é que Jâmblico, um influente filósofo neoplatônico que viveu por volta de 320 d.C., atribui a Pitágoras a descoberta dos *números amigáveis*. Dois números se dizem amigáveis se cada um deles é igual à soma dos divisores próprios³ do outro. Por exemplo, 284 e 220, que constituem o par atribuído a Pitágoras, são amigáveis porque os divisores próprios de 220 são 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55 e 110 cuja soma é 284, ao passo que os divisores próprios de 284 são 1, 2, 4, 71 e 142 cuja soma é 220. Esse par de números alcançou uma aura

³ Os *divisores próprios* de um número positivo N são todos os divisores inteiros positivos de N exceto o próprio N . Um sinônimo um tanto quanto antiquado de divisor próprio é *parte alíquota*.

mística, e rezava a superstição posterior que dois talismãs com esses números selariam uma amizade perfeita entre os que os usassem. Os dois números vieram a ter um papel importante na magia, na feitiçaria, na astrologia e na determinação de horóscopos. Parece que nenhum novo par de números amigáveis foi descoberto até que o grande especialista francês em teoria dos números Pierre de Fermat anunciou em 1636 um novo par formado por 17 296 e 18 416. Estabeleceu-se recentemente, porém, que se tratava de uma redescoberta e que esse par fora encontrado antes pelo árabe Al-Banna (1256-1321) no fim do século XIII ou começo do século XIV, talvez usando a fórmula de Tâbit ibn Qorra (para essa fórmula, ver Exercício 7.11). Dois anos após a participação de Fermat, o matemático e filósofo francês René Descartes deu um terceiro par. Um estudo sistemático dos números amigáveis foi empreendido pelo matemático suíço Leonhard Euler que, em 1747, deu uma lista de 30 pares, ampliada por ele mais tarde para mais de 60. Uma curiosidade na história desses números foi a descoberta tardia, em 1866, do despercebido e relativamente pequeno par de números amigáveis 1184 e 1210, feita pelo adolescente italiano Nicolo Paganini⁴, então com 16 anos de idade. Todos os números amigáveis inferiores a 1 bilhão já foram encontrados.

Também se atribuem aos pitagóricos os *números perfeitos*, *deficientes* e *abundantes* que apresentam ligações místicas essenciais a especulações numerológicas. Um número se diz *perfeito* se é igual à soma de seus divisores próprios, *deficiente* se excede a soma de seus divisores próprios e *abundante* se é menor que a soma de seus divisores próprios. Assim, Deus criou o mundo em seis dias, um número perfeito pois $1 + 2 + 3 = 6$. Por outro lado, conforme observou Alcuíno (735-804), toda a raça humana descende das oito almas da arca de Noé, sendo essa criação imperfeita porque 8 é deficiente, já que $1 + 2 + 4 < 8$. Até 1952, conheciam-se apenas 12 números perfeitos, todos pares, dos quais os três primeiros são 6, 28 e 496. A última proposição do nono livro dos *Elementos* de Euclides (c. 300 a.C.) prova que se $2^n - 1$ é um número primo⁵, então $2^{n-1}(2^n - 1)$ é um número perfeito.

Os números perfeitos dados pela fórmula de Euclides são números pares, e Euler provou que todo número perfeito par tem essa forma. A existência ou não de números perfeitos ímpares é uma das célebres questões abertas da teoria dos números. Seguramente não há nenhum número desse tipo com menos do que 200 dígitos.

Em 1952, com a ajuda de um computador digital SWAC, descobriram-se mais cinco números perfeitos, correspondentes a $n = 521, 607, 1279, 2203$ e 2281 na fórmula de Euclides. Em 1957 com a máquina sueca BESK, encontrou-se outro, correspondente a $n = 3217$. Em 1961 com um IBM 7090, encontraram-se mais dois, para $n = 4253$ e $n = 4423$. Não há outros números perfeitos para $n < 5000$. Os valores $n = 9689, 9941, 11\ 213, 19\ 937, 21\ 701, 23\ 209, 44\ 497, 86\ 243, 132\ 049$ e $216\ 091$ também fornecem números perfeitos completando o total de 30 já conhecidos. O último foi encontrado

⁴ Não confundir com o notável violinista e compositor italiano Nicolo Paganini (1782-1840).

⁵ Um número inteiro positivo é um *número primo* se é maior do que 1 e seus únicos divisores são ele próprio e a unidade. Um inteiro maior do que 1 e que não é primo chama-se *número composto*. Assim, 7 é um número primo e 12 é um número composto.

por cientistas de Chevron, em 1985, num supercomputador Cray X-MP de US\$ 10.000.000.

O conceito de número perfeito inspirou certas generalizações por parte de matemáticos modernos. Se indicamos por $\sigma(n)$ a soma de *todos* os divisores de n (incluindo o próprio n), então n é perfeito se e somente se $\sigma(n) = 2n$. De um modo geral, se tivermos $\sigma(n) = kn$, em que k é um número natural, então n se diz um *número múltiplo-perfeito de ordem k* . Pode-se mostrar, por exemplo, que 120 e 672 são múltiplos-perfeitos de ordem 3. Deixando de lado somente os números perfeitos, não se sabe se existe uma infinidade de números múltiplos-perfeitos. Em 1944 criou-se o conceito de *número superabundante*. Diz-se que um número natural n é *superabundante* se, e somente se, $\sigma(n)/n > \sigma(k)/k$, para todo $k < n$. Sabe-se que existem infinitos números superabundantes. Outros tipos de números relacionados com os números perfeitos, deficientes e abundantes e introduzidos recentemente são os *números práticos*, *números quase-perfeitos*, *números semiperfeitos* e *números sobrenaturais*. Mencionamos esses conceitos apenas para ilustrar como trabalhos antigos com números inspiraram investigações relacionadas, modernamente.

Embora nem todos os historiadores da matemática entendam que os números amigáveis e perfeitos possam ser atribuídos aos pitagóricos, parece haver uma concordância universal quanto a que os *números figurados* se originaram com os membros mais antigos da escola. Esses números, que expressam o número de pontos em certas configurações geométricas, representam um elo entre a geometria e a aritmética. As Figuras 7, 8 e 9 justificam a nomenclatura *números triangulares*, *números quadrados*, *números pentagonais* e assim por diante.

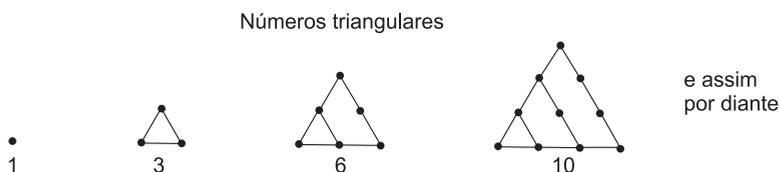


Figura 7

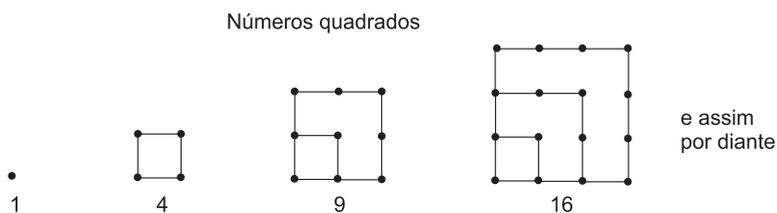


Figura 8

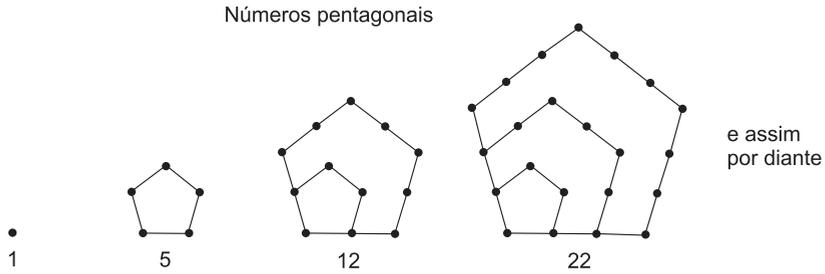


Figura 9

Podem-se estabelecer muitos teoremas interessantes relativos a números figurados de maneira puramente geométrica. Para mostrar o Teorema I (*todo número quadrado é a soma de dois números triangulares sucessivos*), por exemplo, observamos que um número quadrado, na sua forma geométrica, pode ser dividido como na Figura 10. Além disso, a Figura 11 ilustra o Teorema II (*o enésimo número pentagonal é igual a n mais três vezes o $(n-1)$ -ésimo número triangular*). Na figura 12 ilustra-se geometricamente o Teorema III (*a soma de um número qualquer de inteiros ímpares consecutivos, começando com o 1, é um quadrado perfeito*).

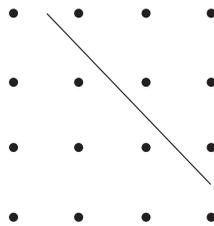


Figura 10

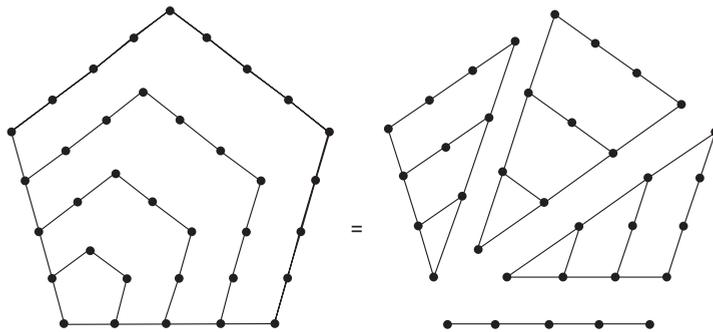


Figura 11

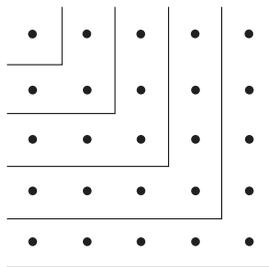


Figura 12

É óbvio que esses teoremas podem ser provados algebricamente, uma vez obtidas as representações algébricas genéricas dos números triangulares, quadrados e pentagonais. Evidentemente o n ésimo número triangular T_n é dado pela soma da progressão aritmética⁶,

$$T_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

e, como é claro, o n ésimo número quadrado S_n , é n^2 . Nosso primeiro teorema pode agora ser redemonstrado da maneira seguinte:

$$S_n = n^2 = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{(n-1)n}{2} = T_n + T_{n-1}.$$

O n ésimo número pentagonal, P_n , é também dado pela soma de uma progressão aritmética.

$$\begin{aligned} P_n &= 1 + 4 + 7 + \dots + (3n - 2) \\ &= \frac{n(3n-1)}{2} = n + \frac{3n(n-1)}{2} \\ &= n + 3T_{n-1}. \end{aligned}$$

Isso prova o segundo teorema. Prova-se algebricamente o terceiro teorema calculando a soma da progressão aritmética

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = \frac{n(2n)}{2} = n^2.$$

⁶ A soma dos termos de uma progressão aritmética finita é a metade do produto do número de termos pela soma dos dois termos extremos.

Como uma última e notável descoberta sobre números feita pelos pitagóricos, poderíamos mencionar a relação entre intervalos musicais e razões numéricas. Considerando cordas sujeitas à mesma tensão, eles encontraram que para a oitava os comprimentos devem ter razão 2 para 1, para a quinta 3 para 2 e para a quarta 4 para 3. Esses resultados, os primeiros fatos registrados da física-matemática, levaram os pitagóricos a iniciar o estudo científico das escalas musicais.

3.4 O teorema de Pitágoras e os ternos pitagóricos

A tradição é unânime em atribuir a Pitágoras a descoberta independente do teorema sobre triângulos retângulos hoje universalmente conhecido pelo seu nome — que o quadrado sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma dos quadrados sobre os catetos. Já vimos que esse teorema era conhecido pelos babilônios dos tempos de Hamurabi, mais de um milênio antes, mas sua primeira demonstração geral pode ter sido dada por Pitágoras. Muitas conjecturas têm sido feitas quanto à demonstração que Pitágoras poderia ter dado, mas ao que parece foi uma demonstração⁷ por decomposição como a que se segue, ilustrada na Figura 13. Denotemos por a , b e c os catetos e a hipotenusa de um triângulo retângulo, e consideremos os dois quadrados da figura anexa, cada um de lados iguais a $a + b$. O primeiro quadrado está decomposto em seis partes — a saber, os dois quadrados sobre os catetos e quatro triângulos retângulos congruentes ao triângulo dado. O segundo quadrado está decomposto em cinco partes — a saber, o quadrado sobre a hipotenusa e quatro triângulos retângulos congruentes ao triângulo dado. Subtraindo-se iguais de iguais, conclui-se que o quadrado sobre a hipotenusa é igual à soma dos quadrados sobre os catetos.

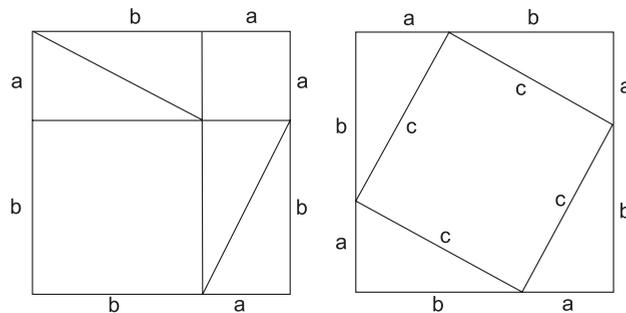


Figura 13

⁷ Ver, porém, Daniel Shanks, *Solved and Unsolved Problems in Number Theory*, vol. 1, pp. 124-5.

Para provar que a parte central da segunda decomposição é efetivamente um quadrado de lado c , precisamos usar o fato de que a soma dos ângulos de um triângulo retângulo é igual a dois ângulos retos. Mas o *Sumário Eudemiano* atribui esse teorema sobre triângulos em geral aos pitagóricos. E como uma demonstração desse teorema requer, por sua vez, o conhecimento de certas propriedades sobre retas paralelas, acredita-se também aos pitagóricos o desenvolvimento dessa teoria.

Desde os tempos de Pitágoras, muitas demonstrações do teorema em consideração foram dadas. E. S. Loomis, na segunda edição de seu livro, *The Pythagorean Proposition*, coletou e classificou nada menos que 370 dessas demonstrações.

Estreitamente ligado ao teorema de Pitágoras está o problema de encontrar inteiros a , b e c que possam representar os catetos e a hipotenusa de um triângulo retângulo. Um terno de números dessa espécie recebe a designação de *terno pitagórico* e, como vimos na Seção 2-6, a análise da tábula *Plimpton 322* oferece evidências razoavelmente convincentes de que os babilônios antigos sabiam como calcular esses ternos. Credita-se aos pitagóricos a fórmula

$$m^2 = \left(\frac{m^2 - 1}{2} \right)^2 + \left(\frac{m^2 + 1}{2} \right)^2,$$

na qual os três termos, para todo ímpar m , constituem um terno pitagórico. A fórmula análoga

$$(2m)^2 + (m^2 - 1)^2 = (m^2 + 1)^2,$$

na qual m pode ser par ou ímpar, foi ideada com o mesmo propósito e é atribuída a Platão (c. 380 a.C.). Nenhuma dessas duas fórmulas fornece todos os ternos pitagóricos.

3.5 A descoberta das grandezas irracionais

Os números inteiros são abstrações que surgem do processo de contar coleções finitas de objetos. Mas as necessidades da vida diária requerem, além da contagem de objetos individuais, a medição de várias quantidades, como comprimento, peso e tempo. Para satisfazer essas necessidades básicas referentes a medições necessita-se de frações, pois raramente acontece de um comprimento, para citar um exemplo, contar um número exato de vezes uma unidade linear. Definindo-se, assim, um *número racional* como o quociente p/q , $q \neq 0$, de dois números inteiros, o sistema dos números racionais é suficiente para propósitos práticos envolvendo medições, uma vez que ele contém todos os inteiros e todas as frações.

Os números racionais comportam uma interpretação geométrica simples. Marque dois pontos distintos O e I numa reta horizontal (I à direita de O) e tome o segmento OI como unidade de comprimento. Admitindo-se que os pontos O e I representem os

números 0 e 1, respectivamente, então os inteiros positivos e negativos podem ser representados por um conjunto de pontos da reta convenientemente espaçados a intervalos unitários, os positivos à direita de O e os negativos à esquerda de O . As frações de denominador q podem ser representadas pelos pontos que dividem cada um dos intervalos unitários em q partes. Então, para cada número racional, há um ponto da reta. Para os primeiros matemáticos, parecia evidente que todos os pontos da reta seriam usados dessa maneira. Deve ter sido um choque descobrir que há pontos na reta que não correspondem a nenhum número racional. Essa descoberta foi uma das grandes realizações dos pitagóricos. Em particular os pitagóricos provaram que não há nenhum número racional ao qual corresponda o ponto P da reta no caso em que OP é igual à diagonal de um quadrado cujos lados medem uma unidade (ver Figura 14). Novos números tiveram de ser inventados para serem associados a esses pontos; e não sendo racionais, vieram a se chamar *números irracionais* (o que significa números não racionais). A descoberta desses números assinala um dos grandes marcos da história da matemática.

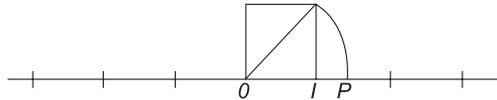


Figura 14

Para provar que o comprimento da diagonal de um quadrado de lado unitário não pode ser representado por um número racional, basta provar que $\sqrt{2}$ é irracional. E para tanto, observemos primeiro que, se s é um inteiro positivo, então s^2 é par se, e somente se, s é par. Suponhamos então, para efeito de raciocínio, que $\sqrt{2}$ seja racional — isto é, $\sqrt{2} = a/b$ — em que a e b são primos entre si⁸. Então

$$a = b\sqrt{2},$$

ou

$$a^2 = 2b^2.$$

Como a^2 é o dobro de um inteiro, concluímos que a^2 é par; logo a também é par. Façamos $a = 2c$; então a última equação torna-se

$$4c^2 = 2b^2,$$

ou

$$2c^2 = b^2,$$

⁸ Dois inteiros se dizem *primos entre si* se o único fator inteiro positivo comum a ambos é a unidade. Assim, 5 e 18 são primos entre si, ao passo que 12 e 18 não são primos entre si.

de onde se conclui que b^2 é par, e portanto b também é par. Mas isso é impossível, uma vez que admitimos que a e b são primos entre si. Assim, a suposição de que $\sqrt{2}$ fosse racional, por levar a uma contradição, deve ser abandonada.

A descoberta da existência de números irracionais foi surpreendente e perturbadora para os pitagóricos. Em primeiro lugar porque parecia desferir um golpe mortal na filosofia pitagórica segundo a qual tudo dependia dos números inteiros. Além disso, parecia contrária ao senso comum, pois intuitivamente havia o sentimento de que toda grandeza poderia ser expressa por *algum* número racional. A contrapartida geométrica era igualmente espantosa, pois quem poderia duvidar que, dados dois segmentos de reta, sempre seria possível encontrar um terceiro segmento de reta, talvez muito, muito pequeno, que coubesse exatamente um número inteiro de vezes em cada um dos dois segmentos dados? Mas tomemos como segmentos o lado s e a diagonal d de um quadrado. Então, se existisse um terceiro segmento t que coubesse exatamente um número inteiro de vezes em s e em d , teríamos $s = bt$ e $d = at$, em que a e b são inteiros positivos. Mas $d = s\sqrt{2}$ e portanto $at = bt\sqrt{2}$ — isto é $a = b\sqrt{2}$, ou $\sqrt{2} = a/b$ que é um número racional. Contrariamente à intuição, existem então segmentos de reta incomensuráveis — isto é, segmentos de reta para os quais não há uma unidade de medida comum.

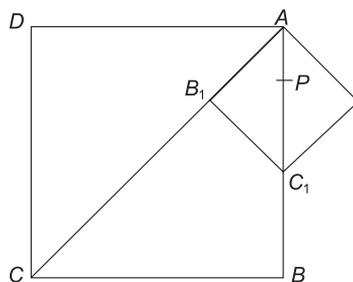


Figura 15

Esboçemos uma demonstração alternativa, geométrica, da irracionalidade de $\sqrt{2}$, mostrando que um lado e uma diagonal de um quadrado são incomensuráveis. Suponhamos o contrário. Isso implica, então, a existência de um segmento AP (ver Figura 15) tal que tanto a diagonal AC como o lado AB do quadrado $ABCD$ são múltiplos inteiros de AP ; isto é, AC e AB são comensuráveis com relação a AP . Em AC tomemos o ponto B_1 de modo que $CB_1 = AB$ e tracemos B_1C_1 perpendicular a CA . Pode-se provar facilmente que $C_1B = C_1B_1 = AB_1$. Então $AC_1 = AB - AB_1$ e AB_1 são comensuráveis com relação a AP . Mas AC_1 e AB_1 são uma diagonal e um lado de um quadrado de dimensões menores que a metade daquelas do quadrado original. Segue-se então que, repetindo-se o processo, podemos obter finalmente um quadrado cuja diagonal AC_n e cujo lado AB_n são comensuráveis com relação a AP e $AC_n < AP$. Esse absurdo prova o teorema.

A primeira demonstração é essencialmente a tradicional que Aristóteles (384-322 a.C.) conhecia. A descoberta da irracionalidade de $\sqrt{2}$ provocou alguma consternação nos

meios pitagóricos. Pois não só ela parecia perturbar a suposição básica da escola, de que tudo dependia dos números inteiros, como também porque a definição pitagórica de proporção, assumindo como comensuráveis duas grandezas quaisquer similares, fazia com que todas as proposições da teoria pitagórica das proporções se limitassem a grandezas comensuráveis, invalidando sua teoria geral das figuras semelhantes. Tão grande foi o “escândalo lógico” que por algum tempo se fizeram esforços para manter a questão em sigilo. Conta uma lenda que o pitagórico Hipaso (ou talvez outro) foi lançado ao mar pela ação ímpia de revelar o segredo a estranhos ou (de acordo com outra versão) que ele foi banido da comunidade pitagórica, sendo-lhe ainda erigido um túmulo, como se estivesse morto.

Por algum tempo, $\sqrt{2}$ foi o único número irracional conhecido⁹. Mais tarde, segundo Platão, Teodoro de Cirene (c. 425 a.C.) mostrou que $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{14}$, $\sqrt{15}$ e $\sqrt{17}$ também são irracionais. Por volta de 370 a.C., o “escândalo” fora resolvido por Eudoxo, um brilhante discípulo de Platão e do pitagórico Arquitas, através de uma nova definição de proporção. O magistral tratamento dos incomensuráveis formulado por Eudoxo aparece no quinto livro dos *Elementos* de Euclides, e essencialmente coincide com a exposição moderna dos números irracionais dada por Dedekind em 1872.

As abordagens de razões e proporções e de semelhança de triângulos apresentadas nos textos de geometria das primeiras décadas deste século destinados ao ensino secundário refletem as dificuldades e as sutilezas na questão das grandezas incomensuráveis. Nessas abordagens consideram-se dois casos, dependendo da comensurabilidade ou incomensurabilidade de certas grandezas (ver, por exemplo, Seção 5-5 e Exercício 5.6). Textos mais recentes contornam as dificuldades pelo uso de embasamentos postulacionais mais sofisticados.

3.6 Identidades algébricas

Imbuídos da ideia de representação de um número por meio de um comprimento e carecendo completamente de qualquer notação algébrica adequada, os gregos antigos idearam processos algébricos engenhosos para efetuar operações algébricas. Atribui-se aos pitagóricos parte considerável dessa álgebra geométrica que se acha espalhada por vários dos primeiros livros dos *Elementos* de Euclides. Assim, o Livro II dos *Elementos* contém várias proposições que em realidade são identidades algébricas envolvidas numa terminologia geométrica. Parece bastante certo que essas proposições tenham sido desenvolvidas pelos primeiros pitagóricos, através de métodos de decomposição. Podemos ilustrar o método considerando umas poucas proposições do Livro II.

A Proposição 4 do Livro II estabelece geometricamente a identidade

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

⁹ É possível que $(\sqrt{5} - 1)/2$, que é a razão entre o lado e a diagonal de um pentágono regular, tenha sido o primeiro irracional conhecido.

decompondo o quadrado de lado $a + b$ em dois quadrados e dois retângulos de áreas a^2 , b^2 , ab e ba , como mostra a Figura 16. O enunciado de Euclides para essa proposição é: *Dividindo-se uma reta em duas partes, o quadrado sobre a reta toda é igual à soma dos quadrados sobre as partes juntamente com o dobro do retângulo contido pelas partes.*

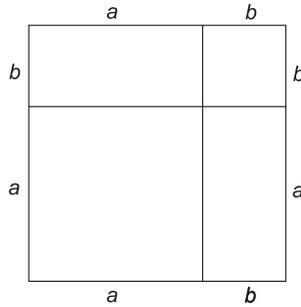


Figura 16

O enunciado da Proposição 5 do Livro II é: *Dividindo-se uma reta em partes iguais e em partes desiguais, o retângulo contido pelas partes desiguais, junto com o quadrado sobre a reta entre os pontos de secção, é igual ao quadrado sobre a metade da reta dada.* Seja AB o segmento de reta dado e suponhamos que ele esteja dividido igualmente em P e desigualmente em Q . Então a proposição diz que

$$(AQ)(QB) + (PQ)^2 = (PB)^2.$$

Fazendo-se $AQ = 2a$ e $QB = 2b$, obtém-se a identidade algébrica

$$4ab + (a - b)^2 = (a + b)^2,$$

ou, fazendo-se $AB = 2a$ e $PQ = b$, a identidade

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$$

A decomposição dada nos *Elementos* para estabelecer esse teorema aparece na Figura 17. É mais complicada que aquela para a Proposição 4. Na figura, $PCDB$ e $QFLB$ são quadrados construídos sobre PB e QB como lados. Então

$$\begin{aligned} (AQ)(QB) + (PQ)^2 &= AGFQ + HCEF = AGHP + PHFQ + HCEF \\ &= PHLB + PHFQ + HCEF \\ &= PHLB + FEDL + HCEF = (PB)^2. \end{aligned}$$

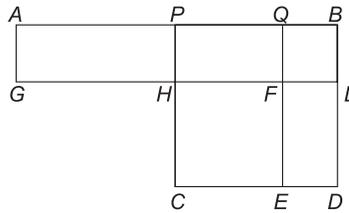


Figura 17

O enunciado da Proposição 6 do Livro II é: *Efetuada-se a bissecção de uma reta e prolongando-a até um ponto qualquer, o retângulo contido pela reta assim prolongada e a parte que lhe foi acrescida, junto com o quadrado sobre metade da reta dada, é igual ao quadrado sobre a reta formada da metade e da parte acrescida.* Neste caso (ver Figura 18), se o segmento de reta dado AB , de ponto médio P , é prolongado até Q , devemos mostrar que

$$(AQ)(BQ) + (PB)^2 = (PQ)^2.$$

Se fizermos $AQ = 2a$ e $BQ = 2b$, obteremos outra vez a identidade

$$4ab + (a - b)^2 = (a + b)^2,$$

podendo-se usar uma decomposição semelhante à usada para a Proposição 5.

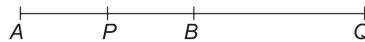


Figura 18

A Figura 19, com $AB = a$ e $BC = b$, sugere uma demonstração menos trabalhosa da identidade

$$4ab + (a - b)^2 = (a + b)^2.$$

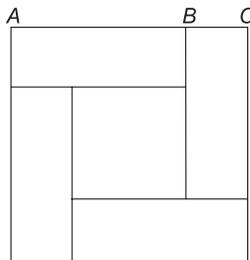


Figura 19

3.7 Resolução geométrica de equações quadráticas

Em sua álgebra geométrica, os gregos se utilizaram de dois métodos principais para resolver certas equações simples — o método das proporções e o método da aplicação de áreas. Há indícios de que ambos esses métodos se originaram com os pitagóricos.

O método das proporções permite a construção (exatamente como fazemos hoje nos cursos de geometria da escola secundária) de um segmento de reta x dado por $a : b = c : x$ ou por $a : x = x : b$, em que a, b, c são segmentos de reta dados. Isto é, o método das proporções fornece soluções geométricas das equações (ver Figura 20)

$$ax = bc \quad \text{e} \quad x^2 = ab.$$

Para explicar o método de aplicação de áreas, considere (ver Figura 21) um segmento de reta AB e um paralelogramo $AQRS$ cujo lado AQ está contido na semirreta $A\bar{B}$. Se Q não coincide com B , tome C de modo que $QBCR$ seja um paralelogramo. Quando Q está entre A e B , diz-se que o paralelogramo $AQRS$ está *aplicado ao segmento AB , ficando aquém pelo paralelogramo $QBCR$* ; quando Q coincide com B , diz-se que o paralelogramo $AQRS$ está *aplicado ao segmento AB* ; quando Q está no prolongamento de AB , diz-se que o paralelogramo $AQRS$ está *aplicado ao segmento AB , excedendo pelo paralelogramo $QBCR$* .

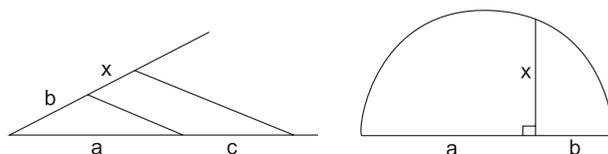


Figura 20

A proposição 44 do Livro I dos *Elementos* de Euclides resolve a construção: *Aplicar a um dado segmento de reta AB um paralelogramo de área dada e ângulos da base dados*. Considere o caso particular em que os ângulos da base dados são retos de modo que o paralelogramo aplicado é um retângulo. Denote o comprimento de AB por a , a altura do retângulo aplicado por x e as dimensões de um retângulo de área igual à do retângulo aplicado por b e c . Então

$$ax = bc \quad \text{ou} \quad x = \frac{bc}{a}.$$

A proposição 28 do Livro VI dos *Elementos* resolve a construção: *Aplicar a um dado segmento de reta AB um paralelogramo $AQRS$ de área igual a uma dada figura retilínea F , e ficando aquém por um paralelogramo $QBCR$ semelhante a um paralelogramo dado, não excedendo a área de F a do paralelogramo descrito sobre metade de AB e seme-*

lhante à deficiência QBCR. Considere o caso particular em que o paralelogramo dado é um quadrado. Denote o comprimento de AB por a , a base AQ do paralelogramo aplicado (que é então um retângulo) por x e o lado de um quadrado F , de área igual à do retângulo aplicado, por b . Então

$$x(a-x) = b^2 \quad \text{ou} \quad x^2 - ax + b^2 = 0. \quad (1)$$

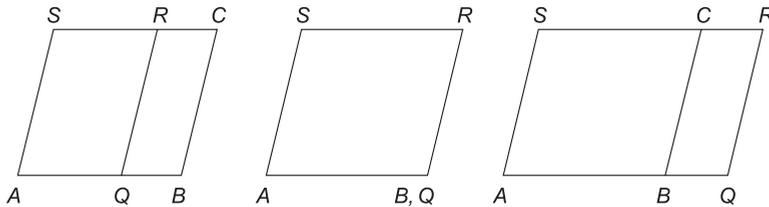


Figura 21

A Proposição 29 do Livro VI resolve a construção: *Aplicar a um dado segmento de reta AB um paralelogramo $AQRS$ de área igual a uma figura retilínea F , e excedendo por um paralelogramo $QBCR$ semelhante a um paralelogramo dado.* Considere o caso particular em que o paralelogramo dado é um quadrado. Denote o comprimento de AB por a , a base AQ do paralelogramo aplicado (que é então um retângulo) por x e o lado de um quadrado F de área igual ao retângulo aplicado por b . Então

$$x(x-a) = b^2 \quad \text{ou} \quad x^2 - ax - b^2 = 0. \quad (2)$$

Do que vimos segue-se que a Proposição I 44 fornece uma solução geométrica da equação linear $ax = bc$ e as Proposições VI 28 e 29 fornecem soluções geométricas das equações quadráticas $x^2 - ax + b^2 = 0$ e $x^2 - ax - b^2 = 0$, respectivamente.

Facilmente podem-se imaginar construções para os casos particulares acima das Proposições VI 28 e 29 que são bastante mais simples do que as construções mais gerais dadas nos *Elementos*.

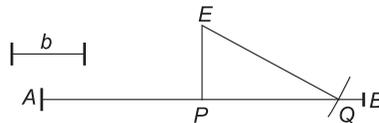


Figura 22

Considere, por exemplo, o caso particular da Proposição VI 28. Desejamos, pois, aplicar a um dado segmento de reta um retângulo que fique aquém por um quadrado. Da primeira das equações (1), vemos que é possível reformular o problema nos seguintes termos: *Dividir um segmento de reta de modo que o retângulo contido por suas partes seja igual a um quadrado dado, não excedendo este o quadrado sobre metade do segmento*

de reta dado. Para tornar mais claro o problema, sejam AB e b os dois segmentos de reta, sendo b não maior que a metade de AB . Temos que dividir AB com um ponto Q de maneira que $(AQ)(QB) = b^2$. Para levar a efeito isso, marquemos $PE = b$ na perpendicular a AB em seu ponto médio P e, com centro E e raio PE , tracemos um arco de circunferência que corta AB no ponto procurado Q , como na Figura 22. A prova é fornecida pela Proposição II 5 (provavelmente ideada pelos pitagóricos para ser utilizada aqui), pois, devido a essa proposição

$$(AQ)(QB) = (PB)^2 - (PQ)^2 = (EQ)^2 - (PQ)^2 = (EP)^2 = b^2.$$

Denotando o comprimento de AB por a e o de AQ por x , fica resolvida a equação quadrática $x^2 - ax + b^2 = 0$; as raízes são representadas por AQ e QB ¹⁰. As raízes da equação quadrática

$$x^2 + ax + b^2 = 0$$

são representadas pelos negativos dos comprimentos de AQ e QB .

Para o caso particular da Proposição VI 29, desejamos aplicar a um dado segmento de reta um retângulo que exceda por um quadrado. Da primeira das equações (2) acima, vemos que é possível reformular o problema como se segue: *Prolongue um dado segmento de reta de modo que o retângulo contido pelo segmento estendido e a extensão seja igual a um quadrado dado.* Novamente, sejam AB e b os dois segmentos de reta. Temos de prolongar AB até um ponto Q de maneira que $(AQ)(QB) = b^2$. Para tanto, marcamos $BE = b$ na perpendicular a AB em B e, com centro em P , ponto médio de AB , e raio PE , traçamos o arco de circunferência que irá cortar o prolongamento de AB no ponto procurado Q , conforme mostra a Figura 23. Desta feita a prova é fornecida pela Proposição II 6 pois, devido a ela

$$(AQ)(BQ) = (PQ)^2 - (PB)^2 = (PE)^2 - (PB)^2 = (BE)^2 = b^2.$$

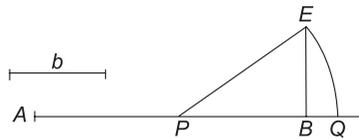


Figura 23

Como antes, vemos que AQ e BQ , o primeiro tomado positiva e o segundo negativamente, são as raízes da equação quadrática

$$x^2 - ax - b^2 = 0,$$

¹⁰ Se r e s são as raízes da equação quadrática $x^2 - ax + b^2 = 0$, sabemos da álgebra elementar que $r + s = a$ e $rs = b^2$. Mas AQ e QB são tais que sua soma é AB , ou a , e seu produto é b^2 .

sendo a o comprimento de AB . As raízes de

$$x^2 + ax - b^2 = 0$$

são as mesmas de $x^2 - ax - b^2 = 0$, apenas com os sinais trocados.

A álgebra geométrica dos pitagóricos, embora engenhosa, torna mais patente aos nossos olhos a simplicidade e as vantagens inerentes à notação algébrica atual.

3.8 Transformações de áreas

Os pitagóricos interessavam-se pelo problema de transformar a área de uma figura retilínea noutra figura retilínea. A solução dada por eles ao problema básico da construção de um quadrado de área igual à de um polígono dado pode ser encontrada nas Proposições 42, 44 e 45 do Livro I e Proposição 14 do Livro II dos *Elementos* de Euclides. Uma solução mais simples, provavelmente também conhecida dos pitagóricos, é a seguinte. Considere um polígono qualquer $ABCD\dots$ (Ver Figura 24). Trace BR paralela a AC , sendo R a intersecção com DC . Então, como os triângulos ABC e ARC têm base comum AC e alturas iguais relativas a essa base comum, esses triângulos têm áreas iguais. Segue-se então que os polígonos $ABCD\dots$ e $ARD\dots$ têm áreas iguais. Mas o polígono derivado tem um lado a menos que o polígono original. Repetindo-se esse processo, chega-se ao fim a um triângulo com a mesma área do polígono dado. Agora, se b é um dos lados desse triângulo e h é a altura relativa a b , o lado de um quadrado equivalente é $\sqrt{(bh)}/2$ — isto é, a média geométrica entre b e $h/2$. E uma vez que essa média pode ser construída facilmente com régua e compasso, o problema completo pode ser resolvido com esses instrumentos.

Muitos problemas interessantes sobre áreas podem ser resolvidos por esse processo simples de traçar retas paralelas (ver Exercício 3.11).

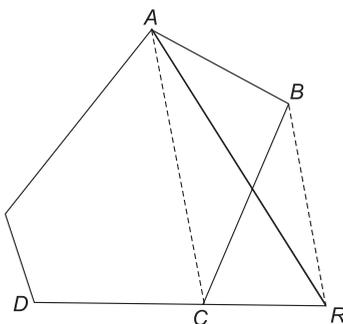


Figura 24

3.9 Os sólidos regulares

Um poliedro se diz *regular* se suas faces são polígonos regulares congruentes e se seus ângulos poliédricos são todos congruentes. Embora existam polígonos regulares de todas as ordens, sucede que só há cinco poliedros regulares diferentes (ver Exercício 3.12). Os poliedros regulares são designados de acordo com o número de faces que possuem. Assim, há o tetraedro com quatro faces triangulares, o hexaedro, ou cubo, com seis faces quadradas, o octaedro com oito faces triangulares, o dodecaedro com doze faces pentagonais e o icosaedro com vinte faces triangulares (ver Figura 25).

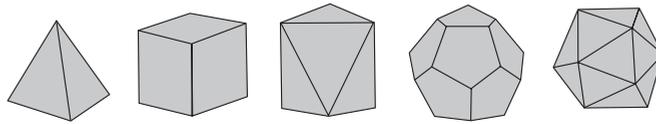


Figura 25

Os primórdios da história dos poliedros regulares perdem-se nas brumas do passado. Há um início de tratamento matemático desses sólidos no Livro XIII dos *Elementos* de Euclides. O primeiro escólio desse livro observa que se “irá tratar dos sólidos de Platão, assim chamados erradamente, porque três deles, o tetraedro, o cubo e o dodecaedro se devem aos pitagóricos, ao passo que o octaedro e o icosaedro se devem a Teeteto”. É bem possível que isso corresponda aos fatos.

De qualquer maneira Platão, em seu *Timeu*, apresentou uma descrição dos cinco poliedros regulares e mostrou como construir modelos desses sólidos, juntando triângulos, quadrados e pentágonos para formar suas faces. O *Timeu* de Platão é o pitagórico Timeu de Locri, a quem possivelmente encontrou quando visitou a Itália. No trabalho de Platão, Timeu misticamente associa os quatro sólidos mais fáceis de construir — o tetraedro, o octaedro, o icosaedro e o cubo — com os quatro “elementos” primordiais empedoclianicos de todos os corpos materiais — fogo, ar, água e terra. Contornava-se a dificuldade embaraçosa em explicar o quinto sólido, o dodecaedro, associando-o ao Universo que nos cerca.

Johann Kepler (1571-1630), mestre da astronomia, matemático e numerologista, deu uma explicação engenhosa para as associações de Timeu. Intuitivamente ele assumiu que, desses sólidos, o tetraedro abarca o menor volume para sua superfície, ao passo que o icosaedro o maior. Agora, essas relações volume-superfície são qualidades de secura e umidade, respectivamente, e como o fogo é o mais seco dos quatro “elementos” e a água o mais úmido, o tetraedro deve representar o fogo e o icosaedro a água. Associa-se o cubo com a terra porque o cubo, assentando quadradamente sobre uma de suas faces, tem a maior estabilidade. O octaedro, seguro frouxamente por dois de seus vértices opostos, entre o indicador e o polegar, facilmente rodopia, tendo a instabilidade do ar. Finalmente, associa-se o dodecaedro com o Universo porque o dodecaedro tem 12 faces e o zodíaco tem 12 seções.

O tetraedro, o cubo e o octaedro se encontram na natureza como cristais, por exemplo, de sulfoantimoneto de sódio, sal comum e alúmen, respectivamente. Os outros dois não podem ocorrer na forma de cristais, mas se encontram na natureza como esqueletos de animais marinhos microscópicos chamados radiolários. Em 1885, desenterrou-se no monte Loffa, perto de Pádua, um brinquedo de origem etrusca, com a forma de um dodecaedro regular, que se supõe remontar ao ano 500 a.C., aproximadamente.

3.10 O raciocínio postulacional

Em algum momento entre Tales, 600 a.C., e Euclides, 300 a.C., rematou-se a noção de discurso lógico como uma sequência de deduções rigorosas a partir de algumas suposições iniciais explicitamente enunciadas. Esse processo, o chamado *método postulacional*, tornou-se a verdadeira essência da matemática moderna; indubitavelmente, grande parte do desenvolvimento da geometria segundo esse modelo deve-se aos pitagóricos. Sem dúvida uma das maiores contribuições dos gregos primitivos foi o desenvolvimento desse método de raciocínio postulacional. Retornaremos a uma discussão mais ampla do assunto nas Seções 5-7 e 15-2.

Exercícios

3.1 Os problemas práticos de Tales

(a) Há duas versões de como Tales calculou a altura de uma pirâmide egípcia por meio da sombra. O relato mais antigo, dado por Hierônimos, um discípulo de Aristóteles, diz que Tales anotou o comprimento da sombra no momento em que esta era igual à altura da pirâmide que a projetava. A versão posterior, dada por Plutarco, diz que ele fincou verticalmente uma vara e fez uso da semelhança de triângulos. Ambas as versões pecam ao não mencionar a dificuldade de obter, nos dois casos, o comprimento da sombra da pirâmide — isto é, a distância da extremidade da sombra ao centro da base da pirâmide.

Descubra um método, baseado na semelhança de triângulos e independente da latitude e época do ano, para determinar a altura de uma pirâmide, *usando duas observações da sombra*.

(b) Consta que Tales mediu a distância de um navio à praia, usando o fato de que 2 triângulos são congruentes se 2 ângulos e o lado comum de um deles forem respectivamente iguais a dois ângulos e ao lado comum do outro. Heath conjecturou que isso provavelmente foi feito com um instrumento formado de duas barras AC e AD articuladas em A , como mostra a Figura 26. A barra AD era mantida verticalmente sobre o ponto B da praia, ao passo que a barra AC era apontada na direção do navio P . Então,

sem mudar o ângulo DAC , o instrumento era girado em torno de AD , marcando-se no chão o ponto Q para o qual AC estava apontada. Que distância deve ser medida a fim de achar a distância de B ao ponto inacessível P ?

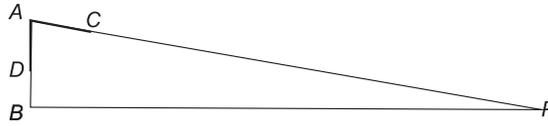


Figura 26

3.2 Números Perfeitos e Amigáveis

(a) Mostre que na fórmula de Euclides para os números perfeitos n deve ser primo.

(b) Qual é o quarto número perfeito fornecido pela fórmula de Euclides?

(c) Prove que a soma dos inversos de *todos* os divisores de um número perfeito é 2.

(d) Mostre que se p é primo, p^n é deficiente.

(e) Mostre que os números de Nicolo Paganini, 1184 e 1210 , são amigáveis.

(f) Mostre que qualquer múltiplo de um número perfeito ou abundante é abundante.

(g) Encontre os 21 números abundantes menores que 100. Notar-se-á que todos são números pares. Para mostrar que nem todos os números abundantes são pares, mostre que $945 = 3^3 \cdot 5 \cdot 7$ é abundante. Este é o primeiro número abundante ímpar.

(h) Faça uma estimativa do número de algarismos dos números perfeitos correspondentes a (1) $n = 7$, (2) $n = 127$.

(i) Uma sequência cíclica de três ou mais números tais que a soma dos divisores próprios de cada um é igual ao próximo da sequência chama-se *cadeia social* de números. Conhecem-se apenas duas cadeias sociais envolvendo números abaixo de 1 milhão: uma de 5 “elos” (encontrada pelo francês P. Poulet) começando com 12 496 e uma de 28 elos começando com 14 316. Encontre a primeira dessas duas cadeias sociais. Uma cadeia social de exatamente 3 elos é chamada de *círculo social*; nenhum *círculo social* foi encontrado até agora.

(j) Mostre que 120 é múltiplo perfeito de ordem 3.

(k) 12 é superabundante?

3.3 Números figurados

(a) Faça uma lista dos quatro primeiros números hexagonais.

(b) Um *número oblongo* é o número de pontos de um quadro retangular com uma coluna mais do que linhas. Mostre, geométrica e algebricamente, que a soma dos n primeiros inteiros pares positivos é um número oblongo.

(c) Mostre, geométrica e algebricamente, que todo número oblongo é o dobro de um número triangular.

(d) Mostre, geométrica e algebricamente, que 8 vezes qualquer número triangular, mais 1, é um número quadrado.

(e) Mostre, geométrica e algebricamente, que o n -ésimo número pentagonal é igual ao n -ésimo número quadrado mais o $(n - 1)$ -ésimo número triangular — isto é, $P_n = S_n + T_{n-1}$.

(f) Denotando o número oblongo $n(n + 1)$ por O_n , mostre, geométrica e algebricamente, que $O_n + S_n = T_{2n}$ e $O_n - S_n = n$.

(g) Prove que todo número perfeito par também é um número triangular.

(h) Prove que a sequência dos números m -gonais é dada por

$$an^2 + bn, \quad n = 1, 2, \dots,$$

para um certo par fixo a e b de números racionais.

(i) Encontre a e b em (h) para $m = 7$.

3.4 Médias

O *Sumário Eudemiano* dá conta de que, à época de Pitágoras, havia três médias, a *aritmética*, a *geométrica* e a *subcontrária*, sendo o último nome mudado mais tarde por Arquitas e Hipaso para *harmônica*. Definem-se essas três médias para dois números positivos a e b como

$$A = \frac{a+b}{2}, \quad G = \sqrt{ab}, \quad H = \frac{2ab}{a+b},$$

respectivamente.

(a) Mostre que $A \geq G \geq H$, valendo a igualdade, se, e somente se, $a = b$.

(b) Mostre que $a : A = H : b$. Esta era conhecida como proporção “musical”.

(c) Mostre que H é a média harmônica de a e b se existe um número n tal que $a = H + a/n$ e $b = H + b/n$. Essa era a definição pitagórica da média harmônica de a e b .

(d) Mostre que $1/(H - a) + 1/(H - b) = 1/a + 1/b$.

(e) Como 8 é a média harmônica de 12 e 6, Filolao, um pitagórico que viveu por volta de 425 a.C., chamava o cubo de “harmonia geométrica”. Explique isso.

(f) Mostre que se a, b, c estão em progressão harmônica, o mesmo acontece com $a/(b+c), b/(c+a)$ e $c/(a+b)$.

(g) Se a e $c, a < c$, são um par de números positivos, então qualquer número b entre a e c é, em certo sentido, *uma média* de a e c . Os pitagóricos mais tarde passaram a considerar dez médias b de a e c , definidas como se segue:

$$1. (b-a)/(c-b) = a/a$$

$$6. (b-a)/(c-b) = c/b$$

$$2. (b-a)/(c-b) = a/b$$

$$7. (c-a)/(b-a) = c/a$$

$$3. (b-a)/(c-b) = a/c$$

$$8. (c-a)/(c-b) = c/a$$

$$4. (b-a)/(c-b) = c/a$$

$$9. (c-a)/(b-a) = b/a, a < b$$

$$5. (b-a)/(c-b) = b/a$$

$$10. (c-a)/(c-b) = b/a, a < b$$

Admitindo que $0 < a < c$, mostre que em todos os casos $a < b < c$.

(h) Mostre que (1), (2) e (3) de (g) fornecem a média aritmética, geométrica e harmônica, respectivamente, de a e c .

3.5 Provas do teorema de Pitágoras por decomposição

(a,b) Duas áreas ou dois volumes, P e Q , se dizem *congruentes por adição* se podem ser decompostos em pares correspondentes de partes congruentes. P e Q se dizem *congruentes por subtração* quando se podem somar a eles pares correspondentes de partes congruentes de modo a resultarem duas novas figuras congruentes por adição. Há muitas demonstrações do teorema de Pitágoras cujo fechamento consiste em mostrar que o quadrado sobre a hipotenusa do triângulo retângulo é congruente ou por adição ou por subtração aos quadrados combinados sobre os lados do triângulo retângulo. A prova dada na Seção 3-4 utiliza-se da congruência por subtração. Fazendo uso da congruência por adição, dê duas demonstrações do teorema de Pitágoras sugeridas pelas figuras 27 e 28 — a primeira é de Henry Perigal (datas desconhecidas) em 1873¹¹ e a segunda é de H. E. Dudeney (1857-1930) em 1917.

(c) Fazendo uso da congruência por subtração, dê uma demonstração do teorema de Pitágoras sugerida pelo Figura 29 — que se diz ter sido idealizada por Leonardo da Vinci (1452-1519).

¹¹ Trata-se de uma redescoberta, pois a decomposição era conhecida por Tâbit ibn Qorra (826-901).

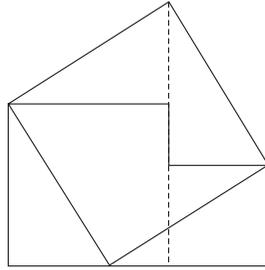


Figura 27

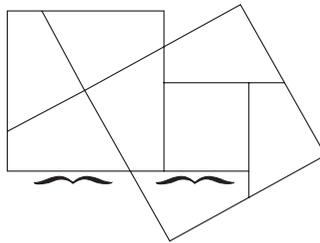


Figura 28

É interessante que duas áreas poligonais iguais quaisquer sejam congruentes por adição, podendo a decomposição ser efetuada sempre com régua e compasso.

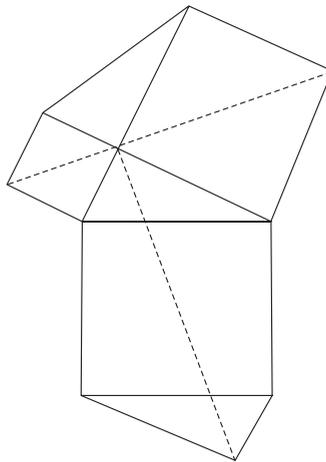


Figura 29

Em 1901, porém, Max Dehn (1878-1958) mostrou que dois volumes poliedrais iguais não são necessariamente congruentes seja por adição como por subtração. Em particular, é impossível decompor um tetraedro regular em partes poliedrais que possam ser reajuntadas de modo a formar um cubo. Dehn obteve esse resultado ao resolver um dos 23 problemas de Paris de David Hilbert (1862-1943) (ver sentença final da Seção 15-8).

3.6 Ternos pitagóricos

(a) Qual é a relação entre a hipotenusa e o cateto maior dos triângulos retângulos de lados inteiros dados pela fórmula pitagórica da Seção 3-4?

(b) Encontre os ternos pitagóricos dados pela fórmula da Seção 3-4 para os quais a hipotenusa não excede 100.

(c) Prove que não existe nenhum triângulo retângulo isósceles cujos lados são inteiros.

(d) Prove que não existe nenhum terno pitagórico no qual um dos inteiros é média geométrica dos outros dois.

(e) Prove que $(3,4,5)$ é o único terno pitagórico formado de três inteiros positivos consecutivos.

(f) Encontre os 16 ternos pitagóricos primitivos (a, b, c) para os quais b é par e $c < 100$. Mostre a seguir que existem exatamente 100 ternos pitagóricos (a, b, c) , com $c < 100$.

(g) Mostre que se $(a, a + 1, c)$ é um terno pitagórico, o mesmo ocorre com $(3a + 2c + 1, 3a + 2c + 2, 4a + 3c + 2)$. Segue-se então que, de um terno pitagórico cujos catetos são números naturais sucessivos, podemos obter um outro desses ternos, de lados muito maiores.

(h) Começando com o terno pitagórico $(3,4,5)$, determine mais 5 ternos pitagóricos cujos catetos são números naturais sucessivos e cujos lados são progressivamente maiores.

(i) Prove que em cada terno pitagórico: (1) pelo menos um termo é múltiplo de 4, (2) pelo menos um cateto é múltiplo de 3, (3) pelo menos um lado é múltiplo de 5.

(j) Prove que para todo número natural $n > 2$ existe um terno pitagórico com um cateto igual a n .

(k) Prove que só há um número finito de ternos pitagóricos com um dado cateto a .

(l) Mostre que para todo número natural n e para todo

$$k = 0, 1, 2, \dots, n-1, \quad [2^{n+1}, 2^k(2^{2n-2k}-1), 2^k(2^{2n-2k}+1)]$$

são ternos pitagóricos. Segue-se então que para cada número natural n existem pelo menos n ternos pitagóricos diferentes com o mesmo cateto $a = 2^{n+1}$. Pode-se mostrar, com mais dificuldade, que para cada número natural n existem pelo menos n ternos pitagóricos *primitivos* diferentes com um cateto comum.

(m) Sejam (a_k, b_k, c_k) , $k = 1, 2, \dots, n$, n ternos pitagóricos *primitivos* diferentes. Façamos

$$s_k = a_k + b_k + c_k \quad \text{e} \quad s = s_1 s_2 \dots s_n.$$

Sejam ainda

$$a'_k = a_k s / s_k, \quad b'_k = b_k s / s_k \quad \text{e} \quad c'_k = c_k s / s_k,$$

para $k = 1, 2, \dots, n$.

Mostre que (a'_k, b'_k, c'_k) , é um terno pitagórico em que

$$a'_k + b'_k + c'_k = s.$$

Segue-se que para cada número natural n existem pelo menos n ternos pitagóricos não congruentes com o mesmo perímetro.

3.7 Números irracionais

(a) Prove que a reta pelos pontos $(0,0)$ e $(1, \sqrt{2})$ não passa por nenhum ponto do reticulado das coordenadas, exceto o ponto $(0,0)$.

(b) Mostre como o reticulado das coordenadas pode ser usado para achar uma aproximação racional de $\sqrt{2}$.

(c) Se p é primo, mostre que \sqrt{p} é irracional.

(d) Mostre que $\log_{10} 2$ é irracional.

(e) Generalize (d) mostrando que $\log_a b$ é irracional sempre que a e b são inteiros positivos e um deles contém um fator primo não contido no outro.

(f) Trace um triângulo retângulo $30^\circ/60^\circ$. Marque sobre a hipotenusa, a partir do vértice de 30° , o cateto maior; trace a perpendicular à hipotenusa pelo ponto de divisão. Usando essa figura, formule uma demonstração geométrica da irracionalidade de $\sqrt{3}$.

(g) Prove que a soma (produto) de um número racional não nulo com um número irracional é um número irracional.

3.8 Identidades algébricas

Indique como cada uma das seguintes identidades algébricas pode ser estabelecida geometricamente:

(a) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

(b) $a(b + c) = ab + ac$

(c) $(a + b)(c + d) = ac + bc + ad + bd$

(d) $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

(e) O enunciado da Proposição 9 do Livro II dos *Elementos* de Euclides é: *Se uma reta é dividida em partes iguais e em partes desiguais, a soma dos quadrados sobre as partes desiguais é o dobro da soma dos quadrados sobre metade da reta e sobre a reta entre os pontos de seção.* A partir desse teorema, obtenha a identidade algébrica

$$(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2).$$

3.9 Álgebra geométrica

Sejam $a, b, 1$ ($a > b > 1$) os comprimentos de 3 segmentos de reta dados. Construa com régua e compasso os seguintes segmentos de reta:

(a) $a + b$ e $a - b$,

(b) ab ,

(c) a/b ,

(d) \sqrt{a}

(e) a/n , n é um inteiro positivo,

(f) \sqrt{ab} ,

(g) $a\sqrt{n}$, n é um inteiro positivo,

(h) $(a^3 + b^3)/(a^2 + b^2)$,

(i) $a[1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}]^{1/2}$,

(j) $(abcd)^{1/4}$, em que c e d são os comprimentos de dois outros segmentos de reta,

(k) $x = (a^2 + b^2 - ab)^{1/2}$. Se construirmos o triângulo de lados a, b, x , qual a medida do ângulo entre os lados a e b ?

(l) Mostre que $x = ab/(a^2 + b^2)^{1/2}$ é igual à altura de um triângulo retângulo de catetos a e b .

3.10 Resolução geométrica de equações quadráticas

(a) Dado um segmento unitário, resolva a equação quadrática $x^2 - 7x + 12 = 0$ pelo método pitagórico.

(b) Dado um segmento unitário, resolva a equação $x^2 + 4x - 21 = 0$ pelo método pitagórico.

(c) Com régua e compasso, divida um segmento a em duas partes tais que a diferença entre seus quadrados seja igual a seu produto.

(d) Mostre que em (c) o segmento maior é média geométrica entre o segmento menor e o segmento todo. Diz-se que o segmento de reta foi dividido em *média e extrema razão* ou *secção áurea*.

(e) É dada uma equação quadrática $x^2 - gx + b = 0$. Sobre um sistema cartesiano retangular de referência marque os pontos B: $(0,1)$ e Q: (g, b) . Trace o círculo de diâmetro BQ e suponha que ele corte o eixo x em M e N . Mostre que as abscissas de M e N são as raízes da equação quadrática dada. Essa resolução geométrica apareceu nos *Elements of Geometry* de Leslie com a observação: “A resolução desse importante problema agora inserido no texto foi-me sugerida pelo Sr. Thomas Carlyle, um jovem e engenhoso matemático, outrora meu aluno”.

(f) Resolva as equações quadráticas $x^2 - 7x + 12 = 0$ e $x^2 + 4x - 21 = 0$ pelo método de Carlyle.

(g) Novamente, dá-se a equação quadrática $x^2 - gx + b = 0$. Sobre um sistema retangular de coordenadas cartesianas marque os pontos $(b/g, 0)$ e $(4/g, 2)$ e suponha que o segmento de reta com extremidades neles corte o círculo unitário de centro em $(0, 1)$ nos pontos R e S . Projete os pontos R e S a partir do ponto $(0, 2)$ sobre os pontos $(r, 0)$ e $(s, 0)$ do eixo x . Mostre que r e s são as raízes da equação quadrática dada. Essa resolução das equações quadráticas foi dada pelo geômetra alemão Karl Georg Christian von Staudt (1798-1867).

(h) Resolva as equações quadráticas $x^2 - 7x + 12 = 0$ e $x^2 + 4x - 21 = 0$ pelo método de Staudt.

(i) Verifique a seguinte resolução geométrica da equação quadrática $x^2 - gx + b = 0$, $b > 0$. Primeiro construa \sqrt{h} como média geométrica de 1 e b . Então, sobre $AB = |g|$ como diâmetro, construa um semicírculo e, por um ponto D de AB , trace a semicorda vertical $CD = \sqrt{h}$. Então AD e DB , cada um tomado com o mesmo sinal de g , são as raízes da equação quadrática. Resolva por esse método a equação quadrática $x^2 - 7x + 12 = 0$.

(j) Verifique a seguinte resolução geométrica da equação quadrática $x^2 - gx + b = 0$, $b < 0$. Trace uma circunferência de diâmetro $AB = |g|$ e trace a tangente $AC = \sqrt{-b}$. Trace a secante diametral CDE cujos pontos de intersecção com a circunferência são D e E . Então CD e CE , tomados com sinais opostos e com o sinal de CE igual ao de g , representam as raízes da equação quadrática. Resolva por esse método a equação quadrática $x^2 + 4x - 21 = 0$.

3.11 Transformações de áreas

(a) Trace um hexágono irregular e então construa, com régua e compasso, um quadrado com a mesma área.

(b) Com régua e compasso, decomponha o quadrilátero $ABCD$ em três partes equivalentes por meio de retas traçadas pelo vértice A .

(c) Efetue a bissecção de um trapézio por meio de uma reta por um ponto P da base menor.

(d) Transforme um triângulo ABC de modo que o ângulo A não se altere, mas o lado oposto ao ângulo A se torne paralelo a uma reta dada MN .

(e) Transforme um dado triângulo num triângulo isósceles tendo como ângulo do vértice um ângulo dado.

3.12 Sólidos regulares

(a) Mostre que não há mais do que 5 poliedros regulares.

(b) Determine o volume e a área de um octaedro regular de aresta e .

(c) Para cada um dos 5 poliedros regulares, enumere o número de vértices v , arestas a e faces f e calcule então a quantidade $v - a + f$. Um dos teoremas mais interessantes a respeito dos poliedros convexos (ou, de maneira mais geral, *simplesmente conexos*) é que $v - a + f = 2$. Esse resultado pode ter sido conhecido por Arquimedes (c. 225 a.C.); e Descartes, por volta de 1635, esteve bem próximo dele. E como Euler, independentemente, comunicou-o em 1752, muitas vezes é referido como fórmula de Euler-Descartes.

(d) Um *cuboctaedro* é um sólido cujas arestas se obtêm unindo os pontos médios das arestas adjacentes de um cubo. Enumere v , a e f para um cuboctaedro.

(e) Considere um cubo com um par de pirâmides regulares construídas sobre duas faces opostas tomadas como bases. Suponhamos que se faça no sólido assim obtido um orifício de secção transversal quadrada e com eixo na reta que une os vértices das pirâmides. Determine $v - a + f$ para o sólido resultante¹².

3.13 Alguns problemas referentes a sólidos regulares

(a) A definição de regularidade de um poliedro dada na Seção 3-9 envolve 3 propriedades: faces regulares, faces congruentes e ângulos poliedros congruentes. Muitos

¹² Modelos de construção para 100 sólidos diferentes podem ser encontrados em Miles C. Hartley, *Patterns of Polyhedrons*. Edição revista, Ann Arbor (Michigan), Edwards Brothers, 1957.

textos de geometria espacial não dão todas essas 3 propriedades definidoras. Mostre, com contraexemplos, que todas as três são necessárias.

(b) A partir das três propriedades arroladas em (a) pode-se deduzir a regularidade dos ângulos poliédricos. Faça isso e, então, mostre que as 3 propriedades definidoras podem ser substituídas por apenas duas: faces regulares e ângulos poliédricos regulares.

(c) Os não iniciados quase que invariavelmente acreditarão, baseados na intuição, que, quando se inscrevem um dodecaedro (sólido de 12 faces) e um icosaedro (sólido de 20 faces) regulares numa mesma esfera, o icosaedro tem volume maior. Mostre que o que ocorre é o contrário e que, também, inscrevendo-se um cubo (sólido de 6 faces) e um octaedro (sólido de 8 faces) regular numa mesma esfera, o cubo tem volume maior.

(d) Mostre que um dodecaedro regular e um icosaedro regular inscritos na mesma esfera têm uma esfera comum inscrita em ambos.

(e) Observamos na Seção 3-9 que Kepler intuitivamente assumiu que, dos 5 sólidos regulares, para uma dada área de superfície, o que abarca um volume maior é o icosaedro. Isso é verdadeiro?

(f) Inscrevem-se numa mesma esfera um dodecaedro, um icosaedro (ambos regulares) e um cubo. Prove que o volume do dodecaedro está para o volume do icosaedro assim como o comprimento da aresta do cubo está para o comprimento da aresta do icosaedro.

3.14 Secção áurea

Diz-se que um ponto divide um segmento de reta em *média e extrema razão* ou em *secção áurea*, se o mais longo dos segmentos é média geométrica entre o menor e o segmento todo. A razão entre o segmento menor e o segmento maior chama-se *razão áurea*. Os pitagóricos mostraram interesse considerável pela secção áurea e pela razão áurea.

(a) Mostre que a razão áurea é $(\sqrt{5}-1)/2$.

(b) O distintivo da irmandade pitagórica era o *pentagrama estrelado*, formado pelas 5 diagonais de um pentágono regular. Prove que cada um dos 5 lados do pentagrama estrelado divide em secção áurea cada um dos dois lados do pentagrama que ele intercepta.

(c) Suponhamos que o ponto G divida o segmento de reta AB em secção áurea, sendo AG o segmento maior. Sobre AB marque $AH = GB$. Mostre que H divide AG em secção áurea.

(d) Construa, com régua e compasso, um pentágono regular, dado o lado do pentágono.

(e) Construa, com régua e compasso, um pentágono regular, dada a diagonal do pentágono.

(f) Inscreva um pentágono regular num círculo dado, usando apenas régua e compasso.

3.15 Construções de \sqrt{n} dadas por Teodoro

(a) Teodoro de Cirene (nascido c. 470 a.C.) construiu \sqrt{n} como metade do cateto de um triângulo retângulo cuja hipotenusa é $n + 1$ e cujo outro cateto é $n - 1$. Justifique essa construção.

(b) Tem-se sugerido que Teodoro também obteve \sqrt{n} ($2 \leq n \leq 17$) construindo uma figura em forma de espiral formada de uma sequência de triângulos retângulos com um vértice comum, em que o primeiro triângulo da sequência é o triângulo retângulo isósceles de cateto 1 e ainda em cada triângulo retângulo sucessivo um cateto é a hipotenusa do triângulo anterior da sequência e o outro cateto (oposto ao vértice comum) tem comprimento 1. Mostre que a hipotenusa do n -ésimo triângulo da sequência tem comprimento $\sqrt{n+1}$.

(c) Mostre como o processo de construção de (b) poderia explicar por que Teodoro interrompeu suas considerações sobre \sqrt{n} em $n = 17$.

3.16 Uma relação interessante

Prove geometricamente que

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2.$$

Temas

- 3/1 Possíveis razões para a introdução, pelos gregos, da dedução em matemática.
- 3/2 Histórias das proezas de Tales na engenharia e na astronomia, e sua credibilidade.
- 3/3 Misticismo numérico pitagórico.
- 3/4 A situação atual do pitagorismo, evidenciada pelas fórmulas físicas modernas.
- 3/5 Pitágoras absolvido, no que diz respeito à matemática.
- 3/6 Como a descoberta das grandezas incomensuráveis produziu uma crise no desenvolvimento da matemática.
- 3/7 A razão áurea na arte e na arquitetura.
- 3/8 Exemplos simples de geometria aplicada para uma classe de geometria elementar.
- 3/9 História primitiva dos sólidos regulares, com modelos para sua construção.
- 3/10 A dívida da matemática grega para com a Mesopotâmia e o Egito antigos.

- 3/11 Razões para se tratarem a logística e a aritmética como assuntos não relacionados.
- 3/12 Vantagens e desvantagens do método grego consistindo em tratar a aritmética de um ponto de vista geométrico.

Bibliografia

- AABOE, Asger. "Episodes from the early history of mathematics". *New Mathematical Library*, nº 13. Nova York, Random House and L. W. Singer, 1964.
- ALLMAN, G. J. *Greek Geometry from Thales to Euclid*. Dublin, University Press, 1889. Reimpresso por Bell & Howell, Cleveland (Ohio).
- BELL, E. T. *The Magic of Numbers*. Nova York, McGraw-Hill, 1946.
- BUNT, L. N. H.; JONES, P. S. e BIDIENT, J. D. *The Historical Roots of Elementary Mathematics*. Englewood Cliffs (N. J.), Prentice-Hall, 1976.
- COOLIDGE, J. L. *A History of Geometrical Methods*. Nova York, Oxford University Press, 1940.
- COURANT, Richard e ROBBINS, H. E. *What is Mathematics?* Nova York, Oxford University Press, 1941.
- DANTZIG, T. *Number: The Language of Science*. 3ª ed. Nova York, Macmillan, 1939.
- _____. *The Bequest of the Greeks*. Nova York, Charles Scribner's, 1955.
- FRIEDRICHS, O. "From Pythagoras to Einstein". *New Mathematical Library*, nº 16. Nova York, Random House, 1965.
- GOW, James. *A Short History of Greek Mathematics*. Nova York, Hafner, 1923. Reimpresso por Bell & Howell, Cleveland (Ohio).
- HEATH, T. L. *History of Greek Mathematics*, vol. 1. Nova York, Oxford University Press, 1921. Reimpresso por Dover, Nova York, 1981.
- _____. *The Thirteen Books of Euclides Elements*. 2ª ed. Nova York, Cambridge University Press, 1926, 3 vols. Reimpresso por Dover, Nova York.
- _____. *A Manual of Greek Mathematics*. Nova York, Oxford University Press, 1931.
- HERZ-FISCHLER, Roger. *A Mathematical History of Division in Extreme and Mean Ratio*. Waterloo, Wilfrid Laurier University Press, 1987.
- KLEIN, Jacob. *Greek Mathematical Thought and the Origin of Algebra*. Trad. para o inglês por Eva Brann. Cambridge (Mass.), M. I. T. Press, 1968.
- LEOMIS, E. S. *The Pythagorean Proposition*. 2ª ed. Ann Arbor (Mich.), Edwards Brothers, 1940. Reimpresso pelo National Council of Teachers of Mathematics, Washington, D. C., 1968.
- LESLIE, Sir John. *Elements of Geometry, Geometrical Analysis, and Plane Trigonometry*. Edimburgo, Oliphant, 1809. Reimpressão de Bell & Howell, Cleveland (Ohio).

- MAZIARZ, Edward e GREENWOOD, Thomas. *Greek Mathematical Philosophy*. Cambridge (Mass.), M. I. T. Press, 1968.
- MESCHKOWSKI, Herbert. *Ways of Thought of Great Mathematicians*. Trad. para o inglês por John Dyer-Bennet. São Francisco, Holden-Day, 1964.
- MUIR, Jane. *Of Men and Numbers*. Nova York, Dodd, Mead, 1961.
- PROCLUS. *A Commentary of the First Book of Euclid's Elements*. Trad. para o inglês por G. R. Morrow. Princeton (N. J.), Princeton University Press, 1970.
- SHANKS, Daniel. *Solved and Unsolved Problems in Number Theory*, vol. 1. Washington, D. C., Spartan Books, 1962.
- SIERPINSKI, Waclaw. "Pythagorean triangles". *Scripta Mathematica Studies Number Nine*. Trad. para o inglês por Ambikeshwar Sharma. Nova York, Yeshiva University, 1962.
- SZABO, Arpad. *The Beginnings of Greek Mathematics*. Dordrecht, D. Reidel, 1978.
- THOMAS Ivor (ed.). *Selections Illustrating the History of Greek Mathematics*. Cambridge (Mass.), Harvard University Press, 1939-1941, 2 vols.
- TURNBULL, H. W. *The Great Mathematicians*. Nova York, New York University Press, 1961.
- VAN DER WAERDEN, B. L. *Science Awakening*. Trad. para o inglês por Arnold Dresden. Nova York, Oxford University Press, 1961. Paperback edition, Nova York, John Wiley, 1963.
- WENNINGER, M. J. *Polyhedron Models for Classroom*. National Council of Teachers of Mathematics. Washington, D. C., 1966.
- . *Polyhedron Models*. Nova York, Cambridge University Press, 1970.

Duplicação, trissecção e quadratura

4.1 O período de Tales a Euclides

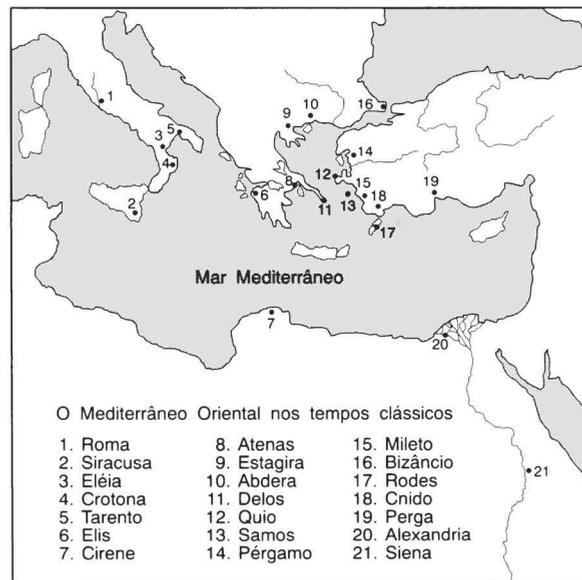
Os primeiros três séculos da matemática grega, começando com os esforços iniciais de Tales por uma geometria demonstrativa (por volta de 600 a.C.) e culminando com os notáveis *Elementos* de Euclides (por volta de 300 a.C.), constituem um período de realizações extraordinárias. No último capítulo consideramos algumas das contribuições dos pitagóricos a essas realizações. Além da escola jônica fundada por Tales de Mileto e da escola pitagórica de Crotona, muitos outros centros de matemática surgiram e floresceram em lugares e períodos de prevalência ampla da história política grega.

Foi por volta de 1200 a.C. que as primitivas tribos dóricas se deslocaram rumo ao sul da península grega, deixando suas fortalezas de montanhas do norte por territórios mais favoráveis. Sua tribo principal, os espartanos, logo em seguida fundou a cidade de Esparta. Muitos dos habitantes das regiões invadidas fugiram para a Ásia Menor, ou para as ilhas jônicas do mar Egeu onde, com o tempo, estabeleceram colônias comerciais gregas. Foi nessas colônias, no século VI a.C., que se criou a escola jônica, em que floresceu a filosofia grega e nasceu a geometria demonstrativa.

Nesse meio tempo a Pérsia havia se tornado um grande império militar e, seguindo o programa expansionista inevitável ditado por uma economia baseada na escravidão, empreendeu a conquista das cidades jônicas e das colônias gregas da Ásia Menor em 546 a.C. Como resultado, muitos filósofos gregos, como Pitágoras e Xenófanes, abandonaram sua terra natal em troca das prósperas colônias gregas do sul da Itália. Como resultado desenvolveram-se escolas de filosofia e matemática em Crotona, sob a liderança de Pitágoras, e em Eleia, sob a liderança de Xenófanes, Zenão e Parmênides.

Mas o jugo da opressão continuava constringendo as cidades jônicas conquistadas, e em 499 a.C. irrompeu uma revolta. Atenas, que havia se tornado um grande centro da civilização ocidental e ostentava progressos políticos de caráter democrático, ajudou os revolucionários com o envio de armas. Embora a revolta tivesse sido esmagada, o enfurecido rei Dario da Pérsia decidiu punir Atenas. Em 492 a.C. organizou um exército e uma armada imensas para atacar o continente grego; mas sua armada foi destruída por uma tempestade e suas forças terrestres se depararam com dificuldades expedicionárias muito grandes. Dois anos depois, os exércitos persas penetraram na Ática sendo derrotados decisivamente pelos atenienses em Maratona. E assim Atenas assumiu o manto da liderança grega.

Em 480 a.C., Xerxes, filho de Dario, tentou invadir novamente a Grécia por terra e mar. Os atenienses defrontaram-se com a armada persa na grande batalha naval de Salamina e venceram; e embora as forças terrestres gregas, sob o comando de Esparta, tivessem sido derrotadas no desfiladeiro de Termópilas, sofrendo enormes baixas, no ano seguinte os gregos suplantaram os persas em Plateia forçando os invasores a abandonar a Grécia. A hegemonia de Atenas se consolidava e os 50 anos seguintes, sob o reino da paz, foram um período brilhante da história de Atenas. A cidade de Péricles e Sócrates tornou-se o fulcro do progresso democrático e intelectual. Esse clima atraía matemáticos de todas as partes do mundo grego. Anaxágoras, o último membro eminente da escola jônica, estabeleceu-se na cidade. Muitos dos dispersos pitagóricos acorreram a Atenas e Zenão e Parmênides, da escola eleática, foram ao grande centro para ensinar. Hipócrates¹, da ilha grega de Quio, visitou Atenas onde, considera-se, publicou a primeira geometria organizada.



A paz chegou ao fim em 431 a.C. com o início da Guerra do Peloponeso entre Atenas e Esparta. Foi um conflito inusitadamente longo. Atenas, ao início vitoriosa, foi assolada por uma peste devastadora que matou um quarto de sua população; e por fim, em 404 a.C., teve de aceitar uma derrota humilhante. Esparta assumiu a liderança grega

¹ Não confundir com Hipócrates de Cós, o famoso médico grego da Antiguidade.

que só veio a perder em 371 a.C. ao ser derrotada por uma liga de cidades-Estado rebeldes. Durante esse período de lutas pouco progresso se fez em Atenas na geometria e, uma vez mais, os avanços vieram da Magna Grécia, uma região mais pacífica. Com a permissão para que os pitagóricos do sul da Itália, despidos de envolvimento político, pudessem retornar às suas atividades, surge em Tarento uma nova escola sob a influência do talentoso e muito admirado Arquitas.

Alguns nomes gregos dos tempos clássicos		
Anaxágoras	Eudoxo	Papus
Antífon	Eutócio	Platão
Apolônio	Filolao	Polícrates
Arquimedes	Fílon	Proclo
Arquitas	Herão	Ptolomeu
Aristeu	Hiparco	Pitágoras
Aristarco	Hipaso	Simplício
Aristóteles	Hípias	Sócrates
Cônon	Hipócrates	Sólon
Demócrito	Hipátia	Tales
Dinostrato	Hipsicles	Teeteto
Dioclés	Jâmblico	Teodoro
Diofanto	Menaecmo	Teodósio
Dositeu	Menelau	Têon
Eratóstenes	Metrôdoro	Timaridas
Euclides	Nicômaco	Xenócrates
Eudemo	Nicomedes	Zenão

Com o fim da Guerra do Peloponeso, Atenas, embora reduzida politicamente a um plano secundário, retomou sua liderança cultural. Platão nasceu em Atenas (ou perto) em 427 a.C., o ano da grande peste. Depois de estudar filosofia com Sócrates ali mesmo, saiu pelo mundo, em longa jornada, à procura do saber. Estudou matemática com Teodoro de Cirene nas costas da África e tornou-se amigo íntimo de Arquitas. Depois de seu retorno a Atenas por volta de 387 a.C., fundou sua famosa Academia, uma instituição orientada por propósitos sistemáticos de investigação científica e filosófica. Depois de dirigir a Academia por toda a sua vida, morreu em Atenas no ano 347 a.C., com a venerável idade de 80 anos. Quase todos os trabalhos matemáticos importantes do século IV a.C. foram feitos por amigos ou discípulos de Platão, fazendo da Academia o elo da matemática dos pitagóricos mais antigos com a da posterior e duradoura escola de Alexandria. A importância de Platão na matemática não se deve a nenhuma

das descobertas que fez mas, isto sim, à sua convicção entusiástica de que o estudo da matemática fornecia o mais refinado treinamento do espírito e que, portanto, era essencial que fosse cultivado pelos filósofos e pelos que deveriam governar seu Estado ideal. Isso explica o famoso lema à entrada da Academia: *Que aqui não adentrem aqueles não versados em geometria*. A matemática parecia da mais alta importância a Platão devido ao seu componente lógico e à atitude espiritual abstrata gerada por seu estudo; por essa razão ela ocupava um lugar de destaque no currículo da Academia. Alguns veem nos diálogos de Platão o que poderia ser considerada a primeira tentativa séria de uma filosofia da matemática.

Eudoxo, que estudou com Arquitas e Platão, fundou uma escola em Cízico no norte da Ásia Menor. Menaecmo, amigo de Platão e discípulo de Eudoxo, inventou as secções cônicas. Dinostrato, irmão de Menaecmo e discípulo de Platão, foi um geômetra competente. Teeteto, um homem de talentos naturais pouco comuns, a quem provavelmente devemos grande parte do material do décimo e do décimo terceiro livros dos *Elementos* de Euclides, foi outro discípulo ateniense de Teodoro. Deve-se mencionar também Aristóteles que, embora não fosse um matemático declarado, foi o sistematizador da lógica dedutiva, além de ter deixado vários escritos sobre temas da física; algumas partes de sua *Analytica posteriora* revelam um domínio raro do método matemático.



Platão
(Coleção David Smith)

4.2 Linhas de desenvolvimento matemático

Podem-se notar três importantes e distintas linhas de desenvolvimento durante os primeiros 300 anos da matemática grega. Primeiro temos o desenvolvimento do material que acabou se organizando nos *Elementos*, iniciado habilmente pelos pitagóricos

e crescido depois por Hipócrates, Eudoxo, Teodoro, Teeteto e outros. Já consideramos partes desse desenvolvimento e voltaremos a ele no próximo capítulo. Em segundo lugar, há o desenvolvimento de noções relacionadas com infinitésimos e infinitos e processos somatórios que só foram esclarecidos de vez com a invenção do cálculo nos tempos modernos. Os paradoxos de Zenão, o método de exaustão de Antífon e Eudoxo e a teoria atomística associada ao nome de Demócrito inserem-se nesta segunda linha de desenvolvimento; nas seções iniciais do Capítulo 11, dedicadas às origens do cálculo, essa linha será discutida mais logicamente.

Qualquer aluno ou professor desejoso de seguir estritamente a ordem cronológica pode, neste ponto, passar às Seções 11-2 e 11-3.

A terceira linha de desenvolvimento é a da geometria superior, ou geometria de curvas outras que não a reta e a circunferência e superfícies outras que não o plano e a esfera. É bastante curioso que essa geometria superior tenha se originado nas tentativas seguidas de resolver os três agora famosos problemas de construção. Este capítulo discute esses três famosos problemas.



Aristóteles
(Irmãos Brown)

4.3 Os três famosos problemas

Os três famosos problemas são os seguintes:

1. *Duplicação do cubo* ou o problema de construir o lado de um cubo cujo volume é o dobro do de um cubo dado.

2. *Trissecção do ângulo* ou o problema de dividir um ângulo arbitrário dado em três partes iguais.

3. *Quadratura do círculo* ou o problema de construir um quadrado com área igual à de um círculo dado.

A importância desses problemas reside no fato de que eles não podem ser resolvidos, a não ser aproximadamente, com régua e compasso, embora esses instrumentos sirvam para a resolução de muitos outros problemas de construção. A busca ingente de soluções para esses problemas influenciou profundamente a geometria grega e levou a muitas descobertas frutíferas, como as secções cônicas, muitas curvas cúbicas e quárticas e várias curvas transcendentais. Um produto muito posterior foi o desenvolvimento de partes da teoria das equações ligadas a domínios de racionalidade, números algébricos e teoria dos grupos. Somente no século XIX, mais de 2000 anos depois de os problemas terem sido concebidos, se estabeleceu a impossibilidade das três construções, sob a limitação autoimposta de se usarem apenas régua e compasso.

O grande estímulo ao desenvolvimento da matemática, inclusive para a criação de novas teorias, dado pelos esforços continuados para se resolverem os três famosos problemas da Antiguidade, ilustra o valor heurístico de problemas matemáticos atraentes não resolvidos.

4.4 Os instrumentos de Euclides

É importante ser claro quanto ao que é permitido fazer com régua e compasso. *Com a régua permite-se traçar uma reta de comprimento indefinido passando por dois pontos distintos dados. Com o compasso permite-se traçar uma circunferência com centro num ponto dado passando por um segundo ponto qualquer dado.* O traçado de construções com régua e compasso, visto como um jogo em que se obedecem a essas duas regras, mostrou ser um dos jogos mais fascinantes e absorventes jamais inventados. São de surpreender as construções realmente intrincadas que se podem realizar dessa maneira; assim, é difícil acreditar que os problemas de construção aparentemente simples da Seção 4-3 não possam ser também resolvidos com esses dois instrumentos.

Como os postulados dos *Elementos* de Euclides restringem o uso da régua e o do compasso de acordo com as regras acima, esses instrumentos, assim utilizados, tornaram-se conhecidos como *instrumentos euclidianos*. Note-se que a régua *não tem escala*. Veremos que com uma régua com escala é possível trissecionar um ângulo. Observe-mos também que o compasso de Euclides difere dos compassos modernos, uma vez que com estes é permitido traçar um círculo com centro num ponto qualquer e tendo como raio um segmento AB qualquer. Em outras palavras, permite-se transportar a distância AB ao centro, usando para isso o compasso como transferidor. O compasso euclidiano, por outro lado, desmonta-se quando se levanta um de seus braços do papel. Poderia parecer assim que o compasso moderno fosse mais poderoso do que o euclidiano, ou compasso desmontável. Mas é bastante curioso que os dois instrumentos sejam equivalentes (ver Exercício 4.1).

4.5 Duplicação do cubo

Há indícios de que o problema da duplicação do cubo possa ter se originado nas palavras de algum poeta (talvez Eurípedes) grego antigo, ignorante em matemática, ao descrever a insatisfação do mítico rei Minos com o tamanho do túmulo erguido para seu filho Glauco. Minos ordenou que o tamanho do túmulo fosse dobrado. O poeta fez então Minos aduzir, incorretamente, que isso poderia ser feito dobrando-se cada uma das dimensões do túmulo. Essa falha matemática da parte do poeta levou os geômetras a abraçar o problema de como dobrar um dado sólido mantendo-se sua forma. Nenhum progresso parece ter havido quanto à solução até que, algum tempo mais tarde, Hipócrates descobriu sua famosa redução, que daremos abaixo. Conta-se que mais tarde ainda, para livrar-se de uma peste que os castigava, os delianos foram orientados por seu oráculo para dobrar o tamanho do altar cúbico de Apolo. O problema supostamente caiu nas mãos de Platão que o submeteu aos geômetras. É essa última história que fez com que o problema da duplicação seja mencionado frequentemente como *problema deliano*. Verdadeira a história ou não, o fato é que o problema foi estudado na Academia de Platão, e há soluções geométricas superiores atribuídas a Eudoxo, Menaecmo e mesmo (embora talvez erradamente) ao próprio Platão.

O primeiro progresso real no problema da duplicação foi, sem dúvida, a redução do problema, feita por Hipócrates (c. 440 a.C.) à construção de duas médias proporcionais entre dois segmentos de reta de comprimentos, s e $2s$. Denotando-se as médias proporcionais por x e y , então

$$s : x = x : y = y : 2s.$$

Dessas proporções resulta que $x^2 = sy$ e $y^2 = 2sx$. Eliminando-se y , obtém-se que $x^3 = 2s^3$; assim, x é a aresta de um cubo cujo volume é o dobro do de um cubo de aresta s .

Depois de Hipócrates fazer sua redução, as tentativas subsequentes de duplicação do cubo tomaram como caminho a construção de duas médias proporcionais entre dois segmentos de reta dados. Dessas, uma das mais antigas, e certamente uma das mais notáveis, na forma de uma solução por geometria superior, foi dada por Arquitas (c. 400 a.C.). Sua solução consiste em achar um ponto de intersecção de um cilindro circular reto, um toro de diâmetro interior zero e um cone circular reto! Essa solução lança alguma luz sobre a extensão pouco comum que a geometria deve ter atingido naqueles tempos remotos. A solução de Eudoxo (c. 370 a.C.) se perdeu. Menaecmo (c. 350 a.C.) deu duas soluções do problema e, tanto quanto se sabe, inventou as secções cônicas para esse propósito. Atribui-se a Eratóstenes (c. 230 a.C.) uma solução posterior usando dispositivos mecânicos e outra, por volta da mesma época, a Nicomedes. Uma solução ainda posterior foi oferecida por Apolônio (c. 225 a.C.). Dioclés (c. 180 a.C.) inventou uma curva chamada cissoide com o mesmo objetivo. E, obviamente, descobriram-se modernamente muitas soluções mediante curvas planas superiores.

Muitas soluções mencionadas acima podem ser encontradas nos Exercícios ao fim do capítulo. Para ilustrar o espírito das tentativas, reproduzamos aquela atribuída a

Platão por Eutócio. Como essa solução usa meios mecânicos e estes eram reprovados por Platão, percebe-se que a atribuição é errada.

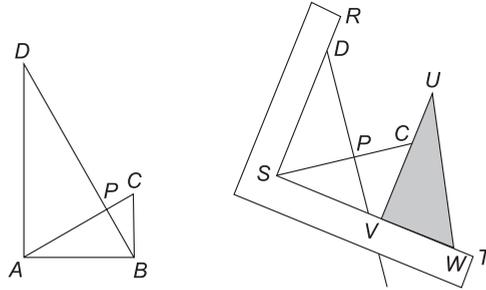


Figura 30

Considere dois triângulos (ver primeira parte da Figura 30), CBA e DAB , retos em B e A , respectivamente, de maneira que o cateto AB seja comum. Suponhamos que as hipotenusas AC e BD se interceptem perpendicularmente em P . Sendo semelhantes os triângulos CPB , BPA e APD , segue-se que

$$PC : PB = PB : PA = PA : PD.$$

Logo, PB e PA são duas médias proporcionais entre PC e PD . Daí que o problema fica resolvido desde que se possa construir uma figura em que $PD = 2(PC)$. A segunda parte da Figura 30 mostra como se pode traçar essa figura por meios mecânicos. Trace duas retas perpendiculares interceptando-se em P e marque PC e PD sobre elas, com $PD = 2(PC)$. A seguir coloque um esquadro de carpinteiro, de lados internos RS e WS , sobre a figura de modo que SR passe por D e o vértice S do ângulo reto fique no prolongamento de CP . Faça escorregar sobre ST um triângulo retângulo UVW com o cateto VW no lado ST , até que VU passe por C . A seguir manipule o aparato² até que V esteja no prolongamento de DP .

4.6 Trissecção do ângulo

Dos três famosos problemas da Antiguidade, o da trissecção do ângulo é destacadamente o mais popular entre os não iniciados em matemática dos Estados Unidos hoje em dia. Todo ano os jornais de matemática e os membros da classe dos professores de matemática do país recebem muitas comunicações dos “trissecionadores de ângulos” e não raro se lê em jornais que alguém finalmente resolveu o evasivo problema. Esse é,

² Para uma forma melhorada desse aparato ver, por exemplo, Richard Courant e H. E. Robbins, *What is Mathematics?*, p. 147.

certamente, dos três problemas clássicos, o mais fácil de compreender e, como a bissecção de um ângulo é tão fácil, é natural que cause espanto o fato de que a trissecção não seja igualmente fácil.

A multisseccção de um segmento de reta com os instrumentos euclidianos é uma questão simples e é possível que os gregos tivessem sido levados ao problema da trissecção num esforço para resolver o problema análogo da multisseccção de um ângulo. Ou talvez, mais provavelmente, o problema tenha surgido de esforços para construir um polígono regular de nove lados, para o que é preciso trissecionar um ângulo de 60° .

Ao lidar com o problema da trissecção, os gregos parecem tê-lo reduzido primeiro ao que eles chamavam um *problema de neusis**. Qualquer ângulo agudo ABC (ver Figura 31) pode ser tomado como o ângulo entre uma diagonal BA e um lado BC de um retângulo $BCAD$. Considere uma reta por B cortando CA em E e o prolongamento de DA em F e tal que $EF = 2(BA)$. Seja G o ponto médio de EF . Então

$$EG = GF = GA = BA,$$

e daí

$$\sphericalangle ABG = \sphericalangle AGB = \sphericalangle GAF + \sphericalangle GFA = 2 \sphericalangle GFA = 2 \sphericalangle GBC,$$

e BEF trisseciona o ângulo ABC . Assim, o problema se reduz àquele de construir um segmento de reta EF de um dado comprimento $2(BA)$ entre AC e o prolongamento de DA de modo que FE aponte** para B .

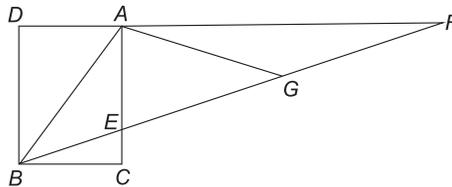


Figura 31

Se, contrariando as hipóteses euclidianas, permitimo-nos marcar em nossa régua um segmento $E'F' = 2(BA)$ e ajustamos a régua de modo que ela passe por B e tenha os pontos marcados E' e F' em AC e no prolongamento de DA , o ângulo ABC estará trissecionado. Pode-se aludir a essa utilização não permitida da régua como uma aplicação do *princípio de inserção*. Para outras aplicações do princípio, ver Exercício 4.6.

Descobriram-se várias curvas planas superiores que resolvem o problema de *neusis* ao qual o problema da trissecção pode ser reduzido. Uma das mais antigas é a

* Do verbo grego *neuein* que significa apontar. (N. T.)

** No sentido da *neusis*. (N. T.)

conchoide inventada por Nicomedes (c. 240 a.C.). Sejam c uma reta e O um ponto qualquer fora de c . Tomando-se um ponto qualquer P em c , marque Q no prolongamento de OP , com PQ igual a um dado segmento fixo k . Então o lugar geométrico dos pontos Q , conforme P se move ao longo de c , é (um ramo da) *conchoide* de c para o polo O e a constante k . Não é difícil descobrir um aparato que descreva conchoides³, o qual será também um aparato para trissecionar ângulos. Seja pois AOB um ângulo agudo dado. Trace uma reta MN perpendicular a OA , cortando OA e OB em D e L , como mostra a Figura 32. Trace a seguir a conchoide de MN para o polo O e a constante $2(OL)$. Por L trace a paralela a OA que corta a conchoide em C . Então OC trisseciona AOB .

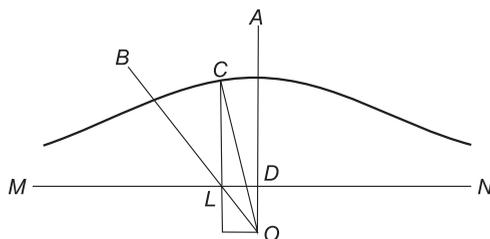


Figura 32

Pode-se trissecionar um ângulo genérico com a ajuda de uma cônica. Os gregos antigos não tinham familiaridade bastante com as cônicas para levar a efeito isso, e a mais antiga demonstração nesses moldes foi dado por Pappus (c. 300 d.C.), usando a propriedade foco-diretriz das cônicas. Duas trissecções usando cônicas se encontram no Exercício 4.8.

Há curvas transcendentais (não algébricas) que não só trissecionam um ângulo dado como, mais geralmente, multisseccionam-no num número qualquer de partes. Dentre essas curvas estão a *quadratriz*, inventada por Hípias (c. 425 a.C.) e a *espiral de Arquimedes*. Essas duas curvas também resolvem o problema da quadratura do círculo. No Exercício 4.10 aplica-se a quadratriz para a trissecção e para a quadratura.

Com o passar dos anos muitos dispositivos mecânicos, sistemas articulados e compassos compostos foram idealizados para o problema da trissecção⁴. Um desses instrumentos, bastante interessante e elementar, é o chamado *machadinho*. Não se conhece o inventor do machadinho, mas ele foi descrito num livro de 1835. Para construir um machadinho comece com um segmento de reta RU , trissecionado em S e T (ver Figura 33). Trace um semicírculo com SU como diâmetro e trace SV perpendicular a RU . Complete o instrumento conforme se indica na figura anexa. Para trissecionar um ângulo ABC com o machadinho, coloque o instrumento sobre o ângulo de modo que R caia em BA , SV passe por B e o semicírculo tangencie BC em, digamos, D . Então, como podemos mostrar que os triângulos RSB , TSB e TDB são todos congruentes, BS

³ Ver, por exemplo, T. L. Heath, *A Manual of Greek Mathematics*, p. 150.

⁴ Ver R. C. Yates, *The Trisection Problem*.

e BT trisseccionam o ângulo dado. O machadinho pode ser construído com régua e compasso em papel decalque e depois ajustado ao ângulo dado. Com esse artifício podemos trisseccionar um ângulo com régua e compasso. (Com dois machadinhos podemos quintisseccionar um ângulo).

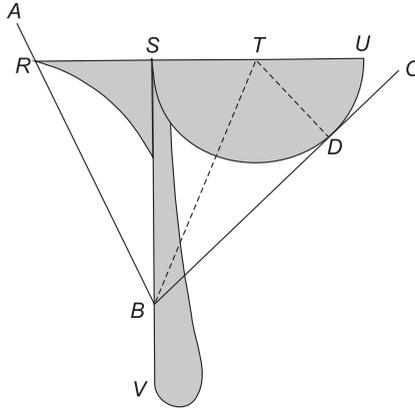


Figura 33

Embora não se possa trisseccionar um ângulo de maneira exata com os instrumentos euclidianos, há construções com esses instrumentos que dão trisseções aproximadas notavelmente boas. Um excelente exemplo é a construção dada em 1525 pelo famoso pintor Albrecht Dürer. Tome o ângulo AOB dado como um ângulo central de um círculo (ver Figura 34). Seja C o ponto que trissecciona a corda AB mais próximo de B . Por C erga a perpendicular a AB e seja D o ponto onde ela corta a circunferência. Com B como centro e BD como raio, trace um arco que irá cortar AB em E . Seja F o ponto de trisseção de EC mais próximo de E . De novo, com B como centro e BF como raio, trace um arco que irá cortar a circunferência em G . Então OG é uma reta que aproximadamente trissecciona o ângulo AOB . Pode-se mostrar que o erro na trisseção cresce com o tamanho do ângulo AOB , mas é de apenas cerca de $1''$ para o ângulo $AOB = 60^\circ$ e de cerca de $18''$ para o ângulo $AOB = 90^\circ$.

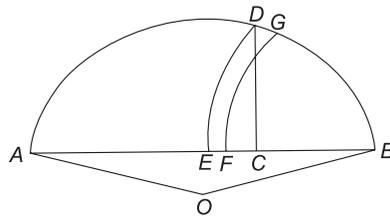


Figura 34

O Exercício 4.9 descreve uma trissecção aproximada cujos resultados podem se avizinhar da trissecção exata tanto quanto se deseje.

4.7 *Quadratura do círculo*

Provavelmente nenhum outro problema exerceu um fascínio maior ou mais duradouro do que aquele de construir um quadrado de área igual à área de um círculo dado. Já em 1800 a.C. os egípcios haviam “resolvido” o problema, tomando o lado do quadrado igual a $8/9$ do diâmetro do círculo dado. De lá para cá, literalmente milhares de pessoas trabalharam no problema e, a despeito de já se ter uma demonstração de que a construção é impossível com os instrumentos euclidianos⁵, não há um ano que não tenha sua safra de “quadradores de círculo”.

O primeiro grego conhecido cujo nome se liga ao problema é Anaxágoras (c. 499-c. 427 a.C.), mas sua contribuição é desconhecida. Hipócrates de Quio, um contemporâneo de Anaxágoras, teve sucesso na quadratura de certas lunas especiais, ou figuras em forma de lua limitadas por dois arcos de circunferência, provavelmente na expectativa de que suas investigações pudessem levar à solução do problema da quadratura. Alguns anos mais tarde, Hípias de Elis (c. 425 a.C.) inventou uma curva que se tornou conhecida como *quadratriz*. Essa curva resolve tanto o problema da trissecção como o da quadratura, mas a tradição não é unânime sobre quem a usou primeiro na quadratura. É possível que Hípias a tivesse usado para trissecionar ângulos e que Dinostrato (c. 350 a.C.), ou algum outro geômetra posterior, a tivesse aplicado ao problema da quadratura. No Exercício 4.12 consideram-se algumas das lunas de Hipócrates; no Exercício 4.10 considera-se a quadratriz em seu papel dual; e no Exercício 4.11 descrevem-se algumas quadraturas aproximadas.

Pode-se conseguir uma solução elegante do problema da quadratura com a espiral de Arquimedes que, efetivamente, foi utilizada por Arquimedes (c. 225 a.C.) com essa finalidade. Dinamicamente, pode-se definir a espiral como o lugar dos pontos P que se movem uniformemente ao longo de um raio que, por sua vez, gira uniformemente num plano em torno de sua origem. Se tomamos como sistema polar de referência a posição OA do eixo de rotação quando P coincide com a origem O do raio, temos que OP é proporcional ao ângulo AOP e a equação polar da espiral é $r = a\theta$, em que a é a constante de proporcionalidade.

Tracemos o círculo de centro O e raio igual a a . Então OP e o arco do círculo entre as semirretas OA e OP são iguais, pois ambos são dados por $a\theta$ (ver Figura 35). Segue-se então que se tomamos OP perpendicular a OA , OP terá comprimento igual a um quarto da circunferência do círculo. Como a área K do círculo é metade do produto de seu raio por sua circunferência, temos

⁵ Ver, por exemplo, Howard Eves, *A Survey of Geometry*, vol. 2, pp. 30-8.

$$K = \left(\frac{a}{2}\right) (4OP) = (2a) (OP)$$

Assim, o lado do quadrado pretendido é média proporcional entre $2a$ e OP , ou entre o diâmetro do círculo e o comprimento do raio vetor da espiral que é perpendicular a OA .

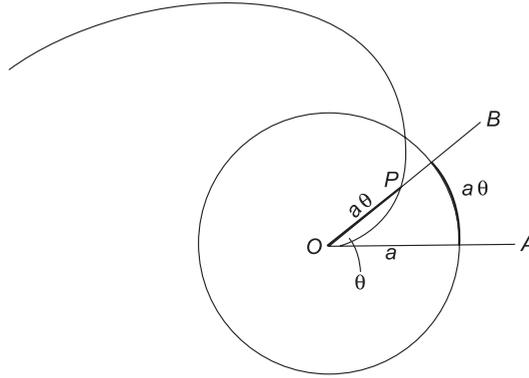


Figura 35

Podemos trisseccionar (mais geralmente, multisseccionar) um ângulo AOB com a espiral de Arquimedes. Suponhamos que OB corte a espiral em P e façamos a trisseccção do segmento OP com os pontos P_1 e P_2 . Se as circunferências de centro O e raios OP_1 e OP_2 cortam a espiral em T_1 e T_2 então OT_1 e OT_2 trisseccionam o ângulo AOB .

4.8 Cronologia de π^6

Estreitamente ligado ao problema da quadratura está o do cálculo de π , razão entre a circunferência de um círculo e seu diâmetro. Já vimos que no Oriente antigo tomava-se frequentemente o número 3 como valor de π .⁷ Para a quadratura do círculo egípcia dada no papiro Rhind, temos $\pi = (4/3)^4 = 3,1604\dots$ Porém, a primeira tentativa científica de calcular n parece ter sido a de Arquimedes, e começaremos nossa cronologia com essa realização.

⁶ Para uma cronologia mais completa de n , com mais de 120 registros, ver H. C. Schepler, "The chronology of pi", *Mathematics Magazine*, jan.-fev., 1950, pp. 165-70; mar.-abr., 1950, pp. 216-28; mai.-jun., 1950, pp. 279-83.

⁷ Ver as referências bíblicas: Reis, I, 7: 23; Crônicas, II, 4: 2.

c. 240 a.C. Para simplificar a questão, suponhamos que se tome um círculo de diâmetro unitário. Então o comprimento da circunferência do círculo situa-se entre o perímetro de qualquer polígono regular inscrito e a de qualquer polígono regular circunscrito. Uma vez que é uma questão simples calcular os perímetros dos hexágonos regulares inscrito e circunscrito, facilmente se obtêm limites para π . Mas há fórmulas (ver Exercício 4.13) que nos dizem, a partir de um par dado de polígonos regulares inscrito e circunscrito, como se podem obter os perímetros dos polígonos regulares inscrito e circunscrito com o dobro do número de lados. Por aplicações sucessivas desse processo, podemos calcular os perímetros dos polígonos regulares inscrito e circunscrito de 12, 24, 48 e 96 lados e, dessa forma, obter limites cada vez mais próximos de π . Foi isso essencialmente o que fez Arquimedes, chegando à conclusão de que π está entre $223/71$ e $22/7$ ou que, até a segunda casa decimal, π é dado por 3,14. Esse trabalho se encontra num tratado de Arquimedes constituído de três proposições apenas e que se intitula *A medida de um círculo*. Esse tratado não chegou a nós em sua forma original e pode tratar-se apenas de um fragmento de uma discussão mais ampla. Considerando-se as limitações enormes do sistema de numeração de sua época, uma conclusão inevitável é que Arquimedes era um exímio calculista. Encontram-se no trabalho algumas aproximações racionais de raízes quadradas irracionais verdadeiramente notáveis.

O método acima, baseado nos polígonos regulares inscritos e circunscritos, é conhecido como *método clássico* de cálculo de π .

c. 150 d.C. Depois de Arquimedes, a primeira aproximação notável de π foi dada por Cláudio Ptolomeu em sua famosa *Syntaxis mathematica* (mais popularmente conhecida por seu título árabe de *Almagesto*), a maior obra de astronomia produzida na Grécia antiga. O valor de π dado nesse trabalho é, em notação sexagesimal, $3\ 8'30''$, que é $377/120$ ou 3,1416. Sem dúvida esse valor foi obtido a partir de uma tábua de cordas que há no tratado. A tábua fornece os comprimentos das cordas de um círculo correspondentes aos ângulos centrais de 0° a 180° , com incrementos de meio grau. Multiplicando-se o comprimento da corda do ângulo central de 1° por 360° e dividindo-se o resultado pelo comprimento do diâmetro do círculo, obtém-se o valor de π acima.

c. 480. O mecânico chinês Tsu Ch'ung-chih deu a interessante aproximação racional $355/113 = 3,1415929\dots$ que é correta até a sexta casa decimal. Ver Exercício 4.11(c) para uma aplicação dessa razão ao problema de quadratura.

c. 530. Um dos mais antigos matemáticos hindus, Āryabhata, deu $62\ 832/20\ 000 = 3,1416$ como valor aproximado de π . Não se sabe como esse resultado foi obtido. Pode ser que tenha sido de fontes gregas mais antigas ou, talvez, do cálculo do perímetro de um polígono regular inscrito de 384 lados.

c. 1150. O matemático hindu posterior, Bhāskara, deu várias aproximações de π . Deu $3927/1250$ como um valor acurado, $22/7$ como um valor impreciso e $\sqrt{10}$ para trabalhos corriqueiros. O primeiro valor pode ter sido tomado de Āryabhata. É de origem incerta um outro valor, $754/240 = 3,1416$, dado por Bhāskara (trata-se do mesmo valor de Ptolomeu).

1429. Al-Kashi, assistente do astrônomo real de Samarcanda, Ulugh Beg, calculou π até a décima sexta casa decimal pelo método clássico.

1579. O eminente matemático francês François Viète encontrou π corretamente até a nona casa decimal pelo método clássico, usando polígonos de $6(2^{16}) = 393\,216$ lados. Descobriu também o equivalente do interessante produto infinito (ver Exercício 4.13).

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{(2+\sqrt{2})}}{2} \frac{\sqrt{\{2+\sqrt{(2+\sqrt{2})}\}}}{2} \dots$$

1585. Adriaen Anthoniszoon redescobriu a antiga razão chinesa $355/113$. Aparentemente foi um golpe de sorte, pois tudo que ele mostrou foi que $377/120 > \pi > 333/106$. Ele então fez a média aritmética dos numeradores e dos denominadores para obter o valor “exato” de π . Há indícios de que Valentin Otho, um discípulo de Rhaeticus, um dos primeiros construtores de tábuas, pode ter introduzido essa razão para π no mundo ocidental numa data ligeiramente anterior, 1573.

1593. O holandês Adriaen van Roomen, mais conhecido como Adrianus Romanus, determinou π corretamente até a décima quinta casa decimal pelo método clássico, usando polígonos de 2^{30} lados.

1610. O holandês Ludolph van Ceulen calculou π até a trigésima quinta casa decimal pelo método clássico, usando polígonos de 2^{62} lados. Ceulen gastou grande parte de sua vida nessa tarefa e seu feito foi considerado tão extraordinário que sua viúva fez gravar o número em seu túmulo (hoje perdido) no adro da igreja de São Pedro em Leyden. Até hoje o número π é às vezes chamado “número ludolphiano”.

1621. O físico holandês Willebrord Snell, mais conhecido por sua descoberta da lei da refração, descobriu um aperfeiçoamento trigonométrico do método clássico de calcular π tal que, de cada par de limites para π dado pelo método clássico, ele era capaz de obter limites consideravelmente mais próximos. Com seu método conseguiu obter as 35 casas decimais de van Ceulen usando polígonos de apenas 2^{30} lados. Com esses polígonos, o método clássico fornece apenas 15 casas. Para polígonos de 96 lados, o método clássico fornece duas casas decimais, ao passo que o aperfeiçoamento de Snell fornece sete casas. Em 1654 o matemático e físico holandês Christiaan Huygens forneceu uma demonstração correta do refinamento de Snell.

1630. Usando o refinamento de Snell, Grienberger calculou π até a trigésima nona casa decimal. Essa foi a última tentativa importante de calcular π pelo método dos perímetros.

1650. O matemático inglês Jonh Wallis obteve a curiosa expressão

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \dots}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \dots}$$

Lord Brouncker, o primeiro presidente da Royal Society, converteu o resultado de Wallis na fração contínua

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \frac{1^2}{2} + \frac{3^2}{2} + \frac{5^2}{2} + \dots$$

Nenhuma dessas expressões, porém, serviu para um cálculo longo de π .

1677. O matemático escocês James Gregory obteve a série infinita

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad (-1 \leq x \leq +1).$$

Passou despercebido a Gregory que, para $x = 1$, a série torna-se

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

Essa série, que converge muito lentamente, era conhecida de Leibniz em 1674. Gregory tentava provar que é impossível uma solução euclidiana do problema da quadratura.

1699. Abraham Sharp encontrou acertadamente as primeiras 71 casas decimais de π usando a série de Gregory para $x = \sqrt{1/3}$.

1706. John Machin obteve cem casas decimais usando a série de Gregory juntamente com a relação (ver Exercício 4.13)

$$\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{5} \right) - \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{239} \right).$$

1719. O matemático francês De Lagny obteve corretamente 112 casas decimais usando a série de Gregory para $x = \sqrt{1/3}$.

1737. O símbolo π fora usado anteriormente pelos matemáticos ingleses William Oughtred, Isaac Barrow e David Gregory para designar a circunferência de um círculo. O primeiro a usar esse símbolo para a razão entre a circunferência e o diâmetro foi o escritor inglês William Jones, numa publicação de 1706. Porém, o símbolo só encontrou aceitação geral depois que Euler o adotou em 1737.

1754. O francês Jean Étienne Montucla, um dos primeiros historiadores da matemática, escreveu uma história do problema da quadratura.

1755. A Academia de Ciências da França declinou examinar qualquer solução mais do problema da quadratura.

1767. Johann Heinrich Lambert provou que π é irracional.

1777. O conde de Buffon concebeu seu famoso *problema da agulha* pelo qual pode-se aproximar π por métodos probabilísticos. Suponhamos que se tracem num plano horizontal um número grande de retas paralelas equidistantes entre si. Sendo a a distância entre duas retas vizinhas quaisquer, Buffon mostrou que a probabilidade⁸ de que uma agulha de comprimento $l < a$, lançada ao acaso sobre o plano, caia cortando uma das retas é dada por

$$p = \frac{2l}{\pi a}.$$

Realizando-se efetivamente esse experimento um número grande de vezes e anotando-se os casos positivos, obtém-se um valor empírico de p que podemos usar na fórmula acima para calcular uma aproximação de π . O melhor resultado por esse caminho foi conseguido pelo italiano Lazzerini em 1901. Com 3408 lançamentos da agulha ele obteve π corretamente até a sexta casa decimal! Seu resultado é superior ao de outros experimentadores às vezes vistos com suspeição. Há outros métodos probabilísticos para calcular π . Assim é que, em 1904, R. Chartres relatou uma aplicação do conhecido fato de que se dois inteiros positivos são escritos ao acaso, a probabilidade de que eles sejam primos entre si é $6/\pi^2$.

1794. Adrien-Marie Legendre mostrou que π^2 é irracional.

1841. O inglês William Rutherford calculou π com 208 casas — 152 corretas, como se mostrou depois —, usando a série de Gregory juntamente com a relação

$$\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{5} \right) - \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{70} \right) + \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{99} \right).$$

1844. O calculista relâmpago Zacharias Dase encontrou π corretamente até a ducentésima casa decimal usando a série de Gregory juntamente com a relação

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{2} \right) + \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{5} \right) + \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{8} \right).$$

Dase, que nasceu em Hamburgo em 1824, morreu prematuramente aos 37 anos de idade. Talvez tenha sido ele o mais extraordinário calculista mental de todos os tempos. Dentre suas façanhas figura o cálculo mental do produto de dois números de oito algarismos em 54 segundos, de dois números de 20 algarismos em seis minutos, de dois números de 40 algarismos em 40 minutos e de dois números de 100 algarismos em 8 horas e 45 minutos. Calculou também a raiz quadrada de um número de 100 dígitos em 52 minutos. Dase fez um uso mais valioso de seus

⁸ Se um dado evento pode ocorrer de h maneiras e pode deixar de acontecer de f maneiras e se cada uma das $h + f$ maneiras tem possibilidade igual de acontecer, então a *probabilidade matemática* p de o evento ocorrer é $p = h/(h + f)$.

poderes quando construiu uma tábua de logaritmos naturais de sete casas e uma tábua de fatores de todos os números entre 7 milhões e 10 milhões.

1853. Rutherford retornou ao problema e obteve corretamente 400 casas decimais.

1873. O inglês William Shanks, usando a fórmula de Machin, calculou π com 707 casas. Por um longo tempo esse foi o feito mais fabuloso em termos de computação.

1882. Um número se diz *algébrico* se é raiz de algum polinômio não nulo de coeficientes racionais; caso contrário, se diz *transcendente*. F. Lindemann provou que π é transcendente. Esse fato garante (ver Seção 14-2) que o problema da quadratura não pode ser resolvido com os instrumentos euclidianos.

1906. Dentre as curiosidades ligadas a π há várias mnemônicas que foram concebidas para memorizar esse número até um número grande de casas decimais. Os seguintes versos em inglês, de A. C. Orr, apareceram no *Literary Digest*. Basta substituir cada palavra pelo número de letras que a compõe para obter π corretamente até a trigésima casa decimal.

*Now I, even I, would celebrate
In rhymes unapt, the great
Immortal Syracusan, rivaled nevermore,
Who in his wondrous lore,
Passed on before,
Left men his guidance,
How to circles mensurate.*

Uns poucos anos mais tarde, em 1914, apareceu a seguinte mnemônica semelhante no *Scientific American Supplement*: “See, I have a rhyme assisting my feeble brain, its tasks ofttimes resisting”. Eis duas outras mnemônicas: “How I want a drink, alcoholic of course, after the heavy lectures involving quantum mechanics” e “May I have a large container of coffee?”

1948. Em 1946 o inglês D. F. Ferguson descobriu erros, começando na 528ª casa, no valor encontrado por Shanks para π e em 1947 deu um valor correto com 710 casas. No mesmo mês o americano J. W. Wrench Jr. publicou um valor de π com 808 casas, mas Ferguson encontrou um erro na 723ª casa. Em janeiro de 1948, Ferguson e Wrench publicaram juntamente um valor correto e testado de π com 808 casas. Wrench usou a fórmula de Machin, ao passo que Ferguson usou a fórmula

$$\frac{\pi}{4} = 3 \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{4} \right) + \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{20} \right) + \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{1985} \right).$$

1949. O ENIAC, computador eletrônico do Army Ballistic Research Laboratories de Aberdeen, Maryland, calculou π com 2037 casas decimais.

1959. François Genuys, em Paris, calculou π com 16 167 casas decimais, usando um IBM 704.

1961. Wrench e Daniel Shanks, de Washington, D. C., calcularam π com 100 265 casas decimais usando um IBM 7090.

1965. O Eniac, agora obsoleto, foi desmontado e transportado para o Smithsonian Institution como peça de museu.

1966. Em 22 de fevereiro, M. Jean Guilloud e seus colegas de trabalho na Comissão de Energia Atômica de Paris obtiveram uma aproximação de π que alcançava 250 000 casas decimais, num computador STRETCH.

1967. Exatamente um ano depois os mesmos pesquisadores, usando um CDC 6600, encontraram uma aproximação de π com 500 000 casas.

1973. Guilloud e seus colegas encontraram uma aproximação de π com 1 milhão de casas, num CDC 7600.

1981. Os dois matemáticos japoneses Kazunori Miyoshi e Kazuhika Nakayama, da Universidade de Tsukuba, calcularam π com 2 000 038 algarismos em 137,30 horas, num computador FACOM M-200. Eles usaram a fórmula

$$\pi = 32 \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{10} \right) - 4 \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{239} \right) - 16 \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{515} \right)$$

e testaram seu resultado na fórmula de Machin.

1986. Em janeiro de 1986, D. H. Bailey da NASA, Ames Research, Califórnia, fez funcionar um supercomputador Cray-2 por 28 horas para obter π com 29 360 000 dígitos. Seu código baseava-se num algoritmo de J. M. e P. D. Borwein da Universidade Dalhousie. Bailey testou seu código num algoritmo mais lento, também desenvolvido pelos Borwein, e verificou a precisão de seu resultado. Pouco depois, Yasumasa Kanada, da Universidade de Tóquio, usando um supercomputador NEC SX-2 e o algoritmo dos Borwein, calculou π com 137 217 700 dígitos.

Na cronologia acima não incluímos nenhum item sobre a vasta literatura fornecida pelos portadores da *morbis cyclometricus*, a doença da quadratura do círculo. Essas contribuições, frequentemente divertidas e às vezes inacreditáveis, precisariam de uma publicação exclusiva. Para ilustrar esse caráter consideremos um episódio de 1892 em que alguém anunciou no *New York Tribune* a redescoberta de um segredo de longa data perdido que levava a 3,2 como valor exato de π . Na discussão ardente que se seguiu a esse anúncio muitas pessoas advogaram o novo valor. Além disso, desde a publicação em 1931 de um opúsculo dedicado a provar que $\pi = 3 \frac{13}{81}$, muitas escolas e bibliotecas públicas dos Estados Unidos receberam exemplares autografados da parte do amável autor. E há também o projeto de lei nº 246, de 1897, da Assembleia Legislativa do Estado de Indiana, que pretendia determinar o valor de π por lei. Na Seção I do projeto se lê: “Seja decretado pela Assembleia Geral do Estado de Indiana: Encontrou-se que uma área circular está para o quadrado sobre o segmento igual ao quadrante da circunferência como a área de um retângulo equilátero está para o quadrado sobre um lado...” O projeto foi aprovado

na Casa mas, ridicularizado por certos jornais, foi arquivado no Senado, apesar do apoio da Superintendência Estadual do Ensino Público⁹.

No cálculo de π com um número grande de casas decimais há outras questões além do desafio envolvido. Antes de 1767 (quando se provou que π é irracional) uma das razões era verificar se os dígitos de π começavam a se repetir e, se fosse esse o caso, obtê-lo como um número racional exato, talvez com um denominador grande. Mais recentemente, a motivação é conseguir informações estatísticas referentes à “normalidade” de π . Um número real se diz *simplesmente normal* se em sua expansão decimal todos os dez algarismos ocorrem com igual frequência; e se diz *normal* se todos os blocos de algarismos de mesmo comprimento ocorrem com igual frequência¹⁰. Não se sabe se π (ou mesmo $\sqrt{2}$) é normal ou mesmo simplesmente normal. Os cálculos de π , começando com o do ENIAC em 1949, foram realizados para fornecer informações estatísticas sobre a questão. Avaliações sobre essas extensas aproximações de π parecem sugerir que o número talvez seja normal. O cálculo errado de π , com 707 casas decimais, feito por Shanks, sequer sugeria que ele pudesse ser simplesmente normal.

Há outras razões para se calcular π com um grande número de casas decimais. Antes de mais nada, isso é muito valioso para a ciência da computação porque idear programas para cálculos tão extensos leva a uma habilidade maior em programação. E também porque, tão logo se tenha usado com êxito um programa num computador, pode-se empregá-lo para testar se um novo computador está operando adequadamente.

Em muitas situações, há a necessidade de uma tábua de números aleatórios, como nos problemas que envolvem cadeias de Markov, em aplicações de métodos de Monte Carlo a problemas de física-matemática e no sorteio de amostras aleatórias em estatística. Os dígitos de π não são verdadeiramente aleatórios, porque cada um está determinado de maneira única. Contudo, os dígitos de π podem ser suficientemente “embaralhados” de maneira a servir, na prática, como uma tábua de números aleatórios; testes (como o “teste do pôquer”) parecem indicar isso.

Com relação à possível normalidade de π , é interessante que a sequência 314159 dos seis primeiros algarismos de π aparece seis vezes nos primeiros dez milhões de dígitos da expansão de π , e a sequência 0123456789 não aparece nunca.

A sequência 271828 dos seis primeiros dígitos de e (base dos logaritmos naturais) ocorre oito vezes nos primeiros dez milhões de algarismos da expansão decimal de e .

⁹ Ver W. E. Edington, “House Bill N° 246 Indiana State Legislature”, 1897, *Proceedings of the Indiana Academy of Science* 45, 1935, pp. 206-10. Ver também A. E. Hallerberg, “Indiana’s squared circle”, *Mathematics Magazine* 50, n° 3, mai, 1977, pp. 136-40.

¹⁰ O conceito de normalidade de um número foi introduzido por Émile Borel (1871-1956) que mostrou que “quase todos” os números são normais.

Exercícios

4.1 Compasso euclidiano e compasso moderno

Ao ler pela primeira vez os *Elementos* de Euclides, um estudante deveria ter alguma surpresa diante das proposições iniciais do Livro I. As três primeiras proposições são os problemas de construção:

1. Descrever um triângulo equilátero sobre uma reta finita dada.
2. Traçar por um ponto uma reta igual a uma reta dada.
3. Da maior de duas retas dadas, tomar uma parte igual à menor.

Essas três construções são triviais com régua e compasso *moderno* mas requerem certa engenhosidade com régua e compasso *euclidiano*.

- (a) Resolva a Proposição 1 do Livro I com os instrumentos euclidianos.
- (b) Resolva a Proposição 2 do Livro I com os instrumentos euclidianos.
- (c) Resolva a Proposição 3 do Livro I com os instrumentos euclidianos.
- (d) Mostre que a Proposição 2 do Livro I prova que a reta e o compasso *euclidiano* são equivalentes à reta e o compasso *moderno*.

4.2 A duplicação por Arquitas e Menaecmo

(a) O pitagórico Arquitas (c. 400 a.C.), filósofo, matemático, general e estadista, foi um dos mais respeitados e influentes cidadãos de Tarento, Itália. Consta que ele foi eleito sete vezes general das forças tarentinas e que se destacou pela preocupação demonstrada para com o bem-estar e a educação das crianças de Tarento. Morreu afogado tragicamente num naufrágio perto de sua cidade. Damos a seguir a notável solução ideada por ele para o problema da inserção de duas médias proporcionais entre dois segmentos de reta dados.

Sejam a e b , $a > b$, os dois segmentos de reta dados. Num plano horizontal trace um círculo com $AD = a$ como diâmetro e construa a corda $AB = b$. Suponha que o prolongamento de AB corte a tangente à circunferência em D no ponto P . Erga verticalmente a metade superior de um semicilindro circular reto tendo o semicírculo ABD como base; gere um cone circular reto girando AP em torno da reta AD ; gere um toro de raio interior nulo girando, em torno da geratriz do semicilindro por A , o círculo vertical de diâmetro AD . Denote por K o ponto comum ao semicilindro, ao cone e ao toro e seja I o pé no semicírculo ABD da geratriz do semicilindro por K . Prove que AK e AI são duas médias proporcionais entre a e b ; isto é, mostre que $AD : AK = AK : AI = AI : AB$.

(b) Menaecmo (c. 350 a.C.) deu as duas soluções seguintes ao problema da duplicação. Para tanto utilizou algumas secções cônicas que, aparentemente, foram inventadas por ele mesmo para o problema.

1. Trace duas parábolas com vértice comum, eixos perpendiculares e tais que o *latus rectum* de uma é o dobro do da outra. Denote por x o comprimento da perpen-

dicular baixada da outra intersecção das duas parábolas sobre o eixo da parábola menor. Então x é a aresta de um cubo cujo volume é o dobro do volume do cubo que tem como aresta o *latus rectum* menor. Prove que essa construção é correta, usando geometria analítica moderna.

2. Trace uma parábola de *latus rectum* s , depois uma hipérbole equilátera de eixo real igual a $4s$ tendo como assíntotas o eixo da parábola e a tangente à parábola em seu vértice. Seja x o comprimento da perpendicular baixada da intersecção das duas curvas sobre o eixo da parábola. Então $x^3 = 2s^3$. Justifique essa construção correta usando geometria analítica moderna.

4.3 A duplicação por Apolônio e Eratóstenes

Apolônio (c. 225 a.C.) resolveu o problema da duplicação como se segue. Trace um retângulo $OADB$ e depois uma circunferência concêntrica com o retângulo de modo a cortar os prolongamentos de OA e OB em A' e B' pontos estes colineares com D . Efetivamente é impossível construir essa circunferência com os instrumentos euclidianos, mas Apolônio deu um meio mecânico de descrevê-la.

(a) Mostre que BB' e AA' são duas médias proporcionais entre OA e OB .

(b) Se $OB = 2(OA)$, mostre que $(BB')^3 = 2(OA)^3$

(c) Eratóstenes (c. 230 a.C.) concebeu um “descobridor de médias” consistindo em três quadros retangulares iguais, com o conjunto correspondente de diagonais, capazes de deslizar em sulcos: o segundo sob o primeiro e o terceiro sob o segundo. Suponha que os quadros tenham deslizado, conforme mostra a Figura 36, de modo que os pontos A' , B' , C' sejam colineares. Mostre que BB' e CC' são duas médias proporcionais entre AA' e DD' . Pode-se facilmente construir um descobridor de médias desse tipo com um conjunto de retângulos de cartão iguais; também é fácil construir uma generalização desse dispositivo para inserir n médias entre dois segmentos dados¹¹.

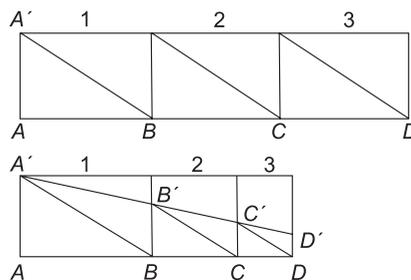


Figura 36

¹¹ Para uma abordagem mecânica mais recente, ver George E. Martin, “Duplicating the cube with a mira”, *The Mathematics Teacher*, mar., 1979, pp. 204-8.

4.4 A cissoide de Dioclés

Dioclés (c. 180 a.C.) inventou a *cisoide* a fim de resolver o problema da duplicação. Uma cissoide geral pode ser definida como se segue: Sejam C_1 e C_2 duas curvas dadas e seja O um ponto fixo. Sejam P_1 e P_2 as intersecções de uma reta variável por O com as curvas dadas. O lugar dos pontos P da reta tais que $OP = OP_2 - OP_1 = P_1P_2$ chama-se *cisoide* de C_1 e C_2 para o polo O . Se C_1 é uma circunferência, C_2 é a tangente a C_1 num ponto A e O é o ponto de C_1 diametralmente oposto a A , então a cissoide de C_1 e C_2 para o polo O é a *cisoide de Dioclés*.

(a) Tomando O como origem e \overrightarrow{OA} como semieixo das abscissas positivas, mostre que a equação cartesiana da cissoide de Dioclés é $y^2 = x^3 / (2a - x)$, em que a é o raio de C_1 . Mostre que a equação polar correspondente é $r = 2a \operatorname{sen} \theta \operatorname{tg} \theta$.

(b) Sobre o semieixo das ordenadas positivas marque $OD = n(OA)$. Trace DA , cortando a cissoide num ponto P . Suponha que OP corte a reta C_2 em Q . Mostre que $(AQ)^3 = n(OA)^3$. Quando $n = 2$, obtém-se uma solução do problema da duplicação.

(c) Newton mostrou como a cissoide de Dioclés pode ser gerada por um esquadro de carpinteiro. Sejam AC e BC os lados exteriores do esquadro, sendo AC o menor deles. Trace uma reta MN e marque um ponto R à distância AC de MN . Mova o esquadro de modo que A permaneça sempre em MN e BC passe sempre por R . Mostre que o ponto médio P de AC descreve uma cissoide de Dioclés.

(d) O que é a cissoide de duas circunferências concêntricas com relação ao seu centro comum? E de um par de retas paralelas com relação a um ponto qualquer não pertencente a nenhuma das retas?

(e) Se C_1 e C_2 interceptam-se em P , mostre que OP é tangente em O à cissoide de C_1 e C_2 para o polo O .

4.5 Algumas duplicações do século XVII

Muitos matemáticos eminentes do século XVII, como Huygens, Descartes, Grégoire de Saint-Vincent e Newton conceberam construções para a duplicação do cubo. A seguir são dadas duas dessas construções.

(a) Grégoire de Saint-Vincent (1647) deu uma construção para achar duas médias proporcionais entre dois segmentos de reta dados, baseada no seguinte teorema: *A hipérbole traçada por um vértice de um retângulo e que tem como assíntotas os lados opostos a esse vértice intercepta o circuncírculo do retângulo num ponto cujas distâncias das assíntotas são as médias proporcionais entre os lados adjacentes do retângulo*. Prove esse teorema.

(b) Descartes (1659) salientou que as curvas

$$x^2 = ay, \quad x^2 + y^2 = ay + bx$$

se interceptam num ponto (x, y) tal que x e y são as duas médias proporcionais entre a e b . Prove esse fato.

4.6 Aplicações do princípio de inserção

Sejam dadas duas curvas m e n e um ponto O . Suponha que seja permitido marcar, numa dada régua, um segmento MN , e depois ajustar a régua de modo que ela passe por O e corte as curvas m e n com M em m e N em n . Diz-se então que a reta traçada ao longo da régua foi traçada pelo *princípio de inserção*. Problemas para os quais não bastam os instrumentos euclidianos podem ser resolvidos com esses instrumentos, permitindo-se o princípio de inserção. Prove que são corretas as seguintes construções, em cada uma das quais se usa o princípio de inserção.

(a) Seja AB um segmento dado. Trace um ângulo $ABM = 90^\circ$ e o ângulo $ABN = 120^\circ$. A seguir trace ACD de maneira que sua intersecção com BM seja C , com BN seja D e $CD = AB$. Então $(AC)^3 = 2(AB)^3$. Essa construção, em essência, foi dada em publicações de Viète (1646) e Newton (1728).

(b) Seja AOB um ângulo central qualquer de uma dada circunferência. Por B trace uma reta BCD de maneira que sua outra intersecção com a circunferência seja C , com o prolongamento de AO seja D e $CD = OA =$ raio da circunferência. Então ângulo $ADB = 1/3$ ângulo AOB . Essa solução do problema da trissecção é consequência de um teorema de Arquimedes (c. 240 a.C.).

4.7 A conchoide de Nicomedes

Pouco se sabe sobre Nicomedes (c. 240 a.C.) além de sua invenção da *conchoide*, uma curva com a qual pode-se resolver tanto o problema da trissecção como o da duplicação. Pode-se definir uma conchoide geral assim: Seja c uma curva dada e O um ponto fixo. Sobre o raio vetor OP de O a um ponto P de c marque $PQ = \pm k$, em que k é uma constante. Então o lugar dos pontos Q chama-se *conchoide de c para o polo O e a constante k* . A curva completa consiste em dois ramos, um correspondente a $PQ = +k$ e o outro a $PQ = -k$. Se c é uma reta e O um ponto fora de c , obtém-se uma *conchoide de Nicomedes*.

(a) Tomando O como origem e a reta por O paralela à reta dada c como eixo x , mostre que a equação cartesiana da conchoide de Nicomedes para a constante k é $(y - a)^2(x^2 + y^2) = k^2y^2$, em que a é a distância de O a c .

(b) Mostre como a conchoide de Nicomedes pode ser usada para resolver o problema da duplicação.

(c) Uma conchoide de uma circunferência para um dado ponto fixo da circunferência chama-se *limaçon de Pascal* (assim chamada, impropriamente, em alusão a Étienne Pascal (1588-1640), pai do famoso Blaise Pascal, embora a curva já tivesse sido dada por Albrecht Dürer (1471-1528) no século XVI). Para $k = a =$ raio do círculo dado

obtém-se uma limaçon particular conhecida como *trissectriz*. Estabeleça a seguinte construção para efetuar a trisseção de um ângulo com a trissectriz. Seja AOB um ângulo central qualquer de uma circunferência de centro O e raio OA . Trace a trissectriz da circunferência para o polo A e suponha que o prolongamento de BO corte a trissectriz em C . Então, $\text{ângulo } ACB = 1/3 \text{ ângulo } AOB$.

(d) Mostre que os dois ramos da conchoide da curva c para o polo O e a constante k constituem a cissoide de s e c para o polo O , em que s é a circunferência de centro O e raio k (ver Exercício 4.4).

4.8 Trisseção por cônicas

Facilmente se efetua a trisseção de um ângulo com o auxílio de cônicas. Justifique as construções seguintes, baseadas nesse artifício.

(a) Seja AOB o ângulo dado. Trace o ramo da hipérbole equilátera de centro O , assíntota OA e intersecção P com OB . Trace a circunferência de centro P e raio $2(PO)$ e seja R sua intersecção com a hipérbole. Por P trace a paralela e por R a perpendicular a OA e indique por M a intersecção das duas. Então $\text{ângulo } AOM = 1/3 \text{ ângulo } AOB$.

(b) Tome AOB como ângulo central de uma circunferência e seja OC a bissetriz desse ângulo. Trace o ramo da hipérbole de excentricidade 2 tendo A como foco, OC como diretriz correspondente e suponha que esse ramo corte o arco AB em P . Então $\text{ângulo } AOP = 1/3 \text{ ângulo } AOB$. Essa construção foi citada por Pappus (c. 300 d.C.).

(c) Pode-se efetuar uma trisseção inteligente de um ângulo arbitrário usando não uma secção cônica, mas um cone circular reto. Considere um desses cones (feito de madeira, por exemplo) em que a geratriz é três vezes o raio da base. Sobre a circunferência da base marque um arco AB de um ângulo central AOB igual ao ângulo que se deseja trisseccionar. A seguir enrole o cone numa folha de papel e marque as posições dos pontos A e B e do vértice V do cone. Mostre que quando se aplaina a folha, o ângulo AVB é um terço do ângulo AOB . Esse procedimento singular foi descrito por Aubry em 1896¹².

4.9 Construções euclidianas assintóticas

Uma construção que utiliza os instrumentos euclidianos mas requer um número infinito de operações é chamada *construção euclidiana assintótica*. Justifique as duas construções seguintes (desse tipo) para resolver os problemas da trisseção e da quadratura¹³.

¹² Para abordagens mecânicas mais recentes ver Johnny W. Lott e Iris Mack Dayoub, "What can be done with a mira?", *The Mathematics Teacher*, mai., 1977, pp. 394-9.

¹³ Para soluções euclidianas assintóticas do problema da duplicação, ver T. L. Heath, *History of Greek Mathematics*, vol. 1, pp. 268-70.

(a) Seja OT_1 a bissetriz do ângulo AOB , OT_2 a do ângulo AOT_1 , OT_3 a do ângulo T_2OT_1 , OT_4 a do ângulo T_3OT_2 , OT_5 a do ângulo T_4OT_3 e assim por diante. Então $\lim_{i \rightarrow \infty} OT_i = OT$, uma das trissetrizes de AOB . (Esta construção foi dada por Fialkowski em 1860).

(b) Sobre o prolongamento de AB_1 marque $B_1B_2 = AB_1$, $B_2B_3 = 2(B_1B_2)$, $B_3B_4 = 2(B_2B_3)$ e assim por diante. Com B_1, B_2, B_3, \dots como centros trace as circunferências $B_1(A), B_2(A), B_3(A), \dots$. Seja M_1 o ponto médio da semicircunferência sobre AB_2 . Sejam, ainda, M_2, M_3, \dots , respectivamente, as intersecções de B_2M_1 com $B_2(A), B_3M_2$ com $B_3(A), \dots$. Indique por N_i a projeção de M_i sobre a tangente comum às circunferências em A . Então $\lim_{i \rightarrow \infty} AN_i =$ quadrante da circunferência $B_1(A)$.

4.10 A quadratriz

Hípias (c. 425 a.C.) inventou uma curva transcendente, chamada *quadratriz*, por meio da qual pode-se multisseccionar ângulos e quadrar círculos. A quadratriz pode ser definida como se segue: Suponha que o raio OX de um círculo gire uniformemente em torno do centro O de OC a OA , sendo COA um ângulo reto. Ao mesmo tempo um segmento de reta MN , paralelo a OA , move-se uniforme e paralelamente a si mesmo, de CB a OA . O lugar das intersecções P de OX e MN é a quadratriz.

(a) Tomando $OA = 1$ e o semieixo x positivo ao longo de OA , mostre que a equação cartesiana da quadratriz é $y = x \operatorname{tg}(\pi y/2)$.

(b) Mostre como se pode multisseccionar um ângulo com a quadratriz.

(c) Determine a intersecção da quadratriz com o eixo x e mostre como a curva pode ser usada para a quadratura de um círculo.

4.11 Retificação aproximada

Já foram dadas muitas construções aproximadas para achar um segmento de reta de comprimento igual à circunferência de um dado círculo. Obtém-se então, facilmente, uma quadratura aproximada do círculo construindo-se o quadrado sobre a média proporcional entre o raio do círculo e um segmento de comprimento igual à semicircunferência do círculo.

(a) Mostre que o triplo do diâmetro de um círculo acrescido de um quinto do lado do quadrado inscrito fornece uma aproximação da circunferência do círculo. A que aproximação de π leva isso?

(b) Seja AOB o diâmetro de um círculo dado. Determine na tangente em B um ponto C tal que ângulo $COB = 30^\circ$. Marque CBD na tangente igual ao triplo do raio do círculo. Então $2(AD)$ é aproximadamente a circunferência do círculo. A que aproximação de π leva esse procedimento? Essa construção foi dada em 1685 pelo jesuíta polonês Kochanski.

(c) Seja $AB = 1$ o diâmetro de um círculo dado. Trace $BC = 7/8$, perpendicular a AB em B . No prolongamento de AB marque $AD = AC$. Trace $DE = 1/2$, perpendicular a AD em D e seja F o pé da perpendicular por D a AE . Seja G a intersecção da paralela a FB por E com BD . Então GB é aproximadamente a parte decimal de π . Determine o comprimento de GB com sete casas decimais. Essa construção foi dada em 1849 por Gelder.

4.12 As lunas de Hipócrates

Hipócrates de Quio (c. 440 a.C.) quadrou certas lunas, talvez na expectativa de que suas investigações pudessem derramar alguma luz sobre o problema da quadratura. A seguir se dão duas das quadraturas de lunas de Hipócrates¹⁴.

(a) Seja AOB um quadrante de um círculo. Tomando AB como diâmetro, trace o semicírculo voltado para fora do quadrante. Mostre que a luna limitada pelo quadrante e pelo semicírculo tem área igual à do triângulo AOB .

(b) Seja $ABCD$ um semi-hexágono regular inscrito num círculo de diâmetro AD . Construa uma luna descrevendo, exteriormente ao círculo, um semicírculo de diâmetro AB . Mostre que a área do trapézio $ABCD$ é a soma do triplo da área da luna com a área do semicírculo de diâmetro AB .

4.13 Cálculo de π

(a) Prove que

$$\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{5} \right) - \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{239} \right).$$

Essa é a fórmula utilizada por Machin em 1706 para calcular π com 100 casas decimais.

(b) Estabeleça a fórmula de Viète da Seção 4-8, com a data de 1579.

(c) Mostre que

$$\frac{\pi}{6} = \sqrt{1/3} \{ 1 - 1/(3) (3) + 1/(3^2) (5) - 1/(3^3) (7) + \dots \}.$$

(d) Uma aproximação comum da raiz quadrada na Idade Média era

¹⁴ Para um relato de desenvolvimentos modernos que propiciam uma análise das lunas quadráveis, ver Tobias Dantzig, *The Bequest of the Greeks*, cap. 10.

$$\sqrt{n} = \sqrt{a^2 + b} = a + b/(2a + 1).$$

Fazendo $n = 10 = 3^2 + 1$, mostre por quê, talvez, $\sqrt{10}$ fosse usado tão frequentemente como valor de π .

(e) Mostre que o teorema no Projeto de Lei nº 246 da Assembleia Legislativa de Indiana, ano de 1897 (ver Seção 4-8), parte da hipótese incorreta de que um quadrado e um círculo com perímetros iguais têm mesma área. Essa hipótese leva a que valor de π ?

(f) Se s_k denota o lado de um polígono regular de k lados, inscrito num círculo de raio R , mostre que

$$S_{2n} = \{2R^2 - R(4R^2 - s_n^2)^{1/2}\}^{1/2}.$$

(g) Se S_k denota o lado de um polígono regular circunscrito a um círculo de raio r , mostre que

$$S_{2n} = \frac{2rS_n}{2r + (4r^2 + S_n^2)^{1/2}}.$$

(h) Se p_k e P_k denotam, respectivamente, os perímetros dos polígonos regulares de k lados inscrito e circunscrito ao mesmo círculo, mostre que

$$P_{2n} = \frac{2p_n P_n}{p_n + P_n}, \quad p_{2n} = (p_n P_{2n})^{1/2}.$$

(Foi com essas fórmulas que Arquimedes, na sua *A medida de um círculo*, começando com p_6 e P_6 , calculou sucessivamente $p_{12}, P_{12}, p_{24}, P_{24}, p_{48}, P_{48}, p_{96}, P_{96}$.)

(i) Se a_k e A_k denotam, respectivamente, as áreas dos polígonos regulares de k lados, inscrito e circunscrito no mesmo círculo, mostre que

$$a_{2n} = (a_n A_n)^{1/2}, \quad A_{2n} = \frac{2a_{2n} A_n}{a_{2n} + A_n}.$$

4.14 O refinamento de Snell

Seja AOP um ângulo central agudo num círculo de raio unitário (ver Figura 37). Prolongue o diâmetro AOB até o ponto S de modo que $BS = AO$. Trace SP e indique por T sua intersecção com a tangente ao círculo em A . Snell percebeu que se o ângulo AOP

é suficientemente pequeno, o segmento de tangente AT tem comprimento aproximadamente igual ao do arco AP .

- (a) Determine o erro da aproximação de Snell quando o ângulo $AOP = 90^\circ$.
 (b) Designando por θ o ângulo AOP e por ϕ o ângulo AST , mostre que

$$AT = \frac{3 \operatorname{sen} \theta}{2 + \cos \theta} = 3 \operatorname{tg} \phi$$

- (c) Mostre que $\phi < \theta/3$, donde

$$\frac{\operatorname{sen} \theta}{2 + \cos \theta} < \operatorname{tg} \left(\frac{\theta}{3} \right).$$

(d) Mostre como se pode usar a aproximação de Snell para multisseccionar ângulos aproximadamente.

(e) Mostre como se pode usar a aproximação de Snell para dividir uma circunferência aproximadamente em n partes iguais.

(f) Mostre como se pode usar a aproximação de Snell para quadrar aproximadamente um círculo.

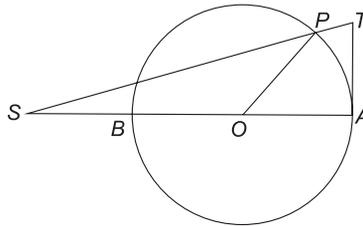


Figura 37

4.15 Mnemônicas para π

- (a) Até que ponto é boa a mnemônica inglesa seguinte para π ?

*Sir, I bear a rhyme excelling
 In mystic force and magic spelling
 Celestial sprites elucidate
 All my own striving can't relate.*

(b) Mostre que a seguinte mnemônica francesa fornece π corretamente até a vigésima sexta casa decimal:

*Que j'aime à faire apprendre
Un nombre utile aux sages
Immortel Archimède artiste ingénieur
Qui de ton jugement peut priser la valeur
Pour moi ton problème
A les pareils avantages!*

(c) Quão boa para memorizar a expansão decimal de π é a bela mnemônica espanhola seguinte?

Sol y Luna y Mundo proclaman al Eterne Autor del Cosmos.

(d) De todas as mnemônicas dadas no texto, a mais bem sucedida [Cronologia de π (1906)] fornece corretamente 30 casas decimais. Ninguém jamais foi capaz de compor uma sentença mnemônica dessa espécie fornecendo π corretamente até mais de 31 casas decimais. Por quê?

(e) O número π pode ser aproximado por números racionais. Por exemplo

$$\begin{aligned} 22/7 &= 3,14 \mid 28, \\ 355/113 &= 3,141592 \mid 92, \\ 104\,348/33\,215 &= 3,141592653 \mid 92\,142, \\ 833\,719/265\,381 &= 3,14159265358 \mid 108, \end{aligned}$$

que, por sua vez, fornecem π corretamente até duas (2), seis (6), nove (9) e onze (11) casas decimais. Mostre que as seguintes mnemônicas podem ser usadas para memorizar as duas últimas frações:

calculator will get fair accuracy,
but not to π exact*

*dividing top lot through (a nightmare)**.
by number below, you approach π*

Já se demonstrou que para denominadores de um dígito, dois dígitos, três dígitos, cinco dígitos e seis dígitos, as melhores aproximações racionais de π chegam correta-

* O calculador obterá uma precisão razoável/mas não π exatamente. (N. T.)

** Dividindo o grupo de cima do começo ao fim (um pesadelo)/pelo número de baixo, você terá uma aproximação de π . (N. T.)

mente até duas, três, seis, dez e onze casas decimais. E usando-se denominadores de quatro dígitos não se pode fazer nenhum melhoramento que supere seis casas decimais corretas.

Temas

- 4/1 A influência de Platão na matemática.
- 4/2 A influência de Aristóteles na matemática.
- 4/3 A importância dos problemas abertos em matemática.
- 4/4 Os passos iniciais na história das seções cônicas.
- 4/5 As construções euclidianas vistas como um jogo de paciência geométrico.
- 4/6 Compasso moderno versus compasso euclidiano.
- 4/7 O estudo das curvas planas superiores entre os gregos antigos.
- 4/8 Lunas quadráveis.
- 4/9 Números normais.
- 4/10 Mnemônicas em matemática elementar.
- 4/11 O conceito educacional platônico de “transferência de aprendizagem”.
- 4/12 Pseudomatemática.

Bibliografia

- ALLMAN, G. J. *Greek Geometry from Thales to Euclid*. Dublin, University Press, 1889.
- BALL, W. W. R. e COXETER, H. S. M. *Mathematical Recreations and Essays*. 11ª ed. Nova York, Macmillan, 1939.
- BECKMANN, Petr. *A History of Pi*. Boulder, Golem, 1970.
- BOROFSKY, Samuel. *Elementary Theory of Equations*. Nova York, Macmillan, 1950.
- BRUMBAUGH, R. S. *Plato's Mathematical Imagination; The Mathematical Passages in the Dialogues; and their Interpretation*. Bloomington (Ind.), Indiana University Press, 1954.
- BUNT, L. N. H.; JONES, P. S. e BEDIANT, J. D. *The Historical Roots of Elementary Mathematics*. Englewood Cliffs (N.J.), Prentice Hall, 1976.
- COOLIDGE, J. L. *The Mathematics of Great Amateurs*. Nova York, Oxford University Press, 1949.
- COURANT, Richard e ROBBINS, Herbert. *What is Mathematics?* Nova York, Oxford University Press, 1941.
- DANTZIG, Tobias. *The Bequest of the Greeks*. Nova York, Charles Scribner's, 1955.
- DE MORGAN, Augustus e SMITH, D. E. (ed.). *A Budget of Paradoxes*. 2ª ed. Chicago, Open Court, 1915, 2 vols.

- DICKSON, L. E. *New First Course in the Theory of Equations*. Nova York, John Willey, 1939.
- DUDLEY, Underwood. *A Budget of Trisections*. Nova York, Springer-Verlag, 1987.
- EVES, Howard. *A Survey of Geometry*. Boston, Allyn and Bacon, 1963 e 1965, 2 vols. Vol. I revisto em 1972.
- . *Foundations and Fundamental Concepts of Mathematics*. 3ª ed. Boston, PWS-KENT Publishing Company, 1990.
- FOWLER, D. H. *The Mathematics of Plato's Academy. A New Reconstruction*. Oxford, Clarendon Press, 1987.
- GOW, James. *A Short History of Greek Mathematics*. Nova York, Hafner, 1923.
- HEATH, T. L. *History of Greek Mathematics*, vol. 1. Nova York, Oxford University Press, 1921. Reimpresso por Dover, Nova York, 1981.
- . *A Manual of Greek Mathematics*. Nova York, Oxford University Press, 1931. Reimpresso por Dover, Nova York, 1963.
- . *Mathematics in Aristotle*. Nova York, Oxford University Press, 1949.
- HOBSON, E. W. *Squaring the Circle: a History of the Problem*. Nova York, Chelsea, 1953.
- KNORR, Wilbur. *The Ancient Tradition of Geometric Problems*. Nova York, Springer-Verlag, 1986.
- LEE, H. D. P. (ed.) *Zeno of Elea*. Nova York, Cambridge University Press, 1935.
- LOVITT, W. V. *Elementary Theory of Equations*. Englewood Cliffs (N. J.), Prentice-Hall, 1939.
- PHIN, John. *The Seven Follies of Science*. 3ª ed. Princeton (N. J.), D. Van Nostrand, 1911.
- THOMAS, Ivor. (ed.) *Selections Illustrating the History of Greek Mathematics*. Cambridge (Mass.), Harvard University Press, 1939 e 1941, 2 vols.
- VANDER WAERDEN, B. L. *Science Awakening*. Trad. para o inglês por Arnold Dresden. Nova York, Oxford University Press, 1961. Paperback edition, Nova York, John Wiley, 1963.
- WEDBERG, Anders. *Plato's Philosophy of Mathematics*. Estocolmo, Almqvist & Wiksell, 1955.
- WISNER, Louis. *Introduction to the Theory of Equations*. Nova York, Macmillan, 1938.
- YATES, R. C. *The Trisection Problem*. Ann Arbor (Mich.), Edward Brothers, 1947. Reimpresso pelo National Council of Teachers of Mathematics, Washington, D. C., 1974.

Panorama Cultural IV

O oikoumene

O Império Persa — 550-330 a.C.;
A Grécia Helenística — 336-31 a.C.;
O Império Romano — 31 a.C.-476 d.C.
(para acompanhar os Capítulos 5 e 6)

Em algum momento durante a segunda metade do século III a.C. o matemático, cientista, geógrafo e curador da biblioteca de Alexandria, Eratóstenes (276-196? a.C.), decidiu fazer um novo mapa do mundo (ver Seção 6-3 para uma reprodução do mapa). Já fazia mais de dois séculos que o historiador grego Heródoto havia desenhado o seu mapa do mundo e nesse meio tempo se haviam descoberto muitos lugares novos. Eratóstenes sabia que o explorador Pítias havia feito duas viagens pelo Oceano Atlântico por volta de 300 a.C., visitando as ilhas Britânicas, a Escandinávia, a Alemanha e até uma terra frígida e misteriosa onde o sol nunca se punha. Pítias acreditava que essa localidade gelada era a borda do mundo e chamou-a de *Ultima Thule*; pode ser que fosse a Islândia. Hanon, um rei de Cartago, havia navegado rumo ao sul ao longo da costa ocidental da África por volta de 470 a.C. e Eratóstenes contava com registros do que ele vira. O bibliotecário tinha também relatos da excursão de Pátroclo ao mar Cáspio. Diariamente chegavam viajantes e mercadores ao fervilhante mercado de Alexandria trazendo relatos sobre terras distantes. Certamente era tempo de um novo mapa.

Resolutamente Eratóstenes abriu um rolo de papiro virgem e começou o esboço. No centro ele colocou Alexandria, a maior cidade do mundo, com 500 mil habitantes. Esparramada por sobre um entroncamento de várias rotas comerciais importantes, a cidade era o centro mercantil e cultural daquilo que Eratóstenes e outros que falavam o grego chamavam de o *oikoumene* ou “mundo habitado” — Grécia, Egito e Oriente Médio. O fundo porto de Alexandria estava repleto de navios vindos de lugares distantes, guiados até ele com segurança pelo seu grande farol, *Pharos*, uma das sete maravilhas do mundo antigo. Os mercadores alexandrinos iam por terra a lugares muito distantes e no mercado da cidade podiam-se comprar especiarias da Índia e da Arábia, madeira e marfim da África, tecidos de Tiro, olivas e vinho da Grécia e sal e escravos de Roma. O palácio do rei, Ptolomeu IV Filopátor (reinou de 222 a 205 a.C.), ocupava um lugar de realce na cidade; perto dele ficava a Universidade com sua maravilhosa biblioteca que tinha 600 mil rolos de papiro.

Obviamente Eratóstenes conhecia bem a história da fundação de Alexandria. Um século antes, em 338 a.C., quando as cidades-Estado da Grécia se encontravam exauridas em virtude de quase 100 anos de lutas fratricidas, Filipe II (382-336 a.C.) da Macedônia uniu a Grécia sob o seu comando. Quando, pouco depois, Filipe morreu, o novo império foi reivindicado por seu filho, Alexandre, o Grande (356-323 a.C.); dois anos mais tarde, em 334 a.C., Alexandre conduziu suas tropas numa ousada invasão do Império Persa, na ocasião a maior e mais poderosa nação do mundo. Dois séculos antes de Alexandre, em 550 a.C., o primeiro rei da Pérsia, Ciro, o Grande (morto em 529 a.C.), havia conquistado a Babilônia e, 25 anos depois, seu segundo rei, Cambises (morto em 522 a.C.), havia anexado o Egito, criando-se assim o primeiro império verdadeiramente policultural sobre a face da terra. Em 330 a.C., depois de seis anos de campanha, os macedônios de Alexandre capturaram a capital da Pérsia, Persépolis, e o velho império caiu. Dois anos antes do sítio de Persépolis, quando estava ainda no Egito, Alexandre fundara Alexandria como sua capital ocidental.

No seu mapa, em torno de Alexandria Eratóstenes desenhou os três impérios e os vários Estados menores que haviam emergido no *oikoumene* após a queda da Pérsia. Alexandre havia encetado a unificação da Pérsia e da Grécia num único império cosmopolita. Fundou colônias gregas em terras persas, criou uma aristocracia grega no Oriente Médio e no Egito e integrou os soldados persas às forças macedônias. Grécia, Egito e Oriente Médio reunidos tornaram-se o *oikoumene*, considerado pelos gregos como o mundo civilizado. Os esforços de unificação malograram em 323 a.C. quando Alexandre morreu prematuramente aos 23 anos de idade e seu império se dividiu entre seus generais.

O Egito, com Alexandria como capital, foi um dos três principais estados a emergir no *oikoumene* após a morte de Alexandre. Seu território se estendia para o sul a partir do mar Mediterrâneo e ao longo das margens do rio Nilo, passando pelas antigas cidades egípcias de Mênfis e Tebas, por Siena, e mesmo pela cidade de Meroe, perto da atual Cartum, na junção do Nilo Branco com o Nilo Azul. Em 323 a.C. o poder no Egito passou para as mãos de Ptolomeu I Soter (367?-283 a.C.), iniciando-se assim a dinastia ptolomaica grega. Ptolomeu I transformou Alexandria numa cidade comercial cosmopolita dominada por uma aristocracia grega.

A leste do Egito ficava o reino selêucida, a parte remanescente maior do império de Alexandre. O reino selêucida esparramava-se a leste de sua capital, a alabastrina Antióquia, situada junto ao mar Mediterrâneo, e compreendia a Palestina, a Síria, o Iraque e o Irã atuais. Tal como o Egito, o império selêucida era governado por uma classe grega favorecida e ostentava mais de 60 cidades gregas — colônias fundadas pelo governo. A terceira potência em importância do *oikoumene* era a própria Macedônia que incluía a maior parte das antigas cidades-Estado gregas.

Além do *oikoumene* havia terras habitadas por povos que os gregos consideravam bárbaros. A leste ficava a exótica e misteriosa Índia, onde Alexandre, o Grande, havia travado suas últimas batalhas. A oeste, na Itália e no norte da África, duas cidades-Estado não gregas, Roma e Cartago, construía impérios florescentes, embora ambas

ainda fossem repúblicas. No sul da Itália umas poucas colônias gregas antigas, notadamente Siracusa, ainda eram independentes, embora destinadas a serem absorvidas por Roma. Além desses lugares viviam caçadores selvagens ou agricultores ignorantes recém-saídos da Idade da Pedra. Mais distante ainda estava a civilizada China; os mercadores do *oikoumene* mantinham com a China um tênue filete de comércio, mas a China não figurou no mapa de Eratóstenes.

O *oikoumene* foi dominado, política e culturalmente, pelos gregos e os historiadores lhe deram o nome de mundo helenístico (semelhante ao grego) e o período de tempo que vai da época de Alexandre à conquista de Alexandria pelos romanos (336-31 a.C.) costuma ser chamado de *Era Helenística*. Os gregos que vieram a habitar as novas cidades, como Alexandria e Antióquia, sobrepujaram um verniz de cultura grega às civilizações do Oriente Médio já existentes nesses locais. Construíram cidades e mercados, academias e universidades, museus e bibliotecas. Situados no centro de grandes impérios políticos e econômicos, os intelectuais gregos tinham agora acesso a informações sobre novos povos, lugares e coisas numa escala sem precedentes, o que propiciou, entre outras coisas, a criação de uma nova ciência, a geografia, por parte de nosso amigo Eratóstenes. A ciência babilônica e egípcia foi assimilada pelo saber grego, num processo de revigoramento mútuo.

Ao início da Era Helenística a ciência grega aflorou como matéria independente; não mais era considerada meramente uma parte da filosofia. Embora os intelectuais atenienses continuassem a se concentrar em filosofia, história e literatura, os pensadores de Alexandria enfatizavam a ciência e a matemática. O governo egípcio encorajava-os em suas pesquisas. O rei Ptolomeu II Filadelfo (308?-246? a.C.) não poupou gastos com a Universidade — construiu um museu, um zoológico e um impressionante conjunto de edificações acadêmicas. Ademais, os reis concediam privacidade e liberdade acadêmica aos intelectuais, além de não interferirem em seus estudos.

A ciência grega alcançou seu pináculo em Alexandria nos 150 anos iniciais da Era Helenística, entre 300 e 150 a.C. Depois disso teve início um longo e lento declínio, acentuado em 46 a.C. com o incêndio de grande parte da Universidade, em Alexandria, incluindo a biblioteca, e encerrado em 529 d.C. com o fechamento das portas da Academia de Atenas. Uma combinação de causas tecnológicas, políticas, econômicas e de fatores sociais levou a esse declínio.

Fatores Tecnológicos. A astronomia, a biologia e a geografia haviam atingido um ponto em que não mais poderiam progredir sem telescópios, microscópios e relógios. Era preciso testar teorias e hipóteses e o equipamento necessário para isso ainda não havia sido inventado.

Fatores Políticos. Em 149 a.C., Roma, uma potência emergente e agressiva da região do mar Mediterrâneo, completou a conquista de Cartago e voltou sua atenção para o *oikoumene*. Os romanos anexaram a Macedônia em 148 a.C., a rica Pérgamo 15 anos mais tarde e a poderosa Ponto em 66 a.C. Depois de tomar posse dos territórios conquistados, a vida social e política em Roma começou a decair, verificando-se como consequência uma série de guerras civis. Um dos conflitos mais devastadores foi travado

entre Júlio César (102?-44 a.C.) e Pompeu (106-48 a.C.), culminando com a derrota deste último. Pompeu fugiu para o Egito mas César seguiu no seu encalço — em vão, pois encontrou seu inimigo morto e ainda foi detido em Alexandria pela armada de Ptolomeu XIII (falecido em 44 a.C.). O sagaz romano livrou-se ateando fogo nos navios egípcios, mas o incêndio, impelido pelo vento, alastrou-se pela cidade. Boa parte da cidade foi devorada pelas chamas, inclusive, para tristeza de César, a grande biblioteca. Depois de gerar um filho em Cleópatra (69-30 a.C.), rainha do Egito, César logrou escapar, mas dois anos depois, em 44 a.C., foi assassinado em Roma por inimigos. Seguiu-se outra guerra civil, vencida finalmente por Augusto (63 a.C.-14 d.C.), sobrinho de César, em 31 a.C. Após a guerra Augusto converteu-se em ditador, destruiu as instituições republicanas remanescentes e anexou o Egito como punição por haver acolhido um de seus rivais. Roma continuou a governar a maior parte do *oikoumene* até a queda do império perante os invasores bárbaros em 476 d.C.

Ao contrário dos reis egípcios, os imperadores romanos, a maioria deles soldados profissionais, recusavam-se a usar o tesouro público para financiar pesquisas científicas. O Império Romano (31 a.C.-476 d.C.) era em essência uma ditadura militar e, como a grande maioria dos regimes militares, não via com bons olhos uma cultura independente. (Ver a descrição de Esparta no Panorama Cultural III.) O Império Romano não foi totalmente estéril do ponto de vista intelectual; produziu boa história e uma literatura fina, por exemplo, mas se revelou um meio infecundo para a ciência.

Fatores Econômicos. Os romanos empregaram o trabalho escravo num grau quase que sem precedentes, especialmente depois da fundação do Império por Augusto em 31 a.C. Mais da metade dos habitantes do Império eram escravos. Utilizando-se de escravos para fazer a maior parte do trabalho pesado, não se atinava com a necessidade de mecanismos para poupar trabalho, como as polias e as alavancas inventadas por Arquimedes de Siracusa (287-212 a.C.); daí porque a falta de incentivo aos cientistas para inventar essas coisas.

Fatores Sociais. A despeito de seu êxito inicial, a ciência interessou bem menos aos intelectuais helenísticos e romanos do que a filosofia, a literatura e a religião. A Era Helenística assistiu ao desenvolvimento do estoicismo e do epicurismo, duas correntes filosóficas, e o Império Romano testemunhou a ascensão do cristianismo (assim como a de várias religiões e cultos de menor importância, entre os quais o mitraísmo, que não sobreviveu) e sua consolidação como religião do Estado por iniciativa do imperador Constantino I (288?-337 d.C.) em 325 d.C. Não raro os líderes religiosos se opunham às investigações científicas, em especial quando os modelos científicos pareciam desafiar os dogmas religiosos. Embora os próprios cristãos tenham sido vítimas de repressão brutal antes de 325 d.C., uma minoria de extremistas da comunidade cristã tinha dificuldades em tolerar os cientistas. A última cientista de Alexandria, Hipátia, foi assassinada selvagememente por fanáticos cristãos em 415 d.C. e, em 529 d.C., líderes cristãos da Grécia persuadiram o imperador bizantino, Justiniano I (483-565), a fechar a Academia de Atenas, por supostas atividades heréticas.

RESUMO

Entre 550 a.C. e 476 d.C. o mundo ocidental foi dominado por uma série de grandes impérios. O Império Persa se manteve até ser conquistado por Alexandre, o Grande, em 330 a.C.; entre 323 a.C. e 31 a.C. o controle foi dividido entre três grandes impérios gregos: o Egito ptolomaico, o reino selêucida e a Macedônia; e de 31 a.C. a 476 d.C. o domínio foi do Império Romano. A expansão grega pela Ásia e pela África após a queda da Pérsia levou consigo a cultura e a ciência gregas a novas partes do mundo. Em Alexandria, Egito, os reis gregos construíram e proveram financeiramente uma grande universidade e a cultura floresceu por cerca de 150 anos, entre 300 a.C. e 150 a.C. Depois desse período a busca científica começou a diminuir em virtude de vários fatores: carência de equipamentos, diminuição do apoio governamental após a conquista do Egito por Roma em 31 a.C., uso crescente da mão de obra escrava, um interesse paralelo pela filosofia e a religião e oposição da parte de certos líderes religiosos. Por volta de 529 d.C., a última escola grega, a Academia de Atenas, teve suas portas cerradas e a grande aventura da ciência grega chegava ao fim. Quase um milênio decorreria ainda até que a ciência no mundo ocidental voltasse a florescer.

Euclides e seus elementos

5.1 Alexandria¹

O período que se seguiu à Guerra do Peloponeso foi marcado pela desunião política entre os Estados gregos; assim, tornaram-se presa fácil do então forte reino da Macedônia, situado ao norte. O clamor das admoestações de Demóstenes foi ignorado e o rei Filipe da Macedônia foi gradualmente estendendo seu poder para o sul. Os gregos reagruparam-se muito tarde para tentar, com possibilidades de êxito, defender-se e, com a derrota de Atenas em Queroneia (338 a.C.), a Grécia tornou-se parte do império macedônio.

Dois anos após a queda dos Estados gregos, Filipe foi sucedido por seu filho, o ambicioso Alexandre, o Grande, que em seguida deu início a uma carreira de conquistas sem paralelo, na qual iria anexar aos já crescentes domínios macedônicos extensas áreas do mundo civilizado da época. Na trilha de suas tropas vitoriosas, Alexandre foi fundando um cordão de novas cidades, sempre em locais bem escolhidos. Foi assim que se deu a fundação de Alexandria, no Egito, em 332 a.C.

Consta que o próprio Alexandre escolheu o local, esboçou o plano geral e comandou o processo de colonização da cidade, mas sua construção propriamente dita ficou a cargo do eminente arquiteto Dinócrates. Desde o início, Alexandria mostrou que estava fadada a um destino promissor. Num espaço de tempo incrivelmente curto, devido em grande parte à sua localização privilegiada, num entroncamento de importantes rotas comerciais, enriqueceu e se tornou o centro mais suntuoso e cosmopolita do mundo. Por volta de 300 a.C. tinha já 500 mil habitantes.

Depois da morte de Alexandre, em 323 a.C., seu império se dividiu entre alguns de seus líderes militares, resultando na emergência de três impérios, com governos independentes, mas unidos pelos laços da civilização helênica decorrente das conquistas de Alexandre. O Egito coube a Ptolomeu que, no entanto, somente em 306 a.C. começou a governar efetivamente. Escolheu Alexandria como sua capital e, para atrair homens de saber à sua cidade, imediatamente começou a construir a famosa Universidade de Alexandria. Trata-se da primeira instituição do gênero e sua organização e objetivos logo vieram a se assemelhar aos das universidades atuais. Supostamente era muito bem pro-

¹ Ver R. E. Langer, "Alexandria - shrine of mathematics", *The American Mathematical Monthly*, nº 48, fev., 1941, pp. 109-25.

vida de recursos e seu projeto agradável e bem elaborado continha salas de aula, laboratórios, jardins, bibliotecas bem aparelhadas e habitações. O fulcro da instituição era a grande biblioteca, que por muito tempo foi o maior repositório de registros culturais de todo o mundo e que dentro de 40 anos após sua fundação ostentava mais de 600 mil rolos de papiro. Por volta de 300 a.C. a universidade abriu suas portas e daí para frente, por quase um milênio, Alexandria se tornou a metrópole intelectual da raça grega.

Para montar uma equipe de intelectuais de alto gabarito na universidade, Ptolomeu recorreu a Atenas, convidando o ilustre Demétrio Faleiros para dirigir a grande biblioteca. Homens de talento e capacidade foram escolhidos para desenvolver os vários campos de estudo. Euclides, possivelmente também oriundo de Atenas, foi escolhido para chefiar o departamento de matemática.

5.2 *Euclides*

É desapontador mas muito pouco se sabe sobre a vida e a personalidade de Euclides, salvo que foi ele, segundo parece, o criador da famosa e duradoura escola de matemática de Alexandria da qual, sem dúvida, foi professor. Desconhecem-se também a data e o local de seu nascimento, mas é provável que sua formação matemática tenha se dado na escola platônica de Atenas. Muitos anos mais tarde, ao comparar Euclides com Apolônio, de maneira desfavorável a este último, Pappus elogiou Euclides por sua modéstia e consideração para com os outros. Proclo enriqueceu seu *Sumário Eudemiano* com a história frequentemente repetida da resposta de Euclides à indagação de Ptolomeu sobre se não haveria um caminho mais curto para o conhecimento geométrico: “Não há estradas reais na geometria”, teria dito o mestre. Mas conta-se a mesma história a respeito de Menaecmo, quando era professor de Alexandre. Há uma outra história, contada por Stobaeus, segundo a qual Euclides, indagado por um aluno sobre a utilidade prática da matéria que estava sendo vista, ordenou a seu escravo que desse a ele uma moeda “para que tivesse algum ganho com o que estava aprendendo”.

5.3 Os “*Elementos*” de *Euclides*

Embora Euclides fosse autor de pelo menos dez trabalhos (textos razoavelmente completos de cinco deles chegaram até nós), sua fama repousa principalmente sobre seus *Elementos*. Parece que esse trabalho notável imediata e completamente superou todos os *Elementos* precedentes; de fato, nenhum vestígio restou de esforços anteriores. Tão logo o trabalho apareceu, ganhou o mais alto respeito e, dos sucessores de Euclides até os tempos modernos, a mera citação do número de um livro e o de uma proposição de sua obra-prima é suficiente para identificar um teorema ou construção particular. Nenhum trabalho, exceto a Bíblia, foi tão largamente usado ou estudado e, provavelmente, nenhum exerceu influência maior no pensamento científico. Mais de mil edições

impressas dos *Elementos* já apareceram desde a primeira delas em 1482; por mais de dois milênios esse trabalho dominou o ensino de geometria.

É lamentável que não se tenha descoberto nenhuma cópia dos *Elementos* de Euclides que date verdadeiramente da época de seu autor. As edições modernas da obra se baseiam numa revisão preparada pelo comentador grego Têon de Alexandria que viveu quase 700 anos depois do tempo de Euclides. Essa revisão foi, até o começo do século XIX, a mais antiga edição dos *Elementos* que se conhecia. Porém, em 1808, quando Napoleão ordenou que fossem tomados de bibliotecas italianas e enviados a Paris os manuscritos de valor, F. Peyrard encontrou, na biblioteca do Vaticano, uma cópia do século X de uma edição da obra que é anterior à revisão de Têon. Um estudo dessa edição mais antiga e uma triagem cuidadosa de citações e notas feitas por comentadores antigos indicam que o material introdutório do tratado original de Euclides indubitavelmente sofreu alterações nas revisões que se seguiram, mas os teoremas e demonstrações, salvo acréscimos e supressões pequenas, permaneceram em essência como Euclides os escreveu.

A primeira tradução latina completa dos *Elementos* não foi feita do grego mas sim do árabe. No século VIII os árabes fizeram traduções de muitos manuscritos bizantinos de trabalhos gregos e em 1120 o erudito inglês Adelardo de Bath fez uma tradução latina dos *Elementos* a partir de uma dessas antigas versões árabes. Duas outras traduções latinas foram feitas a partir do árabe, uma de Gerardo de Cremona (1114-1187) e a outra, 150 anos depois da de Adelardo, de Johannes Campanus. A primeira edição impressa dos *Elementos* foi feita no ano de 1482 em Veneza e apresentava a tradução de Campanus. Esse livro raríssimo foi composto primorosamente, sendo a primeira obra de matemática importante a ser impressa. Uma tradução latina louvável, feita a partir do grego, é a de Commandino (1572). Essa tradução serviu de base para muitas outras subsequentes, inclusive para a influente edição de Robert Simson da qual, por sua vez, derivaram tantas outras edições inglesas. A primeira, e monumental, tradução inglesa dos *Elementos* foi feita por Billingsley e apareceu em 1570².

Não é nenhuma censura ao trabalho brilhante de Euclides o fato de que houve outros *Elementos* anteriores ao seu. De acordo com o *Sumário Eudemiano*, a primeira tentativa nesse sentido foi feita por Hipócrates de Quios e a seguinte por Lêon, cuja época situa-se aproximadamente entre a de Platão e a de Eudoxo. Há informações de que o trabalho de Lêon continha uma seleção maior e mais cuidadosa de proposições do que a de Hipócrates e que essas proposições eram, inclusive, mais proveitosas. A Academia de Platão tinha também seus *Elementos* — uma coleção admirável e muito elogiada escrita por Teúdio de Magnésia. Ao que parece a geometria de Teúdio foi a precursora imediata do trabalho de Euclides, que sem dúvida nenhuma teve acesso a ela, especialmente se de fato estudou na Escola de Platão. Euclides também estava a par dos trabalhos importantes de Teeteto e Eudoxo. Assim, é provável que os *Elementos* de Euclides sejam, na sua maior parte, uma compilação altamente bem sucedida e um arranjo sistemático de trabalhos anteriores. Não há dúvida de que Euclides teve de dar muitas

² Ver R. C. Archibald, "The first translation of Euclid's *Elements* into English and its source", *The American Mathematical Monthly*, nº 57, ago.-set., 1950, pp. 443-52 e W. F. Shenton, "The first English Euclid", *The American Mathematical Monthly*, nº 35, dez., 1928, pp. 505-12.

demonstrações e aperfeiçoar outras tantas, mas o grande mérito de seu trabalho reside na seleção feliz de proposições e no seu arranjo numa sequência lógica, presumivelmente a partir de umas poucas suposições iniciais.

5.4 O conteúdo dos “*Elementos*”

Contrariamente à impressão muito difundida, os *Elementos* de Euclides não tratam apenas de geometria — contêm também bastante teoria dos números e álgebra elementar (geométrica). O livro se compõe de 465 proposições distribuídas em 13 livros. Os textos de geometria plana e espacial da escola secundária americana trazem basicamente o material que se encontra nos Livros I, III, IV, VI, XI e XII dos *Elementos*.

O Livro I começa com definições, postulados e axiomas preliminares necessários; falaremos sobre isso na Seção 5-7. As 48 proposições do Livro I se distribuem em três grupos. As primeiras 26 tratam principalmente das propriedades do triângulo e incluem os três teoremas de congruência. As proposições I 27 a I 32 estabelecem a teoria das paralelas e provam que a soma dos ângulos de um triângulo é igual a dois ângulos retos. As demais proposições do livro lidam com paralelogramos, triângulos e quadrados, com atenção especial a relações entre áreas. A proposição I 47 é o teorema de Pitágoras com uma demonstração atribuída universalmente ao próprio Euclides e a proposição final, I 48, é o recíproco do teorema de Pitágoras. O material desse livro foi desenvolvido pelos pitagóricos antigos.

É interessante fazer alguns comentários adicionais sobre algumas poucas proposições do Livro I. As primeiras três proposições são problemas de construção que mostram como, juntamente com uma régua, um compasso euclidiano pode transferir um segmento de reta de uma dada posição a uma outra posição desejada (ver Exercício 4.1). Segue-se que muitas vezes se pode encurtar uma construção considerando o compasso euclidiano como compasso moderno.

A proposição I 4 estabelece a congruência de dois triângulos quando dois lados e o ângulo formado por eles num dos triângulos forem iguais a dois lados e o ângulo formado por eles no outro. A demonstração se faz por superposição: colocando-se o ângulo dado de um dos triângulos sobre o ângulo dado do outro triângulo de maneira que os lados iguais também coincidam, prova-se que um dos triângulos pode ser aplicado no outro. Posteriormente os matemáticos levantaram objeções às demonstrações feitas por superposição (ver Seção 15-1).

A proposição I 5, que prova a igualdade dos ângulos da base de um triângulo isósceles, tem interesse pois há relatos de que muitos principiantes em geometria acharam-na tão confusa que resolveram abandonar o estudo da matéria nesse ponto. Essa proposição foi batizada de *pons asinorum* ou “ponte de tolos” devido à semelhança imaginária da figura da proposição com uma ponte de cavaletes simples, muito difícil de atravessar por um novinho. A demonstração de Euclides envolve a construção de alguns segmentos de reta preliminares e se encontra ilustrada na figura de nossa reprodução de uma página de *Euclid* de Isaac Barrow. Nessa figura os lados iguais AB e AC de um triângulo isósceles

dados BAC são prolongados igualmente até D e F , traçando-se então CD e BF . Segue-se então (pela proposição I 4) que os triângulos AFB e ADC são congruentes o que implica $BF = DC$ e ângulo $BDC =$ ângulo CFB . Daí que (novamente pela proposição I 4) os triângulos BDC e CFB são congruentes, garantindo isso a igualdade dos ângulos DBC e FCB e, então, dos ângulos ABC e ACB . Na verdade, essa demonstração poderia ser em boa parte encurtada, como observou mais tarde Pappus (c. 300 d.C.), aplicando-se diretamente a proposição I 4 aos triângulos ABC e ACB , em que AB no primeiro deles é igual a AC no outro, AC no primeiro é igual a AB no outro e o ângulo BAC no primeiro é igual a CAB no outro.

A proposição I 6 estabelece a recíproca da proposição I 5. Nesse caso sabe-se que no triângulo BAC se tem ângulo $ABC =$ ângulo ACB e se deseja provar que $BA = CA$. Euclides procede por *reductio ad absurdum*, admitindo que, por exemplo, $BA > CA$. Então pode-se tomar em BA um ponto M tal que $BM = CA$. Pela proposição I 4 os triângulos CBM e BCA são congruentes, o que é absurdo pois o primeiro deles é parte do segundo. Logo não se pode ter BA maior que CA . Analogamente não se pode ter CA maior que BA . Donde $BA = CA$. É nessa proposição dos *Elementos* que se usa pela primeira vez no texto o método de demonstração indireta ou de *reductio ad absurdum*. Posteriormente ele é empregado com frequência por Euclides.

As proposições I 9 a I 12 são problemas de construção: a primeira mostra como construir a bissetriz de um ângulo dado e a segunda como construir o ponto médio de um segmento de reta dado. Um dos propósitos desses problemas de construção é servir de provas de existência; por exemplo, a melhor maneira talvez de provar a existência da bissetriz de um ângulo é efetivamente construí-la.

A proposição I 47 é o teorema de Pitágoras. A figura de Euclides para essa proposição e um resumo de sua bela demonstração encontram-se no Exercício 5.3 (b).

O Livro II, relativamente pequeno com suas 14 proposições, lida com transformações de áreas e com a álgebra geométrica da escola pitagórica. É nele que se encontram os equivalentes geométricos de muitas identidades algébricas. Na Seção 3-6, por exemplo, mostramos como as proposições II 4, II 5 e II 6 estabelecem respectivamente as identidades

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2,$$

$$4ab + (a - b)^2 = (a + b)^2.$$

Têm interesse particular as Proposições II 12 e II 13 que, conjuntamente, em linguagem mais moderna, enunciam o seguinte: *Num triângulo obtusângulo (acutângulo), o quadrado do lado oposto ao ângulo obtuso (agudo), é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados acrescida (diminuída) do dobro do produto de um desses lados pela projeção do outro sobre ele.* Assim, essas duas proposições estabelecem a generalização do teorema de Pitágoras hoje conhecida como “lei dos cossenos”.



Liberalissimus liber elementorum Euclidis perspicacissimi: in artem Geometrie incipit quâsoelicissime:

Lineus est cuius pars non est. **L**inea est longitudo sine latitudine cuius quidam extremitates sunt duo puncta. **L**inea recta est ab uno puncto ad aliud: **L**inea curva est in extremitatibus suis utriusque eorum recta. **L**ineae superficies est quae longitudo et latitudine terminatur: cuius termini sunt lineae. **L**ineae superficies plana est ab una linea ad alteram extremam: et extremitates suas recipit in puncto. **L**ineae superficies plana est ab una linea ad alteram extremam: et extremitates suas recipit in puncto. **L**ineae superficies plana est ab una linea ad alteram extremam: et extremitates suas recipit in puncto.



Lineae superficies plana est ab una linea ad alteram extremam: et extremitates suas recipit in puncto. **L**ineae superficies plana est ab una linea ad alteram extremam: et extremitates suas recipit in puncto. **L**ineae superficies plana est ab una linea ad alteram extremam: et extremitates suas recipit in puncto.

De principijs per se notis: et primo de diffinitionibus eorumdem.

Linea



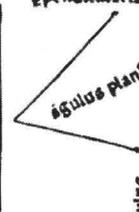
Punctus



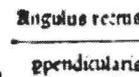
superficie plana.



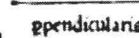
Angulus planus



Angulus rectus



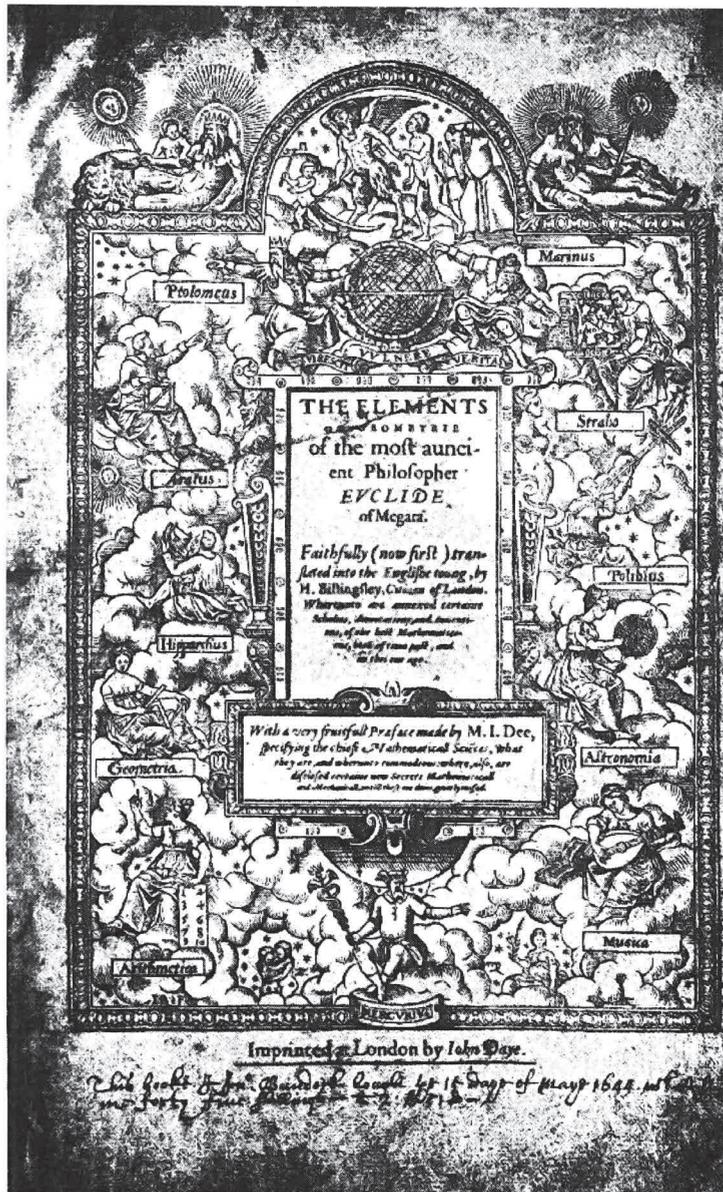
perpendicularia



Circulus



Parte de uma página da primeira edição impressa dos *Elementos* de Euclides, feita em Veneza em 1482



Página de rosto (em tamanho reduzido) da tradução para o inglês
 dos *Elementos* de Euclides, feita por Billingsley (1570)

Presentemente verifica-se um debate aceso entre historiadores da matemática sobre se, de fato, as proposições do Livro II pretendiam estabelecer uma forma geométrica de álgebra, conforme se supôs por muito tempo.

O Livro III, consistindo em 39 proposições, contém muitos dos teoremas familiares sobre círculos, cordas, secantes, tangentes e medidas de ângulos associados que hoje fazem parte dos textos de geometria elementar. No Livro IV, que tem apenas 16 proposições, discute-se a construção, com régua e compasso, de polígonos regulares de 3, 4, 5, 6 e 15 lados bem como a inscrição e a circunscrição desses polígonos num círculo dado. Como pouca da geometria do círculo dada nos Livros III e IV se encontra no trabalho dos pitagóricos, é provável que o material desses livros tenha sido fornecido pelos sofistas antigos e pelos pesquisadores dos três problemas famosos discutidos no Capítulo 4.

O Livro V é uma exposição magistral da teoria das proporções de Eudoxo. Foi por meio dessa teoria, aplicável tanto a grandezas comensuráveis como a grandezas incommensuráveis, que se resolveu o “escândalo lógico” decorrente da descoberta dos números irracionais pelos pitagóricos. A definição de proporção, ou igualdade de duas razões, eudoxiana é notável e digna de ser repetida aqui. *Diz-se que grandezas estão na mesma razão, a primeira para a segunda e a terceira para a quarta quando, tomando-se equimúltiplos quaisquer da primeira e da terceira e equimúltiplos quaisquer da segunda e da quarta, os primeiros equimúltiplos são ambos maiores que, ou ambos iguais a, ou ambos menores que os últimos equimúltiplos considerados em ordem correspondente.* Em outras palavras, se A, B, C e D são quatro grandezas desprovidas de sinal, sendo A e B da mesma espécie (ambas segmentos de reta, ou ângulos, ou áreas, ou volumes) e C e D também da mesma espécie, então a razão entre A e B é igual à razão entre C e D se, para inteiros positivos arbitrários m e n , $mA \gtrless nB$ conforme $mC \gtrless nD$. A teoria das proporções eudoxiana forneceu a fundamentação, posteriormente desenvolvida por Dedekind e Weierstrass, para o sistema dos números reais da análise matemática.

O Livro VI aplica a teoria das proporções eudoxiana à geometria plana. Encontramos nele os teoremas fundamentais da semelhança de triângulos; construções de terceiras, quartas e médias proporcionais; a resolução geométrica de equações quadráticas que consideramos no Capítulo 3; a proposição que assegura que a bissetriz de um ângulo de um triângulo divide o lado oposto em segmentos proporcionais aos outros dois lados; uma generalização do teorema de Pitágoras na qual, em vez de quadrados, traçam-se sobre os lados de um triângulo retângulo três figuras semelhantes descritas de maneira análoga; e muitos outros teoremas. Provavelmente não há nenhum teorema nesse livro que fosse desconhecido dos pitagóricos antigos, mas as demonstrações pré-eudoxianas de muitos deles eram falhas, posto que baseadas numa teoria incompleta das proporções.

Os Livros VII, VIII e IX, que no total têm 102 proposições, tratam da teoria elementar dos números. O livro VII começa com o processo, hoje conhecido como *algoritmo euclidiano*, para achar o máximo divisor comum de dois ou mais números inteiros e o usa para verificar se dois inteiros são primos entre si (ver Exercício 5.1). Encontra-se nele também uma exposição da teoria das proporções numérica ou pitagórica. Estabelecem-se ainda nesse livro muitas propriedades numéricas básicas.

O Livro VIII ocupa-se largamente das proporções contínuas e progressões geométricas relacionadas. Se temos uma proporção contínua $a : b = b : c = c : d$, então a, b, c, d formam uma progressão geométrica.

Liber I.

II

Item, sub aequalibus rectis lineis contentum, & basim BC basi EF aequalem habebunt; eritque triangulum BAC triangulo EDF aequale, ac reliqui anguli B, C reliquis angulis E, F aequales erunt, uterque utriusque, sub quibus aequalia latera subtenduntur.

Si punctum D puncto A applicetur, & recta DE rectae AB superponatur, cadet punctum E in B, quia $DE^a = AB$. Item recta DF cadet in AC, quia ang. $A^d = D$. Quinetiam punctum E puncto C coincidet, quia $AC^e = DF$. Ergo rectae EF, BC, cum eisdem habeant terminos, ^b congruent, & proinde aequales sunt. ^{b 14. ax. *} Quare triangula BAC, EDF; & anguli B, E; itemque anguli C, F etiam congruunt, & aquantur. Quod erat Demonstrandum.

PROP. V.



Isoscelium triangulorum ABC qui ad basim sunt anguli ABC, ACB inter se sunt aequales. Et productis aequalibus rectis lineis AB, AC qui sub base sunt anguli CBD; BCE inter se aequales erunt.

^a Accipe $AF = AD$, & ^{a 3 r.} ^{b 1. p ff.} junge CD, ac BF.

Quoniam in triangulis ^{c hyp.} ^{d constr.} ^{e 4. 1.} ACD, ABF, sunt $AB^c = AC$, & $AF^d = AD$, angulusque A communis, erit ang. $ABF = ACD$; & ang. $AFB^e = ADC$, & bas. $BF^e = DC$; item $FC^f = DB$. ergo in triangulis ^{f 3 ax.} BDC erit ang. $FCE = DBC$. Q. E. D. Item ^{g 4. 1.} ideo ang. $FBC = DCB$. atqui ang. $ABF^h = ACD$. ergo ang. $ABC^k = ACB$. Q. E. D. ^{h pr.} ^{k 3. ax.}

Corollarium

Hinc, Omne triangulum aequilaterum est quocque aequiangulum.

PROP.

Demonstração da Proposição I 5 de Euclides (os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais) conforme aparece em *Euclid* de Isaac Barrow

No Livro IX encontram-se muitos teoremas significativos. A Proposição IX 14 é equivalente ao importante *teorema fundamental da aritmética* — a saber, que *todo inteiro maior que 1 pode se expressar como produto de primos de uma e, salvo quanto à ordem dos fatores, uma só maneira*. A Proposição IX 35 fornece uma dedução geométrica da fórmula da soma dos primeiros n termos de uma progressão geométrica e a última proposição, IX 36, estabelece a notável fórmula para números perfeitos enunciada na Seção 3-3.

A prova de Euclides da proposição IX 20 (*o número de números primos é infinito*) é considerada universalmente pelos matemáticos como um modelo de elegância matemática. Ela emprega o método indireto³, ou *reductio ad absurdum*, e em linhas gerais é o seguinte. Suponha que só houvesse um número finito de números primos e denote-os por a, b, \dots, k . Faça $P = (a)(b)\dots(k)$. Então $P + 1$ ou é primo ou é composto. Mas como a, b, \dots, k são todos os primos, $P + 1$, que é maior que cada um desses números, não pode ser primo. Se $P + 1$ fosse composto deveria ser divisível por algum primo p . Mas p deve ser um dos elementos a, b, \dots, k , pois estes são todos os números primos. Logo p deve dividir P e, por consequência, não é divisor de $P + 1$ (pois $p > 1$). Portanto a hipótese inicial de que o conjunto dos números primos é finito leva a um absurdo, o que estabelece o teorema.

O Livro X focaliza os irracionais — isto é, segmentos de reta incomensuráveis com um segmento de reta dado. Para muitos especialistas, esse livro é, talvez, o mais notável dos *Elementos*. Atribui-se grande parte de seu conteúdo a Teeteto mas sua inteireza, classificação elaborada e acabamento são creditadas a Euclides. Custa a crer que se provaram esses resultados por raciocínios abstratos sem o apoio de uma notação algébrica conveniente. A proposição de abertura (X 1) é a base do método de exaustão empregado posteriormente no Livro XII — a saber, *que se de qualquer grandeza subtrair-se uma parte não menor que sua metade, do que restou outra parte não menor que sua metade e assim por diante, chegar-se-á finalmente a uma grandeza restante menor do que qualquer grandeza fixada da mesma espécie*. Encontramos também nesse livro fórmulas que fornecem ternos de números pitagóricos, fórmulas essas que os babilônios antigos talvez já conhecessem um milênio antes (ver Seção 2-6).

Os três livros restantes, XI, XII e XIII tratam de geometria sólida e cobrem grande parte do material, com exceção do que diz respeito à esfera, comumente encontrado nos textos para a escola secundária. As definições, os teoremas sobre retas e planos no espaço e os teoremas sobre paralelepípedos se encontram no Livro XI. O método de exaustão desempenha um papel importante na abordagem de volumes do Livro XII e será visto com mais detalhes no Capítulo 11. No Livro XIII se desenvolvem construções visando a inscrição dos cinco poliedros regulares numa esfera.

A observação frequentemente exposta de que, na realidade, os *Elementos* de Euclides pretendiam servir meramente como um prolongamento amplo da discussão sobre os cinco poliedros regulares parece representar uma avaliação equivocada. É mais prová-

³ É fácil formular a demonstração de modo a evitar o método indireto.

vel que os *Elementos* tivessem sido escritos como um texto introdutório de matemática geral. Euclides também escreveu textos sobre matemática superior.

Para finalizar, uma palavra sobre o significado do termo “elementos”. Segundo Proclo, os gregos antigos definiam os “elementos” de um estudo dedutivo como os teoremas-mestre, ou teoremas-chave, de uso geral e amplo no assunto. Já se comparou sua função à das letras do alfabeto em relação à linguagem; aliás, em grego as letras recebem o mesmo nome. Aristóteles, em sua *Metafísica*, fala de elementos no mesmo sentido quando diz: “Dentre as proposições geométricas chamaremos de ‘elementos’ aquelas cujas demonstrações estão contidas nas demonstrações de todas ou quase todas essas proposições”. A seleção dos teoremas a serem tomados como elementos do estudo requer uma capacidade de julgamento considerável e é nesse sentido, entre outros, que os *Elementos* de Euclides são tão superiores aos empreendimentos anteriores.

Segue-se que outra observação frequentemente exposta (que os *Elementos* de Euclides tencionavam conter essencialmente toda a geometria plana e sólida conhecida na época) é patentemente falsa. Euclides sabia muito mais geometria do que a que figura em seus *Elementos*.

5.5 A teoria das proporções

É interessante notar a diferença entre as demonstrações pitagórica, eudoxiana e de textos modernos de uma proposição simples envolvendo proporções. Escolhamos a Proposição VI 1 cujo enunciado é *áreas de triângulos que têm mesma altura estão entre si como suas bases*. Permitir-nos-emos usar a Proposição I 38, segundo a qual *triângulos que têm bases e alturas iguais têm áreas iguais* e uma consequência de I 38 cuja informação é que *de dois triângulos quaisquer que têm mesma altura o de maior área é o que tem maior base*.

Considerem-se os triângulos ABC e ADE cujas bases BC e DE estão na mesma reta MN como mostra a Figura 38. Os pitagóricos, antes da descoberta dos números irracionais, assumiam a comensurabilidade de dois segmentos de reta quaisquer. Assim, admitia-se que BC e DE tinham uma unidade de medida comum contida, digamos, p vezes em BC e q vezes em DE . Marque os pontos de divisão de BC e os de DE e ligue-os ao vértice A . Então os triângulos ABC e ADE ficam divididos, respectivamente, em p e q triângulos menores, todos tendo, devido a I 38, a mesma área. Segue-se que $\Delta ABC : \Delta ADE = p : q = BC : DE$, o que conclui a demonstração. Com a descoberta posterior de que dois segmentos de reta não são necessariamente comensuráveis, essa demonstração, como outras, tornou-se inadequada e o perturbador “escândalo lógico” veio à tona.

A teoria das proporções de Eudoxo resolveu inteligentemente o “escândalo” como ilustraremos agora provando de novo VI 1, agora da maneira encontrada nos *Elementos*. No prolongamento de CB marque sucessivamente, a partir de B , $m - 1$ segmentos iguais a CB e ligue os pontos de divisão B_2, B_3, \dots, B_m ao vértice A como mostra a Figura 39. Analogamente, no prolongamento de DE , marque sucessivamente, a partir de E , $n - 1$

segmentos iguais a DE e ligue os pontos de divisão E_2, E_3, \dots, E_n ao vértice A . Então $B_m C = m(BC)$, $\Delta AB_m C = m(\Delta ABC)$, $DE_n = n(DE)$, $\Delta ADE_n = n(\Delta ADE)$. Ademais, por I 38 e seu corolário, $\Delta AB_m C \gtrless \Delta ADE$ conforme $B_m C \gtrless DE_n$; isto é, $m(\Delta ABC) \gtrless n(\Delta ADE)$ conforme $m(BC) \gtrless n(DE)$ e portanto, devido à definição eudoxiana de proporção, $\Delta ABC : \Delta ADE = BC : DE$ o que encerra a demonstração. Não se fez menção nenhuma a quantidades comensuráveis e incomensuráveis, uma vez que a definição euclidiana se aplica igualmente às duas situações.

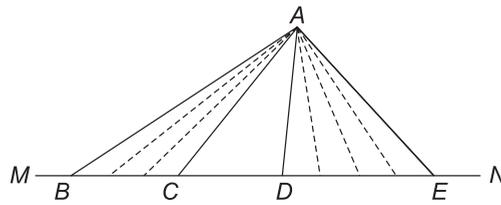


Figura 38

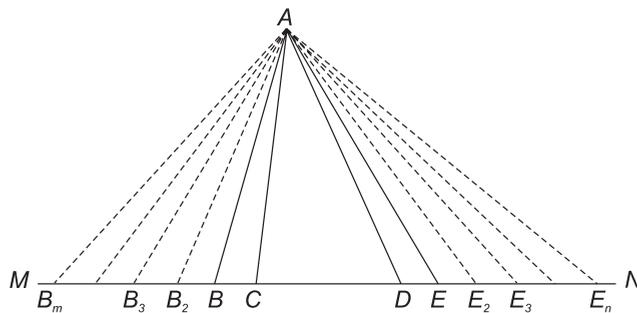


Figura 39

Ainda no século XX, por bastante tempo, muitos textos de geometria defendiam uma demonstração desse teorema em dois casos, conforme BC e DE fossem ou não comensuráveis. O primeiro era abordado da maneira pitagórica acima e o segundo com algumas noções simples envolvendo limites. Assim, suponha que BC e DE sejam incomensuráveis. Divida BC em n partes iguais, sendo BR uma delas (ver Figura 40). Sobre DE marque uma sucessão de segmentos iguais a BR até chegar a um ponto F de DE tal que $FE < BR$. Devido ao caso comensurável, já estabelecido, $\Delta ABC : \Delta ADF = BC : DF$. Faz-se agora $n \rightarrow \infty$. Então $DF \rightarrow DE$ e $ADF \rightarrow ADE$; donde, no limite, $\Delta ABC : \Delta ADE = BC : DE$. Essa abordagem, que usa o fato de que qualquer número irracional pode ser considerado como o limite de uma sequência de números racionais, foi desenvolvida rigorosamente nos tempos modernos por Georg Cantor (1845-1918).

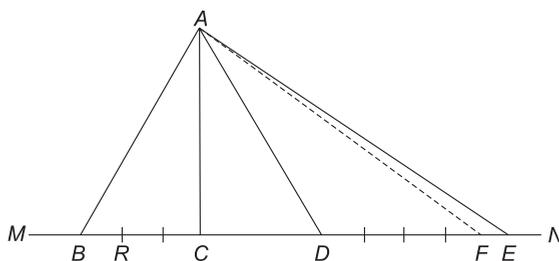


Figura 40

5.6 Polígonos regulares

Já observamos que Euclides, no Livro IV de seus *Elementos*, discute a construção com régua e compasso de polígonos regulares de 3, 4, 5, 6 e 15 lados. Por sucessivas bisseções podemos então, com os instrumentos euclidianos, construir polígonos regulares de 2^n , $3(2^n)$, $5(2^n)$ ou $15(2^n)$ lados. Até quase o século XIX não se sabia se qualquer outro polígono regular poderia também ser construído no âmbito das limitações desses dois instrumentos. Em 1796, o grande matemático alemão Carl Friedrich Gauss deu início à teoria que mostrou que um polígono regular de um número *primo* de lados é construtível com os instrumentos euclidianos se, e somente se, esse número é da forma $f(n) = 2^{2^n} + 1$. Para $n = 0, 1, 2, 3, 4$ encontramos $f(n) = 3, 5, 17, 257, 65\,537$, todos números primos. Assim, embora os gregos o ignorassem, os polígonos regulares de 17, 257 e 65 537 lados são construtíveis com régua e compasso. Não se sabe de nenhum outro valor de n , além daqueles listados atrás, para os quais $f(n)$ seja um número primo.

Já se deram muitas construções de um polígono regular de 17 lados. Em 1832, Richelot publicou uma investigação sobre o polígono regular de 257 lados; e o professor O. Hermes (1826-1909), de Lingen, dedicou dez anos de sua vida ao problema da construção de um polígono regular de 65 537 lados. Conta-se que Gauss somente resolveu dedicar sua vida à matemática depois que, aos 19 anos de idade, descobriu que um polígono regular de 17 lados é construtível com régua e compasso. Seu orgulho por essa descoberta fica evidenciado por seu pedido para que se gravasse em seu túmulo um polígono regular de 17 lados. Embora esse pedido jamais fosse atendido, a base do monumento erigido a Gauss em Brunswick, sua cidade natal, tem a forma de um heptadecágono.

5.7 Aspectos formais dos “Elementos”

Apesar da grande importância do conteúdo dos *Elementos*, talvez mais importante ainda seja a maneira formal como se apresenta esse conteúdo. De fato, os *Elementos* de Euclides tornaram-se o protótipo da forma matemática moderna.

Certamente um dos grandes feitos dos matemáticos gregos antigos foi a criação da forma postulacional de raciocínio. A fim de se estabelecer uma afirmação num sistema dedutivo, deve-se mostrar que essa afirmação é uma consequência lógica necessária de algumas afirmações previamente estabelecidas. Estas, por sua vez, devem ser estabelecidas a partir de outras também estabelecidas previamente e assim por diante. Como a cadeia não pode recuar indefinidamente, deve-se, ao início, aceitar um corpo finito de afirmações não demonstradas para evitar imperdoáveis círculos viciosos consistindo em provar uma afirmação A a partir de uma afirmação B e depois fazer o contrário. Essas afirmações assumidas inicialmente se denominam *postulados* ou *axiomas* do discurso e delas devem decorrer todas as demais afirmações do discurso. Quando se arranjam dessa maneira as afirmações de um discurso diz-se que ele se apresenta na forma postulacional.

Tão grande foi a impressão causada pelo aspecto formal dos *Elementos* de Euclides nas gerações seguintes que a obra se tornou um paradigma de demonstração matemática rigorosa. A despeito de um considerável abandono nos séculos XVII e XVIII, o método postulacional inspirado em Euclides penetrou quase todos os campos da matemática a ponto de alguns matemáticos defenderem a tese de que não só o raciocínio matemático é postulacional mas que também, no sentido inverso, raciocínio postulacional é raciocínio matemático. Uma consequência relativamente moderna foi a criação de um campo de estudos chamado *axiomática*, dedicado ao exame das propriedades gerais dos conjuntos de postulados e do raciocínio postulacional. Voltaremos a esse assunto na Seção 15-2.

A maioria dos matemáticos gregos antigos fazia distinção entre “postulado” e “axioma”. Pelo menos três distinções eram advogadas pelas várias partes.

1. Um axioma é uma afirmação assumida como autoevidente e um postulado é uma construção de algo assumida como autoevidente; assim, os axiomas e os postulados estão entre si, em grande parte, como os teoremas e os problemas de construção.

2. Um axioma é uma suposição comum a todas as ciências ao passo que um postulado é uma suposição peculiar a uma ciência particular em estudo.

3. Um axioma é uma suposição de algo que é, ao mesmo tempo, óbvio e aceitável para o aprendiz; um postulado é uma suposição de algo que não é nem necessariamente óbvio nem necessariamente aceitável para o aprendiz. (Essa última é uma distinção necessariamente aristotélica.) Na matemática moderna não se faz nenhuma distinção nem se leva em conta a qualidade da autoevidência ou a da obviedade. Houve alguns gregos antigos que adotaram este ponto de vista.

Não se sabe com precisão que afirmações Euclides assumiu como seus postulados e axiomas nem, tampouco, quantos ele empregou, devido às mudanças e acréscimos feitos por editores subsequentes. Há, porém, razoáveis evidências de que ele aderiu à segunda distinção acima e de que provavelmente assumiu os equivalentes das dez afirmações seguintes, cinco “axiomas” ou noções comuns e cinco “postulados” geométricos:

A1 Coisas iguais à mesma coisa são iguais entre si.

A2 Adicionando-se iguais a iguais, as somas são iguais.

A3 Subtraindo-se iguais de iguais, as diferenças são iguais.

A4 Coisas quem coincidem uma com a outra são iguais entre si.

A5 O todo é maior do que a parte.

P1 É possível traçar uma linha reta de um ponto qualquer a outro ponto qualquer.

P2 É possível prolongar uma reta finita indefinidamente em linha reta.

P3 É possível descrever um círculo com qualquer centro e qualquer raio.

P4 Todos os ângulos retos são iguais entre si.

P5 Se uma reta intercepta duas retas formando ângulos interiores de um mesmo lado menores do que dois retos, prolongando-se essas duas retas indefinidamente elas se encontrarão no lado em que os dois ângulos são menores do que dois ângulos retos.

Os postulados P1 e P2 estabelecem a existência de uma reta determinada por dois pontos; o postulado P3 estabelece a existência de um círculo, dados seu centro e seu raio. Devido a isso (como se mencionou anteriormente na Seção 4-4), a régua sem escala e o compasso desmontável tornaram-se os únicos instrumentos permitidos para problemas de construção da geometria euclidiana.

Os *Elementos* pretendem deduzir todas as suas 465 proposições dessas dez afirmações! O desenvolvimento é *sintético*, consistindo em derivar o desconhecido e mais complexo do conhecido e mais simples. Sem dúvida o processo contrário, chamado *análise*⁴, consistindo em reduzir o desconhecido e o mais complexo ao conhecido, teve o seu papel na descoberta das provas de muitos dos teoremas mas não na exposição da matéria.

5.8 Outros trabalhos de Euclides

Euclides escreveu vários outros tratados, além dos *Elementos*, alguns dos quais sobreviveram até nossos dias. Um dos últimos, chamado *Os Dados*, diz respeito ao material dos seis primeiros livros dos *Elementos*. Pode-se definir um *dado* como um conjunto tal de partes ou relações de uma figura que, tendo-se todas, menos uma delas, então a restante está determinada. Assim, as partes A , a , R de um triângulo, em que A é um ângulo, a é o lado oposto e R é o raio do círculo circunscrito, constituem um dado; dadas duas dessas partes, a terceira está determinada. Isso é óbvio, ou geometricamente ou a partir da relação $a = 2R \text{sen}A$. É evidente que uma coleção de dados dessa natureza poderia ter sido útil na análise que precede a descoberta de uma construção ou de uma prova e é esse, sem dúvida, o objetivo do trabalho.

Outro trabalho geométrico de Euclides, que chegou a nós através de uma tradução árabe, é o livro *Divisão de Figuras*. Encontramos nessa obra problemas de construção

⁴ Em matemática usam-se as palavras *análise* e *analítico* com vários sentidos. Temos assim a geometria *analítica*, o extenso ramo da matemática chamado *análise*, funções *analíticas* e assim por diante.

em que se pede a divisão de uma figura por meio de uma reta, impondo-se que as áreas das partes estejam numa razão dada. Um exemplo é o problema de dividir um triângulo dado em duas áreas iguais por meio de uma reta que passe por um ponto interior ao triângulo. No Exercício 3.11(b) e (c) há outros exemplos.

Há outros trabalhos de Euclides conhecidos apenas por comentários posteriores, pois se perderam. É o caso de *Pseudaria* ou livro das falácias geométricas; *Porismas*, sobre o qual tem havido muitas especulações;⁵ *Cônicas*, um tratado em quatro livros que foi mais tarde completado e ampliado por Apolônio; e *Lugares de Superfície* sobre o qual nada se sabe.

Os outros trabalhos de Euclides referem-se à matemática aplicada, sendo que dois deles ainda existem: *Os Fenômenos*, obra que focaliza a geometria esférica necessária para a astronomia de observação e a *Óptica*, um tratado elementar de perspectiva. Supõe-se também que Euclides tenha escrito um trabalho com o título de *Elementos de Música*.

Exercícios

5.1 O algoritmo de Euclides

O *algoritmo euclidiano*, processo para se achar o máximo divisor comum (m.d.c.) de dois números inteiros, tem esse nome porque se encontra no início do Livro VII dos *Elementos* de Euclides, embora o processo em si sem dúvida fosse conhecido muito tempo antes. Esse algoritmo se encontra nos fundamentos de vários progressos da matemática moderna. Enunciado em forma de regra, é o seguinte: *Divida o maior dos dois números inteiros positivos pelo menor e então divida o divisor pelo resto. Continue esse processo de dividir o último divisor pelo último resto, até que a divisão seja exata. O divisor final é o m.d.c. procurado.*

- Encontre, com o algoritmo euclidiano, o m.d.c. de 5913 e 7592.
- Encontre, com o algoritmo euclidiano, o m.d.c. de 1827, 2523 e 3248.
- Prove que o algoritmo euclidiano leva efetivamente ao m.d.c.
- Seja h o m.d.c. dos inteiros positivos a e b . Mostre que existem inteiros p e q (não necessariamente positivos), para os quais $pa + qb = h$.
- Encontre p e q para os inteiros de (a).

⁵ Entende-se hoje por *porisma* uma proposição que expressa uma condição que se traduz num certo problema solúvel, tendo o problema então infinitas soluções. Por exemplo, se r e R são os raios de dois círculos e d é a distância entre os centros, o problema de inscrever um triângulo no círculo de raio R que circunscreva o círculo de raio r é solúvel se, e somente se, $R^2 - d^2 = 2Rr$, e nesse caso há infinitas soluções. Não se sabe ao certo o que Euclides queria dizer com o termo.

(f) Prove que a e b são primos entre si se, e somente se, existem inteiros p e q tais que $pa + qb = 1$.

5.2 Aplicações do algoritmo euclidiano

(a) Prove, usando o Exercício 5.1 (f), que se p é primo e divide o produto uv , então p divide u ou p divide v .

(b) Prove, a partir de (a), o teorema fundamental da aritmética: *Todo inteiro maior do que 1 pode ser fatorado univocamente num produto de números primos.*

(c) Determine inteiros a, b, c tais que $65/273 = a/3 + b/7 + c/13$.

5.3 O teorema de Pitágoras

(a) A elegante demonstração do teorema de Pitágoras dada por Euclides depende do diagrama da Figura 41, conhecido às vezes como *capelo franciscano* ou *cadeira de noiva*. Eis um resumo da demonstração: $(AC)^2 = 2 \Delta JAB = 2 \Delta CAD = ADKL$. Analogamente, $(BC)^2 = BEKL$ e assim por diante. Complete a demonstração com os detalhes.

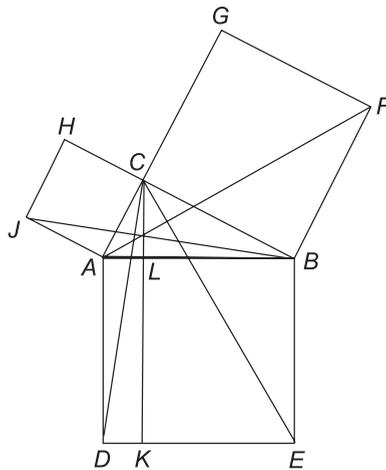


Figura 41

(b) Mostre como a Figura 42 sugere uma demonstração dinâmica do teorema de Pitágoras numa ideia que poderia ser usada para um filme em que o quadrado sobre a hipotenusa se transforma continuamente numa soma de quadrados sobre os catetos do triângulo retângulo.

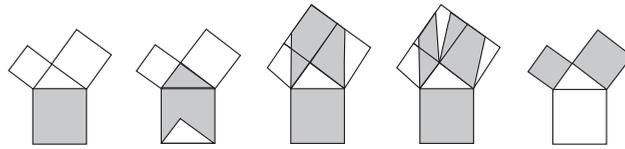


Figura 42

(c) Alguns dos presidentes dos Estados Unidos tiveram ligações, embora tênues, com a matemática. George Washington foi um famoso agrimensor. Thomas Jefferson fez muito para encorajar o ensino da matemática superior em seu país e Abraham Lincoln teria se preparado em lógica com a leitura dos *Elementos* de Euclides. Mais criativo porém foi James Abram Garfield (1831-1881), o vigésimo presidente americano, que, em seus tempos de estudante, desenvolveu um agudo interesse e uma razoável competência em matemática elementar. Em 1876, cinco anos antes de assumir a presidência, quando era membro do Poder Legislativo, descobriu uma demonstração muito bonita do teorema de Pitágoras. A ideia dessa demonstração, que posteriormente foi publicada no *New England Journal of Education Mathematics*, ocorreu-lhe durante uma discussão sobre matemática com outros membros do Congresso. A demonstração depende do cálculo da área do trapézio da Figura 43 de duas maneiras — a primeira pela fórmula da área do trapézio e a segunda pela soma dos três triângulos retângulos em que se pode decompor o trapézio. Faça essa demonstração com detalhes.

(d) Enuncie e prove o recíproco do teorema de Pitágoras.

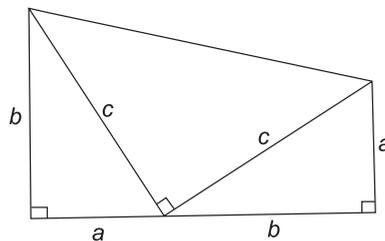


Figura 43

5.4 O livro II de Euclides

(a) O enunciado da Proposição II 1 de Euclides é o seguinte: *Dadas duas retas, uma das quais se divide num número qualquer de partes, o retângulo contido pelas duas retas é igual à soma dos retângulos contidos pela reta não dividida e cada um dos segmentos.* Trata-se do correspondente geométrico de que lei da álgebra?

(b) Mostre que as proposições II 12 e II 13 correspondem, basicamente, à lei dos cossenos.

(c) Mostre que o teorema de Pitágoras pode ser considerado um caso particular da lei dos cossenos.

5.5 Aplicações do teorema fundamental da aritmética

O teorema fundamental da aritmética garante que, dado um inteiro positivo a , existe uma única sequência $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ de inteiros, em que o número de termos não nulos é finito, para a qual

$$a = 2^{a_1} 3^{a_2} 5^{a_3} \dots,$$

em que 2, 3, 5, ... são os primos consecutivos. Isso sugere uma notação útil. Escreveremos

$$a = (a_1, a_2, \dots, a_n),$$

na qual a_n é o último expoente não nulo. Assim, temos $12 = (2, 1)$, $14 = (1, 0, 0, 1)$, $27 = (0, 3)$ e $360 = (3, 2, 1)$. Prove os seguintes teoremas:

- $ab = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots)$.
- b é divisor de a se, e somente se, $b_i \leq a_i$ para todo i .
- O número de divisores de a é $(a_1 + 1)(a_2 + 1) \dots (a_n + 1)$.
- Uma condição necessária e suficiente para que n seja quadrado perfeito é que o número de divisores de n seja ímpar.
- Faça g_i igual ao menor dos números a_i e b_i se $a_i \neq b_i$ e igual a a_i ou a b_i se $a_i = b_i$. Então $g = (g_1, g_2, \dots)$ é o m.d.c. de a e b .
- Se a e b são primos entre si e b divide ac , então b divide c .
- Se a e b são primos entre si, a divide c e b divide c , então ab divide c .
- Mostre que $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$ são irracionais.

5.6 A teoria eudoxiana das proporções

(a) Prove, pelo método eudoxiano e pelo método dos textos dos primeiros tempos do século XX, a Proposição VI 33: *Ângulos centrais do mesmo círculo ou de círculos iguais estão entre si como os arcos correspondentes.*

(b) Prove, pelo método pitagórico, e depois complete, pelo uso de limites, a Proposição VI 2: *Uma reta paralela a um dos lados de um triângulo divide os outros dois lados proporcionalmente.*

(c) Prove a proposição VI 2 usando a Proposição VI 1 (ver Seção 5-5).

5.7 Polígonos regulares

(a) Suponha $n = rs$, em que n , r e s são inteiros positivos. Mostre que se um polígono regular de n lados é construtível com os instrumentos euclidianos, o mesmo acontece com os polígonos regulares de r e s lados.

(b) Mostre que é impossível construir com os instrumentos euclidianos um polígono regular de 27 lados.

(c) Sejam r e s inteiros positivos primos entre si. Se os polígonos regulares de r e s lados são construtíveis com régua e compasso, mostre que o mesmo acontece com o polígono regular de rs lados.

(d) Dos polígonos regulares com menos que 20 lados podem-se construir com os instrumentos euclidianos os de 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16 e 17 lados. Construa efetivamente esses polígonos, com exceção do de 17 lados.

(e) Construa o heptadecágono regular pelo método seguinte (H. W. Richmond, "To construct a regular polygon of seventeen sides", *Mathematische Annalen*, nº 67, 1909, p. 459).

Sejam OA e OB dois raios perpendiculares de uma dada circunferência de centro O . Tome C em OB de modo que $OC = OB/4$. Feito isso encontre D em OA de modo que $\text{ângulo } OCD = (\text{ângulo } OCA)/4$. A seguir encontre E no prolongamento de AO de maneira que $\text{ângulo } DCE = 45^\circ$. Trace a circunferência de diâmetro AE , cortando OB em F e depois a circunferência $D(F)$, cortando OA e o prolongamento de AO em G_4 e G_6 . Erga perpendiculares a OA por G_4 e G_6 , cortando a circunferência dada em P_4 e P_6 . Esses últimos pontos são o quarto e o sexto vértices do polígono regular de 17 lados cujo primeiro vértice é A .

(f) Demonstre a Proposição XIII 10: *Os lados de um pentágono regular, de um hexágono regular e de um decágono regular inscritos no mesmo círculo são lados de um triângulo retângulo.*

(g) Mostre que o menor ângulo agudo de um triângulo retângulo de catetos 3 e 16 é muito aproximadamente a metade do ângulo central determinado por um dos lados do heptadecágono regular. Usando esse fato, dê uma construção euclidiana aproximada do heptadecágono regular.

5.8 A soma dos ângulos de um triângulo

Assumindo a igualdade dos pares de ângulos alternos internos formados por uma transversal que corta um par de retas paralelas, prove o seguinte:

(a) A soma dos ângulos de um triângulo é igual a um ângulo raso.

(b) A soma dos ângulos internos de um polígono convexo de n lados é igual a $n - 2$ ângulos rasos.

5.9 Uma sequência dedutiva referente a áreas

Admitindo que a área de um retângulo é dada pelo produto de suas dimensões, estabeleça a seguinte cadeia de teoremas:

- (a) A área de um paralelogramo é igual ao produto de sua base por sua altura.
- (b) A área de um triângulo é o semiproduto de qualquer lado pela altura correspondente.
- (c) A área de um triângulo retângulo é igual ao semiproduto dos catetos.
- (d) A área de um triângulo é igual ao semiproduto de seu perímetro pelo raio do círculo inscrito.
- (e) A área de um trapézio é igual ao produto de sua altura pela semissoma de suas bases.
- (f) A área de um polígono regular é igual ao produto de seu perímetro por seu apótema.
- (g) A área de um círculo é o semiproduto de sua circunferência por seu raio.

5.10 Uma sequência dedutiva referente a ângulos

Admita que (1) a medida de um ângulo central de um círculo é a do arco correspondente; (2) a soma dos ângulos de um triângulo é um ângulo raso; (3) os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais; (4) uma tangente a uma circunferência é perpendicular ao raio no ponto de tangência. Prove então a seguinte cadeia de teoremas:

- (a) Um ângulo exterior de um triângulo é igual à soma dos internos não adjacentes a ele.
- (b) A medida de um ângulo inscrito num círculo é a metade da medida do arco correspondente.
- (c) Um ângulo inscrito num semicírculo é reto.
- (d) A medida de um ângulo formado por duas cordas de um círculo que se interceptam é a semissoma das medidas dos dois arcos correspondentes.
- (e) Se duas secantes a um círculo se interceptam, a medida do ângulo formado por elas é a semidiferença das medidas dos arcos correspondentes.
- (f) A medida do ângulo formado por uma tangente a uma circunferência e uma corda pelo ponto de tangência é a metade da medida do arco correspondente.
- (g) Se uma tangente e uma secante a uma circunferência se cortam, a medida do ângulo formado por elas é a semidiferença dos arcos correspondentes.
- (h) Se duas tangentes a uma circunferência se cortam, a medida do ângulo formado por elas é a semidiferença dos arcos determinados.

5.11 Elementos

(a) Se você tivesse de escolher dois dos seguintes teoremas como “elementos” de um curso de geometria plana, quais escolheria?

1. As três alturas de um triângulo, prolongadas se necessário, encontram-se num ponto.

2. A soma dos três ângulos de um triângulo é igual a dois ângulos retos.

3. A medida de um ângulo inscrito num círculo é a metade da medida do arco correspondente.

4. As tangentes traçadas de um ponto do prolongamento da corda comum a dois círculos secantes têm comprimentos iguais.

(b) Um professor de geometria está preparando uma aula sobre paralelogramos. Após dar a definição de *paralelogramo*, que teoremas deveria ele oferecer como “elementos” para explorar o assunto?

(c) Preparando terreno para entrar em figuras semelhantes, um professor de geometria dá uma ou duas aulas sobre teoria das proporções. Que teoremas deveria ele escolher como “elementos” para sua abordagem e em que ordem deveria dispô-los?

5.12 Dados

Sejam A, B, C os ângulos de um triângulo; a, b, c os lados opostos; m_a, m_b, m_c as medianas respectivas; h_a, h_b, h_c as alturas respectivas; t_a, t_b, t_c as bissetrizes relativas a A, B, C ; R e r os raios dos círculos circunscrito e inscrito; b_a e c_a as projeções dos lados b e c sobre o lado a , e r_a o raio da circunferência tangente ao lado a e aos prolongamentos b e c . Mostre que cada um dos seguintes ternos constitui um dado para o triângulo.

(a) A, B, C

(b) $a/b, b/c, c/a$

(c) b, A, h_c

(d) $b + c, A, h_b + h_c$

(e) $b - c, A, h_c - h_b$

(f) $h_a, t_a, B - C$

(g) $h_a, m_a, b_a - c_a$

(h) $R, B - C, b_a - c_a$

(i) $R, r_a - r, a$

(j) h_a, r, r_a

5.13 Construções empregando dados

Um dado pode ser útil na resolução de um problema de construção se uma qualquer de suas partes puder ser obtida das outras. Construa um triângulo, sendo dados (para a notação ver Exercício 5.12):

(a) $a, A, h_b + h_c$

(b) $a - b, h_b + h_c, A$

(c) R, r, h_a

5.14 Divisões

(a) Complete com os detalhes a seguinte resolução (que, basicamente, se encontra em *Divisão de Figuras*, de Euclides) do problema da construção de uma reta GH por um ponto D interior a um triângulo ABC e que corta os lados BA e BC em G e H , respectivamente, de modo que os triângulos GBH e ABC tenham mesma área (ver Figura 44).

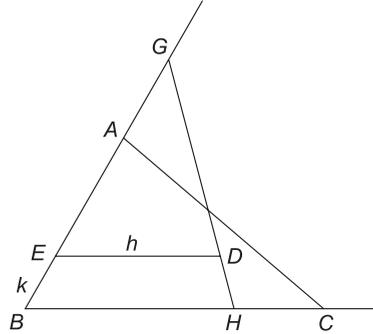


Figura 44

Trace DE paralela a CB , cortando AB em E . Denote os comprimentos de DE e EB por h e k , respectivamente, e o de GB por x . Então $x(BH) = ac$. Mas $BH/h = x(x - h)$. Eliminando BH obtemos $x^2 - mx + mk = 0$, em que $m = ac/h$ e assim por diante.

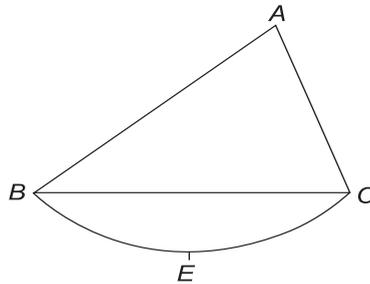


Figura 45

(b) Resolva o seguinte problema, que é a Proposição 28 do livro *Divisão de Figuras* de Euclides: Efetue a bissecção da área $ABEC$ da Figura 45 por meio de uma reta pelo ponto médio E do arco circular BC .

(c) Consta do livro *Divisão de Figuras* de Euclides o problema de efetuar a bissecção de um trapézio por meio de uma reta paralela às bases. Resolva esse problema com régua e compasso.

Temas

- 5/1 A origem do método axiomático: descrições evolucionária e revolucionária.
- 5/2 As ideias de Aristóteles e Proclo sobre o método axiomático.
- 5/3 Axiomática material versus axiomática formal.
- 5/4 A vida, obras e influência de Euclides.
- 5/5 Fontes de Euclides para seus *Elementos*.
- 5/6 A álgebra nos *Elementos* de Euclides.
- 5/7 A Teoria dos Números nos *Elementos* de Euclides.
- 5/8 Aplicações da teoria das proporções eudoxiana à geometria plana.
- 5/9 Há uma estrada real na geometria?
- 5/10 O enunciado mais famoso da história da matemática (o postulado das paralelas de Euclides).
- 5/11 James Abram Garfield (1831-1881) e a matemática.
- 5/12 Sir Henry Billingsley.
- 5/13 Generalizações do teorema de Pitágoras no plano.
- 5/14 Teorema de De Gua.

Bibliografia

- AABOE, Asger. "Episodes from the Early History of Mathematics". *New Mathematical Library*, nº 13. Nova York, Random House and L. W. Singer, 1964.
- ARCHIBALD, R. C. *Euclid's Book on Division of Figures*. Nova York, Cambridge University Press, 1915.
- BELL, E. T. *The Magic of Numbers*. Nova York, McGraw-Hill, 1946.
- BUNT, L. N. H.; JONES, P. S. e BEDIANT, J. D. *The Historical Roots of Elementary Mathematics*. Englewood Cliffs (N. J.), Prentice-Hall, 1976.
- COHEN, M. R. e DRABKIN, I. E. *A Source Book in Greek Science*. Nova York, McGraw-Hill, 1948. Reimpresso por Harvard University Press, Cambridge (Mass.), 1958.
- COOLIDGE, J. L. *A History of Geometrical Methods*. Nova York, Oxford University Press, 1940.
- DANTZIG, Tobias. *The Bequest of the Greeks*. Nova York, Charles Scribner, 1955.
- DAVIS, H. T. *Alexandria, the Golden City*. Evanston (Ill.), Principia Press of Illinois, 1957, 2 vols.
- DUNNINGTON, G. W. *Carl Friedrich Gauss: Titan of Science*. Nova York, Hafner, 1955.

- EVES, Howard. *Foundations and Fundamental Concepts of Mathematics*. 3^a ed. Boston, PWS-KENT Publishing Company, 1990.
- FORDER, H. G. *The Foundations of Euclidean Geometry*. Nova York, Cambridge University Press, 1927.
- FRANKLAND, W. B. *The Story of Euclid*. Londres, Hodder and Stoughton, 1901.
- . *The First Book of Euclid's Elements with a Commentary Based Principally upon that of Proclus Diadochus*. Nova York, Cambridge University Press, 1905.
- GOW, James. *A Short History of Greek Mathematics*. Nova York, Hafner, 1923. Reimpresso por Chelsea, Nova York.
- HEATH, T. L. *History of Greek Mathematics*, vol. 1. Nova York, Oxford University Press, 1921. Reimpresso por Dover, Nova York, 1981.
- . *The Thirteen Books of Euclid's Elements*. 2^a ed. Nova York, Cambridge University Press, 1926, 3 vols. Reimpresso por Dover, Nova York, 1956.
- . *A Manual of Greek Mathematics*. Nova York, Oxford University Press, 1931. Reimpresso por Dover, Nova York, 1963.
- JAMES, Glenn. (ed.) *The Tree of Mathematics*. Pacoima (Calif.), The Digest Press, 1957.
- KNORR, Wilbur. *The Evolution of the Euclidean Elements*. Dordrecht, D. Reidel, 1985.
- PROCLUS. *A Commentary on the First Book of Euclid's Elements*. Trad. para o inglês por G. R. Morrow. Princeton (N. J.), Princeton University Press, 1970.
- SARTON, George. *Ancient Science and Modern Civilization*. Lincoln (Neb.), The University of Nebraska Press, 1954.
- SMITH, D. E. *A Source Book in Mathematics*. Nova York, McGraw-Hill, 1929.
- THOMAS, Ivor. (ed.) *Selections Illustrating the History of Greek Mathematics*. Cambridge (Mass.), Harvard University Press, 1939-1941, 2 vols.
- THOMAS-STANFORD, Charles. *Early Editions of Euclid's Elements*. Londres, Bibliographical Society, 1926.
- VAN DER WAERDEN, B. L. *Science Awakening*. Trad. para o inglês por Arnold Dresden. Nova York, Oxford University Press, 1961. Paperback edition. Nova York, John Wiley, 1961.

A matemática grega depois de Euclides

6.1 Cenário histórico

A cidade de Alexandria desfrutava de muitas vantagens, dentre as quais a duradoura paz com o resto do mundo certamente não era a menor. Durante o reinado dos Ptolomeus, que durou por quase 300 anos, embora de quando em quando a cidade se visse às voltas com distúrbios envolvendo forças internas, conseguiu permanecer afastada de lutas externas. Houve uma curta interrupção nesse panorama, durante o período em que o Egito foi anexado pelo Império Romano, mas logo a Pax Romana se estendeu pelo país. Não é de se admirar, pois, que a Alexandria tenha se tornado um porto seguro para os intelectuais e que, por mais de meio milênio, tantas das conquistas acadêmico-culturais antigas tenham emanado da cidade. Quase que sem exceção, os matemáticos da Antiguidade a serem discutidos neste capítulo ou foram professores ou alunos da Universidade de Alexandria.

Roma dominou o período final dos tempos antigos. Em 212 a.C. Siracusa se rendeu ante um cerco romano; em 146 a.C. foi a vez de Cartago cair diante do poder da Roma imperial, e no mesmo ano, com a queda da última cidade grega, Corinto, a Grécia tornou-se província do Império Romano. A Mesopotâmia só foi conquistada em 65 a.C. e o Egito permaneceu sob os Ptolomeus até 30 a.C. A civilização grega difundiu-se pela vida romana e o cristianismo começou a se alastrar, principalmente entre os escravos e os pobres. Os administradores romanos coletavam pesados impostos mas, afora isso, não interferiam na organização econômica subjacente às colônias orientais.

Constantino, o Grande, foi o primeiro imperador romano a adotar o cristianismo, elevando-o inclusive a religião oficial. Em 330 d.C. Constantino mudou sua capital de Roma para Bizâncio, que passou a se chamar Constantinopla. Em 395 d.C. o Império Romano se dividiu em duas partes: o Império Oriental e o Império Ocidental, sendo a Grécia parte do primeiro.

A estrutura econômica dos dois impérios era essencialmente agrícola, com amplo emprego do trabalho escravo. O declínio final do mercado de escravos, com seus efeitos desastrosos sobre a economia romana, encontrou a ciência reduzida a um plano medíocre. A escola de Alexandria gradualmente foi se debilitando, ao mesmo tempo em que a sociedade antiga se desintegrava. O pensamento criativo cedeu lugar a compilações e comentários. Dias tumultuados seguiram-se às porfias entre cristãos e pagãos até que, finalmente, em 641 d.C., Alexandria foi tomada pelos árabes.

6.2 *Arquimedes*

Arquimedes, natural da cidade grega de Siracusa, situada na ilha da Sicília, figura entre os maiores matemáticos de todos os tempos e certamente foi o maior da Antiguidade. Nasceu por volta de 287 a.C. e morreu durante o saque de Siracusa em 212 a.C. Era filho de um astrônomo e desfrutava de alto prestígio junto ao rei Hierão (de quem talvez fosse parente). Há registros segundo os quais ele esteve algum tempo no Egito, provavelmente na Universidade de Alexandria, pois contavam, entre seus amigos, Cônon, Dositeo e Eratóstenes; os dois primeiros foram sucessores de Euclides e o último foi bibliotecário da Universidade. Arquimedes comunicou muitas de suas descobertas matemáticas a esses homens.

Os historiadores romanos deixaram relatos de muitas histórias pitorescas sobre Arquimedes. Dentre essas figuram as descrições dos engenhos criativos inventados por ele para ajudar na defesa de Siracusa quando do sítio imposto à cidade pelos romanos sob o comando do general Marcelo. Havia catapultas móveis, de alcance ajustável, para arremessar pesos por sobre os navios inimigos que se aproximassem muito dos muros da cidade e grandes guindastes que içavam da superfície do mar esses navios. A história segundo a qual ele se utilizou de grandes espelhos ustórios para incendiar vasos de guerra inimigo tem origem posterior mas pode ser verdadeira. Há também a história de como ele fez por justificar sua afirmação, “Dê-me uma alavanca que movei a Terra”, conseguindo mover, sozinho e sem esforço, apenas com a ajuda de um sistema de polias compostas, um navio pesadamente carregado que não podia ser retirado do cais sem grande esforço e muitos homens.



Arquimedes
(Culver Service)

Segundo parece, Arquimedes era capaz de concentrações mentais intensas e há relatos sobre sua distração quando se enfronhava na resolução de algum problema. A repetidíssima história da coroa do rei Hierão e o ourives suspeito é típica. Pelo que consta esse ourives moldara para o rei, com um dado peso de ouro, uma coroa. Suspeitando de que pudesse haver prata oculta em meio ao ouro e não desejando desmanchar a coroa para tirar a prova, o rei encaminhou a questão a Arquimedes. E este, quando um dia se encontrava nos banhos públicos, deu com a solução, descobrindo a primeira lei da hidrostática — que um corpo, quando mergulhado num fluido, recebe um empuxo de intensidade igual ao peso do volume de água deslocado. Na sua excitação, Arquimedes teria se esquecido de vestir-se e saiu nu pelas ruas correndo para sua casa e gritando, “Eureka, eureka!” (“Achei, achei!”). Ele colocou a coroa num dos pratos de uma balança e um peso igual de ouro na outra e depois repetiu essa operação sob a água. O prato com a coroa ergueu-se, mostrando que ela continha algum material espúrio, menos denso que o ouro.

Arquimedes explorou muito sua geometria em figuras desenhadas em cinzas de lareiras ou no óleo com que besuntava seu corpo após os banhos. De fato, diz-se que ele encontrou a morte quando, mergulhado em seus raciocínios, preocupava-se com um diagrama traçado num tabuleiro de areia. De acordo com uma versão, isso ocorreu durante a pilhagem de Siracusa, quando ele ordenou a um soldado romano para se afastar de seu diagrama; o saqueador, incontinente, teria atravessado o corpo do ancião com uma lança.

Devido às máquinas de defesa de Arquimedes, Siracusa resistiu ao sítio de Roma por quase três anos. E as defesas só se romperam quando, durante uma comemoração no interior da cidade, o excesso de confiança dos siracusanos fez com que afrouxassem a guarda. Marcelo desenvolveu um profundo respeito por seu engenhoso adversário, e quando finalmente conseguiu abrir brechas nos muros da cidade, deu ordens estritas para que nenhum mal fosse feito a tão ilustre matemático. E quando soube de sua morte ficou muito consternado e, com as honras e o respeito devidos, fez enterrar o corpo do intelectual ilustre no cemitério da cidade. Arquimedes, com muita razão, orgulhoso de uma de suas grandes descobertas geométricas (que será descrita posteriormente), expressara o desejo de que se gravasse em seu túmulo a figura de uma esfera inscrita num cilindro circular reto. Marcelo cuidou para que o pedido de Arquimedes fosse atendido.

Muitos anos mais tarde, em 75 a.C., quando Cícero servia como questor romano na Sicília, indagou acerca do túmulo de Arquimedes. Para surpresa sua, os siracusanos nada sabiam. Num esforço considerável, Cícero examinou todos os monumentos do cemitério, que não eram poucos. Por fim percebeu uma pequena coluna, sobressaindo-se um pouco às sarças e aos arbustos bastante crescidos, com a figura de uma esfera e um cilindro circunscrito a ela; assim, o túmulo do maior dos siracusanos, tão longamente negligenciado e esquecido, estava resgatado. Daí para a frente, por ordens de Cícero, foram destacados homens para preservar o local e os terrenos vizinhos. Até quando continuou essa manifestação de respeito não se sabe, pois o túmulo voltou a desaparecer. Até que, em 1965, quando se faziam escavações em algum lugar de Siracusa, para lançar as fundações de um hotel, encontrou-se de novo e inesperadamente o que se supõe ser o túmulo que há tantos séculos desaparecera.

Referindo-se à morte de Arquimedes, Sir William Rowan Hamilton observou certa feita: “Quem não preferiria ter a fama de Arquimedes à do conquistador Marcelo?”. Nessa mesma trilha Alfred North Whitehead comentou: “Nenhum romano jamais morreu contemplando um diagrama geométrico”. O matemático inglês, deste século, G. H. Hardy disse: “Arquimedes será lembrado quando Esquilo já tiver sido esquecido, porque as línguas morrem mas as ideias matemáticas não”. De maneira semelhante Voltaire observou: “Havia mais imaginação na cabeça de Arquimedes do que na de Homero”.

Os trabalhos de Arquimedes são obras-primas de exposição matemática e lembram, consideravelmente, artigos de revistas especializadas modernas. Além de exibirem grande originalidade, habilidade computacional e rigor nas demonstrações, são escritos numa linguagem altamente acabada e objetiva. Cerca de dez tratados de Arquimedes se preservaram até nossos dias e há vestígios de outros extraviados. Talvez a mais notável das contribuições feitas à matemática por esses tratados se traduzam no desenvolvimento inicial de alguns dos métodos do cálculo integral. Voltaremos a isso num capítulo posterior.

Três dos trabalhos remanescentes de Arquimedes se dedicam à geometria plana. São eles, *A medida de um círculo*, *A quadratura da parábola* e *Sobre as espirais*. Foi no primeiro deles que Arquimedes inaugurou o método clássico para o cálculo de π já descrito na Seção 4-8. No segundo trabalho, constituído de 24 proposições, mostra-se que a área de um segmento parabólico é quatro terços da área do triângulo inscrito de mesma base e de vértice no ponto onde a tangente é paralela à base. A dedução envolve a soma de uma série geométrica convergente. O terceiro trabalho, com 28 proposições, dedica-se às propriedades da curva hoje conhecida por espiral de Arquimedes e cuja equação polar é $r = k\theta$. Em particular, encontra-se a área compreendida pela curva e por dois raios vetores de maneira essencialmente igual ao que seria hoje um exercício de cálculo. Há alusões a muitos outros trabalhos (perdidos) de Arquimedes em geometria plana e há razões para se acreditar que alguns dos teoremas desses trabalhos estejam preservados no *Liber assumptorum*, uma coleção que chegou a nós através dos árabes (ver Exercício 6.4). O erudito árabe Al-Biruni reivindicou para Arquimedes a paternidade da célebre fórmula

$$K = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

que dá a área de um triângulo em função de seus três lados. Até então essa fórmula tinha sido atribuída a Herão de Alexandria.

Dois dos trabalhos remanescentes de Arquimedes dizem respeito à geometria espacial — são eles, *Sobre a esfera e o cilindro* e *Sobre os cones e os esferoides*. No primeiro deles, escrito em dois livros e constituído de 53 proposições, figura o teorema que fornece as áreas de uma esfera e de uma calota esférica (ver Exercício 6.2). Mostra-se, por exemplo, que a área de uma superfície esférica é exatamente dois terços da área da superfície total do cilindro circular reto circunscrito a ela e que o volume da esfera é exatamente dois terços do volume do mesmo cilindro. No Livro II de *Sobre a esfera e o cilindro* há o problema de seccionar uma esfera com um plano de maneira a obter dois

segmentos esféricos cujos volumes estejam numa razão dada. Esse problema leva a uma equação cúbica cuja solução não se encontra no texto (como ele chegou a nós), mas que foi encontrada por Eutócio num fragmento euclidiano. Há uma discussão relativa às condições sob as quais a cúbica pode ter uma raiz real positiva. Transcorreria mais de um milênio até que se voltassem a fazer considerações semelhantes na Europa. Fecham o tratado dois interessantes teoremas: (1) *Se V , V' e S , S' são os volumes dos segmentos e as áreas das calotas determinados por um plano não diametral que secciona uma esfera e se V e S correspondem às partes maiores, então*

$$S^{3/2} : S'^{3/2} < V : V' < S^2 : S'^2.$$

(2) *Dentre todos os segmentos esféricos de uma base cujas zonas têm áreas iguais, o hemisfério é o de maior volume.* O tratado *Sobre os cones e os esferoides* contém 32 proposições voltadas, principalmente, para uma investigação dos volumes das quádricas de revolução. Pappus atribui a Arquimedes 30 poliedros semirregulares mas, infelizmente, a descrição original que o gênio siracusano fez desses sólidos se perdeu¹.

Arquimedes escreveu dois opúsculos sobre aritmética, relacionados entre si, um dos quais se perdeu. O que se preservou, endereçado a Gelão, filho do rei Hierão, introduz um novo sistema de numeração; o objetivo era representar números muito grandes e assim poder-se encontrar um limite superior para o número de grãos de areia que preencheriam uma esfera de centro na Terra e raio alcançando o Sol. É nesse trabalho, entre observações relacionadas com a astronomia, que tomamos conhecimento de que Aristarco (c. 310-230 a.C.) antecipou a teoria heliocêntrica de Copérnico. Além desses dois trabalhos em aritmética, há o chamado *Problema do gado* que, a julgar por uma saudação, parece ter sido comunicado por Arquimedes a Eratóstenes. É um problema indeterminado difícil, envolvendo oito incógnitas inteiras relacionadas por sete equações lineares e sujeitas ainda a duas condições adicionais, a saber, que a soma de um certo par de incógnitas é um quadrado perfeito e que a soma de outro par determinado de incógnitas é um número triangular. Sem as condições adicionais, os menores valores das incógnitas são números da ordem de milhões; com essas condições, uma das incógnitas deve ser um número com mais que 206 500 dígitos!

Há dois trabalhos remanescentes de Arquimedes sobre matemática aplicada: *Sobre o equilíbrio de figuras planas* e *Sobre os corpos flutuantes*. O primeiro deles consta de dois livros e contém 25 proposições. Nele, mediante um tratamento postulacional, obtêm-se as propriedades elementares dos centroides e se determinam centroides de várias áreas planas, culminando com a do segmento parabólico e a de uma área limitada por uma parábola e duas cordas paralelas. Quanto a *Sobre os corpos flutuantes*, também um trabalho em dois livros, constitui-se de 90 proposições, e representa a primeira aplicação da matemática à hidrostática. O tratado, que se baseia em dois postulados, desenvolve primeiro as leis familiares da hidrostática que hoje fazem parte dos cursos

¹ Podem-se encontrar modelos de construção para os sólidos arquimedianos em Miles C. Hartley, *Patterns of Polyhedra*, ed. rev.

de física elementar. Depois disso considera alguns problemas bem mais difíceis, concluindo com um estudo notável sobre a posição de repouso e estabilidade de um segmento (reto) de parabolóide de revolução mergulhado num fluido. Outros tratados de física-matemática escritos por Arquimedes se perderam; Pappus menciona *Sobre alavancas* e Têon cita um teorema de outro trabalho pretensamente sobre a teoria dos espelhos. É possível que os dois livros de *Sobre o equilíbrio de figuras planas* fossem apenas parte de um trabalho de Arquimedes originalmente maior. Só no século XVI, com o trabalho de Simon Stevin, a ciência da estática e a teoria da hidrostática avançaram além do ponto a que Arquimedes chegara.

Uma das descobertas mais emocionantes da história da matemática ocorreu há relativamente bem pouco tempo, em 1906: foi o achado em Constantinopla por J. L. Heiberg do tratado de Arquimedes *O Método* — de longa data perdido. Esse tratado encontra-se na forma de uma carta endereçada a Eratóstenes e é importante devido às informações que fornece acerca do “método” que Arquimedes usava para descobrir muitos de seus teoremas. Embora o “método” seja suscetível de se tornar rigoroso pelos processos de integração modernos, Arquimedes o usava de maneira meramente heurística para descobrir resultados que ele então tratava de colocar em termos rigorosos mediante o método de exaustão. Como o “método” se liga intimamente às ideias do cálculo integral, deixamos para tratá-lo no Capítulo 11, dedicado especialmente à origem e ao desenvolvimento do cálculo.

Todo aluno ou professor desejoso de seguir estritamente a ordem cronológica pode, neste ponto, passar à Seção 11-4.

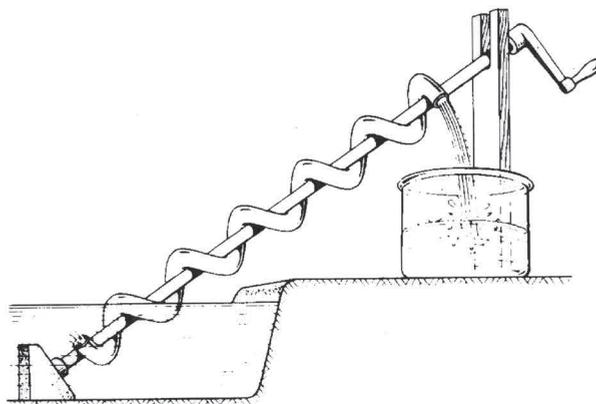
Atribuem-se dois outros trabalhos perdidos a Arquimedes: *Sobre o calendário* e *Sobre a construção de esferas*. No último havia a descrição de um planetário construído por ele para mostrar os movimentos do Sol, da Lua e dos cinco planetas conhecidos em seu tempo. Provavelmente o mecanismo era acionado pela água. O *Loculus Archimedi*, um quebra-cabeça instigante composto de 14 peças poligonais variadas a serem armadas de modo a formar um quadrado, com toda a certeza foi planejado por Arquimedes e é provável que seu nome seja uma maneira de expressar que ele é difícil e inteligente.

A invenção mecânica de Arquimedes mais conhecida é a bomba de água em parafuso, ideada por ele para irrigar campos, drenar charcos e retirar água de porões de navios. O engenho ainda é usado hoje no Egito.

6.3 Eratóstenes

Natural de Cirene, na costa sul do mar Mediterrâneo, Eratóstenes era apenas uns poucos anos mais novo que Arquimedes. Passou grande parte de sua vida em Atenas e, quando tinha cerca de 40 anos de idade, foi convidado por Ptolomeu III do Egito

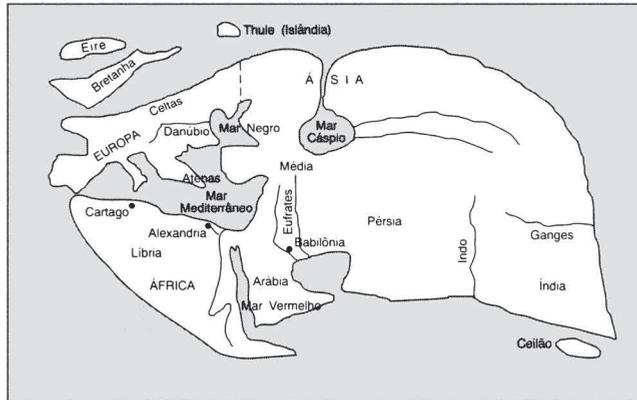
a mudar-se para Alexandria e ser tutor de seu filho e bibliotecário-chefe da Universidade local. Há relatos de que, por volta de 194 a.C., já com idade avançada, uma oftalmia o deixou quase cego. Desgostoso resolveu suicidar-se, deixando voluntariamente de se alimentar.



Desenho de uma bomba de água em parafuso de Arquimedes

Eratóstenes foi singularmente talentoso em todos os ramos do conhecimento de seu tempo. Distinguiu-se como matemático, astrônomo, geógrafo, historiador, filósofo, poeta e atleta. Consta que os alunos da Universidade de Alexandria costumavam chamá-lo de *Pentathlus*, o que significa campeão em cinco esportes atléticos. Era também conhecido como *Beta* e a respeito dessa alcunha aventaram-se algumas hipóteses. Alguns acreditam que, devido ao seu saber amplo e brilhante, era alçado à condição de um segundo Platão. Uma explicação menos abonadora propõe que, não obstante fosse ele talentoso em muitos campos, nunca conseguiu ser o primeiro de seu tempo em campo nenhum; em outras palavras, era sempre o segundo. Cada uma dessas explicações se enfraquece um pouco quando se toma conhecimento de que um certo astrônomo de nome Apolônio (muito provavelmente Apolônio de Perga) era chamado de *Epsilon*. Devido a isso o historiador James Gow sugeriu que talvez Beta e Epsilon simplesmente indicassem os números gregos (2 e 5) de certos gabinetes ou salas de leitura da Universidade, associados de alguma maneira particular aos dois homens. Ptolomeu Hefesto, por outro lado, defende que a alcunha de Apolônio decorria do fato de que ele estudava a Lua cujo símbolo era a letra 8.

Escritores que se seguiram a Eratóstenes citam vários de seus trabalhos. No Exercício 4.3 (c) vimos sua resolução mecânica do problema da duplicação. Sua realização matemática mais importante, a medida da circunferência da Terra, é o objeto do Exercício 6.1 (c).



Mapa do mundo de Eratóstenes

Eratóstenes se tornou célebre em aritmética devido a um dispositivo conhecido como *crivo*, usado para se acharem todos os números primos menores que um número n dado. Anotam-se, em ordem e começando por 3, todos os números ímpares menores que n . Eliminam-se os números compostos da sequência riscando-se, a partir do 3 (exclusive) todos os terceiros números que se seguem, depois, a partir do 5 (exclusive) todos os quintos números que se seguem e assim por diante. Nesse procedimento riscam-se alguns números mais do que uma vez. Todos os números não riscados, mais o número 2, formam a lista dos primos menores que n .

6.4 Apolônio

Euclides, Arquimedes e Apolônio são os três gigantes da matemática do século III a. C. Apolônio, que era cerca de 25 anos mais novo do que Arquimedes, nasceu por volta de 262 a.C. em Perga, no sul da Ásia Menor. Em algumas palavras pode-se dizer o pouco que se conhece sobre a vida de Apolônio. Quando jovem foi para Alexandria a fim de estudar com os sucessores de Euclides, e acabou ficando na cidade por longo tempo. Posteriormente visitou Pérgamo, no oeste da Ásia Menor, onde havia uma universidade e uma biblioteca recentemente criadas nos moldes das de Alexandria. Retornou depois a Alexandria onde morreu por volta de 190 a.C.

Embora Apolônio fosse um astrônomo notável e embora ele tivesse escrito sobre múltiplos assuntos matemáticos, sua fama se deve principalmente a *Secções cônicas*, uma obra extraordinária, graças à qual seus contemporâneos lhe deram o cognome de “O Grande Geômetra”. Com cerca de 400 proposições em seus oito livros, *Secções cônicas* é um estudo exaustivo dessas curvas que supera completamente os trabalhos anteriores de Menaecmo, Aristeu e Euclides sobre esse assunto. Apenas os primeiros sete dos oito livros chegaram até nós — os quatro primeiros em grego e os outros três numa tradução

árabe do século IX. Os quatro primeiros livros, dos quais I, II e III, supostamente se baseiam em trabalhos anteriores de Euclides, tratam da teoria elementar genérica das cônicas, ao passo que os outros entram em investigações mais especializadas.

Antes de Apolônio os gregos tiravam as cônicas de três tipos de cones de revolução, conforme o ângulo do vértice da secção meridiana fosse menor que, igual a ou maior que um ângulo reto. Seccionando-se cada um desses tipos de cone com um plano perpendicular a uma geratriz resultam respectivamente uma elipse, uma parábola e uma hipérbole. Só se considerava um ramo da hipérbole. Apolônio, porém, no Livro I de seu tratado, obtinha todas as secções cônicas da maneira hoje familiar, ou seja, a partir de um cone circular *duplo*, reto ou oblíquo.

Os nomes *elipse*, *parábola* e *hipérbole* foram introduzidos por Apolônio e foram tomados da terminologia pitagórica antiga referente à aplicação de áreas. Quando os pitagóricos aplicavam um retângulo a um segmento de reta (isto é, colocavam a base do retângulo ao longo do segmento de reta, com um vértice do retângulo sobre uma extremidade do segmento), eles diziam que se tinha um caso de “*ellipsis*”, “*parabole*” ou “*hyperbole*”, conforme a base do retângulo ficava aquém do segmento de reta, coincidia com ele ou o excedia. Seja então AB (ver Figura 46) o eixo principal de uma cônica, P um de seus pontos e Q o pé da perpendicular por P a AB . Por A , que é o vértice da cônica, trace a perpendicular a AB e marque nela uma distância AR igual ao que chamamos hoje *latus rectum*, ou *parâmetro* p , da cônica. Aplique a AR um retângulo tendo AQ como um dos lados e de área igual a $(PQ)^2$. Conforme a aplicação fique aquém do segmento de reta AR , coincida com ele ou o exceda, Apolônio chamava a cônica de *elipse*, *parábola* ou *hipérbole*. Em outras palavras, considerando-se a curva referida a um sistema de coordenadas cartesianas com eixos x e y ao longo, respectivamente, de AB e AR e denotando-se as coordenadas de P por x e y , então a curva é uma elipse, uma parábola ou uma hipérbole conforme $y^2 \begin{matrix} \geq \\ < \end{matrix} px$. Efetivamente, no caso da elipse e da hipérbole,

$$y^2 = px \mp \frac{px^2}{d},$$

onde d é o comprimento do diâmetro pelo vértice A . Apolônio deduziu o grosso da geometria das secções cônicas de equivalentes geométricos dessas equações cartesianas. Fatos como esse levam alguns a defender a tese de que a geometria analítica foi uma invenção dos gregos.

O Livro II do tratado *Secções Cônicas* de Apolônio ocupa-se de propriedades de assíntotas e hipérbolos conjugadas e do traçado de tangentes. O Livro III contém teoremas variados, incluindo alguns sobre áreas como: *Se as tangentes a uma cônica em dois pontos A e B se interceptam em C e também interceptam os diâmetros pôr B e A em D e E , então os triângulos CBD e CAE têm áreas iguais*. Encontram-se também propriedades harmônicas de polos e polares (um assunto familiar aos que fizeram um curso elementar de geometria projetiva) e teoremas relativos ao produto de segmentos de cordas que se interceptam. Dentre estes há o seguinte (hoje muitas vezes conhecido como *teorema*

de Newton): Se duas cordas PQ e MN , paralelas a duas direções dadas, se interceptam em O , então $(PO)(OQ)/(MO)(ON)$ é uma constante que independe da posição de O . As bem conhecidas propriedades focais das cônicas centrais aparecem perto do final do Livro III. Não há nenhuma menção, em todo o tratado, à propriedade foco-diretriz das cônicas nem, quanto a isso, ao foco da parábola. O que é curioso pois, de acordo com Pappus, Euclides tinha ciência dessas propriedades. Os gregos antigos não tinham um nome específico para “foco”; esse termo foi introduzido posteriormente por Johann Kepler (1571-1630). O Livro IV do tratado prova as recíprocas de algumas das proposições do Livro III relativas a propriedades harmônicas de polos e polares. Há também alguns teoremas sobre pares de cônicas que se interceptam. O Livro V é o mais notável e original dos que remanesceram. Ele aborda as normais como segmentos de reta máximos e mínimos tirados a um ponto da curva e ocupa-se da construção e enumeração de normais por um ponto dado. O assunto é estendido até o ponto em que se poderiam escrever as equações cartesianas das evolutas (envoltórias das normais) dos três tipos de cônicas! O Livro VI contém teoremas e problemas de construção relativos a cônicas iguais e semelhantes; mostra-se até como, para um cone reto dado, podem-se encontrar secções iguais a uma cônica dada. O Livro VII contém muitos teoremas envolvendo diâmetros conjugados, como por exemplo aquele que garante que são iguais as áreas dos paralelogramos formados pelas tangentes a uma cônica central nas extremidades de cada par de diâmetros desse tipo.

Secções cônicas é um grande tratado mas, devido à sua extensão, ao apuro de sua exposição e à pomposidade dos enunciados de várias proposições complexas, é muito penoso de se ler. O breve esboço de seu conteúdo feito acima já é suficiente para se perceber que ele é consideravelmente mais completo do que os cursos dados nas faculdades sobre o assunto.

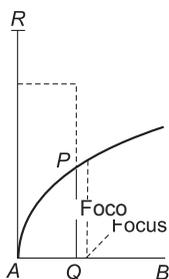


Figura 46

Pappus deu breves indicações dos conteúdos de seis outros trabalhos de Apolônio. São eles: *Sobre secções proporcionais* (181 proposições), *Sobre secções espaciais* (124 proposições), *Sobre secções determinadas* (83 proposições), *Tangências* (124 proposições), *Inclinações* (125 proposições) e *Lugares planos* (147 proposições). Só o primeiro deles sobreviveu, e em árabe. Ocupa-se do seguinte problema geral (ver Figura 47): Dadas duas retas a e b , com pontos fixos A em a e B em b , traçar por um ponto dado O uma

reta $OA'B'$ que corte a em A' e b em B' de modo que $AA'/BB' = k$ é constante. Os 77 casos considerados por Apolônio dão bem uma ideia do grau de exaustão da abordagem. O segundo trabalho ocupa-se de um problema semelhante, com a diferença de que a relação neste caso é $(AA')(BB') = k$. O terceiro trabalho focaliza o seguinte problema: Dados quatro pontos A, B, C, D numa reta, encontrar um ponto P dessa reta para o qual $(AP)(CP)/(BP)(DP) = k$. *Tangências* aborda o problema da construção de uma circunferência tangente a três circunferências dadas, permitindo-se a estas últimas que se degenerem independentemente em retas ou pontos. O problema, agora conhecido como *problema de Apolônio*, atraiu a atenção de muitos matemáticos, entre eles Viète, Euler e Newton. Uma das primeiras soluções empregando geometria cartesiana foi dada por uma discípula de Descartes, a princesa Elizabeth, filha do rei Frederico V da Boêmia. Provavelmente a mais elegante das soluções já fornecidas é a do oficial de artilharia e professor de matemática francês Joseph-Diez Gergonne (1771-1859). O problema geral em *Inclinações* era inserir um segmento de reta entre dois lugares dados, de tal maneira que a reta do segmento passasse por um ponto dado.

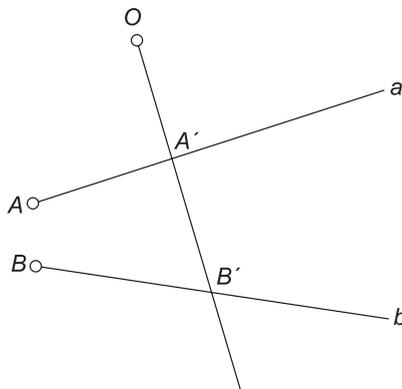


Figura 47

O último trabalho, *Lugares planos*, continha, entre muitas outras coisas, os dois teoremas:

1. Se A e B são pontos fixos e k é uma constante dada, então o lugar dos pontos P tais que $AP/BP = k$ é uma circunferência (se $k \neq 1$) ou uma reta (se $k = 1$).

2. Se A, B, \dots são pontos fixos e a, b, \dots , são constantes dadas, então o lugar dos pontos P tais que $a(AP)^2 + b(BP)^2 + \dots = k$ é uma circunferência.

O círculo associado ao primeiro desses teoremas é conhecido nos textos modernos de geometria superior como *círculo de Apolônio*.

Fizeram-se tentativas de restaurar todos os seis trabalhos acima: Edmond Halley, em 1706, os dois primeiros; Robert Simson, em 1749, o terceiro; Viète, em 1600, o quarto; Ghetaldi, em 1607 e 1613, Alexander Anderson, em 1612, e Samuel Horsley, em 1770,

o quinto; Fermat, em 1736, e Simson, em 1746, o último. A julgar por referências de escritores antigos, muitos outros trabalhos de Apolônio, além desses citados, se perderam.

6.5 Hiparco, Menelau, Ptolomeu e a trigonometria grega

As origens da trigonometria são obscuras. Há alguns problemas no papiro Rhind que envolvem a cotangente de um ângulo diedro da base de uma pirâmide e, como já vimos na Seção 2-6, a tábula cuneiforme babilônica *Plimpton 322* contém, essencialmente, uma notável tábua de secantes. É possível que as investigações modernas sobre a matemática da Mesopotâmia antiga venham a revelar um desenvolvimento apreciável da trigonometria prática. Os astrônomos babilônicos dos séculos IV e V a.C. acumularam uma massa considerável de dados de observações e hoje se sabe que grande parte desse material passou para os gregos. Foi essa astronomia primitiva que deu origem à trigonometria esférica.

É bem provável que o mais eminente dos astrônomos da Antiguidade tenha sido Hiparco, que viveu em torno de 140 a.C. Embora se tenham dados de um equinócio vernal registrado por Hiparco em Alexandria, no ano 146 a.C., suas observações mais notáveis foram feitas no famoso observatório de Rodas, importante centro comercial. Hiparco era um observador extremamente cuidadoso e creditam-se a ele, em astronomia, feitos como a determinação da duração do mês lunar médio (o afastamento entre seu valor e aquele presentemente aceito não vai além de 1''), um cálculo acurado da inclinação da eclíptica e a descoberta e uma estimativa da precessão anual dos equinócios. Consta ainda que ele calculou a paralaxe lunar, fez a determinação do perigeu e do movimento médio da Lua e organizou um catálogo de 850 estrelas. Foi Hiparco, ou talvez Hipsicles (c. 180 a.C.), quem introduziu na Grécia a divisão do círculo em 360°; sabe-se ainda que Hiparco propugnava a localização de pontos sobre a superfície da Terra por meio de latitudes e longitudes. Como quase nenhum dos escritos de Hiparco chegou até nós, tudo que se sabe sobre suas realizações científicas provém de fontes indiretas.

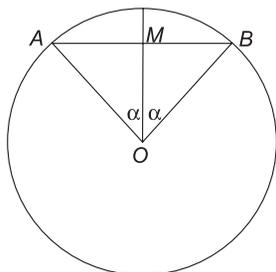


Figura 48

Para nós, porém, as realizações de Hiparco na astronomia são menos importantes que o papel que ele teve no desenvolvimento da trigonometria. O comentador Têon de Alexandria (sec. IV) atribui a Hiparco um tratado em 12 livros que se ocupa da construção de uma *tábua de cordas*. Acredita-se que uma tábua de cordas posterior, devida a Cláudio Ptolomeu, que fornece os comprimentos das cordas dos ângulos centrais de um círculo dado, de $1/2^\circ$ a 180° , com incrementos de $1/2^\circ$, pode ter-se baseado na de Hiparco. Divide-se o raio do círculo em 60 partes e se expressam os comprimentos das cordas sexagesimalmente em termos dessas partes. Assim, usando o símbolo $\text{crd } \alpha$ para representar o comprimento da corda do ângulo central α , encontram-se registros como

$$\text{crd } 36^\circ 37' 4'' ,$$

o que significa, obviamente, que a corda do ângulo central de 36° é igual a $37/60$ (ou trinta e sete partes pequenas) do raio, mais $4/60$ de uma dessas partes pequenas e mais $55/3600$ de uma dessas partes pequenas. Pela Figura 48 se nota que uma tábua de cordas é equivalente a uma tábua de senos trigonométricos, pois

$$\text{sen } \alpha = \frac{AM}{OA} = \frac{AB}{\text{diâmetro do círculo}} = \frac{\text{crd } 2\alpha}{120}.$$

Essencialmente, então, a tábua de cordas de Ptolomeu fornece os senos dos ângulos de 0° a 90° , com incrementos de $15'$. A maneira de se calcular os comprimentos dessas cordas, explicada em suas tábuas e, ademais, que estava a par dos processos equivalentes a várias fórmulas hoje usadas na resolução de triângulos esféricos retos.

Têon também mencionou um tratado sobre cordas de um círculo, em seis livros, escrito por Menelau de Alexandria, um contemporâneo de Plutarco (c. 100 d.C.). Esse trabalho, assim como vários outros de Menelau, se perdeu. Felizmente, porém, os três livros de seu tratado *Sphaerica* se preservaram numa versão árabe. Esse trabalho é como um foco de luz intensa sobre o desenvolvimento da trigonometria. No Livro I tem-se pela primeira vez a definição de *triângulo esférico*. O livro se dedica a estabelecer para os triângulos esféricos muitas das proposições estabelecidas por Euclides para os triângulos planos, como os teoremas usuais de congruência, teoremas sobre triângulos isósceles e assim por diante. Além disso, estabelece-se no texto a congruência de dois triângulos esféricos tais que os ângulos de um são respectivamente iguais aos ângulos do outro (para o qual não há nenhum análogo no plano) e o fato de que a soma dos ângulos de um triângulo esférico é maior do que dois ângulos retos. Consideram-se como congruentes triângulos esféricos simétricos. O Livro II contém teoremas de interesse da astronomia. No Livro III desenvolve-se a trigonometria esférica da época, deduzida grandemente do caso esférico da poderosa proposição conhecida como *teorema de Menelau*:

Se uma transversal intercepta os lados BC , CA , AB de um triângulo ABC nos pontos L , M e N , respectivamente, então

$$\left(\frac{AN}{NB}\right)\left(\frac{BL}{LC}\right)\left(\frac{CM}{MA}\right) = -1.$$

No análogo esférico tem-se um círculo máximo transversal que intercepta os lados BC , CA , AB de um triângulo esférico ABC nos pontos L , M , N , respectivamente. A conclusão correspondente é que

$$\left(\frac{\widehat{\text{sen } AN}}{\widehat{\text{sen } NB}}\right)\left(\frac{\widehat{\text{sen } BL}}{\widehat{\text{sen } LC}}\right)\left(\frac{\widehat{\text{sen } CM}}{\widehat{\text{sen } MA}}\right) = -1.$$

Menelau assume o caso plano como bem conhecido e o usa para estabelecer o caso esférico. Pode-se deduzir um montante considerável de trigonometria esférica a partir desse teorema, considerando-se triângulos e transversais particulares. Os recíprocos desses teoremas, no caso plano e no caso esférico, também são verdadeiros.

O trabalho grego definitivo sobre astronomia foi escrito por Cláudio Ptolomeu de Alexandria, por volta de 150 d.C. Baseado nos escritos de Hiparco, esse tratado de influência científica rara é famoso por sua compacidade e elegância. Posteriormente, para distingui-lo de trabalhos menores sobre astronomia, os comentadores associaram a ele o superlativo *magiste* ou “o maior”. Mais tarde ainda, os tradutores árabes fizeram preceder essa designação do artigo (de sua língua) *al* e daí em diante o trabalho passou a ser conhecido como *Almagesto*. O tratado se compõe de 13 livros. O Livro I contém, em meio a algum material astronômico preliminar, a tábua de cordas mencionada acima, acompanhada de uma explanação sucinta da maneira como ela foi obtida a partir da fértil proposição geométrica conhecida como *teorema de Ptolomeu: Num quadrilátero cíclico, o produto das diagonais é igual à soma dos produtos dos dois pares de lados opostos* (ver Exercício 6.9). O Livro II considera fenômenos que dependem da esfericidade da Terra. Os livros III, IV e V desenvolvem o sistema astronômico geocêntrico por meio de epiciclos. No Livro IV figura uma solução do *problema dos três pontos* da agrimensura: Determinar o ponto a partir do qual se veem os pares de três pontos dados segundo ângulos dados. Esse problema tem uma história longa e às vezes é conhecido como “Problema de Snell” (1617) ou “Problema de Pothenot” (1692). No Livro VI, em que é dada a teoria dos eclipses, encontra-se a aproximação de π , com quatro casas decimais, mencionada na Seção 4-8. Os Livros VII e VIII dedicam-se a apresentar um catálogo de 1028 estrelas fixas. E os livros restantes ocupam-se dos planetas. O *Almagesto* manteve-se um trabalho-modelo sobre astronomia até os tempos de Copérnico e Kepler.

Ptolomeu escreveu ainda sobre mapas, por meio de projeções (ver Exercício 6.10), óptica e música. Fez também uma tentativa de dedução do postulado V (ou das paralelas) de Euclides a partir dos outros postulados e dos axiomas dos *Elementos* – num esforço vão para eliminá-lo de entre as suposições iniciais desta obra.

6.6 Herão

Outro matemático do período que se destacou na matemática aplicada foi Herão de Alexandria. Há muita controvérsia a respeito da época exata em que ele viveu, havendo estimativas que variam de 150 a.C. a 250 d.C. Mais recentemente tem sido colocado na segunda metade do século I d.C. Seus trabalhos sobre matemática e física são tão numerosos e variados que é costume apresentá-lo como um enciclopedista dessas áreas. Há razões para se supor que Herão era um egípcio com formação grega. De qualquer maneira, seus escritos, que com tanta frequência enfatizam mais as aplicações práticas do que o acabamento teórico, mostram uma fusão curiosa do grego com o oriental. Ele se empenhou em fornecer uma fundamentação científica para a engenharia e a agrimensura. Cerca de 14 tratados de Herão, alguns visivelmente editados muitas vezes, chegaram até nós, e há referências a outros que se perderam.

Podem-se dividir os trabalhos de Herão em duas classes: a dos geométricos e a dos mecânicos. Os da primeira classe ocupam-se amplamente de problemas de mensuração e os da segunda da descrição de aparelhos mecânicos engenhosos.

Dos trabalhos geométricos de Herão, o mais importante é sua *A Métrica*, em três livros, e só descoberta em 1896 — em Constantinopla, por R. Schöne. O Livro I ocupa-se da medida da área de quadrados, retângulos, triângulos, trapézios, vários outros quadriláteros particulares, polígonos regulares desde o triângulo equilátero até o dodecágono regular, círculos e seus segmentos, elipses, segmentos parabólicos e da superfície de cilindros, cones, esferas e zonas esféricas. É nesse livro que se encontra a brilhante dedução da famosa fórmula da área de um triângulo em função dos três lados [ver Exercício 6.11 (d)]. Também tem interesse particular no livro o método de Herão de aproximar a raiz quadrada de um inteiro que não é quadrado perfeito. Esse processo é hoje usado com frequência pelos computadores — a saber, se $n = ab$, então $(a + b)/2$ é uma aproximação de \sqrt{n} , aproximação essa que melhora com a proximidade de a e b . O método permite sucessivas aproximações. Assim, se a_1 é a primeira aproximação de \sqrt{n} , então

$$a_2 = \frac{a_1 + \frac{n}{a_1}}{2}$$

é aproximação melhor, e

$$a_3 = \frac{a_2 + \frac{n}{a_2}}{2}$$

é melhor ainda, e assim por diante. O Livro II de *A métrica* ocupa-se da mensuração de volumes de cones, cilindros, paralelepípedos, prismas, pirâmides, troncos de cones e de pirâmides, esferas, segmentos esféricos, toros (anéis cilíndricos), os cinco sólidos regulares e alguns prismatoides [ver Exercício 6.11 (g)]. O Livro III aborda o problema da di-

visão de certas áreas e volumes em partes que estão entre si numa razão dada. Problemas como esses foram vistos no Exercício 3.11 (b) e (c).

Na *Pneumatica* de Herão há a descrição de cerca de 100 engenhos mecânicos e brinquedos, como um sifão, um carro de bombeiro, um dispositivo que abria as portas do templo ao se acender fogo num altar e um órgão de sopro. Sua *Dioptra* se ocupa da descrição e das aplicações à engenharia de uma forma antiga de teodolito. Na *Catoptrica* encontram-se as propriedades elementares dos espelhos e problemas relativos à construção de espelhos objetivando satisfazer certos requisitos, como fazer com que uma pessoa visse a parte de trás de sua cabeça ou que se visse de cabeça para baixo, entre outros. Os trabalhos de Herão em mecânica revelam um domínio apurado dos princípios básicos importantes da matéria.

6.7 Álgebra grega antiga

Em 1842, G. H. F. Nesselmann caracterizou, com propriedade, três estágios no desenvolvimento da notação algébrica. Primeiro se tem a *álgebra retórica* em que os argumentos da resolução de um problema são escritos em prosa pura, sem abreviações ou símbolos específicos. A seguir vem a *álgebra sincopada* em que se adotam abreviações para algumas das quantidades e operações que se repetem mais frequentemente. Finalmente chega-se ao último estágio, o da *álgebra simbólica*, em que as resoluções se expressam numa espécie de taquigrafia matemática formada de símbolos que aparentemente nada têm a ver com os entes que representam. É razoavelmente preciso dizer que a álgebra anterior à época de Diofanto (que será considerada na Seção 6-8) era retórica. Uma das principais contribuições de Diofanto à matemática foi a sincopação da álgebra grega. A álgebra retórica, porém, continuou de maneira bastante generalizada no resto do mundo, exceto na Índia, por muitas centenas de anos. Na Europa Ocidental, especificamente, a maior parte da álgebra permaneceu retórica até o século XV. E embora a aparição da álgebra simbólica se desse na Europa Ocidental no século XVI, somente pela metade do século XVII esse estilo acabou se impondo. Não raro passa despercebido que o simbolismo usado nos nossos textos de álgebra elementar ainda não tem 400 anos.

Uma das melhores fontes de problemas algébricos gregos antigos é a coleção conhecida como *Palatine* ou *Antologia grega*. Trata-se de uma coleção de 46 problemas numéricos, em forma epigramática, reunida por volta de 500 d.C. pelo gramático Metrôdoro. Embora alguns dos problemas possam ser da lavra do autor, há fortes razões para se acreditar que muitos deles são consideravelmente mais antigos. Os problemas, aparentemente planejados para recreação mental, são de um tipo mencionado por Platão e lembram grandemente alguns dos problemas do papiro Rhind. Metade deles leva a equações lineares simples numa incógnita, uma dúzia a sistemas de equações simples em duas incógnitas, um a três equações em três incógnitas e um a quatro equações em quatro incógnitas. Há também dois casos de equações indeterminadas do primeiro grau. Muitos desses problemas se parecem grandemente com outros tantos que figuram nos textos de álgebra elementar atuais. Nos Exercícios 6.13 e 6.14 há

alguns exemplos tirados da *Antologia grega*. Embora seja fácil resolver esses problemas com nosso moderno simbolismo algébrico, deve-se admitir que uma resolução retórica requereria uma atenção mental mais elevada. Já se observou que se podem resolver muitos desses problemas com a álgebra geométrica, mas acredita-se que na realidade eles foram resolvidos aritmeticamente, talvez mediante a *regra de falsa posição* (ver Seção 2-8). Não se sabe quando a álgebra grega passou da forma geométrica para a forma aritmética, mas provavelmente isso ocorreu já ao tempo de Euclides.

6.8 Diofanto

Diofanto de Alexandria teve uma importância enorme para o desenvolvimento da álgebra e uma grande influência sobre os europeus que posteriormente se dedicaram à teoria dos números. Tal como no caso de Herão, nada se sabe com certeza acerca da nacionalidade de Diofanto e da época exata em que viveu. Apesar de haver algumas evidências tênues de que possa ter sido contemporâneo de Herão, a maioria dos historiadores tende a situá-lo no século III de nossa era. Além do fato de que sua carreira floresceu em Alexandria, nada mais de certo se sabe sobre ele, embora se encontre na *Antologia grega* um epigrama que se propõe a dar alguns detalhes de sua vida [ver Exercício 6.15 (a)].

Diofanto escreveu três trabalhos: *Aritmética*, o mais importante, do qual remanesceram 6 dos 13 livros; *Sobre números poligonais* do qual restou apenas um fragmento; e *Porismas*, que se perdeu. A *Aritmética* teve muitos comentadores, mas a primeira voz a clamar por uma tradução do original grego foi a de Regiomontanus, isso em 1463, ao descobrir em Pádua um exemplar da obra. Uma tradução de muitos méritos, com comentários, foi feita em 1575 por Xilander (nome grego adotado por Wilhelm Holzmann, um professor da Universidade de Heidelberg). Essa tradução, por sua vez, foi usada pelo francês Bachet de Méziriac que, em 1621, publicou a primeira edição do texto em grego juntamente com uma tradução latina acompanhada de notas. Em 1670 apareceu uma segunda edição, impressa de maneira negligente, que, apesar disso, é historicamente importante pelo fato de conter as famosas notas marginais de Fermat que tanto estimularam as pesquisas em teoria dos números. Traduções para o francês, o alemão e o inglês só apareceram mais tarde.

A *Aritmética* é uma abordagem analítica da teoria algébrica dos números que eleva o autor à condição de gênio em seu campo. A parte remanescente do trabalho se dedica à resolução de 130 problemas, numa variedade considerável, que levam a equações do primeiro e do segundo graus. Só uma cúbica muito particular é resolvida. O primeiro livro se ocupa de equações determinadas em uma incógnita e os demais de equações indeterminadas de segundo grau, e às vezes de grau maior, em duas ou três incógnitas. É notável a falta de métodos gerais e a aplicação repetida de artifícios engenhosos ideados para as necessidades de cada problema específico. Diofanto só admitia respostas entre os números racionais positivos e, na maioria dos casos, satisfazia-se com uma resposta apenas do problema.

Há enunciados de teoremas penetrantes na *Aritmética*; assim é que encontramos, sem prova, mas com uma alusão a *Porismas*, que *a diferença entre dois cubos racionais é também a soma de dois cubos racionais* — uma questão que posteriormente iria merecer a atenção de Viète, Bachet e Fermat. Há muitas proposições relativas à representação de números como soma de dois, três ou quatro quadrados, um campo de investigações que iria ser completado mais tarde por Fermat, Euler e Lagrange. Talvez seja interessante enunciar alguns poucos problemas que se encontram na *Aritmética*; todos eles são atraentes e alguns são instigantes. Deve-se ter em mente que “número” significa “número racional positivo”.

Problema 28,² Livro II: Encontre dois números quadrados tais que seu produto acrescido de um deles resulta um número quadrado. (Resposta de Diofanto: $(3/4)^2$, $(7/24)^2$.)

Problema 6, Livro III: Encontre três números tais que a soma de todos é um quadrado e a soma de dois quaisquer deles também é um quadrado. (Resposta de Diofanto: 80,320,41.)

Problema 7, Livro III: Encontre três números em progressão aritmética, sabendo-se que a soma de dois quaisquer deles é um quadrado. (Resposta de Diofanto: $120\ 1/2$, $840\ 1/2$, $1560\ 1/2$.)

Problema 13, Livro III: Encontre três números tais que o produto de dois quaisquer deles, acrescido do terceiro, é um quadrado. [Ver Exercício 6.16(d).]

Problema 15, Livro III: Encontre três números tais que o produto de dois quaisquer deles, acrescido da soma dos mesmos dois, é um quadrado. [Ver Exercício 6.16(d).]

Problema 10, Livro IV: Encontre dois números tais que sua soma é igual à soma de seus cubos. (Resposta de Diofanto: $5/7$ e $8/7$.)

Problema 21, Livro IV: Encontre três números em progressão geométrica de maneira que a diferença entre dois quaisquer deles é um número quadrado. (Resposta de Diofanto: $81/7$, $144/7$ e $256/7$.)

Problema 1, Livro VI: Encontre um triângulo pitagórico em que a hipotenusa subtraída de cada um dos catetos é um cubo. (Resposta de Diofanto: 40, 96, 104.)

Problema 16, Livro VI: Encontre um triângulo pitagórico em que a medida da bissetriz de um dos ângulos agudos é racional. [Ver Exercício 6.15(c).]

Os problemas algébricos indeterminados em que se devem achar apenas as soluções racionais tornaram-se conhecidos como *problemas diofantinos*. Na verdade, o uso moderno dessa terminologia muitas vezes impõe a restrição de que as soluções sejam inteiras. Porém, essa espécie de problema não se originou com Diofanto. Também não foi ele o primeiro a trabalhar com equações indeterminadas ou a resolver equações quadráticas de maneira não geométrica, como às vezes se afirma. Contudo, pode ter

² A numeração dos problemas é aquela atribuída a eles em T. L. Heath, *Diophantus of Alexandria*. 2ª ed.

sido ele o primeiro a dar os primeiros passos rumo a uma notação algébrica. Esses passos têm a natureza de abreviações estenográficas.

Diofanto tinha abreviações para a incógnita, potências da incógnita até a de expoente seis, subtração, igualdade e inversos. Nossa palavra “aritmética” provém da palavra grega *arithmetike* que se compõe de *arithmos* (“número”) e *techné* (“ciência”). Heath assinalou bastante convincentemente que o símbolo usado por Diofanto para a incógnita provavelmente derivava por fusão das duas primeiras letras gregas da palavra *arithmos*, a saber, α e ρ . Com o tempo esse símbolo veio a se parecer com o sigma final grego ς . Embora haja dúvidas sobre isso, o significado das notações para as potências da incógnita parece bastante claro: assim, “incógnita ao quadrado” se indica por Δ^Y , as duas primeiras letras da palavra grega *dunamis* ($\Delta Y N A M I \Sigma$) que significa “potência” e “incógnita ao cubo” se denota por K^Y , as duas primeiras letras da palavra grega *kubos* ($K Y B O \Sigma$) que significa “cubo”. Facilmente se explicam os símbolos das potências seguintes da incógnita, $\Delta^Y \Delta$ (quadrado-quadrado), ΔK^Y (quadrado-cubo) e $K^Y K$ (cubo-cubo). O símbolo de Diofanto para “menos” assemelha-se a um V invertido com a bissetriz traçada nele. A explicação que se tem dado é que esse símbolo se comporia de Λ e I, letras da palavra grega *leipsis* ($\Lambda E I \Psi I \Sigma$) que significa “menos”. Todos os termos negativos de uma expressão eram reunidos e antes deles se escrevia o sinal de menos. Indicava-se a adição por justaposição; e o coeficiente da incógnita ou de uma potência qualquer da incógnita era representado por um numeral grego alfabético (Ver Seção 1-6) logo em seguida ao símbolo a que se deveria ligar. E quando houvesse um termo constante, então usava-se $\overset{\circ}{M}$, uma abreviação da palavra grega *monades* ($M O N A \Delta E \Sigma$), que significa “unidades”, seguido do coeficiente numérico apropriado. Assim, $x^3 + 13x^2 + 5x + x^3 - 5x^2 + 8x - 1$ se escreveriam

$$K^Y \alpha \Delta^Y \iota \gamma \varsigma \epsilon \quad \text{e} \quad K^Y \alpha \varsigma \eta \Lambda \Delta^Y \epsilon \overset{\circ}{M} \alpha,$$

expressões que, literalmente, podem ser lidas assim:

incógnita ao cubo 1, incógnita ao quadrado 13, incógnita 5

e

(incógnita ao cubo 1, incógnita 8) menos (incógnita ao quadrado 5, unidades 1).

Foi assim que a álgebra retórica se tornou álgebra sincopada.

6.9 Pappus

Os sucessores imediatos de Euclides, Arquimedes e Apolônio, prolongaram por algum tempo a tradição geométrica grega; mas esta começou a declinar firmemente, e os novos desenvolvimentos limitaram-se à astronomia, à trigonometria e à álgebra. Então, perto do final do século III d.C., cerca de 500 anos depois de Apolônio, surgiria um outro

grande geômetra, Pappus de Alexandria, que, com muita competência e entusiasmo, bem que se empenhou em reacender o interesse por sua matéria.

Pappus escreveu comentários sobre os *Elementos* e *Os dados* de Euclides e sobre o *Almagesto* e *Planisfério* de Ptolomeu, mas quase tudo que sabemos sobre isso é através da influência exercida sobre os escritos de comentadores que se seguiram. O trabalho realmente grande de Pappus é sua *Coleção matemática*, uma combinação de guia da geometria da época, acompanhado de comentários, com numerosas proposições originais, aprimoramentos, extensões e notas históricas. Dos oito livros que compunham a obra, perderam-se o primeiro e parte do segundo.

A julgar pelo que remanesceu, o Livro II da *Coleção matemática* ocupa-se de um método desenvolvido por Apolônio para escrever números grandes e operar com eles. O Livro III tem quatro partes: as duas primeiras lidam com a teoria das médias [ver, por exemplo, o Exercício 6.17(a)], com atenção especial ao problema da inserção de duas médias proporcionais entre dois segmentos de reta dados, a terceira com algumas desigualdades num triângulo e a quarta com a inscrição dos cinco poliedros regulares numa esfera dada.

No Livro IV encontra-se a extensão de Pappus ao teorema de Pitágoras [dada no Exercício 6.17(c)], a “proposição antiga” sobre o arbelos [enunciada no Exercício 6.4], a descrição, gênese e algumas propriedades da espiral de Arquimedes, da conchoide de Nicomedes e da quadratriz de Dinostrato, com aplicações aos três problemas famosos e uma discussão sobre uma espiral particular traçada sobre a superfície de uma esfera.

O Livro V dedica-se amplamente à discussão da *isoperimetria*, ou comparação de áreas de figuras que são limitadas por perímetros iguais e de volumes de sólidos que são limitados por áreas iguais. Há nesse livro também uma passagem interessante sobre abelhas, envolvendo propriedades de máximo e mínimo e os alvéolos dos favos de mel. É nesse livro que se encontra a referência de Pappus, mencionada na Seção 6-2, aos 13 poliedros semirregulares de Arquimedes. O Livro VI, sobre astronomia, ocupa-se dos tratados que deveriam ser estudados como introdução ao *Almagesto* de Ptolomeu.

O Livro VII é historicamente muito importante, pois dá uma descrição dos trabalhos que constituem *O tesouro da análise*, uma coleção que, à maneira dos *Elementos* de Euclides, pretende abarcar o material que se considerava essencial como bagagem do matemático profissional. Os 12 tratados discutidos são *Os dados*, *Porismas* e *Lugares de superfície* de Euclides; *Seções cônicas* e os seis trabalhos de Apolônio considerados perto do fim da Seção 6-4; *Lugares sólidos* de Aristeu e *Sobre médias* de Eratóstenes. Nesse livro encontra-se uma antecipação do teorema do centroide de P. Guldin (ver Exercício 6.18). E está nele também uma discussão do famoso “lugar relativo a três ou quatro retas”: *Se p_1, p_2, p_3, p_4 são os comprimentos dos segmentos de reta traçados de um ponto P a quatro retas dadas, de maneira a formar com elas ângulos dados, e se $p_1 p_2 = k p_3^2$, ou $p_1 p_2 = k p_3 p_4$, onde k é uma constante, então o lugar descrito por P é uma seção cônica.* Esse problema, resolvido por Apolônio, é historicamente importante porque, das tentativas de generalizá-lo para n retas, Descartes chegou em 1637 à formulação do método das coordenadas; os contemporâneos de Pappus não foram felizes nas tentativas de generalizar

o problema. Encontra-se também no livro o caso linear do *teorema de Stewart* dos textos de geometria superior — a saber, se A, B, C, D são quatro pontos de uma reta, então

$$(AD)^2(BC) + (BD)^2(CA) + (CD)^2(AB) + (BC)(CA)(AB) = 0,$$

onde os segmentos envolvidos estão afetados de sinal. Na verdade, Stewart foi antecipado na descoberta do teorema por Robert Simson para o caso mais geral em que D pode ser externo à reta ABC . Pode-se definir a razão dupla ou anarmônica (AB, CD) de quatro pontos colineares A, B, C, D como $(AC/CB)/(AD/DB)$ que é como a razão das razões em que C e D dividem o segmento AB . No Livro VII da *Coleção matemática*, Pappus demonstra que, se quatro semirretas de mesma origem (ver Figura 49) são cortadas por duas transversais nos pontos A, B, C, D (numa destas) e A', B', C', D' (na outra), então as razões duplas (AB, CD) e $(A'B', C'D')$ são iguais. Em outras palavras, a razão dupla de quatro pontos colineares é invariante por uma projeção. Esse teorema é fundamental na geometria projetiva. No livro em tela se tem a solução do problema: Dado um círculo, inscrever nele um triângulo cujos lados, prolongados se necessário, passam por três pontos colineares dados. Trata-se do *problema de Castillon-Cramer*, nome com que se tornou conhecido porque no século XVIII Cramer o generalizou para o caso de três pontos não necessariamente colineares e porque Castillon publicou uma solução dessa generalização em 1776. Lagrange, Euler, L'Huillier, Fuss e Lexell em 1780, também deram soluções do problema. Uns poucos anos mais tarde, um talentoso jovem italiano de 16 anos de idade, chamado Giordano, generalizou e resolveu elegantemente o problema para um círculo, um polígono de n lados e n pontos dados. Poncelet foi ainda além ao substituir o círculo por uma secção cônica arbitrária. No Livro VII aparece o primeiro registro do enunciado da propriedade foco-diretriz das três secções cônicas.

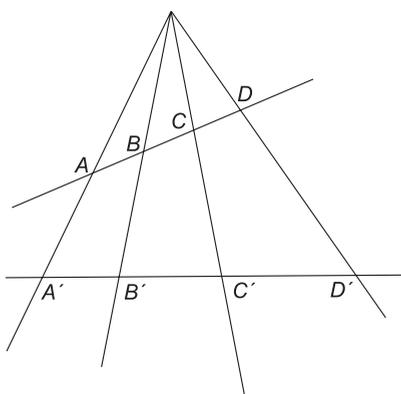


Figura 49

O Livro VIII, como o Livro VII, contém muito material que provavelmente se originou com Pappus. Nele se tem a solução do problema da construção de uma cônica

por cinco pontos dados. No Exercício 6.17(e) se apresenta uma proposição interessante, provavelmente devida a Pappus, contida nesse livro.

A *Coleção matemática* de Pappus é verdadeiramente uma mina rica em pepitas geométricas. Comparações, quando possíveis, têm mostrado que os comentários históricos contidos no trabalho são dignos de confiança. Devemos muito de nosso conhecimento da geometria grega a esse tratado, com suas citações ou referências a trabalhos de mais do que 30 matemáticos da Antiguidade. Poderíamos chamá-lo de réquiem ou canto do cisne da geometria grega.

6.10 Os comentadores

Depois de Pappus a matemática grega deixou de ser um campo de estudos ativo, e sua memória se perpetuou tão somente no trabalho de escritores menores e comentadores. Dentre esses estavam Têon de Alexandria, Hipátia, Proclo, Simplicio e Eutócio.

Têon viveu no turbulento período final do século IV d.C. e se deve a ele um comentário, em 11 livros, sobre o *Almagesto* de Ptolomeu. Cumpre lembrar, também, que as edições modernas dos *Elementos* de Euclides se baseiam na revisão do trabalho original feita por Têon.

Hipátia, filha de Têon, distinguiu-se em matemática, medicina e filosofia e escreveu comentários sobre a *Aritmética* de Diofanto e as *Secções cônicas* de Apolônio. Trata-se da primeira mulher a se dedicar à matemática cujo nome figura na história dessa ciência. Sua vida e seu bárbaro assassinio, cometido por um bando de fanáticos cristãos em março de 415, são reconstruídos num romance de Charles Kingsley³.

Hipátia aprendeu com seu pai, que tinha um cargo administrativo na Universidade de Alexandria. Depois de viajar por muitos anos, passou a lecionar matemática e filosofia em Alexandria, ou na Universidade local ou talvez em público. Suas aulas, muito elogiadas, atraíam grandes frequências. Dentre os que assistiam a elas estava Sinésio de Cirene (posteriormente Bispo de Ptolemaida), que se tornou um de seus principais amigos e admiradores. A maior parte dos escritos de Hipátia se perdeu, mas no século XV, na biblioteca do Vaticano, descobriu-se uma cópia de seu comentário já citado sobre obra de Diofanto. Ela assistiu seu pai na revisão final dos *Elementos* de Euclides. Hipátia nunca se casou, considerando-se, como asseverava, “casada com a verdade”.

Como líder da escola neoplatônica de filosofia, Hipátia desempenhava um papel destacado na defesa do paganismo contra o cristianismo. Isso despertou a ira do novo patriarca, Cirilo de Alexandria, que, com zelo excessivo, fazia oposição a todos os “hereges”, chegando a oprimi-los. Mas o que mais acendia o ódio de Cirilo era o fato de Hipátia se dedicar ao estudo de várias religiões. Um dia, quando ela voltava para casa, foi arrastada para fora de sua carruagem por uma turba que lhe arrancou os cabelos, descarnou-a com

³ *Hypatia, or New Foes with an Old Face*. Nova York, E. P. Dutton, 1907.

carapaças de ostras e lançou ao fogo os restos de seu corpo. Dessa maneira chegaram ao fim os dias criativos da célebre Universidade de Alexandria.

Os historiadores da matemática muito devem ao filósofo e matemático neoplatônico Proclo por seu *Comentário sobre o Livro I de Euclides*, uma de nossas principais fontes de informação sobre a história dos primeiros tempos da geometria elementar. Proclo teve acesso a trabalhos históricos e críticos (ou comentários sobre eles) que se perderam para nós, sendo a *História da geometria* de Eudemo, em quatro livros, e a aparentemente ampla *Teoria das ciências matemáticas* de Gêmino, os mais importantes. O comentário de Proclo sobre a *República* de Platão contém muitas passagens de interesse da história da matemática. Proclo estudou em Alexandria, tornou-se o líder da escola ateniense e morreu em Atenas no ano de 485 com a idade de 75 anos.

Também se deve consignar um crédito a Simplicio, o comentador de Aristóteles. Ele nos deixou descrições da tentativa de Antífon de quadrar o círculo, das lunas de Hipócrates e de um sistema de esferas concêntricas inventado por Eudoxo para explicar os movimentos aparentes dos membros do sistema solar. Escreveu também um comentário sobre o primeiro livro dos *Elementos* de Euclides, a partir do qual posteriormente se fizeram extratos árabes. Simplicio viveu na primeira metade do século VI e estudou em Alexandria e Atenas.

Provavelmente contemporâneo de Simplicio, Eutócio escreveu comentários sobre *A medida de um círculo*, *Sobre a esfera e o Cilindro* e *Sobre o equilíbrio de figuras planas* de Arquimedes e sobre *Secções cônicas* de Apolônio.

A escola ateniense (Academia) teve de enfrentar a oposição crescente dos cristãos, culminando com a obtenção, em 529 d.C., de um decreto do Imperador Justiniano que fechava suas portas para sempre. Simplicio e alguns outros filósofos e cientistas fugiram para a Pérsia, onde foram bem recebidos pelo rei Cosroês I e criaram o que se poderia chamar de Academia Ateniense da Pérsia. As sementes da ciência grega se transportaram para o solo muçulmano, onde encontraram o patrocínio necessário para vicejar por vários séculos⁴.

O destino da escola de Alexandria nas mãos dos cristãos foi um pouco melhor do que o da escola ateniense, posto que continuou a existir, ao menos parcialmente, até 641, quando Alexandria tombou ante os árabes. Estes, então, atearam fogo no que os cristãos tinham deixado. A longa e gloriosa história da matemática grega chegava ao fim.

Exercícios

6.1 Medições feitas por Aristarco e Eratóstenes

Aristarco de Samos (c. 287 a.C.) aplicou a matemática à astronomia. Tornou-se conhecido como o Copérnico da Antiguidade por ter formulado a hipótese heliocêntrica do sistema solar.

⁴ Ver George Sarton, *The History of Science*, vol. 1, p. 400.

(a) Usando instrumentos toscos, Aristarco observou que a distância entre a Lua, quando está exatamente meio cheia, e o Sol é $29/30$ de um ângulo reto. Com base nessa medição ele mostrou (sem a ajuda da trigonometria) que a distância da Terra ao Sol situa-se entre 18 e 20 vezes a distância da Terra à Lua. Verifique isso, utilizando-se do resultado da observação de Aristarco. (O ângulo em consideração é, na verdade, aproximadamente $89^{\circ}50'$.)

(b) Em seu opúsculo *Sobre os tamanhos e distâncias do Sol e da Lua*, Aristarco usou algo equivalente ao fato de que

$$\frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} b} < \frac{a}{b} < \frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} b},$$

onde $0 < b < a < \pi/2$. Admitindo-se conhecidos os gráficos das funções $\operatorname{sen} x$ e $\operatorname{tg} x$, mostre que $(\operatorname{sen} x)/x$ decresce e $(\operatorname{tg} x)/x$ cresce, conforme x cresce de 0 a $\pi/2$, estabelecendo assim as desigualdades acima.

(c) Eratóstenes, em 240 a.C., efetuou uma medição famosa da circunferência máxima da Terra. Ele observou que em Siena, ao meio dia do solstício de verão, uma vara na vertical não projetava nenhuma sombra, ao passo que em Alexandria (que ele acreditava estar no mesmo meridiano que Siena) os raios do Sol inclinavam-se de $1/50$ de um círculo completo em relação à vertical. Com a distância conhecida de 5000 estádios entre Alexandria e Siena, ele então pode calcular a circunferência da Terra. Obtenha o resultado de 250 000 estádios a que Eratóstenes chegou para essa circunferência. Há razões para se admitir que o estádio de Eratóstenes era aproximadamente igual a 559 pés. Assumindo esse valor, calcule a partir do resultado acima o diâmetro polar da Terra em milhas*. (O verdadeiro diâmetro polar da Terra, desprezadas as frações, é 7900 milhas.)

6.2 Sobre a esfera e o cilindro

(a) Verifique os dois resultados seguintes estabelecidos por Arquimedes em seu trabalho *Sobre a esfera e o cilindro*:

1. O volume da esfera é $2/3$ do volume do cilindro circunscrito a ela.
2. A área de uma superfície esférica é $2/3$ da área total do cilindro que a circunscribe.

(b) Defina *calota esférica*, *zona esférica*, *segmento esférico* (de uma e duas bases) e *setor esférico*.

(c) Admitindo o teorema: *A área de uma calota esférica, ou de uma zona esférica é igual ao produto da circunferência de um círculo máximo pela altura (da calota ou da zona)*, obtenha a fórmula familiar da área de uma superfície esférica e estabeleça o

* 1 milha = 1609 metros. (N. T.)

teorema: *A área de uma calota esférica é igual à de um círculo cujo raio é a corda do arco gerador.*

(d) Partindo do fato de que o volume do setor esférico é dado por

$$\frac{2}{3} \pi R^2 h,$$

onde R é o raio da esfera e h é a altura do setor, obtenha os seguintes resultados:

1. Se um segmento esférico de uma base, extraído de uma esfera de raio R , tem altura h e base de raio a , então seu volume V se expressa por

$$V = \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3} \right) = \pi h \left(\frac{3a^2 + h^2}{6} \right)$$

2. O volume de um segmento esférico de duas bases, tendo altura h e bases de raios a e b , é dado por

$$V = \frac{\pi h (3a^2 + 3b^2 + h^2)}{6}$$

3. O segmento esférico do segundo resultado é equivalente à soma de uma esfera de raio $h/2$ com dois cilindros de alturas $h/2$ e bases de raios a e b , respectivamente.

(e) No Livro II de *Sobre a esfera e o cilindro*, Arquimedes considera o problema que consiste em seccionar uma esfera dada por meio de um plano de modo a formar dois segmentos cujos volumes estejam numa razão dada. Mostre que, em notação moderna, isso leva à equação cúbica

$$n(R-x)^2(2R+x) = m(R+x)^2(2R-x),$$

onde R é o raio da esfera, x é a distância do plano ao centro da esfera e $m/n < 1$ é a razão dada.

(f) Mostre como se divide, por meio de dois planos paralelos, uma superfície esférica em três partes de áreas iguais.

6.3 O problema da coroa

A proposição 7 do primeiro livro do trabalho de Arquimedes *Sobre os corpos flutuantes* é a famosa lei da hidrostática: *Um corpo imerso num fluido recebe um impulso, de baixo para cima, de intensidade igual ao peso do fluido deslocado.*

(a) Considere uma coroa de peso w gramas formada de w_1 gramas de ouro e w_2 gramas de prata. Suponha que w gramas de ouro puro percam f_1 gramas quando imersos na água e que w gramas de prata pura percam f_2 gramas quando imersos na água e que a coroa perca f gramas quando imersa na água. Mostre que

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{f_2 - f}{f - f_1}$$

(b) Suponha que a coroa de (a) desloque um volume de v centímetros cúbicos quando imersa na água e que duas barras, uma de ouro puro e outra de prata pura que têm o mesmo peso da coroa, desloquem, respectivamente, v_1 e v_2 centímetros cúbicos quando imersas na água. Mostre que

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{v_2 - v}{v - v_1}$$

6.4 O Arbelos e o Salinon

O *Liber assumptorum* ou *O Livro dos Lemas*, que se preservou numa versão árabe, contém alguns teoremas geométricos elegantes atribuídos a Arquimedes. Dentre eles há algumas propriedades do *arbelos* ou “a face de sapateiro”. Sejam A, C, B três pontos de uma reta, dos quais C está entre A e B . Tomando AC, CB, AB como diâmetros, traçam-se três semicircunferências do mesmo lado da reta. O arbelos é a figura limitada por essas três semicircunferências. Por C erga a perpendicular a AB , cortando a semicircunferência maior em G . Suponha que a tangente externa comum às duas semicircunferências menores toque essas curvas em T e W . Denote AC, CB, AB por $2r_1, 2r_2, 2r$. Estabeleça as seguintes propriedades elementares do arbelos.

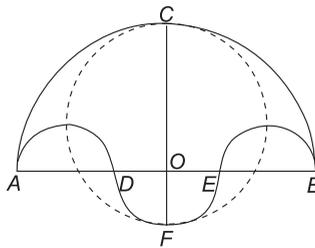


Figura 50

- (a) GC e TW são iguais e se bisseccionam mutuamente.
- (b) A área do arbelos é igual à área do círculo de diâmetro GC .
- (c) As retas GA e GB passam por T e W , respectivamente.

O arbelos tem muitas propriedades que não são fáceis de provar. Por exemplo, afirma-se que Arquimedes mostrou que os círculos inscritos nos triângulos curvilíneos ACG e BCG são iguais, sendo $r_1 r_2 / r$ o diâmetro de cada um deles. O menor círculo que tangencia e circunscreve esses dois círculos é igual ao círculo sobre GC e portanto tem área igual à do arbelos. Considere, no arbelos, uma cadeia de circunferências c_1, c_2, \dots , todas tangentes às semicircunferências sobre AB e AC , sendo que c_1 também é tangente à semicircunferência sobre BC , c_2 a c_1 e assim por diante. Então, se r_n representa o raio de c_n e h_n a distância de seu centro a ACB , temos $h_n = 2nr_n$. Essa última proposição se encontra no Livro IV da *Coleção Matemática* de Pappus onde é mencionada como uma “proposição antiga”.

(d) A proposição 14 do *Liber assumptorum* diz respeito à figura chamada *salinon* (“saleiro”). Tomando-se quatro pontos A, D, E, B numa mesma reta, na ordem em que foram escritos e com AD igual a EB , traçam-se as semicircunferências sobre AB, AD, DE e EB , como mostra a Figura 50. O *salinon* é a figura limitada por essas semicircunferências. A proposição referida afirma que a área total do *salinon* é igual à de um círculo de diâmetro sobre a reta de simetria FOC da figura. Prove isso.

6.5 O teorema da corda quebrada

O erudito árabe Abu'l Raihan al-Biruni (973-1048) atribuiu a Arquimedes o *teorema da corda quebrada*, o qual garante que se, como mostra a Figura 51, AB e BC formam uma corda quebrada num círculo, onde $BC > AB$, e se M é o ponto médio do arco ABC , então o pé F da perpendicular baixada de M sobre BC é o ponto médio da corda quebrada ABC .

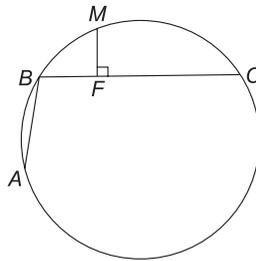


Figura 51

(a) Prove o teorema da corda quebrada.

(b) Fazendo arco $MC = 2x$ e arco $BM = 2y$, mostre sucessivamente que $MC = 2 \operatorname{sen} x$, $BM = 2 \operatorname{sen} y$, $AB = 2 \operatorname{sen}(x - y)$, $FC = 2 \operatorname{sen} x \cos y$ e $FB = 2 \operatorname{sen} y \cos x$. Mostre então que do teorema da corda quebrada decorre a identidade

$$\operatorname{sen}(x - y) = \operatorname{sen} x \cos y - \operatorname{sen} y \cos x.$$

(c) Usando o teorema da corda quebrada, obtenha a identidade

$$\operatorname{sen}(x + y) = \operatorname{sen} x \cos y + \operatorname{sen} y \cos x.$$

6.6 A propriedade foco-diretriz

(a) Embora os gregos definissem as cônicas como secções feitas em superfícies cônicas, nos textos e cursos de geometria analítica atuais é usual defini-las mediante a propriedade foco-diretriz. Estabeleça o lema seguinte (1) e então complete a demonstração simples, esboçada em (2), de que em qualquer secção de um cone circular reto vale a propriedade foco-diretriz.

1. Os comprimentos de dois segmentos de reta quaisquer ligando um ponto a um plano são inversamente proporcionais aos senos dos ângulos que formam com o plano

2. Denote por p o plano da secção do cone circular reto. Considere uma esfera tangente ao plano p em F e à superfície do cone segundo uma circunferência situada num plano que se chamará q (ver Figura 52). Indique por d a intersecção de p e q . De um ponto qualquer P da secção cônica baixe a perpendicular PR a d . Indique por E o ponto em que a geratriz por P corta a circunferência considerada no plano q . Por fim, seja α o ângulo entre os planos p e q e β o ângulo que uma geratriz do cone faz com o plano q . Mostre que $PF/PR = PE/PR = (\operatorname{sen} \alpha)/(\operatorname{sen} \beta) = e$ (constante). Assim, F é um foco, d é a diretriz correspondente e e é a excentricidade da secção cônica. [Essa abordagem simples e elegante foi descoberta por volta do primeiro quartel do século XIX pelos matemáticos belgas Adolphe Quetelet (1796-1874) e Germinal Dandelin (1794-1847).]

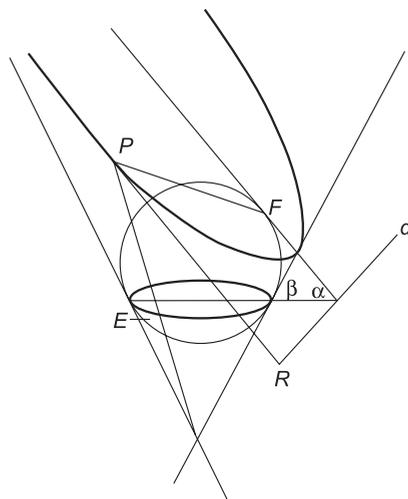


Figura 52

(b) Mostre que se p corta todas as geratrizes de uma das folhas da superfície cônica, então $e < 1$; se p é paralelo a uma, e uma só, geratriz da superfície cônica, então $e = 1$; e se p corta as duas folhas da superfície cônica, então $e > 1$.

6.7 Tangências

Em seu tratado (desaparecido) *Tangências*, Apolônio abordou o problema que consiste em traçar uma circunferência tangente a três outras dadas A, B, C , sendo permitido a estas assumir as formas degeneradas de pontos ou retas. Esse problema tornou-se conhecido como *problema de Apolônio*.

(a) Mostre que o problema de Apolônio comporta 10 casos, dependendo de A, B, C serem pontos, retas ou circunferências. Qual é o número de soluções para o caso geral?

(b) Resolva o problema para o caso em que A, B, C são dois pontos e uma reta.

(c) Reduza o problema no caso em que A, B, C são duas retas e um ponto à situação de (b).

(d) São dados o foco e a diretriz de uma parábola p e, ainda, uma reta m . Encontre, com os instrumentos euclidianos, os pontos de intersecção de p e m .

6.8 Problemas de Apolônio

(a) Resolva o fácil problema de *neusis* seguinte, considerado por Apolônio em seu trabalho *Inclinações*: Dada uma circunferência, inserir nela uma corda de comprimento dado e apontando para um ponto dado.

Um problema de *neusis* mais difícil considerado por Apolônio é o seguinte: Dado um losango com um lado prolongado, inserir um segmento de reta dado no ângulo exterior de modo que ele aponte para o vértice oposto. Huygens (1629-1695) forneceu várias soluções desse problema.

(b) Por meio da geometria analítica estabeleça os problemas (1) e (2) enunciados na Seção 6-4 a propósito do trabalho *Lugares planos* de Apolônio.

(c) Estabeleça sinteticamente o primeiro problema de (b) e também o seguinte caso particular do segundo problema de (b): O lugar geométrico dos pontos tais que a soma dos quadrados de suas distâncias a dois pontos fixos é constante é uma circunferência cujo centro é o ponto médio do segmento que une os dois pontos.

6.9 A tábua de cordas de Ptolomeu

(a) Prove o teorema de Ptolomeu: *Num quadrilátero cíclico, o produto das diagonais é igual à soma dos produtos dos pares de lados opostos.*

(b) Deduza, a partir do teorema de Ptolomeu, as seguintes relações:

1. Se a e b são as cordas de dois arcos de círculo de raio unitário, então

$$s = \frac{a}{2}(4 - b^2)^{1/2} + \frac{b}{2}(4 - a^2)^{1/2}$$

é a corda da soma dos dois arcos.

2. Se a e b , $a \geq b$, são as cordas de dois arcos de um círculo de raio unitário, então

$$d = \frac{a}{2}(4 - b^2)^{1/2} - \frac{b}{2}(4 - a^2)^{1/2}$$

é a corda da diferença dos dois arcos.

3. Se t é a corda de um arco de um círculo de raio unitário, então

$$s = \{2 - (4 - t^2)^{1/2}\}^{1/2}$$

é a corda do arco metade.

Num círculo de raio unitário, $\text{crd } 60^\circ = 1$, e, pode-se mostrar, $\text{crd } 36^\circ =$ parte maior do raio quando dividido em secção áurea [ver Exercício 3.10(d)] = 0,6180. Devido a (2), $\text{crd } 24^\circ = \text{crd } (60^\circ - 36^\circ) = 0,4158$. Por meio de (3) podem-se calcular as cordas de 12° , 6° , 3° , $90'$ e $45'$, obtendo-se $\text{crd } 90' = 0,0262$ e $\text{crd } 45' = 0,0131$. Devido ao Exercício 6.1(b), $\text{crd } 60' / \text{crd } 45' < 60/45 = 4/3$, ou $\text{crd } 1^\circ < (4/3)(0,0131) = 0,0175$. Ademais, $\text{crd } 90' / \text{crd } 60' < 90/60 = 3/2$, ou $\text{crd } 1^\circ > (2/3)(0,0262) = 0,0175$. Portanto, $\text{crd } 1^\circ = 0,0175$. Por meio de (3) podemos encontrar também $\text{crd } (1/2)^\circ$. Com isso podemos construir uma tábua de cordas com incrementos de $(1/2)^\circ$. Esse é o âmago do método de Ptolomeu para a construção de sua tábua de cordas.

(c) Mostre que as relações (1), (2) e (3) de (b) são equivalentes às fórmulas trigonométricas para $\text{sen } (\alpha + \beta)$, $\text{sen } (\alpha - \beta)$ e $\text{sen } (\theta/2)$.

Demonstre os interessantes resultados seguintes, como consequência do teorema de Ptolomeu: Se P pertence ao arco AB da circunferência circunscrita a

1. um triângulo equilátero ABC , então $PC = PA + PB$,
2. um quadrado $ABCD$, então $(PA + PC)PC = (PB + PD)PD$,
3. um pentágono regular $ABCDE$, então $PC + PE = PA + PB + PD$,
4. um hexágono regular $ABCDEF$, então $PD + PE = PA + PB + PC + PF$

6.10 Projeção estereográfica

Em seu *Planisfério* Ptolomeu desenvolveu a *projeção estereográfica* — uma aplicação pela qual se representam os pontos de uma esfera, exceto um dos polos, por suas projeções, a partir desse polo, sobre o plano equador. Tomando-se o polo Sul como centro de projeção (ver Figura 53), em que essa aplicação transforma:

- os paralelos da esfera?
- os meridianos da esfera?
- circunferências não máximas, sobre a superfície da esfera, passando pelo polo Sul?

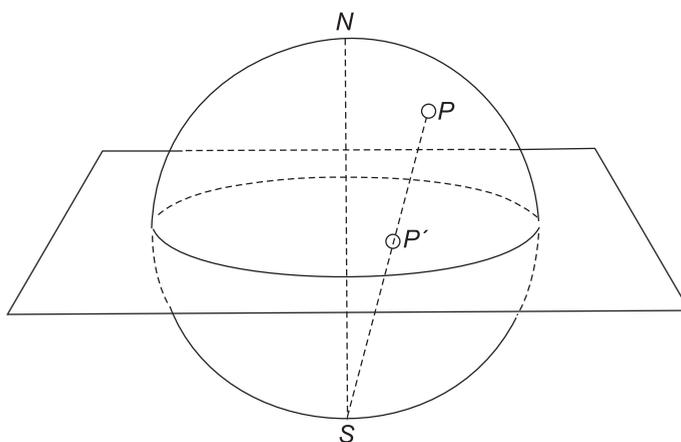


Figura 53

Pode-se provar que qualquer circunferência sobre a superfície da esfera e que não passa pelo polo Sul transforma-se numa circunferência do plano. A projeção estereográfica tem a propriedade muito importante de que é uma representação conforme — isto é, ela conserva os ângulos entre as curvas. Por que essa propriedade é importante ao se representar uma pequena parte da superfície da Terra sobre um plano? (Para um desenvolvimento interessante da trigonometria esférica a partir da trigonometria plana, através da projeção estereográfica, veja-se J. D. H. Donnay, *Spherical Trigonometry after the Cesàro Method*. Nova York, Interscience, 1945.)

6.11 Problemas de Herão

- Não se pode construir, com os instrumentos euclidianos, um heptágono regular. Em seu trabalho *A métrica*, Herão toma como aproximação do lado do heptágono o

apótema do hexágono regular que tem o mesmo circuncírculo. Quão boa é essa aproximação?

(b) Na *Catoptrica*, Herão prova, admitindo que a luz sempre percorre o caminho mais curto possível, que os ângulos de incidência e de reflexão num espelho são iguais. Prove isso.

(c) Um homem deseja ir de sua casa à margem de um rio reto para buscar um balde de água que, então, será transportado para um barracão situado do mesmo lado do rio que sua casa. Encontre o ponto da margem do rio que minimizará a distância a ser percorrida.

(d) Complete com os detalhes as seguintes indicações da dedução da chamada fórmula de Herão da área Δ de um triângulo ABC em termos de seus lados a, b, c .

1. Suponha que o incírculo tenha centro I , raio r e tangencie os lados BC, CA, AB em D, E, F , como mostra a Figura 54. Sobre o prolongamento de BC tome G de modo que $CG = AE$. Trace a perpendicular IH a BI , cortando BC em J e encontrando a perpendicular a BC por C em H .

2. Se $s = (a + b + c)/2$, então $\Delta = rs = (BG)(ID)$.

3. B, I, C, H estão numa mesma circunferência; daí $\sphericalangle CHB$ é o suplemento de $\sphericalangle BIC$ e então é igual a $\sphericalangle EIA$.

4. $BC/CG = BC/AE = CH/IE = CH/ID = CJ/JD$.

5. $BG/CG = CD/JD$.

6. $(BG)^2/(CG)(BG) = (CD)(BD)/(JD)(BD) = (CD)(BD)/(ID)^2$.

7. $\Delta = (BG)(ID) = \{(BG)(CG)(BD)(CD)\}^{1/2}$
 $= \{s(s-a)(s-b)(s-c)\}^{1/2}$

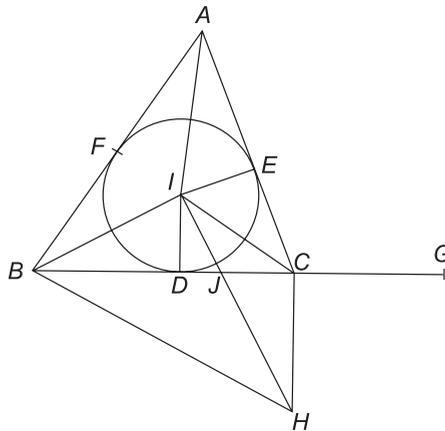


Figura 54

(e) Deduza a fórmula de (d) pelo seguinte processo: Seja h a altura relativa ao lado c e seja m a projeção do lado b sobre o lado c . (1) Mostre que $m = (b^2 + c^2 - a^2)/2c$. (2) Substitua esse valor de m em $h = (b^2 - m^2)^{1/2}$. (3) Substitua esse valor de h em $\Delta = (cb)/2$.

(f) Aproxime sucessivamente, pelo método de Herão, $\sqrt{3}$ e $\sqrt{720}$.

(g) Um poliedro tal que todos os seus vértices se situam em dois planos paralelos chama-se *prismatoide*. As duas faces nesses planos paralelos se denominam *bases* do prismatoide, a distância entre esses dois planos recebe o nome de *altura* do prismatoide e a secção paralela às bases e a meia distância delas se chama *secção média* do prismatoide. Indiquemos por V o volume do prismatoide, por U, L, M as áreas de base superior, da base inferior e da secção média e por h a altura, como mostra a Figura 55. Nos livros da geometria espacial métrica, mostra-se que

$$V = \frac{h(U + L + 4M)}{6}$$

No Livro II de *A métrica*, Herão dá como volume de um prismatoide com bases retangulares orientadas semelhantemente e tendo como pares de dimensões a, b e c, d ,

$$V = h \left[\frac{(a + c)(b + d)}{4} + \frac{(a - c)(b - d)}{12} \right]$$

Mostre que esse resultado é equivalente àquele dado pela fórmula anterior.

(h) Mostre que a “maior pirâmide egípcia” [ver Exercício 2.13(a)] é um caso particular de fórmula do prismatoide dada em (g).

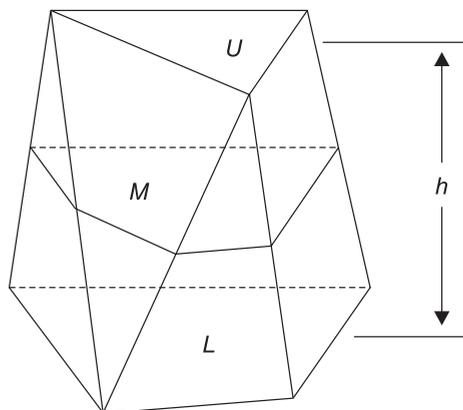


Figura 55

6.12 Sistemas de equações

(a) Timaridas, um matemático menor do século IV a.C., deu a seguinte regra para resolver um certo sistema de n equações em n incógnitas. A regra tornou-se tão bem conhecida que ganhou o título de *flor de Timaridas*: *Seja dada a soma de n quantidades, bem como a soma de todo par que contém uma particular delas; então essa quantidade particular é igual a $1/(n - 2)$ da diferença entre a soma de todos esses pares e a primeira soma.* Prove essa regra.

(b) Em alguns problemas que aparecem em coleções de Herão há as fórmulas

$$a, b = \frac{(r + s) \pm \{(r + s)^2 - 8rs\}^{1/2}}{2},$$

para os catetos a e b de um triângulo retângulo de perímetro $2s$ e raio do círculo inscrito r . Obtenha essas fórmulas.

6.13 Problemas da “Antologia Grega”

(a) De quantas maçãs se necessitam se 4 de 6 pessoas recebem $1/3$, $1/8$, $1/4$ e $1/5$, respectivamente, do número total, enquanto que a quinta recebe 10 maçãs e ainda resta uma maçã para a sexta pessoa?

(b) Democares viveu um quarto de sua vida como criança, um quinto como jovem, um terço como adulto e há 13 anos é ancião. Quantos anos ele tem?

(c) Depois de se manchar a coroa sagrada da equidistante justiça, de todo dinheiro conquistado, eu nada tenho, porque, sob maus auspícios, dei 40 talentos a meus amigos, enquanto, oh! múltiplos azares dos homens, eu vi meus inimigos de posse da metade, do terço e do oitavo de minha fortuna. (Quantos talentos o desditoso homem teve outrora?)

(d) As três Graças conduzem cestos de maçãs, cada um com a mesma quantidade. As nove Musas as encontram, solicitam maçãs e cada uma delas recebe o mesmo número; dessa forma as três Graças e as nove Musas ficam com a mesma quantidade de maçãs. Diga-me quantas maçãs cada uma das Graças tinha, quantas cada uma deu e com quantas cada uma ficou. (Esse problema é indeterminado. Encontre a menor solução possível.)

6.14 Problemas-tipo da “Antologia Grega”

Certos tipos de problemas padronizados que se encontram atualmente nos textos de álgebra elementar remontam a tempos antigos. Considere, por exemplo, os problemas do “trabalho”, da “cisterna” e da “mistura” que figuram na *Antologia Grega*.

(a) Oleiro, eu estou com pressa de erguer esta casa. Hoje está um dia límpido e eu não preciso de muitos tijolos mais, pois já tenho todos de que preciso menos 300. Vós sozinho em um dia poderíeis fazer essa quantidade, ao passo que vosso filho para de trabalhar quando acaba de fazer 200 e vosso genro quando acaba de fazer 250. Trabalhando os três juntos, em quantos dias todos fariam aquela quantidade?

(b) Eu sou um leão de latão; minhas gárgulas são meus dois olhos, minha boca e a sola de meu pé direito. Meu olho direito enche um cântaro em 2 dias (1 dia = 12 horas), meu olho esquerdo em 3 e meu pé em 4. Minha boca é capaz de enchê-lo em 6 horas. Diga-me em quantas horas as 4 juntas o encheriam.

(c) Faça uma coroa de ouro, cobre, estanho e ferro pesando 60 *minae*: o ouro e o cobre deverão constituir $\frac{2}{3}$ da coroa; o ouro e o estanho, $\frac{3}{4}$; e o ouro e o ferro, $\frac{3}{5}$; encontre os pesos de ouro, cobre, estanho e ferro necessários. [Trata-se de uma ilustração numérica da *flor de Timaridas*. Ver Exercício 6.12(a).]

6.15 Diofanto

(a) Quase tudo que conhecemos sobre a vida pessoal de Diofanto está contido no seguinte sumário de um epitáfio que aparece na *Antologia Grega*: “Diofanto passou $\frac{1}{6}$ de sua vida como criança, $\frac{1}{12}$ como adolescente e mais $\frac{1}{7}$ na condição de solteiro. Cinco anos depois de se casar nasceu-lhe um filho que morreu 4 anos antes de seu pai, com metade da idade (final) de seu pai”. Com quantos anos Diofanto morreu?

(b) Resolva o seguinte problema da *Aritmética* de Diofanto (Problema 17, Livro I): Encontre 4 números, sendo dadas as somas de 3 combinações quaisquer deles; digamos, 22, 24, 27 e 20.

(c) Resolva o seguinte problema, que também se encontra na *Aritmética* (Problema 16, Livro VI): No triângulo retângulo ABC , de ângulo reto em C , AD bissecciona o ângulo A . Determine o conjunto constituído dos menores inteiros para AB , AD , AC , BD , DC de maneira que $DC : CA : AD = 3 : 4 : 5$.

(d) Augustus De Morgan, que viveu no século XIX, propôs a seguinte adivinhação: “Eu tinha x anos de idade no ano x^2 ”. Em que ano ele nasceu?

6.16 Alguma teoria dos números da “Aritmética”

(a) Estabeleça as identidades

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac \pm bd)^2 + (ad \mp bc)^2$$

e utilize-as para expressar $481 = (13)(37)$ como soma de dois quadrados de duas maneiras diferentes.

Posteriormente, em 1202, Fibonacci deu essas identidades em seu *Liber abaci*. Ele mostrou que o produto de 2 números que podem ser expressos como soma de 2 quadrados também é exprimível como soma de 2 quadrados. Pode-se mostrar que essas identidades incluem as fórmulas de adição para o seno e o cosseno. Mais tarde elas se tornaram o germe da teoria gaussiana das formas quadráticas aritméticas e de certos desenvolvimentos em álgebra moderna.

(b) Exprese $1105 = (5)(13)(17)$ como soma de dois quadrados de quatro maneiras diferentes.

Nos dois problemas seguintes “número” significa “número racional positivo”.

(c) Se m e n são números diferentes de 1 e se x, y, a são números tais que $x + a = m^2, y + a = n^2$, mostre que $xy + a$ é um número quadrado.

(d) Se m é um número qualquer e $x = m^2, y = (m + 1)^2, z = 2(x + y + 1)$, mostre que os 6 números $xy + x + y, yz + y + z, zx + z + x, xy + z, yz + x, zx + y$ são números quadrados.

6.17 Problemas de Pappus

(a) No Livro III da *Coleção matemática* de Pappus, encontramos as seguintes representações geométricas interessantes de algumas médias. Tome B no segmento AC , B diferente do ponto médio O de AC . Erga a perpendicular a AC por B , cortando a semicircunferência sobre AC em D e seja F o pé da perpendicular tirada de B sobre OD . Mostre que OD, BD, FD representam as médias aritmética, geométrica e harmônica dos segmentos AB e BC e mostre que, se $AB \neq BC$ então

$$\text{média aritmética} > \text{média geométrica} > \text{média harmônica}$$

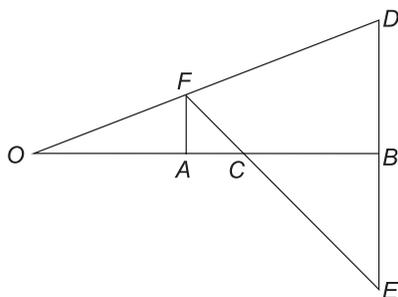


Figura 56

(b) No Livro III da *Coleção Matemática*, Pappus fornece a seguinte construção elegante da média harmônica dos dois segmentos OA e OB dados na Figura 56. Na perpendicular por B a OB marque $BD = BE$ e seja F o ponto de intersecção de OD com

a perpendicular a OB por A . Trace FE e seja C sua intersecção com OB . Então OC é a média harmônica procurada. Prove isso.

(c) Prove a seguinte extensão do Teorema de Pitágoras, dada por Pappus no Livro IV da *Coleção matemática*. Sejam ABC (ver Figura 57) um triângulo genérico e $ABDE$ e $ACFG$ dois paralelogramos quaisquer descritos sobre AB e AC , externamente ao triângulo. Seja H a intersecção de DE e FG e trace BL e CM iguais e paralelos a HA . Então

$$BCML \text{ (paralelogramo)} = \text{paralelogramo } ABDE + \text{paralelogramo } ACFG$$

(d) Generalize o teorema de (c) para o espaço tridimensional, substituindo o triângulo por um tetraedro e os paralelogramos sobre os lados do triângulo por prismas triangulares sobre as faces do tetraedro.

(e) No Livro VIII da *Coleção matemática*, Pappus estabelece o seguinte teorema: Se D, E, F são pontos dos lados BC, CA, AB do triângulo ABC e $BD/DC = CE/EA = AF/FB$, então os triângulos DEF e ABC têm centroide comum. Prove isso, sintética ou analiticamente.

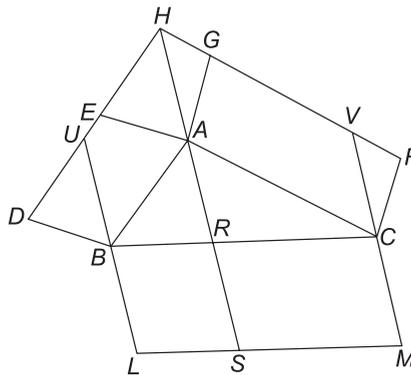


Figura 57

6.18 Os teoremas do centroide

No Livro VII da *Coleção matemática*, Pappus antecipou um dos teoremas do centroide creditados às vezes a P. Guldin (1577-1642). Podem-se enunciar esses teoremas como se segue:

1. Girando-se um arco plano em torno de um eixo de seu plano, eixo esse que não corta o arco, a área da superfície de revolução assim formada é igual ao produto do comprimento do arco pelo da trajetória descrita pelo centroide do arco.

2. Girando-se uma região plana em torno de um eixo de seu plano, eixo esse que não corta a região, o volume do sólido de revolução assim formado é igual ao produto da área da região pelo comprimento da trajetória descrita pelo centroide da região.

Usando esses teoremas, determine:

(a) O volume e a área da superfície de um toro obtido ao girar-se um círculo de raio r em torno de um eixo, no plano do círculo, à distância $R > r$ do centro do círculo.

(b) O centroide de um arco semicircular.

(c) O centroide de uma área semicircular.

(O teorema antecipado por Pappus é o segundo enunciado acima; na verdade trata-se do teorema mais geral envolvendo o cálculo a ser descoberto na Antiguidade.)

6.19 O compasso para construção de elipses

Atribui-se a Proclo o seguinte teorema: *Se um segmento de reta de comprimento fixo se move com suas extremidades em duas retas concorrentes, então um ponto fixo do segmento, ou de seu prolongamento, descreve uma elipse.*

(a) Como as duas retas do teorema de Proclo, escolha um par de eixos retangulares Ox e Oy e seja AB o segmento de comprimento fixo. Tome P em AB (prolongado, se necessário) e denote AP por a e BP por b . Mostre que, conforme A se move no eixo y e B se move no eixo x , P descreve a elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

(b) Projete um instrumento simples (um *elipsógrafo*), baseado no resultado de (a), para descrever uma elipse de semieixos a e b .

6.20 O teorema de Menelau

Um ponto que se situa numa reta pelo lado de um triângulo, mas que não coincide com nenhum dos vértices do triângulo, chama-se *ponto de Menelau* do triângulo relativamente a esse lado. Prove a seguinte cadeia de teoremas, em que todos os segmentos e ângulos são segmentos e ângulos orientados:

(a) *Teorema de Menelau:* Para que 3 pontos de Menelau D, E, F relativos aos lados BC, CA, AB de um triângulo ABC sejam colineares é necessário e suficiente que

$$\left(\frac{BD}{DC} \right) \left(\frac{CE}{EA} \right) \left(\frac{AF}{FB} \right) = -1$$

(b) Ligando-se o vértice O de um triângulo BOC ao ponto D (distinto de B e C) da reta BC , então

$$\frac{BD}{DC} = \frac{OB}{OC} \frac{\text{sen } BOD}{\text{sen } DOC}$$

(c) Sejam D, E, F pontos de Menelau relativos aos lados BC, CA, AB de um triângulo ABC e seja O um ponto do espaço, fora do plano do triângulo ABC . Então os pontos D, E, F são colineares se, e somente se,

$$\left(\frac{\text{sen } BOD}{\text{sen } DOC} \right) \left(\frac{\text{sen } COE}{\text{sen } EOA} \right) \left(\frac{\text{sen } AOF}{\text{sen } FOB} \right) = -1.$$

(d) Sejam D', E', F' pontos de Menelau relativos aos lados $B'C', C'A', A'B'$ de um triângulo esférico $A'B'C$. Então D', E', F' pertencem a uma circunferência máxima da esfera se, e somente se,

$$\left(\frac{\text{sen } \widehat{B'D'}}{\text{sen } \widehat{D'C'}} \right) \left(\frac{\text{sen } \widehat{C'E'}}{\text{sen } \widehat{E'A'}} \right) \left(\frac{\text{sen } \widehat{A'F'}}{\text{sen } \widehat{F'B'}} \right) = -1.$$

(Esse é o caso esférico do teorema de Menelau usado por Menelau em sua *Sphaerica*.)

6.21 Mais sobre médias

Se a e b são números reais, as seguintes médias de a e b mostraram-se úteis:

1. aritmética: $A = (a + b)/2$

2. geométrica: $G = \sqrt{ab}$

3. harmônica: $H = 2ab/(a + b)$

4. heroniana: $h = a + \sqrt{ab} + b$

5. contra-harmônica: $c = (a^2 + b^2)/(a + b)$

6. raiz da média dos quadrados: $r = \sqrt{(a^2 + b^2)/2}$

7. centroidal: $g = 2(a^2 + ab + b^2)/3(a + b)$

(a) Se $a \neq b$, mostre que

$$c > r > g > A > h > G > H.$$

(b) Se a^2, b^2, c^2 estão em progressão aritmética, então $b + c, c + a, a + b$ estão em progressão harmônica.

(c) Se a, b, c estão em progressão harmônica, então ocorre o mesmo com $a/(b + c), b/(c + a), c/(a + b)$.

(d) Inserindo-se duas médias aritméticas A_1 e A_2 , duas médias geométricas G_1 e G_2 e duas médias harmônicas H_1 e H_2 entre a e b , então $G_1 G_2 : H_1 H_2 = A_1 + A_2 : H_1 + H_2$.

(e) Suponhamos que a e b , $a > b$, denotem os comprimentos da base inferior e superior, respectivamente, de um trapézio. Então qualquer segmento de reta paralelo às bases e com extremidades nos lados não paralelos do trapézio é alguma *média* das bases a e b . Mostre que:

1. A média aritmética divide ao meio os lados do trapézio.
2. A média geométrica divide o trapézio em dois trapézios semelhantes.
3. A média harmônica passa pela intersecção das diagonais.
4. A média heroniana está a $1/3$ do percurso que vai da média aritmética à média geométrica.
5. A média contra-harmônica situa-se abaixo da média aritmética tanto quanto a média harmônica está acima da média aritmética.
6. A raiz da média dos quadrados divide ao meio a área do trapézio.
7. A média centroidal passa pelo centroide da área do trapézio.

(f) Trace um trapézio de bases a e b e construa os segmentos de (e). Verifique então geometricamente as desigualdades de (a).

(g) O número $(a + wb)/(1 + w)$, $w > 0$, é chamado *média com peso w* de a e b . Mostre que as seguintes médias de a e b têm os pesos indicados:

1. aritmética: $w = 1$
2. geométrica: $w = \sqrt{a/b}$
3. harmônica: $w = a/b$
4. heroniana: $w = -(\sqrt{a/b} + b - 2a)/(\sqrt{a/b} + a - 2b)$
5. contra-harmônica: $w = b/a$
6. raiz da média dos quadrados:

$$w = -(\sqrt{a^2 + b^2} - a\sqrt{2}) / (\sqrt{a^2 + b^2} - b\sqrt{2})$$

7. centroidal: $w = -(a^2 + ab - 2b^2)/(b^2 + ab - 2a^2)$

(h) Sejam PT e PS as tangentes a uma circunferência dada por um ponto P externo a ela. Seja C o ponto de intersecção de TS com a secante diametral PBA . Mostre que PC é a média harmônica de PA e PB .

(i) Sejam CD e CE as bissetrizes interna e externa do ângulo C de um triângulo ABC . Mostre que AB é a média harmônica de AD e AE .

(j) Seja s o lado de um quadrado inscrito num triângulo. Supõe-se ainda que um dos lados do quadrado está sobre a base do triângulo. Mostre que s é metade da média harmônica da base e da altura do triângulo (esta relativa à base).

(k) Seja s o lado de um quadrado inscrito num triângulo retângulo. Supõe-se ainda que um dos ângulos do quadrado coincida com o ângulo reto do triângulo. Mostre que s é a metade da média harmônica dos catetos do triângulo.

(l) Seja ABC um triângulo cujo ângulo em B mede 120° e seja BT a bissetriz do ângulo B . Mostre que BT é a metade da média harmônica de BA e BC .

(m) Sejam s , a , b as cordas de $1/7$, $2/7$ e $3/7$ da circunferência de um círculo. Mostre que s é metade da média harmônica de a e b .

(n) Um carro viaja à razão de r_1 quilômetros por hora de A até B e então retorna de B a A à razão de r_2 quilômetros por hora. Mostre que a velocidade média do percurso de ida e volta é a média harmônica de r_1 e r_2 .

(o) Uma precaução comum tomada quando se trabalha com uma balança de braços iguais e se suspeita que os braços apresentam alguma diferença é a chamada *dupla pesagem*. Coloca-se o peso desconhecido no prato esquerdo e obtém-se o equilíbrio com um peso w_1 no outro prato; a seguir põe-se o peso desconhecido no prato direito e obtém-se o equilíbrio com um peso w_2 no outro prato. Mostre que o peso desconhecido é a média geométrica de w_1 e w_2 .

(p) Mostre que a média centroidal de a e b é igual à média heroniana de a^2 e b^2 dividida pela média aritmética de a e b .

(q) Mostre que $g = (H + 2c)/3 = (2A + c)/3$.

Temas

- 6/1 Por que Arquimedes é considerado o maior matemático da Antiguidade?
- 6/2 Os sólidos arquimedianos, com modelos de construção.
- 6/3 Arquimedes como inventor do cálculo integral.
- 6/4 Menaecmo e Apolônio como inventores da geometria analítica.
- 6/5 As obras de Eratóstenes.
- 6/6 As contribuições matemáticas dos astrônomos gregos.
- 6/7 A influência de Herão no desenvolvimento da matemática aplicada.
- 6/8 A primeira mulher matemática.
- 6/9 A escola alexandrina de matemática.
- 6/10 Médias.
- 6/11 A matemática na civilização romana.
- 6/12 A “Antologia Grega”.
- 6/13 Mapas do mundo, segundo Hecateu, Eratóstenes e Ptolomeu.

Bibliografia

- AABOE, Asger. "Episodes from the early history of mathematics". *New Mathematical Library*, nº 13. Nova York, Random House and L. W. Singer, 1964.
- APOLLONIUS OF PERGA. *Conics*. Trad. para o inglês por R. Catesby Taliaferro (Classics of the St. John's program), Annapolis (Md.), R. C. Taliaferro, 1939, 3 vols.
- BARON, Margaret. *Origins of the Infinitesimal Calculus*. Nova York, Pergamon, 1969. Reimpresso por Dover, Nova York, 1987.
- BUNT, L. N. H.; JONES, P. S. e BEDIANT, J. D. *The Historical Roots of Elementary Mathematics*. Englewood Cliffs (N. J.), Prentice-Hall, 1976.
- CLAGETT, Marshall. *Greek Science in Antiquity*. Nova York, Abelard Schuman, 1955. Paperback edition, Nova York, Collier Books, 1963.
- _____. *Archimedes in the Middle Ages*. Madison (Wis.), University of Wisconsin Press, 1964, 2 vols.
- COHEN, M. R. e DRABKIN, I. E. *A Source Book in Greek Science*. Nova York, McGraw-Hill, 1948. Reimpresso pela Harvard University Press, Cambridge (Mass.), 1958.
- COOLIDGE, J. L. *History of the Conic Sections and Quadric Surfaces*. Nova York, Oxford University Press, 1945.
- _____. *History of Geometric Methods*. Nova York, Oxford University Press. Paperback edition, Nova York, Dover, 1963.
- DANTZIG, Tobias. *The Bequest of the Greeks*. Nova York, Charles Scribner's, 1955.
- DAVIS, Harold T. *Alexandria, the Golden City*. Evanston, Principia Press of Illinois, 1957, 2 vols.
- DIJKSTERHUIS, E. J. *Archimedes*. Nova York, Humanities Press, 1957.
- EVES, Howard. *A Survey of Geometry*. Boston, Allyn and Bacon, 1972, vol. 1.
- GOW, James. *A Short History of Greek Mathematics*. Nova York, Hafner, 1923. Reimpresso por Chelsea, Nova York.
- HARTLEY, Miles C. *Patterns of Polyhedra*. Ed. rev., Ann Arbor (Mich.), Edwards Brothers, 1957.
- HEATH, T. L. *The Works of Archimedes*. Nova York, Cambridge University Press, 1897. Reimpresso por Dover, Nova York.
- _____. *Diophantus of Alexandria*. Ed. rev., Nova York, Cambridge University Press, 1910. Reimpresso por Dover, Nova York, 1964.
- _____. *Aristarchus of Sama*. Nova York, Oxford University Press, 1913. Reimpresso por Dover, Nova York, 1981.
- _____. *History of Greek Mathematics*, vol. 2. Nova York, Oxford University Press, 1921. Reimpresso por Dover, Nova York, 1981.
- _____. *A Manual of Greek Mathematics*. Nova York, Oxford University Press, 1931.
- _____. *Apollonius of Perga, Treatise on Conic Sections*. Nova York, Barnes and Noble, 1961.

- JOHNSON, R. A. *Modern Geometry, an Elementary Treatise on the Geometry of the Triangle and the Circle*. Boston, Houghton Mifflin Company, 1929. Reimpresso por Dover, Nova York.
- MESCHKOWSKI, Herbert. *Ways of Thought of Great Mathematicians*. Trad. para o inglês por John Dyer-Bennet, São Francisco, Holden-Day, 1964.
- ORE, Oystein. *Number Theory and Its History*. Nova York, McGraw-Hill, 1948.
- PETERS, C. H. F. e KNOBEL, E. B. *Ptolemy's Catalogue of Stars: A Revision of the Almagest*. Washington, D. C., Carnegie Institution, 1915.
- SARTON, George. *Ancient Science and Modern Civilization*. Lincoln (Neb.), University of Nebraska Press, 1954.
- STAHL, W. H. *Ptolemy's Geography: A Select Bibliography*. Lincoln (Neb.), University of Nebraska Press, 1954.
- . *Roman Science*. Madison (Wis.), University of Wisconsin Press, 1962.
- THOMAS, Ivor. *Selections Illustrating the History of Greek Mathematics*. Cambridge (Mass.), Harvard University Press, 1939-1941, 2 vols.
- VANDER WAERDEN, B. L. *Science Awakening*. Trad. para o inglês por Arnold Dresden. Nova York, Oxford University Press, 1961. Paperback edition, Nova York, John Wiley, 1963.

Panorama Cultural V

Os impérios asiáticos

A China antes de 1260 d.C.;

A Índia antes de 1206 d.C.;

A Ascensão do Islamismo — 622 d.C. a 1258

(para acompanhar o Capítulo 7)

Nos Panoramas Culturais III e IV examinamos os primeiros passos do crescimento e do desenvolvimento da vida cultural, social, política e econômica na bacia do mar Mediterrâneo. Ao mesmo tempo em que gregos e romanos forjavam as instituições básicas da sociedade ocidental, as civilizações orientais também emergiam: na China, sobre as altas planícies que cercam o vale do rio Amarelo e na Índia, à sombra das figueiras-bravas, abaixo dos picos elevados do Himalaia. No século VII d.C., com a ascensão do islamismo, os árabes afastaram-se do resto do mundo ocidental e traçaram seu próprio caminho cultural. É para essas três civilizações — China, Índia e Arábia — que nos voltamos agora.

CHINA

Pode-se dividir a história chinesa em quatro períodos gerais: China Antiga (c. 2000-600 a.C.), China Clássica (c. 600 a.C.-221 d.C.), China Imperial (221 d.C.-1911) e China Moderna (de 1911 até o presente). Diz a lenda que, em tempos antigos, as planícies poeirentas do norte da China, por onde corre o rio Amarelo (uma região que os chineses chamavam *Reino do Meio* porque acreditavam que se localizasse no centro do mundo), mantiveram-se unidas sob as dinastias semimíticas Hsia (antes de 1500 a.C.), Shang (1500-1027 a.C.) e Chou (1027-256 a.C.). Não está claro se essas dinastias tiveram êxito em estabelecer governos fortes e centralizados, mas quando, por volta de 600 a.C., começou a Era da China Clássica, a autoridade dos monarcas Chou era apenas nominal — o poder real estava nas mãos de numerosos pequenos senhores, governantes de pequenas cidades, sempre às voltas com inúmeras guerras, que taxavam impiedosamente seus súditos e em geral não se preocupavam com as angústias da pobreza.

Atento ao caos social dos primeiros tempos da China Clássica, o filósofo Confúcio (551-479 a.C.) advogava uma reestruturação política e social. Confúcio pregava uma combinação da regra de ouro (não fazer aos outros o que não queremos que nos façam), respeito pela autoridade, cuidados para com a pobreza, humildade e a necessidade de ética por parte dos governantes. Embora alguns de seus discípulos se alçassem a posições de autoridade, ele próprio, Confúcio, foi grandemente ignorado durante sua vida, não sendo capaz de convencer a aristocracia a mudar de rumo. Supõe-se que por essa mesma época um outro filósofo chinês, Lao-Tzu, possa ter criado o taoísmo, embora seja possível que Lao-Tzu sequer tenha existido. É mais provável que o taoísmo tenha sido uma criação de Chuang Tzu (399-295 a.C.) e outros filósofos. O taoísmo proclamava que há uma ordem ou harmonia natural no Universo e recomendava com insistência a simplicidade, a paz e a benevolência governamental. Posteriormente, o conceito de *yin-yang* se associou ao taoísmo. Esse conceito sustenta que em todas as coisas há uma batalha dialética entre opostos cuja decisão só pode ser alcançada acomodando-se esses opostos. Tanto o taoísmo como o confucionismo representam reações contra os desgovernos dos pequenos senhores e a miséria de seus súditos.

Em 221 a.C. a cidade-Estado de Chin, sob o governo de um general e estadista competente que os chineses chamaram simplesmente de Chin Shih-huang-ti (literalmente “o primeiro imperador da Dinastia Chin”), uniu as cidades-Estado em conflito num império monolítico. 15 anos mais tarde, a Dinastia Chin foi derrubada pela Dinastia Han que criou um império que iria durar, com um pequeno hiato, até 221 d.C., quando terminaria a Era da China Clássica. Os Han expandiram enormemente a China, empurrando suas fronteiras sulinas até as florestas montanhosas e chuvosas do sul da China e norte do Vietnã, as ocidentais até os desertos da Ásia Central e as do nordeste até a Manchúria e a Coreia. Os imperadores Han se impressionaram com as ideias de Confúcio sobre ciência política; três séculos após a morte do sábio, sua filosofia alcançou o status de religião de Estado, algo parecido com o que iria acontecer no ocidente alguns séculos mais tarde quando os imperadores romanos acabaram aceitando o cristianismo oficialmente. Aproximadamente em 60 d.C., outra filosofia, o budismo, atingiu a China através do Himalaia, vinda da Índia. Para os chineses o budismo assemelhava-se ao taoísmo, daí que as duas filosofias tenderam a fundir-se entre eles. O budismo manteve-se uma seita minoritária na China até aproximadamente 800 d.C., quando ganhou ampla aceitação entre os camponeses. O confucionismo manteve sua popularidade entre as classes superiores. Quando nos debruçarmos sobre a história e a cultura da Índia nos aprofundaremos um pouco mais na filosofia budista.

Com a dissolução do Império Han em 221 d.C., por quase 350 anos a China outra vez se viu dividida em facções em luta, até que em 618 d.C. o imperador Li Yuan uniu a nação sob a dinastia Tang. Os imperadores Tang, como os imperadores das Dinastias Sung e Yuan que os seguiram, patrocinaram as artes e a literatura e seus reinados marcam o período imperial da China, ou Era de Ouro. Sob essas três dinas-

tias a China alcançou grandes dimensões e muita influência, verificando-se a abertura do comércio entre oriente e ocidente.

É interessante comparar o Império Chinês com o Romano. Ambos foram poderosos, grandes e duradouros; porém a unidade chinesa durou muito mais do que a romana. O Império Romano se estendeu por apenas cerca de 500 anos (31 a.C-476 d.C); o Império Chinês, excluído o interregno de 397 anos entre as Dinastias Han e Tang, teve uma duração de mais de 1500 anos, até a Revolução Chinesa de 1911. Os imperadores romanos foram, em grande número, ditadores militares, muitas vezes analfabetos, cujos curtos reinados geralmente terminavam em golpes sangrentos; os reis chineses eram monarcas caracteristicamente absolutistas cujos reinados duravam muito. Os romanos não davam atenção ao saber; os imperadores chineses, como Li Yuan e Kublai Khan (1216-1294), forneciam amparo governamental às artes. A China Clássica e a Imperial produziram uma cultura rica e uma base intelectual sólida. Não obstante, os eruditos chineses muitas vezes se interessavam mais por filosofia, arte e literatura do que pela ciência; como consequência a matemática e a ciência chinesa se atrasaram em relação a outras matérias.

Antes de 1260 d.C, quando três mercadores italianos — Mateo, Niccolo e Marco Polo — visitaram a fabulosa corte do imperador Kublai Khan, os contatos da China com os europeus eram muito limitados. Mas por volta de 1600 mercadores e missionários cristãos visitavam a China regularmente. Nesse ponto a história da matemática e da ciência chinesa se fundem com a da Europa. Retornaremos à China, de maneira breve, no Panorama Cultural X: O Átomo e a Roda de Fiar.

ÍNDIA

Politicamente, a Índia era o oposto da China. Os chineses das origens, agricultores do vale do rio Amarelo, foram em frente e criaram grandes impérios que dominaram a maior parte da Ásia Oriental. Os indianos dos primeiros tempos foram exterminados por invasores nômades por volta de 1500 a.C. Durante a maior parte de sua história a China foi um império unificado. A Índia quase sempre se compôs de um grande número de pequenos principados desunidos. Os chineses quase que invariavelmente mostraram-se capazes de evitar invasões. A Índia sofreu numerosas invasões — tropas arianas, persas, gregas, árabes e ingleses marcharam por suas florestas e planícies para realizar propósitos de conquista. Quando a China finalmente caiu ante os mongóis, os invasores rapidamente se entrosaram na sociedade chinesa. (Não é de admirar que o símbolo chinês para “força” é o mesmo que para “água” esta toma a forma de seu recipiente mas eventualmente o corrói.) Os invasores mais bem sucedidos da Índia — arianos, árabes, turcos e ingleses — estabeleceram-se como classe dominante, sem se mesclar a outros povos locais. A China vivia usualmente em paz, ao passo que a guerra na Índia era uma constante. A despeito, porém, desse meio aparentemente hostil à erudição, os indianos desenvolveram uma cultura ampla e rica, que se preservou por séculos.

Entre 3000 e 1500 a.C. viveu na Índia, na região do vale do rio Indo, perto das margens do deserto de Thar, um povo que habitava cidades e cultivava a agricultura. O que teria acontecido a esse povo é um mistério. Somente restos arqueológicos de algumas de suas cidades, as maiores delas desenterradas em Mohenjo Daro e Harappa, evidenciam sua existência. É possível que o motivo do desaparecimento desse povo tenha sido sua incapacidade de manter uma cultura urbana num meio hostil. Mas é mais provável que tenha sido destruído pelos arianos, um povo nômade de costumes pastoris, que adentrou a Índia, vindo da Ásia Central, por volta de 1500 a.C.

Cerca de mil anos mais tarde os arianos já se haviam estabelecido firmemente na Índia, embora coexistissem com outros povos, como os tâmis na região sul. Quase não havia unidade política entre os arianos, que se dividiam em muitos reinos pequenos sempre em atrito. Entre 1500 e 500 a.C. os arianos desenvolveram o hinduísmo, uma combinação de religião, filosofia e estrutura social que veio a formar a pedra angular de sua civilização. Intrincado conjunto de crenças e leis, o hinduísmo baseava-se grandemente em três ideias principais: o culto de um grande número de deuses, atrás dos quais encontrava-se a unidade única, a ideia de transmigração (isto é, a alma de uma pessoa é eterna e voltará a nascer em formas diferentes) e o sistema de castas que dividia rigidamente a sociedade indiana em quatro classes sociais distintas — *Brahmana* (classe sacerdotal), *Kshatriya* (classe guerreira), *Vaisya* (classe mercantil e artesanal) e *Sudra* (classe camponesa).

Os aspectos formais do hinduísmo desenvolveram-se crescentemente e por volta de 500 a.C. eclodiram vários movimentos reformadores, sendo o mais famoso deles, o budismo, uma iniciativa do asceta errante Gautama Buda (563-483 a.C.). Num sermão pronunciado na cidade de Banaras, Buda condenou tanto a autoindulgência excessiva como a automortificação excessiva, cada uma das quais, acreditava ele, levava inevitavelmente à dor e ao sofrimento. Buda defendia, isto sim, o “meio termo” da moderação, conhecimento e tranquilidade. Esse caminho, dizia Buda aos seus ouvintes, levava ao *nirvana* e com isso se quebrava a série infundável de reencarnações que condenava a alma a padecimentos eternos. O budismo enfatizava a unidade básica do Universo, uma ideia que tinha um paralelo no taoísmo chinês; como o taoísmo e o confucionismo, o budismo pode ter sido, em parte, uma resposta ao caos e à agitação da época. O budismo floresceu na Índia por quase um milênio, especialmente entre os pobres, até por volta de 500 d.C., quando começou a declinar. Por essa época, porém, o budismo havia se disseminado pela China, Japão e sudeste da Ásia, onde lançou raízes firmes. Hoje em dia a religião que predomina na Índia é o hinduísmo.

Em 320 a.C. Chandragupta Mauria (reinou de c. 320-c. 296 a.C.), rei de um pequeno Estado do norte da Índia, estabeleceu suserania sobre seus pares príncipes e fundou o Império Mauriano, que, sob seu neto Açoka (272-232 a.C.), incluía a maior parte da Índia. Mas aproximadamente em 185 a.C. o Império Mauriano se desintegrou e a Índia outra vez se viu dividida em vários reinos mutuamente hostis, embora um deles, o Império Andhra, controlasse grande parte da região centro-sul

da Índia, entre aproximadamente 180 a.C. e 200 d.C. Apesar da falta de unidade política, o período que se seguiu à queda do Império Mauriano ostentou uma vida cultural rica, com o florescimento da literatura, da arte, da ciência e da filosofia. Em 320 d.C, grande parte da Índia foi outra vez unificada, sendo essa tarefa levada a efeito por Chandragupta I (reinou de 320 a 340 [?] d.C), com quem se inicia o Império Gupta. Esse novo império se alongou até 470 d.C, num período considerado a era clássica da Índia e que representa um renascimento da literatura sânscrita, da arte e da medicina.

Durante séculos a Índia sofreu invasões vindas do oeste. Em sucessivas ondas vieram os arianos, os persas, os gregos helenísticos, os sakas, os partos, os kuchanes, os eptalitas e os árabes. Estes últimos introduziram o islamismo na Índia no século VIII d.C. e conquistaram partes da Índia Ocidental nos séculos VIII, IX e X. Em 1206, o general árabe Kutb ud-Din-Aibak fundou o sultanato muçulmano de Delhi no norte da Índia. Delhi foi o reino indiano mais importante até 1526, quando o aventureiro turco Babur (1483-1530), também muçulmano, instalou o Império Mogol que o suplantou. Sob os sultões de Delhi e Mogol a Índia era uma nação de hindus governada por uma classe superior de muçulmanos (embora o islamismo se tornasse a religião principal das partes da Índia que hoje compreendem o Paquistão e Bangladesh). Depois de 1206 a ciência e a matemática indianas se fundiram com a árabe.

A ASCENSÃO DO ISLAMISMO

Antes de 622 a.C, quando se inicia a *Hégira*, com a ida de Maomé de Meca para Medina, a Arábia era um país desunido cuja população se compunha de pastores nômades e tribos de guerreiros ferozes. Seu território, situado na periferia do Oriente Médio, do Egito e das áreas de civilização grega, era, salvo uma pequena parte arável, um grande deserto. Considerada demasiado pobre e rude, a Arábia jamais foi incorporada a nenhum dos grandes impérios ocidentais — o persa, o grego helenístico ou o romano.

A partir de 622 o povo árabe subitamente encontrou uma vitalidade até então desconhecida. As tribos guerreiras de pronto se uniram e, com fervor missionário, desprenderam-se do deserto escaldante para forjar um grande império que, em seu auge, estendia-se do oceano Atlântico à Índia e incluía o que os gregos helenísticos chamavam o *oikoumene* — o âmago da civilização ocidental. A força propulsora da expansão árabe era a nova religião, o islamismo.

O islamismo foi criado pelo profeta Maomé (c. 570-632 d.C), um mercador da cidade de Meca no mar Vermelho. Aos quarenta anos de idade, Maomé teve visões que ele acreditava fossem mensagens de Deus e que registrou num livro chamado *Alcorão*. Essas mensagens revelavam que havia apenas um Deus (Alá), que Maomé era seu grande profeta (embora os muçulmanos também considerassem profetas aqueles aceitos pelos hebreus e Jesus Cristo) e que todos os que se unissem à nova

religião seriam membros de uma irmandade comum. O *Alcorão* recomendava aos devotos muçulmanos que se preocupassem com a pobreza e que oferecessem hospitalidade aos estrangeiros, dois valores tradicionais árabes. Apelava também aos crentes para que convertessem outros à sua fé, pacificamente se possível, às vezes à força, se necessário, embora judeus e cristãos supostamente estivessem ao abrigo de uma conversão violenta. Admitiam-se guerras santas (*jehads*) contra inimigos da religião. Haveria uma recompensa após a morte para os que tivessem fé, dizia o *Alcorão*. Uma combinação de valores tradicionais, otimismo e união da irmandade, a mensagem do islamismo era imensamente popular entre os árabes. Por volta da época da morte de Maomé, em 632, a maior parte do povo da Arábia já se havia convertido a essa religião.

Logo após a morte de Maomé, os árabes agora unidos, expandiram-se pelos países vizinhos, preenchendo o vácuo de poder deixado pela queda do Império Romano. Assim é que se anexaram ao Império Árabe a Palestina e a Síria em 640, o vale dos rios Tigre e Eufrates em 641 e o Egito em 642. A partir desses lugares os cavaleiros árabes penetraram com estrondo o norte da África e o Irã e, por volta de 715, o Império Árabe incluía a Espanha e partes da Índia Ocidental, além de dominar a maior parte da bacia do mar Mediterrâneo. O islamismo, como religião, alastrou-se para além do Império Árabe: os mercadores árabes cuidaram de levar a nova fé à África negra, à Ásia Central e à Indonésia.

A morte de Maomé desencadeou uma luta pelo controle do poder tanto no que se refere ao islamismo como quanto ao Império. A guerra foi finalmente ganha pela Dinastia Omíada, mas dela resultou uma divisão religiosa entre os sunitas (em sua maioria, árabes), que apoiavam os Omíadas, e os xiitas (em sua maioria, iranianos), que não apoiavam. Os Omíadas dirigiram o Império a partir da cidade de Damasco na Síria até 750, quando foram derrubados pela Dinastia Abácida que transferiu a capital para Bagdá (atualmente capital do Iraque), perto da antiga cidade da Babilônia. O Império Árabe sob os Abácidas durou cinco séculos, estendendo-se até o século XIII. Ele jamais dominou a Espanha e o Egito tornou-se independente no século X. A maior parte do Império Árabe caiu ante os turcos em 1258.

As maiores contribuições árabes à civilização foram o islamismo e a versátil língua árabe na qual o *Alcorão* foi escrito; os árabes, porém, inclinavam-se a aceitar os melhores elementos que encontravam em outras culturas. Cuidadosamente preservaram grande parte da ciência grega e sobressaíram-se em matemática, astronomia e medicina. Quanto às artes, concentraram-se na arquitetura e em refinados trabalhos de decoração; não desenvolveram a escultura humana por considerarem-na uma idolatria. Produziram uma literatura bastante graciosa. Mas alguns dos melhores cientistas, artistas e poetas muçulmanos não eram árabes mas iranianos (persas) e espanhóis. Embora Meca, na Arábia, fosse a capital religiosa do islamismo, a capital cultural, econômica e política do Império Árabe era a fabulosa e rica Bagdá, com sua mistura de culturas árabe e iraniana.

Com a ascensão do islamismo o mundo ocidental se dividiu em duas regiões culturais: o sudeste muçulmano (norte da África, Egito, Oriente Médio e Irã) e a

Europa cristã. Entre 622 e 1300, com a Europa fazendo a travessia da Alta Idade Média, o mundo árabe foi o mais avançado dos dois, tanto do ponto de vista cultural, como artístico ou científico. No Panorama Cultural VI focalizaremos esse hiato cultural europeu e o despertar subsequente.

JAPÃO E SUDESTE DA ÁSIA

Antes de retornarmos à Europa, devemos atentar para o fato de que a civilização asiática não se confinou à China, à Índia e à Arábia. Durante a Idade da Pedra houve migrações humanas do continente asiático para o Japão, onde já em 4500 a.C. havia uma cultura de caçadores/colhedores. Perto do início do século IV a.C., o Japão já se unira num único reino; e a chegada do budismo se deu por volta do século X. O Japão se manteve um reino forte e centralizado até o século VII, quando o poder começou a escorregar para as mãos de uma aristocracia instalada na corte. No século XII essa aristocracia caiu do poder e o Japão entrou em sua Era Feudal. O país agora, dividido em vários baronatos, era governado nominalmente por um imperador mas o poder político e militar era exercido por um governo ditatorial paralelo, o xogunato. No sudeste da Ásia também se desenvolveu uma civilização magnífica, influenciada pela China e a Índia. O hinduísmo e o budismo foram levados para essa região por missionários. Por volta de 1600 o budismo já havia lançado raízes firmes no continente (Tailândia, Camboja e Vietnã) e o islamismo predominava em ilhas próximas como a Indonésia. Os malásios, um povo de navegadores, que viviam na atual Malásia e em parte da Indonésia, cruzaram o oceano Índico rumo à África (onde fundaram Madagascar) e ao oceano Pacífico.

A matemática chinesa, hindu e árabe

CHINA¹

7.1 Fontes e períodos

Embora as civilizações da China antiga ao longo dos rios Yang-Tze e Howang Ho provavelmente sejam posteriores à civilização egípcia ao longo do Nilo e à babilônica, entre o Tigre e o Eufrates, muito pouco material de natureza primária oriundo delas chegou até nós. Isso em virtude de os povos da época com certeza fazerem muitos de seus registros em bambu, um material perecível. E, para agravar, o egotista imperador Shī Huang-ti ordenou em 213 a.C. uma lamentável queima de livros. A despeito de ameaças e represálias severas, o edito do imperador certamente não foi levado a efeito completamente; mas como muitos dos livros queimados foram reconstituídos de memória, hoje há dúvidas sobre a autenticidade de grande parte do material bibliográfico que se alega ser anterior àquela data infeliz. Por consequência, muito de nosso conhecimento sobre a matemática chinesa primitiva baseia-se em informações orais e interpretações posteriores de textos originais.

Até bem recentemente, os intelectuais de língua inglesa que não conheciam o chinês estavam em situação de desvantagem e tinham que se apoiar primordialmente no livro *The Development of Mathematics in China and Japan*, publicado em 1913 pelo matemático japonês Yoshio Mikami e em uns poucos artigos esparsos escritos no século XIX por europeus. Com a publicação em 1959 do terceiro volume de *Science and Civilization in China*, uma obra altamente erudita de J. Needham, a situação melhorou consideravelmente. Temos ainda alguns relatos em alemão sobre a matemática chinesa. Recentemente (1987), Shen Kangshi, da Universidade de Hang-hou, publicou em chinês uma excelente introdução à história da matemática chinesa; esperamos que se faça uma tradução para o inglês deste último trabalho.

Talvez seja mais sensato esboçar primeiro, de maneira breve, os principais períodos da história chinesa anterior a 1644. Começamos com o período Shang, cujo início

¹ O material das seções seguintes sobre a China é uma adaptação ampla do artigo "On ancient chinese mathematics", de D. J. Struik (*The Mathematics Teacher*, nº 56, 1963, pp. 424-32) e de notas que nos foram gentilmente oferecidas por Ouyang Jiang e Zhang Liangjin.

situa-se por volta de 1500 a.C. A Dinastia Shang, a primeira a ser registrada pela história, e que exerceu o governo sobre uma área cujas fronteiras oscilaram segundo os azares da guerra, ruiu em 1027 a.C. e foi seguida do período Chou, de caráter feudal, considerado pelos chineses como sua era clássica. O governo Chou chegou ao auge em 256 a.C.; mas logo depois, em 221 a.C., foi sucedido pela Dinastia Chin, cujo curto período de poder se encerrou em 206 a.C. Em seguida a China tornou-se um poderoso império unificado, sob a Dinastia Han (206 a.C.-221 d.C.); veio então um período de divisão, chamado pós-Han, que se alongou até por volta de 600 d.C. Foi neste período que o budismo se implantou com firmeza na China. Em 618 inaugurou-se a Dinastia Tang que reinaria até 960 com o país unificado; foi nesse período que se inventou a imprensa; seguiu-se o período das cinco dinastias (906-960) com o império novamente fracionado; mas com as dinastias seguintes, Sung (960-1279), Yuan (1279-1368) e Ming (1368-1644), a unidade voltou a prevalecer. A influência europeia em matemática, bem como em outras áreas, começou durante a Dinastia Ming, com a chegada dos missionários jesuítas.

Marco Polo (1254?-1324?) visitou a China de 1275 a 1292. Com a fundação da Dinastia Yuan em 1279, decorrente da conquista plena do poder do país pelo “bárbaro” Kublai Khan (1216-1294), a China se consolida de vez.

7.2 Do Shang ao Tang

Um relato da história da matemática da China antiga começa no período Shang, com algumas inscrições em ossos e carapaças de tartarugas que revelam um sistema de numeração decimal bastante próximo do sistema multiplicativo chinês-japonês tradicional descrito na Seção 1-5. Mesmo nesses tempos tão antigos já encontramos na China o germe dos sistemas de numeração posicionais. Por perto do período Han ou talvez antes, o sistema de numeração em barras, descrito no Exercício 1.4(c), que se utilizava de arranjos com varetas de bambu e que representava o zero por um espaço em branco, já se firmara. Esse sistema de numeração posicional constitui-se no sistema de numeração mais avançado do mundo de então, tendo desempenhado um papel importante no caráter da matemática chinesa antiga, que girava em torno de cálculos. As operações aritméticas elementares eram efetuadas em tábuas de contar. O familiar ábaco chinês, o *suan pan*, que consiste em contas móveis ao longo de varas ou arames paralelos por sobre um tabuleiro, descende dessa forma primitiva de calcular. Não se sabe quando o *suan pan* foi introduzido; de todas as referências a ele a mais antiga de que se tem notícia figura num trabalho de 1436, mas é possível que o instrumento seja muito mais antigo.

Um dos trabalhos chineses mais antigos, o *I-King*, ou *Livro das Permutações*, também data do período Shang, pois se pretende que tenha sido escrito por Wön-wang (1182-1135 a.C.). Nele aparece o *Liang I*, ou “os dois princípios” (o masculino *yang*, –, e o feminino *ying*, – –). A partir deles formam-se as seguintes oito figuras, chamadas *Pa-kua*:



Esses oito símbolos, aos quais estão ligados vários atributos, passaram a ser usados em adivinhações. Embora não se possa garantir nada, pode-se vislumbrar nos *Pa-kua* um prenúncio do sistema de numeração binário. Pois tomando-se — como um e - - como zero, as sucessivas colunas de traços mostrados antes, começando da direita, representariam os números 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. No *I-King* encontra-se também o mais antigo exemplo de quadrado mágico (ver Exercício 7.3).

O mais importante dos textos de matemática chineses antigos é o *K'ui-ch'ang Suan-shu*, ou *Nove Capítulos sobre a Arte da Matemática*, que data do período Han mas que muito provavelmente contém material bem mais antigo. É uma síntese do conhecimento matemático chinês antigo. Nele estão estabelecidos os traços da matemática antiga da China: cálculos orientados, com teoria e prática ligadas numa sequência de problemas aplicados. O trabalho, que é rico em conteúdo, consta de 246 problemas sobre agricultura, procedimentos em negócios, engenharia, agrimensura, resolução de equações e propriedades de triângulos retângulos. São dadas regras de resolução, mas não há demonstrações no sentido grego. No Problema 36 do Capítulo I a área de um segmento circular de base b e *sagitta* (altura) s é dada pela fórmula empírica $s(b + s)/2$. Pode-se ter chegado a ela da maneira indicada na Figura 58, em que, ao se traçarem as secantes de modo a fazer com que a área do triângulo isósceles seja aparentemente igual à do segmento circular, fica-se com a impressão de que essas retas cortam os prolongamentos da base a uma distância $s/2$ de cada uma das extremidades. Para um semicírculo a fórmula empírica leva ao valor aproximado 3 para π . Há também no texto problemas que levam a sistemas de equações lineares cuja resolução se faz pelo método das matrizes, como seria chamado hoje. Nos Exercícios 7.1 e 7.2 encontram-se amostras dos problemas do trabalho.

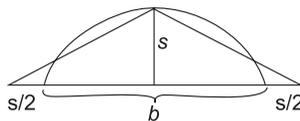


Figura 58

A seguir damos uma breve indicação do conteúdo de cada um dos nove capítulos do *K'ui-ch'ang Suan-shu*:

1. Questões de agrimensura, com regras corretas para as áreas do triângulo, do trapézio e do círculo e com aproximações para o círculo dadas por $(3/4)d^2$ e $(1/12)c^2$, onde se toma π como 3.
2. Porcentagem e proporção.
3. Regra de sociedade e regra de três.

4. Determinação de lados de figuras, incluindo cálculos de raízes quadradas e cúbicas.

5. Volumes.

6. Problemas de movimento e ligas.

7. A regra de falsa posição.

8. Sistemas de equações lineares e procedimentos matriciais.

9. Triângulos retângulos pitagóricos.

Outro clássico famoso, talvez mais antigo do que os *Nove Capítulos sobre a Arte da Matemática*, é o *Chóu-peï*, que apenas parcialmente trata de matemática. Para nós seu interesse principal reside na discussão que faz, baseada no diagrama da Figura 59 (mas sem nenhuma prova), do teorema de Pitágoras.

Um acontecimento interessante ocorrido em janeiro de 1984 foi a descoberta de um livro de aritmética escrito em tiras de bambu, desenterrado de túmulos que remontam à dinastia Han. O trabalho, transcrito por volta do século II a.C., é uma coleção de mais de 90 problemas envolvendo as quatro operações matemáticas fundamentais, tanto com inteiros como com frações, proporções, áreas e volumes. Atualmente é o trabalho matemático chinês mais antigo de que se tem notícia.

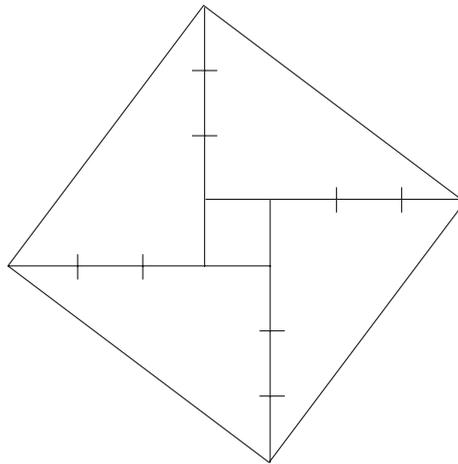


Figura 59

Posteriormente ao período Han viveu o matemático Sun-tzï, que escreveu um livro cujo material se assemelha muito ao dos *Nove Capítulos sobre a Arte da Matemática*. É nesse trabalho que se encontra o primeiro problema chinês de análise indeterminada: “Um certo número desconhecido de coisas quando dividido por 3 deixa resto 2, por 5 resto 3 e por 7 resto 2. Qual é o (menor) número?”. Nele encontramos a semente do famoso Teorema Chinês dos Restos da teoria dos números.

No período pós-Han vamos encontrar muitos matemáticos dedicados à tarefa de calcular π , a razão entre a circunferência e o diâmetro de um círculo. Credita-se a um general do século III, chamado Wang Fan, a aproximação racional $142/45$ de π , ou seja $\pi = 3,155$. Um contemporâneo de Wang Fan, chamado Liu Hui, escreveu um breve comentário sobre os *Nove Capítulos sobre a Arte da Matemática* chamado *Manual de Matemática da Ilha Marítima*. Nele encontra-se algum material novo sobre mensuração, como a relação

$$3,1410 < \pi < 3,1427$$

Cerca de dois séculos mais tarde, Tsu Ch'ung-Chih (430-501) e seu filho, em livro de autoria dos dois que se perdeu, encontraram

$$3,1415926 < \pi < 3,1415927$$

e a notável aproximação racional $355/113$ que fornece π corretamente até a sexta casa decimal. Essa aproximação racional só foi redescoberta na Europa em 1585 (ver Seção 4-8). Segundo parece a precisão alcançada pelos dois só foi superada em 1425, quando o astrônomo Jamshid al-Kashi (falecido c. 1436) de Samarcanda obteve uma aproximação correta de π com 16 casas decimais. E a matemática ocidental só iria suplantar a aproximação dos Tsu por volta de 1600.

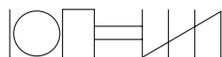
7.3 Do Tang através do Ming

Durante a dinastia Tang reuniu-se uma coleção dos mais importantes livros de matemática disponíveis, para uso oficial nos exames imperiais. A imprensa se inaugurou no século VIII, mas o primeiro livro de matemática impresso de que se tem notícia só apareceu em 1084. Num trabalho escrito por um certo Wang Hs'iao-t'ung, por volta de 625, encontra-se a primeira equação cúbica da matemática chinesa mais complicada do que $x^3 = a$ dos *Nove Capítulos sobre a Arte da Matemática*.

Uma importante edição impressa dos *Nove Capítulos* apareceu durante a dinastia Sung em 1115. O período que vai da última parte da dinastia Sung até a parte inicial da dinastia Yüan marca o pináculo da matemática chinesa antiga. Muitos matemáticos importantes despontaram e muitos livros de matemática valiosos apareceram. Dentre os matemáticos estavam Ch'in Kiu-shao (cujo livro é de 1274), Li Yeh (com livros datados de 1248 e 1259), Yang Hui (com livros datados de 1261 e 1275) e, o maior de todos, Chu Shī-kié (cujos livros datam de 1299 e 1303).

Ch'in reencetou a abordagem das equações indeterminadas onde Sun Tzi havia parado. Foi ele também o primeiro chinês a dar um símbolo específico para o zero: uma circunferência. Foi um dos matemáticos que generalizaram o método de extração de raízes quadradas (como aparece nos *Nove Capítulos sobre a Arte da Matemática*) para equações de grau superior, de uma maneira que leva ao método numérico de resolução de equações algébricas hoje conhecido como método de Horner, uma vez que foi des-

coberto independentemente pelo mestre-escola inglês William George Horner (1786-1837) que o publicou em 1819. Horner ignorava completamente o fato de que havia redescoberto um dispositivo computacional chinês antigo. Li Yeh merece menção especial por ter introduzido uma notação para números negativos que consistia em fazer um traço diagonal no dígito da direita de um número escrito no sistema científico ou no sistema de barras chinês. Assim, $-10\,724$ apareceria na forma



Yang Hui, cujos livros são uma espécie de extensão dos *Nove Capítulos sobre a Arte da Matemática*, trabalhou habilmente com frações decimais; em essência seu método era o mesmo que se usa hoje. Devemos a ele também a mais antiga apresentação preservada do chamado *Triângulo aritmético de Pascal* (ver Seção 9-9). Há uma outra manifestação do triângulo num livro posterior escrito por Chu Shī-kié em 1303; é interessante que Chu fala do triângulo como algo já antigo em seu tempo. É possível então que o teorema do binômio já fosse conhecido na China de longa data. Nos livros de Chu encontra-se a apresentação mais acabada dos métodos aritmético-algébricos chineses de que se tem conhecimento. Ele se utilizava dos métodos matriciais comuns hoje em dia e seu método de eliminação e substituição já foi comparado ao de J. J. Sylvester (1814-1897).

O período pós-Sung continuou a produzir matemáticos — que muitas vezes atuavam como astrônomos —, mas pouca coisa fundamentalmente nova se produziu então em termos de matemática. Nos primeiros tempos do período Tang nota-se a influência hindu; e nos últimos tempos do período Yuan encontram-se traços árabes. Há muito pouco na matemática chinesa antiga que se vincule diretamente à ocidental (grega ou latina). A influência ocidental só se torna perceptível nos matemáticos do período Ming, depois da chegada dos jesuítas na China.

7.4 Observações finais

Após o declínio da matemática grega clássica, a matemática da China tornou-se uma das mais criativas do mundo. Enquanto a Europa Ocidental atravessava o marasmo cultural da Alta Idade Média, a matemática chinesa crescia, produzindo resultados que a Europa só iria redescobrir muito mais tarde, durante ou após o Renascimento. Apenas para mencionar algumas dessas realizações, notemos que a China foi a primeira a (1) criar um sistema de numeração posicional decimal, (2) reconhecer os números negativos, (3) obter valores precisos de π , (4) chegar ao método de Horner para soluções numéricas de equações algébricas, (5) apresentar o triângulo aritmético de Pascal, (6) se inteirar do método binomial, (7) empregar métodos matriciais para resolver sistemas de equações lineares, (8) resolver sistemas de congruências pelo método hoje consubstanciado no Teorema Chinês dos Restos, (9) desenvolver as frações decimais, (10) desenvolver a regra de três, (11) aplicar a

regra de falsa posição dupla, (12) desenvolver séries aritméticas de ordem superior e suas aplicações à interpolação e (13) desenvolver a geometria descritiva².

Muitas das descobertas chinesas em matemática acabaram por fim fazendo o caminho da Europa via Índia e Arábia. Por outro lado, só com a chegada dos jesuítas à China no período Ming a influência matemática ocidental se fez sentir na China. O italiano Matteo Ricci (1552-1610), com a ajuda de Hsü Kuang-ching (1562-1634), traduziu para o chinês, entre 1601 e 1607, os *Elementos* de Euclides; esse fato desempenhou um papel significativo no desenvolvimento subsequente da matemática na China.

Os correspondentes Ouyang Jiang e Zhang Liangjin fizeram uma lista com uns 26 tratados de matemática chineses (alguns muito abrangentes e enciclopédicos) escritos antes do século XIX.

ÍNDIA

7.5 Visão geral

Pouco se sabe sobre o desenvolvimento da matemática hindu³ antiga, em virtude da falta de registros históricos autênticos. A fonte histórica preservada mais antiga são as ruínas de uma cidade de 5000 anos, encontradas em Mohenjo Daro, um sítio localizado a nordeste da cidade de Karachi no Paquistão. Vestígios de ruas largas, habitações de tijolos com banheiros ladrilhados, redes de esgoto subterrâneos e piscinas públicas indicam uma civilização tão avançada quanto qualquer outra do Oriente antigo. O povo dessa cidade tinha sistemas de escrita, contagem, pesos e medidas e cavava canais para irrigação. Tudo isso são requisitos básicos para a matemática e a engenharia. Não se sabe o fim que esse povo teve.

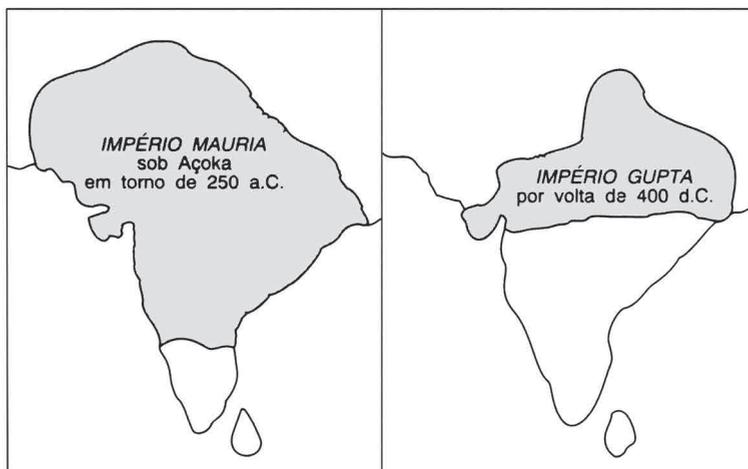
Foi há cerca de 4000 anos que bandos de nômades, vindos das planícies da Ásia Central, atravessaram o Himalaia e penetraram na Índia. Esses invasores chamavam-se *arianos*, designação que provém da palavra sânscrita que significa “nobre” ou “proprietário de terras”. Muitos desses invasores permaneceram; outros rumaram para a Europa e formaram a raiz da raça indo-europeia. A influência dos arianos gradualmente estendeu-se por toda a Índia. Durante o primeiro milênio de sua permanência eles aprimoraram a língua sânscrita, escrita e falada. São eles também os responsáveis pelo sistema de castas.

² Isto ocorreu num livro de Nian Xi-yao intitulado *Shi Xue (Desenho em Perspectiva)*, publicado em 1729 e revisado em 1735. A *Géométrie Descriptive* de Gaspard Monge só apareceu em 1799.

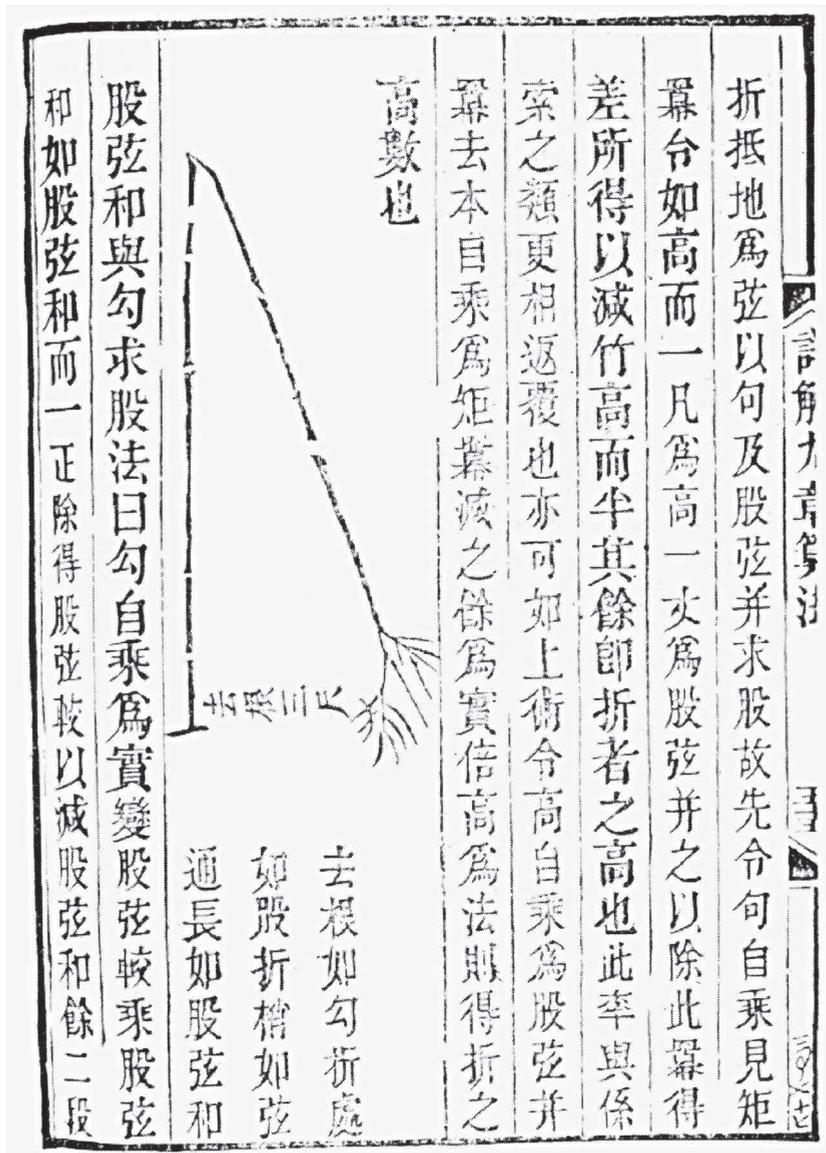
³ Devido à confusão entre indianos ocidentais (índios) e indianos orientais (indianos) é comum chamar-se estes últimos de hindus. Embora essa permuta não seja estritamente correta, torna-se conveniente para evitar mal-entendidos.

No século VI a.C. as tropas persas sob comando de Dario invadiram a Índia mas não fizeram conquistas definitivas. Pertencem a esse período dois eminentes indianos antigos, o gramático Panini e o pregador religioso Buda. É essa também, provavelmente, a época dos *S'ulvasūtras* (“as regras da corda”), escritos religiosos de interesse na história da matemática pelo fato de abarcarem regras geométricas para construção de altares (mediante esticamento de cordas) em que se revela um certo conhecimento dos ternos pitagóricos.

A conquista do noroeste da Índia por parte de Alexandre, o Grande, em 326 a.C., foi temporária. Em seu lugar estabeleceu-se o Império Mauria que com o tempo espalhou seu poder por toda a Índia e partes da Ásia Central. O mais famoso dos reis Maurias foi Açoka (272-232 a.C.); algumas das grandes colunas de pedra construídas por ele em todas as grandes cidades da Índia ainda existem. Essas colunas nos interessam porque, como já mencionamos na Seção 1-9, algumas delas contêm os espécimes preservados mais antigos dos atuais símbolos numéricos.

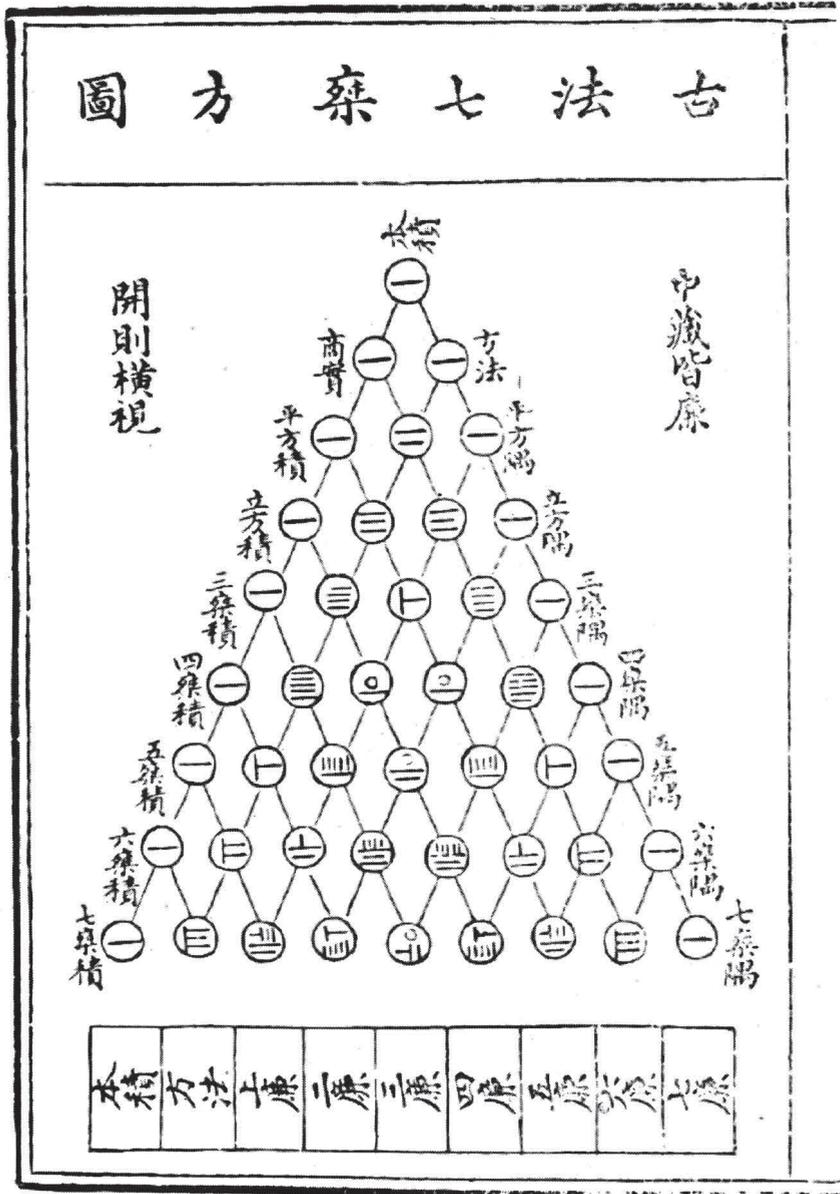


Depois de Açoka, a Índia sofreu uma série de invasões, após as quais a dinastia Gupta, formada de imperadores nativos, tomou o poder. O período Gupta revelou-se a era de ouro do renascimento sânscrito; nele a Índia tornou-se um centro de saber, arte e medicina. Desenvolveram-se ricas cidades e fundaram-se universidades. O primeiro trabalho astronômico importante, o anônimo *Sūrya Siddhānta* (“o conhecimento do Sol”), data desse período e é, provavelmente, do início do século V. Daí para a frente a matemática hindu subordinou-se mais à astronomia do que à religião. O trabalho do século VI, *Pañca Siddhāntikā*, do astrônomo Varāhamihira, de Ujjain, baseado no anterior *Sūrya Siddhānta*, contém um bom sumário da trigonometria hindu antiga e uma tábua de senos aparentemente oriunda da tábua de cordas de Ptolomeu.



O problema do bambu quebrado,
 de um trabalho de Yang Hui (1261)

O grau de influência da matemática grega, da babilônica e da chinesa sobre a matemática hindu e vice-versa, ainda é uma questão não esclarecida, mas há evidências de que em ambos os sentidos ela foi apreciável. Um dos benefícios claros da Pax Romana foi o intercâmbio de conhecimento entre Oriente e Ocidente, e desde muito cedo a Índia enviou diplomatas para o Ocidente e o Extremo Oriente.



O triângulo aritmético de Pascal, da maneira como foi desenhado em 1303 por Chu Shī-kié

De por volta de 450 d.C. até perto do fim do século XV a Índia outra vez se viu às voltas com numerosas invasões estrangeiras. Primeiro vieram os hunos, depois, no século VIII, os árabes e no século XI os persas. Durante esse período despontaram vários matemáticos hindus eminentes, destacando-se os dois Āryabhatas, Brahmagupta, Mahāvīra e Bhāskara. O mais velho dos Āryabhatas, que se sobressaiu no século VI, nasceu perto

da atual Patna, junto ao Ganges. Escreveu um livro de astronomia intitulado *Āryabhatīya* cujo terceiro capítulo se dedica à matemática. Há alguma confusão a respeito desses homônimos, havendo a possibilidade de que o trabalho de ambos não esteja corretamente diferenciado. Brahmagupta foi o mais eminente matemático hindu do século VII. Viveu e trabalhou no centro astronômico de Ujjain, na Índia Central. Em 628 escreveu *Brahmasphuṭa-siddhānta* (“o sistema de Brahma revisado”), um trabalho de astronomia em 21 capítulos, dos quais o 12º e o 18º se ocupam de matemática. Mahāvīra, que se distinguiu por volta de 850, era de Misore, no sul da Índia, e escreveu sobre matemática elementar. Bhāskara também viveu em Ujjain. Seu trabalho, *Siddhānta Śīromani* (“diadema de um sistema astronômico”), foi escrito em 1150 e mostra poucos progressos em relação ao trabalho de Brahmagupta, cinco séculos mais antigo. As duas partes mais importantes do trabalho de Bhāskara são *Lilāvati* (“bela”) e *Vijaganita* (“extração de raízes”)⁴, que tratam de aritmética e álgebra, respectivamente. As partes matemáticas dos trabalhos de Brahmagupta e Bhāskara foram traduzidas para o inglês por H. T. Colebrooke em 1817. O *Sūrya Siddhānta* foi traduzido por E. Burgess em 1860 e o trabalho de Mahāvīra foi publicado em 1912 por M. Rangācārya.

Depois de Bhāskara a matemática hindu fez apenas progressos irregulares até os tempos modernos. A Sociedade Matemática Indiana foi fundada em 1907 e dois anos depois apareceu em Madras o *Journal of the Indian Mathematical Society*. A revista de estatística indiana, *Sankhyā*, começou a ser publicado em 1933.

Talvez o mais brilhante matemático indiano dos tempos modernos tenha sido o amanuense pobre e gênio sem estudos formais, Srinivasa Ramanujan (1887-1920), que era dotado de espantosa capacidade de perceber rápida e profundamente relações numéricas intrincadas. Ele foi “descoberto” em 1913 pelo eminente inglês especialista em teoria dos números, G. H. Hardy (1877-1947), cujos esforços fizeram com que Ramanujan fosse estudar na Universidade de Cambridge, na Inglaterra, no ano seguinte. O encontro desses dois homens resultou numa notável parceria matemática.

Talvez valha a pena relatar um par de anedotas verídicas, ilustrando a impressionante capacidade de Ramanujan. Certa feita o professor Hardy visitou Ramanujan num hospital e incidentalmente comentou que viera num táxi cujo número da placa, 1729, nada tinha de interessante. Imediatamente Ramanujan respondeu que 1729, ao contrário, é um número muito interessante, visto que se trata do menor inteiro que se pode expressar, de duas maneiras como soma de dois cubos: $1^3 + 12^3 = 1729 = 9^3 + 10^3$. Noutra ocasião, sem nenhuma calculadora que não seu cérebro, observou que $e^{\pi\sqrt{163}}$ situa-se “muito proximamente” de um número inteiro: ele é, de fato, um inteiro seguido de 12 zeros antes de aparecer qualquer outro dígito.

A publicação em 1920 do caderno de notas de Ramanujan e o subsequente trabalho feito sobre ele revelaram muitas facetas de sua incomum genialidade.

⁴ Não é certo que *Lilāvati* e *Vijaganita* sejam partes do *Siddhānta Śīromani*; pode-se tratar de trabalhos isolados.



Os textos de história da matemática mostram algumas contradições e confusões ao focalizar os hindus. Isso se deve, provavelmente, em escala considerável, ao caráter obscuro e quase ininteligível dos escritos dos autores hindus. A história da matemática hindu carece ainda de uma abordagem mais confiável e erudita.

7.6 Cálculos numéricos

Na Seção 1-9 consideramos brevemente o pouco que se conhece sobre a parte desempenhada pelos hindus no desenvolvimento de nosso atual sistema de numeração posicional. Relataremos agora alguns métodos de calcular com esse sistema, usados pelos hindus. A chave para a compreensão dos algoritmos desenvolvidos reside em se dar conta dos materiais de escrita à disposição dos calculadores. Segundo o historiador alemão H. Hankel, eles geralmente escreviam ou sobre um pequeno quadro-negro com uma pena

de bambu mergulhada numa tinta branca e rala que se podia apagar facilmente ou com uma vareta sobre uma tábua branca de área menor do que um pé quadrado e revestida de uma camada de certa farinha vermelha. Em ambos os casos o espaço da escrita era pequeno e a legibilidade exigia figuras razoavelmente grandes, mas era fácil efetuar apagamentos e correções. Consequentemente os processos de cálculo eram esquematizados de modo a conservar o espaço de escrita apagando-se um dígito tão logo ele tivesse cumprido a sua função.

A adição hindu antiga talvez fosse efetuada da esquerda para a direita, e não ao contrário como preferimos hoje. Como exemplo consideremos a adição de 345 e 488. Provavelmente se escreviam os números um sob o outro, um pouco abaixo da borda superior da tábua de calcular, como mostra a ilustração anexa.

8	3			
7	2	3		
3	4	5		
4	8	8		

O calculador fazia $3 + 4 = 7$ e escrevia o 7 no topo da coluna da esquerda. A seguir, $4 + 8 = 12$, o que mudava o 7 por 8, seguido de um 2. Assim apagava-se o 7 e escrevia-se 82. Em nossa ilustração, por razões óbvias, riscamos o 7 e escrevemos sobre ele um 8. Por fim $5 + 8 = 13$, o que mudava o 2 por 3, seguido de outro 3. Novamente corrigiam-se as coisas através de um rápido apagamento feito com um dedo e a resposta final, 833, aparecia no topo da tábua. Apagavam-se então 345 e 488 e o resto da tábua ficava livre para outros trabalhos.

Num comentário sem data, feito por Bhāskara em seu *Lilāvati*, encontramos outra maneira de somar 345 e 488. Ei-la:

soma das unidades	$5 + 8 =$	13
soma das dezenas	$4 + 8 =$	12 .
soma das centenas	$3 + 4 =$	7 . .
soma das somas		= 833

Vários métodos de multiplicação eram usados. O processo para a multiplicação simples de, digamos, 569 por 5, podia aparecer como se segue, onde novamente se trabalha da esquerda para a direita. Na tábua, um pouco abaixo da borda superior, escreve-se 569 seguido, na mesma linha, pelo multiplicador 5. Então, como $5 \times 5 = 25$, escreve-se 25 sobre o 569, como mostra a ilustração anexa. A seguir, faz-se $5 \times 6 = 30$, o que muda o 5 de 25 num 8 seguido de um 0. Isso é fácil de fazer com um rápido apagamento. Na ilustração riscamos o 5, em vez de apagá-lo, e escrevemos o 8 sobre ele. Então $5 \times 9 = 45$, o que muda o 0 por um 4, seguido de um 5. O produto final, 2845, aparece então no topo da tábua de calcular.

Uma multiplicação mais complicada, como por exemplo 135×12 , poderia ser efetuada fazendo-se primeiro, como acima, $135 \times 4 = 540$ e depois $540 \times 3 = 1620$; ou somando $135 \times 10 = 1350$ com $135 \times 2 = 270$, obtendo-se 1620. De acordo com Hankel poderia também ter sido efetuada como se segue. Um pouco abaixo da borda superior

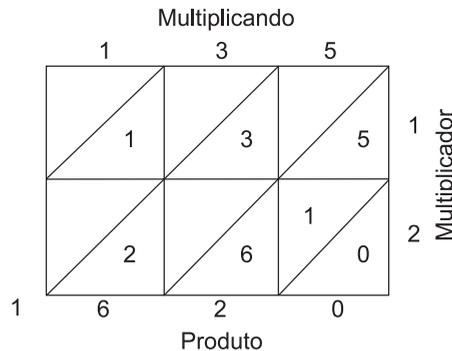
	6	2	
	3	1	
1	3	3	0
		1	2
1	3	3	
	1	3	5

da tábua, escreva o multiplicador 135 e o multiplicador 12, de modo que o dígito das unidades do multiplicando fique bem abaixo do dígito da esquerda do multiplicador. Faça $135 \times 1 = 135$ e escreva o resultado no topo da tábua. A seguir, por meio de um apagamento, translade o multiplicando 135 uma casa à direita e o multiplique pelo 2 do 12. Em se fazendo isso encontra-se $2 \times 1 = 2$, o que muda o 3 de nosso produto parcial por 5. Faça então $2 \times 3 = 6$, o que muda os dois 5 pelo novo produto parcial 61. Faça

finalmente $2 \times 5 = 10$, o que muda o 1 final de nosso produto parcial em 2 seguido de um 0. O produto final, 1620, aparece então no topo da tábua.

Outro método de multiplicação, conhecido dos árabes, que provavelmente o obtiveram dos hindus, e que se assemelha muito ao nosso atual processo, está indicado na ilustração anexa, onde outra vez se efetua o produto 135×12 . Trata-se de um diagrama em rede em que as adições se efetuam diagonalmente. Como se nota, o fato de cada cela estar dividida em dois triângulos por uma diagonal, faz com que não seja necessário nenhum transporte na multiplicação.

Os árabes, que posteriormente se apropriaram de alguns processos hindus, foram incapazes de aperfeiçoá-los e, assim, adaptaram-nos para trabalhos em “papel”, situação em que não era fácil realizar apagamentos; em vez disso eles riscavam os dígitos que não interessavam e, sobre eles ou abaixo deles, escreviam os que convinham, como foi feito na ilustração anterior.



O desenvolvimento de algoritmos para nossas operações aritméticas elementares começou na Índia, talvez por volta do século X ou XI; esses algoritmos foram adotados pelos árabes e mais tarde transportados para a Europa Ocidental, onde se modificaram até chegar à sua forma atual. Esse trabalho recebeu atenção considerável dos autores de aritméticas do século XV.

7.7 Aritmética e álgebra

Os hindus foram hábeis aritméticos e deram contribuições significativas à álgebra.

Muitos dos problemas aritméticos eram resolvidos por *falsa posição*. Outro método de resolução preferido era o de *inversão* no qual se trabalha para trás, a partir dos dados. Considere, por exemplo, o seguinte problema que faz parte do texto *Lilāvati* de Bhāskara: “Linda donzela de olhos resplandecentes, uma vez que entendeis o método de inversão correto, dizei-me qual é o número que multiplicado por 3, depois acrescido de $3/4$ do produto, depois dividido por 7, diminuído de $1/3$ do quociente, multiplicado por si mesmo, diminuído de 52, pela extração da raiz quadrada, adição de 8 e divisão por 10 resulta no número 2?”. Pelo método de inversão começamos com o número 2 e operamos para trás. Assim, $[(2)(10) - 8]^2 + 52 = 196$, $\sqrt{196} = 14$, $(14)(3/2)(7)(4/7)/3 = 28$, que é a resposta. Observe-se que onde a instrução do problema manda que se divida por 10, multiplicamos por 10; onde a instrução é para somar 8, subtraímos 8; onde manda que se extraia a raiz quadrada, elevamos ao quadrado, e assim por diante. É a substituição de cada operação por sua inversa que responde pelo nome *inversão*. É exatamente o que faríamos se tivéssemos de resolver o problema por métodos modernos. Assim, representando-se por x o número procurado, temos

$$\frac{\sqrt{\left[\frac{(2/3)(7/4)(3x)}{7}\right]^2 - 52 + 8}}{10} = 2.$$

Para resolver essa equação *multiplicamos* ambos os membros por 10, depois *subtraímos* 8 de cada membro, depois *elevamos ao quadrado* cada membro e assim por diante. Esse problema ilustra também a prática hindu de revestir problemas aritméticos de trajes poéticos. Isso ocorria porque os textos escolares eram escritos em versos e porque os problemas eram frequentemente usados para entretenimento social.

Os hindus somavam progressões aritméticas e geométricas e resolviam problemas comerciais envolvendo juros simples e compostos, descontos e regras de sociedade. Resolviam também problemas de *misturas* e de *cisternas*, como os que se encontram nos textos modernos. Nos Exercícios 7.4, 7.5 e 7.6 encontram-se várias amostras de problemas aritméticos hindus.

Grande parte do conhecimento da aritmética hindu provém do texto *Lilāvati* de Bhāskara. Conta-se sobre esse trabalho uma história romântica. Segundo o relato, os astros pressagiavam infortúnios medonhos para Lilāvati, a filha única de Bhāskara, se ela não se casasse numa certa hora de um certo dia propício. Chegado o dia, a ansiosa noiva debruçou-se sobre um relógio de água para aguardar esse momento. Mas eis que cai uma pérola de seu cabelo, sem que se notasse, obstruindo o fluxo de água. E quando o acidente foi percebido o momento propício já tinha passado... Para consolar a infeliz jovem, Bhāskara deu ao seu livro o nome da filha.

Os hindus sincoparam sua álgebra. Como Diofanto, indicavam a adição por justaposição. A subtração era indicada colocando-se um ponto sobre o subtraendo, a multiplicação escrevendo-se *bha* (primeira sílaba da palavra *bhavita*, “produto”) depois dos fatores, a divisão escrevendo-se o divisor debaixo do dividendo e a raiz quadrada escrevendo-se *ka* (da palavra *karana*, “irracional”) antes da quantidade. Brahmagupta denota a incógnita por *yā* (de *yāvattāvat*, “tanto quanto”). Os inteiros conhecidos eram antecidos de *rū* (de *rūpa*, “número puro”). As incógnitas adicionais eram indicadas pelas sílabas iniciais de palavras que expressam diferentes cores. Assim, uma segunda incógnita poderia ser denotada por *kā* (de *Kālaka*, “preto”) e $8xy + \sqrt{10} - 7$ poderia ser escrita como

$$yā kā 8 bha ka 10 rū 7.$$

Os hindus aceitavam os números negativos e irracionais e sabiam que uma equação quadrática (com respostas reais) tem duas raízes formais. Eles unificaram a resolução algébrica de equações quadráticas pelo método familiar de completamento de quadrados. Esse método é hoje muitas vezes conhecido como *método hindu*. Bhāskara deu as duas seguintes identidades notáveis:

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{(a + \sqrt{a^2 - b})/2} \pm \sqrt{(a - \sqrt{a^2 - b})/2},$$

às vezes empregadas em nossos textos de álgebra para encontrar a raiz quadrada de um número irracional. No Livro X dos *Elementos* de Euclides também se encontram essas identidades, mas numa linguagem intrincada, difícil de entender.

Os hindus revelaram notável habilidade em análise indeterminada, sendo talvez os primeiros a descobrir métodos gerais neste ramo da matemática. Ao contrário de Diofanto, que procurava *uma qualquer das soluções racionais* de uma equação indeterminada, os hindus empenhavam-se em encontrar *todas as soluções inteiras possíveis*. Āryabhata e Brahmagupta determinaram as soluções inteiras da equação linear indeterminada $ax + by = c$, onde a, b, c são inteiros. A equação quadrática indeterminada $xy = ax + by + c$ foi resolvida por um método reinventado posteriormente por Euler. O trabalho de Brahmagupta e Bhāskara sobre as chamadas equações de Pell⁵, $y^2 = ax^2 + 1$, onde a não é um quadrado perfeito, é altamente respeitado por alguns. Eles mostraram como, de uma solução x, y , onde $xy \neq 0$, podem-se encontrar infinitas outras. A teoria completa das equações de Pell foi finalmente elaborada por Lagrange de 1766 a 1769. O trabalho hindu sobre equações indeterminadas chegou à Europa Ocidental tarde demais para que pudesse exercer alguma influência benéfica.

⁵ Trata-se de uma designação errada que vingou. O erro da atribuição se deve a Euler que, por engano, admitiu que o inglês John Pell (1611-1685) havia dado um método de resolução das equações quando, na verdade, isso foi feito pelo conterrâneo de Pell, Lord Brouncker (c. 1620-1684).

7.8 Geometria e trigonometria

Os hindus não eram proficientes em geometria. Eram pouco comuns as demonstrações no sentido estrito da palavra e inexistiam procedimentos postulacionais. Sua geometria era largamente empírica e em geral se ligava à mensuração.

As antigas *Sulvasūtras* mostram que os primitivos hindus aplicavam a geometria à construção de altares e, ao fazê-lo, aplicavam a relação pitagórica. As regras forneciam instruções para encontrar um quadrado igual à soma ou diferença de dois quadrados dados e um quadrado igual a um retângulo dado. Há soluções do problema de quadrar um círculo que equivalem a tomar $d = (2 + \sqrt{2})s/3$ e $s = 13d/15$, onde d é o diâmetro do círculo e s é o lado do quadrado igual. Também aparece a expressão

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{(3)(4)} - \frac{1}{(3)(4)(34)},$$

que é interessante pelo fato de todas as frações serem unitárias e a expressão ser correta até a quinta casa decimal. Tanto Brahmagupta como Mahāvīra não só deram a fórmula de Herão para a área de um triângulo em função dos três lados como também a notável extensão⁶,

$$K = [(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)]^{1/2},$$

para a área de um quadrilátero cíclico de lados a, b, c, d e semiperímetro s . Ao que parece, comentadores posteriores não se deram conta da limitação da fórmula. Para um quadrilátero genérico a fórmula é

$$K^2 = (s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd \cos^2\left(\frac{A+C}{2}\right),$$

onde A e C são um par de ângulos opostos do quadrilátero.

Sem par em sua excelência no contexto da geometria hindu são os teoremas de Brahmagupta que expressam as diagonais m e n de um quadrilátero cíclico em função dos lados consecutivos a, b, c, d , a saber

$$m^2 = \frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc},$$

$$n^2 = \frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd},$$

⁶ Para uma dedução dessa fórmula ver, por exemplo, E. W. Hobson, *A Treatise on Plane Trigonometry*, 4ª ed., p. 204 ou R. A. Johnson, *Modern Geometry*, p. 81.

e aquele que garante que se a, b, c, A, B, C são inteiros positivos tais que $a^2 + b^2 = c^2$ e $A^2 + B^2 = C^2$, então o quadrilátero cíclico de lados consecutivos aC, cB, bC, cA (chamado *trapézio de Brahmagupta*) tem área e diagonais racionais, sendo essas diagonais perpendiculares entre si (ver Exercício 7.9 e 7.10). Brahmagupta conhecia o teorema de Ptolomeu sobre o quadrilátero cíclico.

Encontram-se muitas imprecisões nas fórmulas de mensuração hindus. Assim é que Āryabhata dá como volume de uma pirâmide a *metade* do produto da base pela altura e como volume da esfera $\pi^{3/2}r^3$. Os hindus deram alguns valores acurados de π , mas frequentemente usavam $\pi = 3$ e $\pi = \sqrt{10}$.

É bem conhecida, mesmo em nível médio, a demonstração de Bhāskara, por decomposição, do teorema de Pitágoras. Nessa demonstração decompõe-se o quadrado sobre a hipotenusa em quatro triângulos, cada um deles congruentes ao triângulo dado, mais um quadrado de lado igual à diferença entre os catetos do triângulo dado, como se vê na Figura 60. Facilmente se rearranjam as partes de modo a obter a soma dos quadrados sobre os catetos. Bhāskara desenhou a figura e não ofereceu nenhuma explicação, mas tão somente a palavra “Veja!”. Com um pouco de álgebra, porém, faz-se a demonstração; pois se c é a hipotenusa e a e b são os catetos do triângulo,

$$c^2 = 4\left(\frac{ab}{2}\right) + (b-a)^2 = a^2 + b^2.$$

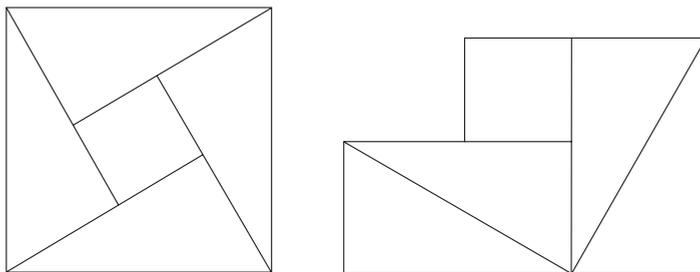


Figura 60

Muito tempo antes essa demonstração já fora dada na China. Uma segunda demonstração do teorema de Pitágoras, devida a Bhāskara, é feita traçando-se a altura relativa à hipotenusa. Dos triângulos semelhantes da Figura 61 decorre

$$\frac{c}{b} = \frac{b}{m}, \quad \frac{c}{a} = \frac{a}{n}$$

ou

$$cm = b^2, \quad cn = a^2.$$

Somando membro a membro obtemos

$$a^2 + b^2 = c(m + n) = c^2.$$

Essa demonstração foi redescoberta por John Wallis no século XVII.

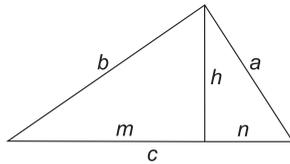


Figura 61

Os hindus, como os gregos, consideravam a trigonometria como uma ferramenta para sua astronomia. Eles usavam nossos conhecidos graus, minutos e segundos nas tábuas de senos que construíam. (Isto é, eles construíam tábuas de semicordas e não de cordas, como os gregos haviam construído.) Os hindus empregavam os equivalentes de senos, cossenos e senos reversos ($\text{versen } A = 1 - \cos A$). Eles calculavam o seno do ângulo metade através da relação $\text{versen } 2A = 2 \text{sen}^2 A$. Em sua trigonometria eles resolviam triângulos planos e esféricos. Sua astronomia em si era de baixa qualidade, revelando inabilidade para a observação, coleta e cotejo de dados e para o estabelecimento de leis indutivas. Pode-se descrever essa trigonometria como mais aritmética do que geométrica.

7.9 Confronto entre a matemática grega e a hindu

Há muitas diferenças entre a matemática grega e a hindu. Em primeiro lugar os hindus que se dedicavam à matemática acima de tudo consideravam-se a si mesmos astrônomos; assim, a matemática hindu era em grande escala uma serva da astronomia. Com os gregos a matemática alcançou uma existência independente, sendo estudada por si própria. Como resultado do sistema de castas, a matemática na Índia era cultivada quase que exclusivamente por sacerdotes; na Grécia o estudo da matemática estava aberto a todos os que se interessassem pelo assunto. Os hindus eram rematados calculadores mas geométricos medíocres; os gregos eram excelentes geométricos mas pouco se interessavam por trabalhos computacionais. Mesmo a trigonometria hindu, à qual não faltavam méritos, tinha uma natureza aritmética; a essência da trigonometria grega era geométrica. Os hindus escreviam em versos e muitas vezes revestiam seus trabalhos de uma linguagem obscura e mística; os gregos buscavam a clareza e a organização lógica em suas exposições. A matemática hindu era grandemente empírica, raramente oferecendo uma demonstração ou uma dedução; a característica mais importante da matemática grega era sua insistência com as demonstrações rigorosas. A qualidade da matemática hindu era muito irregular, encontrando-se com frequência, lado a lado, a de bom nível e a de baixo nível;

os gregos pareciam ter um sexto sentido que fazia com que distinguíssem a boa da má qualidade e a agarrar-se tão somente àquela. Como observou o escritor muçulmano Al-Biruni em seu conhecido trabalho *Índia*, ao contrário da alta qualidade uniforme da matemática grega, a matemática hindu era “uma mistura de conchas com pérolas e tâmaras azedas... de cristais caros e seixos comuns”.

Numerosos contrastes entre a matemática grega e a hindu se perpetuaram até hoje nas diferenças entre muitos de nossos textos de geometria elementar e outros tantos de álgebra: enquanto os primeiros têm um caráter dedutivo, estes últimos não raro são apenas coleções de regras.

ARÁBIA

7.10 A ascensão da cultura muçulmana

A ascensão e o declínio do Império Árabe constituem um dos episódios mais notáveis da história. Na década que se seguiu à fuga de Maomé de Meca para Medina em 622 d.C., as tribos dispersas e desunidas da Península da Arábia se consolidaram, mercê de um grande fervor religioso, numa poderosa nação. Dentro de um século, empunhando o estandarte verde e dourado do islamismo, pela força das armas estenderam o domínio e a influência da estrela e do crescente muçulmanos a um território que ia da Índia à Espanha, passando pela Pérsia, Mesopotâmia e norte da África. Em 755, em virtude de disputas internas, verificou-se uma divisão leste/oeste no império, resultando daí um califado com capital em Bagdá e outro com capital em Córdoba. Até por volta do ano 1000 o Império Oriental detinha a supremacia espiritual. Por essa época, todavia, o território oriental começou a ser ocupado pelos cruéis turcos seldjúcidas. Entre 1100 e 1300 as Cruzadas empreenderam a tarefa de desalojar os muçulmanos da Terra Santa. Em 1258 os mongóis tomaram Bagdá, o califa do oriente foi derrubado do poder e o Império Árabe começou a declinar. Em 1492 a Espanha derrotou o último dos governantes mouros e os árabes perderam sua cabeça de ponte na Europa.

Foi de importância fundamental para a conservação de grande parte da cultura mundial a maneira como os árabes se apoderaram do saber grego e hindu. Os califas de Bagdá foram governadores esclarecidos e muitos deles tornaram-se patronos da cultura e convidaram intelectuais eminentes para se instalarem junto às suas cortes. Inúmeros trabalhos de astronomia, medicina e matemática gregos foram laboriosamente traduzidos para o árabe e assim preservados até que posteriormente intelectuais europeus tivessem condições de retraduzi-los para o latim ou outras línguas. Não fora o trabalho dos intelectuais árabes e grande parte da ciência grega e hindu se teria perdido irremediavelmente ao longo da Alta Idade Média.

Durante o reinado do califa Al-Mansūr, levaram-se para Bagdá (c. 766) os trabalhos de Brahmagupta que, com patrocínio real, foram traduzidos para o árabe. Já se disse que essa foi a maneira pela qual os numerais hindus penetraram na matemática árabe. O califa seguinte, Harun al-Rashid (Aarão, o Justo), que reinou de 786 a 808, e cujo nome se tornou conhecido por causa de *As mil e uma noites*, patrocinou a tradução de vários clássicos gregos para o árabe, entre eles parte dos *Elementos* de Euclides. Durante seu reinado verificou-se também um influxo adicional do saber hindu em Bagdá. O filho de Harun al-Rashid, Al-Mâmûn, que reinou de 809 a 833, foi também um patrono do saber, além de ser ele próprio um astrônomo. Ele construiu um observatório em Bagdá e empreendeu a tarefa de medir o meridiano terrestre. A difícil tarefa de obter traduções satisfatórias dos clássicos gregos continuou por determinação sua; o *Almagesto* foi vertido para o árabe e se completou a tradução dos *Elementos*. Como condição de um tratado de paz com o Império Bizantino, asseguraram-se manuscritos gregos que foram então traduzidos por intelectuais sírios cristãos convidados para a corte de Al-Mâmûn. Muitos intelectuais escreveram sobre matemática e astronomia em seu reinado, sendo o mais famoso de todos Mohammed ibn Mûsâ al-Khowârizmî (Maomé, filho de Moisés de Khwarezm). Ele escreveu um tratado de álgebra e um livro sobre os numerais hindus que exerceram enorme influência na Europa quando foram traduzidos para o latim no século XII. Um erudito de uma época um pouco posterior, famoso como médico, filósofo, linguista e matemático, foi Tâbit ibn Qorra (826-901). Deve-se a ele a primeira tradução árabe realmente satisfatória dos *Elementos*. Consta que suas traduções de Apolônio, Arquimedes, Ptolomeu e Teodósio figuram entre as melhores que já se fizeram. De importância especial são suas traduções dos Livros V, VI e VII das *Secções cônicas* de Apolônio, pois somente através delas esses Livros se preservaram. Ele escreveu também sobre astronomia, cônicas, álgebra elementar, quadrados mágicos e números amigáveis (ver Exercício 7.11).

Provavelmente o mais ilustre dos matemáticos muçulmanos do século X foi Abû'l-Wefâ (940-998), nascido na região montanhosa persa de Khorâsân. Ele se tornou especialmente conhecido por sua tradução de Diofanto, por ter introduzido a função *tangente* em trigonometria e por uma tábua de senos e tangentes, com incrementos de 15', que elaborou. Para tanto ele aperfeiçoou o método de Ptolomeu, obtendo $\sin 30'$ com nove casas decimais. Ele escreveu sobre muitos tópicos matemáticos. Devem-se mencionar Abû Kâmil e Al-Karkhî, que escreveram nos séculos X e XI, por seu trabalho em álgebra. O primeiro escreveu um comentário sobre a álgebra de Al-Khowârizmî que posteriormente foi usado pelo matemático europeu Fibonacci (1202). Al-Karkhî, que foi um adepto de Diofanto, produziu uma obra chamada *Fakhrî*, um dos mais respeitáveis trabalhos de álgebra muçulmanos. Mas talvez a mais profunda e original contribuição algébrica árabe tenha sido a resolução geométrica de uma equação cúbica feita por Omar Khayyam (c. 1100), outro nativo de Khorâsân, conhecido no mundo ocidental como autor do primoroso *Rubaiyat*. Khayyam também é conhecido por sua proposta acurada de reforma do calendário.

Um outro escritor de Khorâzân, mas de uma época consideravelmente posterior, foi Nasîr ed-dîn (c. 1250). É dele o primeiro trabalho de trigonometria plana e esférica considerado independente da astronomia. Saccheri (1667-1733) iniciou seu trabalho sobre geometria não euclidiana a partir do conhecimento que tinha dos escritos de Nasîr ed-dîn

sobre o postulado das paralelas de Euclides. Trata-se da única tentativa de provar esse postulado no período que vai dos gregos antigos até o Renascimento. Esses escritos foram traduzidos para o latim por John Wallis no século XVII e usados por ele em seus cursos em Oxford. Por fim há que se mencionar Ulugh Beg, um astrônomo persa de sangue real do século XV, que elaborou notáveis tábuas de senos e tangentes com incrementos de 1', corretas pelo menos até a oitava casa decimal. Em sua corte, na cidade de Samarcanda, estava Al-Kashi, já mencionado na Seção 7-2 por sua acurada aproximação de π . Al-Kashi teve papel importante na história das frações decimais e foi o primeiro autor árabe que conhecemos a lidar com o teorema binomial em sua forma de “triângulo de Pascal”.



7.11 *Aritmética e álgebra*

Antes de Maomé os árabes escreviam todos os números em palavras. A adoção de um simbolismo abreviado foi consequência, em parte, da subsequente administração dos extensos territórios conquistados. Às vezes adotava-se o sistema de numeração local e numa certa época era mais comum se usar um sistema de numeração cifrado, como o grego jônico, mediante a utilização das 28 letras árabes. Essa notação, por sua vez, foi superada pela notação hindu, inicialmente adotada por mercadores e autores de aritméticas. Um fato bastante estranho foi a exclusão dos numerais hindus de algumas das últimas aritméticas do Império Oriental. Assim, Abû'l-Wefâ e Al-Karkhî, dos séculos X e XI, escreveram aritméticas nas quais novamente os números eram escritos em palavras. Era a influência dos métodos gregos que, a essa altura, fizera com que esses escritores tivessem se afastado dos ensinamentos hindus. Não se descobriu nenhum traço do uso do ábaco entre os árabes antigos.

A primeira aritmética árabe que se conhece é a de Al-Khowârizmî; seguiu-se a ela uma batelada de outras aritméticas árabes. Essas aritméticas geralmente ensinavam regras para efetuar cálculos modeladas nos algoritmos hindus. Davam também o processo conhecido hoje como *noves fora*, usado para testar cálculos aritméticos e as regras de *falsa posição* e *falsa posição dupla* mediante as quais podem-se resolver alguns problemas algébricos de maneira não algébrica (ver Exercícios 7.12 e 7.14). Também explicavam frequentemente raízes quadradas e cúbicas, frações e a *regra de três*.

A *regra de três*, que provavelmente se originou na China antiga, alcançou a Arábia através da Índia, onde Brahmagupta e Bhāskara a tratavam por essa mesma designação. Durante séculos a regra mereceu a mais alta consideração da parte dos mercadores. Ela era enunciada mecanicamente, sem nenhuma justificação, e seus vínculos com as proporções só foram reconhecidos no fim do século XIV. Eis como Brahmagupta enunciava a regra: *Na regra de três, os nomes dos termos são Argumento, Fruto e Requisito. O primeiro e último termos devem ser semelhantes. Requisito multiplicado por Fruto e dividido por Argumento é o Produto.* A título de esclarecimento, considere o seguinte problema dado por Bhāskara: Se dois palas e meio de açafão custam três sétimos de niska, quantos palas se comprarão com nove niskas? Neste caso $3/7$ e 9 , que têm a mesma denominação, são o Argumento e o Requisito e $5/2$ é o Fruto. A resposta, ou Produto, é dada por $(9)(5/2)/(3/7) = 52\ 1/2$. Hoje em dia simplesmente resolveríamos a proporção

$$x : 9 = (5/2) : (3/7).$$

As aritméticas europeias antigas dedicaram muito espaço à explicação da *regra de três*; muitas vezes usavam-se versos de pé quebrado e diagramas esquemáticos para tornar perceptível sua natureza mecânica.

A álgebra de Al-Khowârizmî mostra pouca originalidade. Explicam-se as quatro operações elementares e resolvem-se equações lineares e quadráticas, estas últimas aritmética e geometricamente. O trabalho contém algumas questões envolvendo mensuração geométrica e alguns problemas de herança.

As melhores contribuições dadas pelos matemáticos muçulmanos verificaram-se no campo da álgebra geométrica. E dessas a mais importante se deve a Omar Khayyam, com a resolução geométrica de equações cúbicas. Estas eram classificadas sistematicamente e se obtinha uma de suas raízes como abscissa do ponto de intersecção de uma circunferência e uma hipérbole equilátera ou de duas hipérbolas equiláteras (ver Exercício 7.15). Khayyam rejeitava as raízes negativas e frequentemente não conseguia encontrar todas as positivas. As equações cúbicas resultavam da abordagem de problemas como o da construção de um heptágono regular e o problema arquimediano da divisão de uma esfera em dois segmentos numa razão dada. Abū'l-Wefā forneceu soluções geométricas para algumas equações quárticas particulares.

Alguns matemáticos muçulmanos mostraram interesse por análise indeterminada; assim é que foi dada uma demonstração (provavelmente defeituosa e hoje perdida) do teorema que afirma a impossibilidade de se encontrarem dois inteiros positivos cuja soma dos cubos é o cubo de um outro inteiro positivo. Trata-se de um caso particular do famoso

último “teorema” de Fermat ao qual retornaremos no Capítulo 10. Já se mencionou a regra de Tâbit ibn Qorra para a determinação de números amigáveis. Essa regra pode representar o primeiro trabalho matemático original feito por um árabe. Al-Kharkhî foi o primeiro escritor árabe a dar e provar teoremas fornecendo as somas dos quadrados e dos cubos dos n primeiros naturais.

A álgebra árabe, salvo no que se refere aos árabes ocidentais dos últimos tempos, era retórica.

7.12 Geometria e trigonometria

O papel importante desempenhado pelos árabes em geometria foi mais de preservação do que de descoberta. O mundo lhes deve um preito de reconhecimento por seus esforços continuados para traduzir satisfatoriamente os clássicos gregos.

Há um belo estudo feito por Abū'l Wefā em que ele mostrou como localizar os vértices do poliedro regular na esfera que o circunscribe, com um compasso de abertura fixa. Já mencionamos a resolução geométrica de equações cúbicas dada por Omar Khayyam e o trabalho influente de Nasīr ed-dīn sobre o postulado das paralelas. Nasīr ed-dīn publicou, com comentários e “correções”, parte de um trabalho anterior de Khayyam intitulado *Discussão das dificuldades de Euclides*. Nessa parte encontramos o que aparentemente talvez seja a primeira consideração das três alternativas que séculos mais tarde Saccheri chamaria de hipóteses do ângulo agudo, do ângulo obtuso e do ângulo reto (ver Seção 13-6). Credita-se ainda a Nasīr ed-dīn uma demonstração original do teorema de Pitágoras. Essa demonstração é essencialmente aquela que sugerimos nas notas do Exercício 6.17(c) para a extensão de Pappus do teorema de Pitágoras.

O nome de Al-Haitam ou, mais popularmente, Alhazen (c. 965-1039), se preservou em matemática devido ao chamado *problema de Alhazen*: Traçar, por dois pontos do plano de uma circunferência dada, duas retas que se interceptam num de seus pontos e que formam ângulos iguais com a circunferência no ponto de intersecção. Esse problema leva a uma equação quártica que foi resolvida à maneira grega pela intersecção de uma circunferência e uma hipérbole. Alhazen nasceu em Basra, no sul do Iraque, e foi talvez o maior dos físicos muçulmanos. A solução do problema anterior apareceu na *Óptica* de Alhazen, um tratado que posteriormente teve muita influência na Europa.

Conta-se uma história patética sobre Alhazen. Certa feita ele infelizmente alardeou que poderia construir uma máquina capaz de regular a vazão do rio Nilo, evitando inundações. Devido a isso foi convocado pelo califa Hakim a se apresentar no Cairo para dar explicações e talvez provar sua ideia. Ciente de que seu esquema era totalmente impraticável e temendo a ira do califa, Alhazen fingiu-se de louco, pois esse tipo de insanidade gozava de proteção particular naqueles tempos. Bastante preocupado, Alhazen sustentou a farsa até a morte de Hakim em 1021.

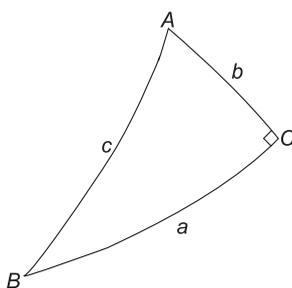


Figura 62

Como os hindus, os matemáticos árabes consideravam-se a si mesmos primariamente astrônomos e assim dedicavam interesse considerável à trigonometria. Já tivemos ocasião de mencionar algumas das realizações muçulmanas quanto à construção de tábuas trigonométricas. Pode-se creditar a eles a utilização das seis funções trigonométricas e aprimoramentos na dedução de fórmulas da trigonometria esférica. Al-Battânî (nome latinizado para Albategnius, c. 920) chegou à lei dos cossenos para um triângulo esférico obliquângulo, ou seja,

$$\cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \operatorname{sen} A .$$

A fórmula

$$\cos B = \cos b \operatorname{sen} A ,$$

para um triângulo esférico ABC , reto em C (ver Figura 62), é às vezes chamada *teorema de Geber*, em alusão ao astrônomo muçulmano ocidental Jabir ibn Aflah (frequentemente chamado Geber, c. 1130) que trabalhou em Sevilha.

7.13 Alguma etimologia

Muitos nomes e palavras usadas hoje em dia remontam ao período árabe; assim, qualquer pessoa interessada em astronomia de observação provavelmente tem ciência de que um grande número de nomes de estrelas, em particular daquelas de brilho mais tênue, é árabe. Entre as estrelas de brilho mais intenso são exemplos bem conhecidos Alderabã, Vega e Rigel e entre as de brilho mais tênue Algol, Alcor e Mizar. Muitos dos nomes de estrelas eram originalmente expressões que indicavam sua localização nas respectivas constelações. Essas expressões descritivas, quando transcritas do catálogo de Ptolomeu para o árabe, acabaram se degenerando em palavras simples como Betelgeuse (axila da Principal), Formalhaut (boca do Peixe), Deneb (cauda do Pássaro), Rigel (perna do Gigante) e assim por diante. Na Seção 6-5 explicamos como se derivou *Almagesto*, o nome árabe pelo qual a grande obra de Ptolomeu é comumente conhecida.

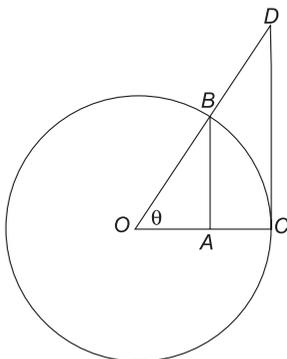


Figura 63

A origem de nossa palavra álgebra, a partir do título do tratado de Al-Khowârizmî sobre o assunto, *Hisâb al-jabr w'al-muqâ-balab*, é muito interessante. Esse título foi traduzido literalmente como “ciência da reunião e da oposição” ou, mais livremente, como “ciência da transposição e do cancelamento”⁷. O texto, que se preservou, tornou-se conhecido na Europa através de uma tradução latina e fez da palavra *al-jabr* ou *álgebra* sinônimo de ciência das equações. Obviamente desde a metade do século XIX o termo *álgebra* adquiriu um significado muito mais amplo.

A palavra árabe *al-jabr* veio a encontrar um significado não matemático na Europa, através dos mouros da Espanha. Nesse país, quem consertava ossos fraturados chamava-se *algebrista*; e como os barbeiros medievais dedicavam-se adicionalmente a essa tarefa, eles próprios se chamavam de *algebristas*.

O livro de Al-Khowârizmî sobre o uso dos numerais hindus também introduziu uma palavra no vocabulário da matemática. Não há cópias do original desse livro, mas em 1857 descobriu-se uma tradução latina que começa por “Algoritmi disse...”. Nessa abertura o nome *Al-Khowârizmî* transformou-se em *Algoritmi* que, por sua vez, deu origem à palavra atual *algoritmo* que significa “arte de calcular de uma maneira particular”.

Os significados dos nomes atuais das funções trigonométricas, com exceção do *seno*, são claros a partir de sua interpretação geométrica, quando se coloca o ângulo no centro de um círculo de raio unitário. Assim, na Figura 63, se o raio do círculo é uma unidade, os valores de $\operatorname{tg} \theta$ e $\operatorname{sec} \theta$ são dados pelos comprimentos do segmento de *tangente* CD e pelo segmento de *secante* OD . Obviamente, *cotangente* significa simplesmente “tangente do complemento” e assim por diante. As funções tangente, cotangente, secante e cossecante foram conhecidas por vários outros nomes, surgindo esses particulares no máximo até o fim do século XVI.

⁷ Para uma análise mais profunda ver Salomon Gandz, “The origin of the term ‘álgebra’”, *The American Mathematical Monthly*, nº 33, 1926, pp. 437-40.

A origem da palavra *seno* é curiosa. Āryabhata usava *ardhā-jyā* (“semicorda”) e também *jyā-ardhā* (“corda metade”) e por brevidade escrevia apenas *jyā* (“corda”). Partindo de *jyā* os árabes foneticamente derivaram *jība* que, devido à prática entre eles de se omitir as vogais, se escrevia *jb*. Afora seu significado técnico, hoje *jība* é uma palavra que não tem sentido em árabe. Posteriormente, escritores que se depararam com *jb* como abreviação da palavra sem sentido *jība* passaram a usar *jaib* que faz parte do vocabulário árabe e que significa “enseada” ou “baía”. Mais tarde ainda, ao fazer a tradução de *jaib* para o latim, Gerardo de Cremona empregou o equivalente latino *sinus*, de onde vem nossa palavra atual *seno*.

7.14 A contribuição árabe

As avaliações do papel dos árabes no desenvolvimento da matemática de maneira nenhuma são unânimes. Há aqueles que veem nos escritores muçulmanos, particularmente em seu trabalho em álgebra e geometria, grande originalidade. Outros assinalam que esses escritores, a despeito de talvez revelarem erudição, raramente eram criativos e que seu trabalho se situa num plano secundário, quantitativa e qualitativamente, em relação aos gregos e aos escritores modernos. Por outro lado, deve-se admitir que eles deram pelo menos contribuições pequenas à ciência; ocorre que suas realizações, quando vistas contra o pano de fundo cientificamente estéril do resto do mundo na época, assumiram dimensões maiores do que as que de fato tinham. Há ainda, no balanço a seu favor, o importante fato de que eles custodiaram de maneira admirável grande parte do patrimônio intelectual do mundo até que os europeus despertassem do marasmo da Alta Idade Média.

Exercícios

7.1 Alguns problemas dos Nove capítulos sobre a arte da matemática

Resolva os seguintes problemas tirados dos *Nove capítulos sobre a arte da matemática*.

(a) Problema 11, Capítulo IV. “É dado um campo de largura $1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6, 1/7, 1/8, 1/9, 1/10, 1/11$ e $1/12$ pu. Sabe-se que a área do campo é 1 mu. Qual é o comprimento do campo?” (Um pu é o dobro de um passo; 1 mu = 240 pu quadrados; a largura do campo é $1 + 1/2 + 1/3 + \dots + 1/12$ pu.)

(b) Problema 14, Capítulo IV. “É dado um campo quadrado de $71\ 824$ pu quadrados. Qual é o lado do quadrado?”

(c) Problema 16, Capítulo I. “É dado um campo com a forma de segmento circular, de base $78 \frac{1}{2}$ pu ou sagitta $13 \frac{7}{9}$ pu. Qual é a área?” (Use a fórmula de aproximação $A = s(b + s)/2$.)

(d) Problema 1, Capítulo VIII. “Três feixes de uma colheita de boa qualidade, dois feixes de uma de qualidade regular e um feixe de uma de má qualidade são vendidos por 39 dou. Dois feixes de boa, três de regular e um de má são vendidos por 34 dou. Um feixe de boa, dois de regular e três de má são vendidos por 26 dou. Qual o preço do feixe para cada uma das qualidades?”

7.2 O teorema de Pitágoras

(a) O enunciado do Problema 11, Seção IX, dos *Nove capítulos* é o seguinte: “É dada uma porta cuja altura excede a largura em 6 ch’ih 8 ts’un. A distância máxima entre os vértices é 1 chang. Qual a altura e qual a largura da porta?” (1 chang = 10 ch’ih, 1 ch’ih = 10 ts’un.)

(b) Resolver o seguinte problema, adaptado dos *Nove Capítulos*: “No meio de um pequeno lago circular de 10 pés de diâmetro está plantado um junco vertical que se projeta um pé para fora da água. Inclinando-o lateralmente, sem encurvá-lo, sua extremidade atinge exatamente a borda do lago. Qual a profundidade da água?”

(c) Resolva o problema do bambu quebrado (encontrado nos *Nove Capítulos* e posteriormente num trabalho de Yang Hui): “Há um bambu de 10 pés de altura cuja extremidade superior, ao ser quebrada, atinge o chão a 3 pés da haste. Achar a altura da quebra”.

(d) Usando uma generalização da Figura 59, invente uma demonstração do teorema de Pitágoras.

(e) Obtenha a fórmula correta da área de um segmento circular em termos da base b e da sagitta s do segmento.

7.3 Quadrados mágicos

Nenhuma abordagem da matemática chinesa antiga, por mais breve que seja, pode deixar de mencionar o quadrado mágico chamado *lo-shu*.

Um dos clássicos matemáticos chineses mais antigos é o *I-King* ou *Livro das Permutações*. Nele aparece um diagrama numérico conhecido como *lo-shu*, posteriormente desenhado como se vê na Figura 64. Trata-se do exemplo conhecido mais antigo de quadrado mágico; conta uma lenda que o primeiro a vê-lo foi o imperador Yü, por volta de 2200 a.C., decorando a carapaça de uma tartaruga divina que lhe apareceu às margens do rio Amarelo. Como se vê na Figura 64 é um arranjo quadrado de numerais expressos por nós em cordas; nós pretos para números pares e brancos para números ímpares.

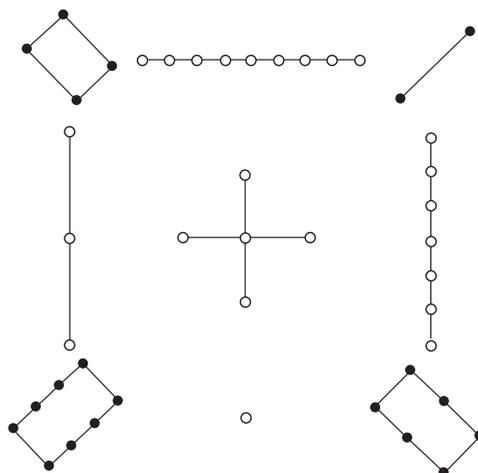


Figura 64

(a) Um *quadrado mágico de ordem n* é um arranjo quadrado de n^2 inteiros distintos dispostos de maneira tal que os números de uma linha qualquer, de uma coluna qualquer ou da diagonal principal têm mesma soma, chamada *constante mágica* do quadrado. O quadrado mágico se diz *normal* se os n^2 números que o formam são os n^2 primeiros números inteiros positivos. Mostre que a constante mágica de um quadrado mágico de ordem n normal é $n(n^2 + 1)/2$.

(b) De la Loubère, quando enviado de Luis XIV no Sião (atual Tailândia), no período entre 1687 e 1688, aprendeu um método simples de construir quadrados mágicos normais de qualquer ordem ímpar. Ilustremos o método com a construção de um de ordem cinco. Desenhe um quadrado e o divida em 25 celas (ver Figura 65). Contorne o quadrado com celas ao longo de suas bordas superior e direita e sombreie a do canto superior direito. Escreva 1 na cela central superior do quadrado original. A regra geral consiste em proceder diagonalmente para cima e para a direita com os inteiros sucessivos. As exceções a essa regra ocorrem quando essa operação nos leva para fora do quadrado original ou a uma cela já ocupada. Na primeira dessas situações voltamos ao quadrado original deslocando o número que cairia fora, ou de cima para baixo ou da direita para a esquerda, conforme seja o caso, para a última cela em branco da fila correspondente. Na segunda situação escrevemos o número na cela imediatamente abaixo da última a ter sido preenchida e prosseguimos com a regra geral. Deve-se considerar ocupada a cela sombreada.

Em nossa ilustração, então, a regra geral indica que se deve colocar o 2 diagonalmente acima do 1 na quarta cela do contorno superior do quadrado. Portanto deve-se deslocar o 2 para a quarta cela da linha de baixo do quadrado original. Prosseguindo com a regra geral, quando se chega ao 4 atinge-se a terceira cela do contorno lateral direito do quadrado. Deve-se então deslocar o 4 para a terceira cela da primeira coluna do quadrado

original. A regra geral colocaria o 6 na cela já ocupada pelo 1; portanto ele deve ser escrito na cela exatamente abaixo da do último número registrado, ou seja, o 5. E assim por diante.

	18	25	2	9	
17	24	1	8	15	17
23	5	7	14	16	23
4	6	13	20	22	4
10	12	19	21	3	10
11	18	25	2	9	

Figura 65

Construa um quadrado mágico normal de ordem sete.

(c) Mostre que a cela central de um quadrado mágico normal de ordem três deve ser ocupada pelo 5.

(d) Mostre que num quadrado mágico normal de ordem três o 1 não pode ocupar as celas dos cantos.

7.4 Alguns problemas hindus antigos

(a) Resolva o seguinte problema, generalização de um outro dado por Brahmagupta (c. 630): “Dois ascetas viviam no topo de um rochedo vertical de altura h cuja base distava d de uma aldeia vizinha. Um deles desceu o rochedo e caminhou até a aldeia. O outro, que era mágico, alçou-se verticalmente a uma altura x do topo e então voou em linha reta para a aldeia. Ambos percorreram a mesma distância. Determine x ”. No problema original $h = 100$ e $d = 200$.

(b) Resolva a seguinte versão do problema do bambu quadrado [ver Exercício 7.2(c)] dada por Brahmagupta: “Um bambu de 18 cúbitos de altura foi quebrado pelo vento. Sua extremidade superior tocou o chão a 6 cúbitos da raiz. Diga os comprimentos das partes do bambu”.

(c) Em escavações realizadas em 1881 no noroeste da Índia, em Bakhshali, encontrou-se uma aritmética anônima, conhecida como o *manuscrito Bakhshālī*⁸. Consiste

⁸ Ver H. O. Midonick, *The Treasury of Mathematics*. Nova York, Philosophical Library, 1965, pp. 92-105.

em 70 páginas de fibra de casca de bétula. Há muitas conjecturas sobre sua origem e época a que pertence, estimando-se que esta se situe entre o século III e o século XII d.C. Resolva o seguinte problema encontrado nesse manuscrito: “Um mercador paga tarifas aduaneiras sobre certa mercadoria em três lugares diferentes. No primeiro ele dá $1/3$ da mercadoria, no segundo $1/4$ (do restante) e no terceiro $1/5$ (do restante). O total das tarifas é 24. Qual era a quantidade original de mercadoria?”

7.5 Problemas de Mahāvīra

Pode-se apreciar a natureza de muitos dos problemas de aritmética hindus pelos que se seguem, adaptados de Mahāvīra (c. 850). Resolva os problemas seguintes:

(a) Uma serpente negra, poderosa, invicta, deslumbrante, de 80 angulas de comprimento penetra num orifício à razão de $7\frac{1}{2}$ angulas por $5/14$ de dia; no curso de $1/4$ de dia sua cauda cresce $1\frac{1}{4}$ de angula. Ó ornamentos da aritmética, digam-me em quanto tempo a serpente entrará plenamente no orifício?

(b) De um monte de mangas o rei toma $1/6$, a rainha $1/5$ do restante, os três príncipes mais velhos $1/4$, $1/3$ e $1/2$ dos restos sucessivos e o mais jovem de todos as 3 mangas restantes. Ó você que é perito em problemas variados sobre frações, diga qual o número de mangas do monte.

(c) O preço conjunto de 9 cidras e 7 maçãs aromáticas é 107; e o preço conjunto de 7 cidras e 9 maçãs aromáticas é 101. Ó você aritmético, diga-me rapidamente o preço de uma cidra e o de uma maçã aromática, tendo separado bem distintamente esses preços.

(d) Viu-se um quarto de um rebanho de camelos na floresta; o dobro da raiz quadrada do rebanho subiu as encostas da montanha; e o triplo de 5 camelos permaneceu às margens do rio. Qual é a medida numérica do rebanho de camelos?

7.6 Problemas de Bhāskara

Os problemas de aritmética hindus comumente envolviam irracionais quadráticos, o teorema de Pitágoras, progressões aritméticas e permutações. Considere os seguintes problemas adaptados de Bhāskara (c. 1150).

(a) A raiz quadrada da metade do número de abelhas de um enxame voou sobre um jasmineiro e $8/9$ do enxame permaneceu atrás; uma abelha fêmea voa em torno de um macho que se encontra preso dentro de uma flor de lótus para a qual foi atraído à noite por seu odor doce. Diga-me, você que é a mais encantadora das damas, o número de abelhas.

(b) No pé de um pilar de 15 cúbitos de altura há um orifício de cobra e no seu cume está empoleirado um pavão. Vendo a cobra, a uma distância igual ao triplo da altura do pilar, arrastando-se para seu orifício, o pavão arremete contra ela. Diga rapidamente a quantos cúbitos do orifício da cobra eles se encontram, se ambos percorrem distâncias iguais?

(c) Numa expedição para capturar os elefantes de seu inimigo, um rei marchou 2 yojanas no primeiro dia. Diga, calculador inteligente, a razão com que sua marcha diária aumentou, se ele alcançou a cidade do inimigo, a uma distância de 80 yojanas, em uma semana?

(d) Quantas são as variações da forma do deus Sambu (Siva) obtidas pelas permutações de seus 10 atributos sustentados reciprocamente por suas diversas mãos, a saber: a corda, a tromba do elefante, o tamborim, a serpente, a caveira, o tridente, a armação de cama, a adaga, o arco, a flecha; e as de Hari, pelas permutações do cetro, do disco, da flor de lótus e da trombeta?

(e) Arjuna, na exasperação do combate, arremessou uma aljava de flechas para matar Carna. Com metade de suas flechas ele neutralizou as de seu antagonista; com 4 vezes a raiz quadrada de toda a aljava ele matou seu cavalo; com 6 flechas ele matou Salya (cocheiro de Carna); com 3 destruiu o escudo, o estandarte e o arco; e com uma ele decepou a cabeça do inimigo. Quantas flechas Arjuna arremessou?

7.7 Irracionais quadráticos

Um radical numérico em que o radicando é racional mas o radical mesmo é irracional chama-se *irracional quadrático*, cúbico e assim por diante conforme o índice seja 2, 3 e assim por diante.

(a) Mostre que um irracional quadrático não pode ser igual à soma de um número racional não nulo com um irracional quadrático.

(b) Mostre que se $a + \sqrt{b} = c + \sqrt{d}$, onde \sqrt{b} e \sqrt{d} são irracionais quadráticos e a e c são racionais, então $a = c$ e $b = d$.

(c) Justifique as identidades de Bhāskara dadas na Seção 7-6 e use uma delas para expressar $\sqrt{17 + \sqrt{240}}$ como soma de dois irracionais quadráticos.

7.8 Equações indeterminadas do primeiro grau

Os hindus resolveram o problema de encontrar todas as soluções inteiras da equação linear indeterminada $ax + by = c$, onde a, b, c são inteiros dados.

(a) Se $ax + by = c$ tem uma solução inteira, mostre que o máximo divisor comum de a e b é divisor de c . (Esse teorema garante que não há nenhuma perda de generalidade em se considerar a e b primos entre si.)

(b) Se x_1 e y_1 constituem uma solução inteira de $ax + by = c$, onde a e b são primos entre si, mostre que todas as soluções inteiras são dadas por $x = x_1 + mb, y = y_1 - ma$, onde m é um inteiro arbitrário. [Esse teorema garante que, uma vez encontrada uma solução inteira particular, todas as soluções inteiras ficam conhecidas. As sugestões do Exercício 7.8 (c) ilustram uma maneira simples de encontrar uma solução inteira.]

(c) Resolva $7x + 16y = 209$ no universo dos inteiros positivos.

(d) Resolva $23x + 37y = 3000$ no universo dos inteiros positivos.

(e) De quantas maneiras diferentes pode-se pagar a soma de 5 dólares em dimes e quarters?*

(f) Determine a menor das respostas admissíveis para o seguinte problema indeterminado de Mahāvīra: “Nas cercanias claras e refrescantes de uma floresta plena de árvores com seus galhos curvados pelo peso das flores e frutas, árvores como limoeiros, bananeiras, arecas, jaqueiras, mangueiras e tamareiras; cercanias cujas várias partes se acham impregnadas pelo vozerio de papagaios e cucos vindos de junto aos mananciais onde as abelhas fazem revoada em torno das flores de lótus; nessas cercanias chegou alegremente um grupo de viajeros. E lá havia 63 montes de bananas numericamente iguais e mais sete dessas frutas e sendo todas distribuídas igualmente entre os 23 viajeros não houve resto. Diga-me qual a medida numérica de um monte de bananas”.

7.9 As diagonais de um quadrilátero cíclico

Estabeleça a seguinte cadeia de teoremas:

(a) O produto de dois lados de um triângulo é igual ao produto da altura relativa ao terceiro lado pelo diâmetro de círculo circunscrito.

(b) Seja $ABCD$ um quadrilátero cíclico de diâmetro δ . Denote os comprimentos dos lados AB, BC, CD, DA por a, b, c, d , o das diagonais BD e AC por m e n e a medida do ângulo entre uma das diagonais e a perpendicular à outra por θ . Mostre que

$$m\delta \cos \theta = ab + cd \text{ e } n\delta \cos \theta = ad + bc.$$

(c) Mostre que para o quadrilátero de (b) valem as relações

$$m^2 = \frac{(ac + bd)(ab + cd)}{ad + bc},$$

$$n^2 = \frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd}$$

* 1 dime = 10 centavos de dólar; 1 quarter = 25 centavos de dólar. Trata-se de moedas americanas. (N. T.)

(d) Se, no quadrilátero anterior, as diagonais são perpendiculares entre si, então

$$\delta^2 = \frac{(ad + bc)(ab + cd)}{ac + bd}.$$

7.10 Quadriláteros de Brahmagupta

(a) Brahmagupta estabeleceu a fórmula $K^2 = (s - a)(s - b)(s - c)(s - d)$ para a área K de um quadrilátero cíclico de lados a, b, c, d e semiperímetro s . Mostre que a fórmula de Herão para a área de um triângulo é um caso particular dessa fórmula.

(b) Usando a fórmula de Brahmagupta dada em (a), mostre que a área de um quadrilátero que admite um círculo inscrito e um circunscrito é igual à raiz quadrada do produto de seus lados.

(c) Mostre que as diagonais de um quadrilátero são perpendiculares se, e somente se, a soma dos quadrados de um par de lados opostos é igual à soma dos quadrados do outro par de lados opostos.

(d) Brahmagupta mostrou que se $a^2 + b^2 = c^2$ e $A^2 + B^2 = C^2$, então as diagonais de um quadrilátero de lados consecutivos aC, cB, bC, cA são perpendiculares. Prove esse fato.

(e) Determine os lados, as diagonais, o diâmetro do círculo circunscrito e a área do trapézio de Brahmagupta (ver Seção 7-8) determinado pelos dois ternos pitagóricos (3, 4, 5) e (5, 12, 13).

7.11 Tâbit ibn Qorra, Al-Karkhi e Nasîr ed-dîn

(a) Tâbit ibn Qorra (826-901) inventou a seguinte regra para determinação de números amigáveis: Se $p = 3 \cdot 2^n - 1$, $q = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$, $r = 9 \cdot 2^{2n-1} - 1$ são 3 primos ímpares, então $2^n pq$ e $2^n r$ formam um par de números amigáveis. Verifique isso para $n = 2$ e $n = 4$ (ver Seção 3-3).

(b) Estabeleça a seguinte generalização do teorema de Pitágoras, dada por Tâbit ibn Qorra: Se ABC é um triângulo genérico e se B' e C' são pontos de BC tais que $\angle AB'B = \angle AC'C = \angle A$, então $(AB)^2 + (AC)^2 = BC(BB' + CC')$.

Mostre que quando o ângulo A é reto esse teorema recai no teorema de Pitágoras.

(c) Os árabes asseveravam que Arquimedes escrevera um trabalho chamado *Sobre o heptágono num círculo*. Esse trabalho de Arquimedes não chegou até nós mas a asserção adquiriu mais peso quando o seguinte teorema, deixado por Tâbit ibn Qorra, se tornou conhecido: Se C e D são pontos de um segmento AB , tais que $(AD)(CD) = (DB)^2$, $(CB)(DB) = (AC)^2$, determinando-se H de maneira que $CH = AC$, $DH = DB$, então HB é um

lado de um heptágono regular inscrito no circuncírculo do triângulo AHB ; ademais, se os prolongamentos de HC e HD interceptam a circunferência do círculo em F e E , respectivamente, então A, F, E são 3 vértices consecutivos do heptágono regular. Prove esse teorema.

(d) Al-Karkhî (c. 1020) escreveu um trabalho sobre álgebra chamado de *Fakhrî*, em homenagem a seu patrono Fakhr al-Mulk, o grão-vizir de Bagdá à época. O problema 1 da Seção 5 dessa obra pede que se achem dois números racionais cuja soma dos cubos seja o quadrado de um número racional. Em outras palavras, encontrar números racionais x, y, z tais que

$$x^3 + y^3 = z^2.$$

Basicamente Al-Karkhî toma

$$x = \frac{n^2}{1+m^3}, \quad y = mx, \quad z = nx,$$

onde m e n são números racionais arbitrários. Verifique isso e ache x, y, z para $m = 2$ e $n = 3$.

(e) Prove o fácil teorema seguinte, atribuído a Nasîr ed-dîn: A soma de dois quadrados ímpares não pode ser um quadrado.

7.12 Noves fora

(a) Mostre que quando se divide a soma dos algarismos de um número natural por 9 obtém-se o mesmo resto que quando se divide o próprio número por 9.

O ato de obter o resto de divisão de um número natural por n recebe a designação de *tirar os n fora*. O teorema acima mostra que é particularmente simples tirar os 9 fora.

(b) Chamemos de excesso de um número o resto obtido ao se dividir esse número por 9. Prove os dois seguintes teoremas:

1. *O excesso de uma soma é igual ao excesso da soma dos excessos das parcelas.*
2. *O excesso do produto de dois números é igual ao excesso do produto dos excessos dos dois números.*

Esses dois teoremas fornecem a base para a prova dos nove (fora) da adição e da multiplicação.

(c) Efetue a adição e a multiplicação dos números 478 e 993 e tire a prova dos nove para as duas operações.

(d) Mostre que, permutando-se de qualquer maneira a ordem dos algarismos de um número natural, então a diferença entre o número original e o que se obteve é divisível por 9.

Esse resultado fornece a base do *teste do guarda-livros*: se as somas das colunas dos débitos e da coluna dos créditos de um livro de escrituração mercantil não se equilibram e a diferença entre as duas somas é divisível por 9, então é bastante provável que o erro tenha ocorrido quando da transcrição de um débito ou de um crédito no livro, com uma transposição de dígitos.

(e) Explique o seguinte truque: Pede-se a alguém que pense num número; forme um novo número invertendo a ordem dos algarismos; subtraia o menor do maior; multiplique a diferença por um número qualquer; tire fora um dígito qualquer do produto; e anuncie o que restou. Encontrar-se-á o dígito que foi tirado fora fazendo-se a diferença entre 9 e o excesso do resultado anunciado.

(f) Generalize o teorema de (a) para uma base arbitrária b .

7.13 Onzes fora

(a) Prove os três teoremas seguintes relativos a tirar os onzes fora:

1. Seja s_1 a soma dos dígitos das posições ímpares de um número natural qualquer n e seja s_2 a soma dos dígitos das posições pares. Então o excesso de 11 (onzes) de n é igual ao excesso de 11 (onzes) da diferença $s_1 - s_2$, onde, se $s_1 < s_2$, acrescenta-se um múltiplo de 11 a s_1 .

2. Para determinar o excesso de onzes de um número natural qualquer subtrai-se o dígito da esquerda de seu vizinho; subtrai-se essa diferença do dígito seguinte à direita e assim por diante; se em qualquer etapa o subtraendo é maior que o minuendo, soma-se 11 ao minuendo.

3. Para tirar os 11 fora, pode-se descartar qualquer par de dígitos consecutivos iguais.

(b) Encontre o excesso de onzes de 180 927 e 810 297 usando o teorema de (a)

1. Encontre o excesso de onzes para os mesmos dois números usando o teorema de (a)
2. Encontre o excesso de onzes de 148 337.

(c) Prove os quatro teoremas seguintes:

1. *O excesso de onzes de uma soma é igual ao excesso da soma dos excessos das parcelas.*

2. *O excesso de onzes do minuendo é igual ao excesso da soma dos excessos da diferença e do subtraendo.*

3. *O excesso de onzes do produto de dois números é igual ao excesso do produto dos excessos dos dois números.*

4. *O excesso de onzes do dividendo é igual ao excesso do produto dos excessos do divisor e do quociente acrescido do excesso do resto.*

(d) Teste a adição $104 + 454 + 1096 + 2195 + 3566 + 4090 = 11\ 505$ tirando os onzes fora.

- (e) Teste a subtração $23\ 028 - 8476 = 14\ 552$ tirando os onzes fora.
 (f) Teste a multiplicação $(8205)(536) = 4\ 397\ 880$ tirando os onzes fora.
 (g) Teste a divisão $62\ 540/207 = 302 + 26/207$ tirando os onzes fora.

7.14 Falsa posição dupla

(a) Um dos métodos mais antigos de aproximação das raízes reais de uma equação é a regra conhecida como *regula duorum falsorum*, muitas vezes chamada de *regra de falsa posição dupla*. Parece que esse método se originou na China, de onde se espalhou pela Índia e pela Arábia. De maneira abreviada, e em forma moderna, o método é este: Sejam x_1 e x_2 dois números próximos, e um de cada lado, de uma raiz x da equação $f(x) = 0$. Então, a intersecção da corda de extremidades $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$ com eixo x dá uma aproximação x_3 da raiz procurada (ver Figura 66). Mostre que

$$x_3 = \frac{x_2 f(x_1) - x_1 f(x_2)}{f(x_1) - f(x_2)}.$$

O processo pode agora ser repetido com o par apropriado x_1, x_3 ou x_3, x_2 .

(b) Calcule, por falsa posição dupla, até a terceira casa decimal, a raiz de $x^3 - 36x + 72 = 0$ situada entre 2 e 3.

(c) Calcule, por falsa posição dupla, até a terceira casa decimal, a raiz de $x - \operatorname{tg} x = 0$ que se situa entre 4,4 e 4,5.

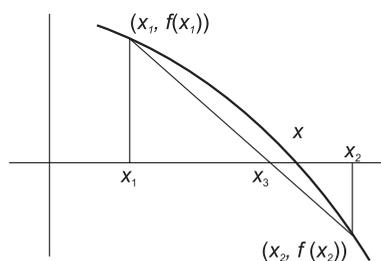


Figura 66

7.15 A resolução de cúbicas de Khayyam

(a) Dados três segmentos de reta de comprimentos a , b , n , construa um segmento de reta de comprimento $m = a^3/bn$.

(b) Omar Khayyam foi o primeiro a trabalhar com qualquer tipo de cúbica que admitisse uma raiz positiva. Complete com os detalhes o seguinte esboço da resolução geométrica de Khayyam da cúbica

$$x^3 + b^2x + a^3 = cx^2.$$

onde se imaginam a, b, c, x como comprimentos de segmentos de reta. Khayyam apresentava esse tipo de cúbica retoricamente como “um cubo, alguns lados e alguns números são iguais a alguns quadrados”.

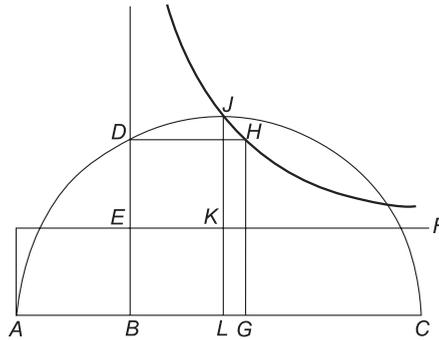


Figura 67

Na figura 67 construa $AB = a^3/b^2$ [como em (a)] e $BC = c$. Trace uma semicircunferência de diâmetro AC e suponha que a perpendicular a AC por B a corte em D . Sobre BD marque $BE = b$ e por E trace EF paralela a AC . Encontre G em BC de maneira que $(BG)(ED) = (BE)(AB)$ e complete o retângulo $DBGH$. Trace por H a hipérbole equilátera de assíntotas EF e ED e suponha que ela corte a semicircunferência em J . Sejam K e L as intersecções da paralela a DE por J com EF e BC , respectivamente. Mostre sucessivamente que

1. $(EK)(KJ) = (BG)(ED) = (BE)(AB)$
2. $(BL)(LJ) = (BE)(AL)$
3. $(LJ)^2 = (AL)(LC)$
4. $(BE)^2/(BL)^2 = (LJ)^2/(AL)^2 = LC/AL$
5. $(BE)^2(AL) = (BL)^2(LC)$
6. $b^2(BL + a^3/b^2) = (BL)^2(c - BL)$
7. $(BL)^3 + b^2(BL) + a^3 = c(BL)^2$

Logo, BL é uma raiz da equação cúbica dada.

(c) Encontre geometricamente, pelo método de Omar Khayyam, as raízes positivas da equação cúbica $x^3 + 2x + 8 = 5x^2$. Estenda ligeiramente o método para achar a raiz negativa.

7.16 Uma resolução geométrica de cúbicas

(a) Mostre que a equação cúbica incompleta

$$ax^3 + bx + c = 0$$

pode ser resolvida geometricamente, no que se refere às suas raízes reais, num sistema de coordenadas cartesianas retangulares em que já se tenha traçado a curva cúbica $y = x^3$, simplesmente traçando a reta $ay + bx + c = 0$.

(b) Resolva, pelo método de (a), a equação cúbica $x^3 + 6x - 15 = 0$.(c) Resolva geometricamente a equação cúbica $4x^3 - 39x + 35 = 0$.

(d) Mostre que toda equação cúbica completa

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

se reduz à forma incompleta na variável z pela substituição $x = z - b/3a$.

(e) Resolva agora geometricamente a equação cúbica $x^3 + 9x^2 + 20x + 12 = 0$.

É interessante mencionar que qualquer raiz imaginária de uma equação cúbica, completa ou incompleta, também pode ser encontrada geometricamente. (Ver, por exemplo, *Graphic Algebra* de Arthur Schultze, Seções 58, 59 e 65, Nova York, Macmillan Company, 1922.)

7.17 Construções geométricas sobre uma esfera

Os árabes se interessavam por construções sobre superfícies esféricas. Considere os seguintes problemas a serem resolvidos com os instrumentos euclidianos e construções planas adequadas.

(a) Dada uma esfera material, ache seu diâmetro.

(b) Localize, sobre a superfície de uma esfera material, os vértices de um cubo inscrito.

(c) Localize, sobre a superfície de uma esfera material, os vértices de um tetraedro regular inscrito.

Temas

7/1 A queima de livros na China em 213 a.C.

7/2 Trabalhos matemáticos chineses anteriores a 1200.

7/3 O *Manual de matemática da ilha marítima*.

7/4 A visita de Marco Polo à China.

- 7/5 Matteo Ricci (1552-1610).
 7/6 A regra de falsa posição dupla.
 7/7 A influência das matemáticas chinesa e hindu sobre a matemática europeia.
 7/8 Trabalhos matemáticos hindus antes de 1200.
 7/9 Os dois Āryabhatas.
 7/10 Mahāvīra e sua obra.
 7/11 Srinivasa Ramanujan (1887-1920).
 7/12 A escola de Bagdá.
 7/13 A *al-jabr* de Al-Khowārizmī.
 7/14 Abū'l-Wefā (940-998).
 7/15 A contribuição matemática de Omar Khayyam.
 7/16 As contribuições de Al-Kāshī à matemática.
 7/17 Trabalhos matemáticos salvos do extravio pelos árabes.
 7/18 Causas da decadência da matemática muçulmana.
 7/19 História da matemática japonesa antiga.
 7/20 A transmissão do conhecimento matemático na esteira das conquistas macedônicas, muçulmanas e romanas.

Bibliografia

- BERGGREN, J. L. *Episodes in the Mathematics of Medieval Islam*. Nova York, Springer-Verlag, 1986.
- CAJORI, Florian. *A History of Mathematical Notations*. Chicago, Open Court, 1928-1929, 2 vols.
- CLARK, W. E. (ed.) *The Aryabhatiya of Aryabhata*. Chicago, Open Court, 1930.
- COOLIDGE, J. L. *A History of Geometrical Methods*. Nova York, Oxford University Press, 1940.
- . *The Mathematics of Great Amateurs*. Nova York, Oxford University Press, 1949.
- DATTA, B. *The Science of the Sulba: A Study in Early Hindu Geometry*. Calcutá, Universidade de Calcutá, 1932.
- e SINGH, A. N. *History of Hindu Mathematics*. Bombaim, Asia Publishing House, 1962.
- HARDY, G. H. *A Mathematician's Apology*. Apresentação de C. P. Snow. Cambridge, The University Press, 1967.
- HEATH, T. L. *A Manual of Greek Mathematics*. Nova York, Oxford University Press, 1931.

- HILL, G. F. *The Development of Arabic Numerals in Europe*. Nova York, Oxford University Press, 1915.
- HOBSON, E. W. *A Treatise on Plane Trigonometry*. 4ª ed. Nova York, Macmillan, 1902. Reimpresso por Dover, Nova York.
- JOHNSON, R. A. *Modern Geometry*. Boston, Houghton Mifflin Company, 1929. Reimpresso por Dover, Nova York.
- KAKHEL, Abdul-kader. *Al-Kashi on Root Extraction*. Líbano, 1960.
- KARPINSKJ, L. C. (ed.) *Robert of Chester's Latin Translation of the Algebra of al-Khowarizmi*. Nova York, Macmillan, 1915.
- . *The History of Arithmetic*. Nova York, Russel & Russel, 1965.
- KASIR, D. S. (ed.) *The Algebra of Omar Khayyam*. Nova York, Columbia Teachers College, 1931.
- KRAITCHIK, Maurice. *Mathematical Recreations*. Nova York, W. W. Norton, 1942.
- KÚSHYÁR IBN LABBÂN. *Principles of Hindu Reckoning*. Trad. para o inglês por Martin Levey e Marvin Petruck. Madison (Wis.), The University of Wisconsin Press, 1965.
- LAMB, Harold. *Omar Khayyam, A Life*. Nova York, Doubleday, 1936.
- LARSEN, H. D. *Arithmetic for Colleges*. Nova York, Macmillan, 1950.
- LEVEY, Martin. *The Algebra of Abú Kâmil*. Madison (Wis.), The University of Wisconsin Press, 1966.
- LI YAN e Du Shiran. *Chinese Mathematics: A Concise History*. Trad. para o inglês por J. N. Crossley e A. W.-C. Lun. Oxford, Clarendon Press, 1987.
- LOOMIS, E. S. *The Pythagorean Proposition*. 2ª ed. Ann Arbor (Mich.), Edwards Brothers, 1940. Reimpresso pelo National Council of Teachers of Mathematics, Washington, D. C., 1968.
- MACFALL, Haldane. *The Three Students*. Nova York, Alfred A. Knopf, 1926.
- MIKAMI, Yoshio. *The Development of Mathematics in China and Japan*. Nova York, Hafner, 1913. Reimpresso por Chelsea, Nova York, 1961.
- NEEDHAM, J., com a colaboração de Wang Ling. *Science and Civilization in China*, vol. 3. Nova York, Cambridge University Press, 1959.
- ORE, Oystein. *Number Theory and Its History*. Nova York, McGraw-Hill, 1948.
- SAYILL, Aydin. *Logical Necessities in Mixed Equations by Abd al Hamid ibn Turk and the Algebra of His Time*. Ancara, 1962.
- SMITH, D. E. e KARPINSKI, L. C. *The Hindu-Arabic Numerals*. Boston, Ginn, 1911.
- SMITH, D. E. e MIKAMI, Yoshio. *A History of Japanese Mathematics*. Chicago, Open Court, 1914.
- STORY, W. E. *Omar Khayyam as a Mathematician*. Needham (Mass.), Rosemary Press, 1919.
- WINTER, H. J. J. *Eastern Science*. Londres, John Murray, 1952.
- WOLFE, H. E. *Introduction to Non-Euclidean Geometry*. Nova York, Holt, Rinehart and Winston, 1945.

Panorama Cultural VI

Servos, senhores e papas

A Idade Média europeia — 476-1492 d.C.
(para acompanhar o Capítulo 8)

A partir do século V d.C., com a queda de Roma ante os invasores “bárbaros”, começou o processo de transformação da Europa de civilização antiga em civilização medieval. Como já observamos no Panorama Cultural IV: O Oikoumene, as sociedades agrícolas ocidentais antigas se fundiram política, social e economicamente como consequência da conquista do Egito pelos persas em 525 a.C. Certamente a fusão nunca foi total; a cultura egípcia manteve-se distinta da grega assim como a romana da dos árabes ou judeus. Não obstante verificou-se uma unidade bastante palpável na civilização ocidental no milênio que transcorreu entre a intervenção persa e a queda de Roma — uma unidade que se manifestou através de coisas como redes comerciais partilhadas, sistemas econômicos semelhantes, religiões relacionadas e muitas vezes uma hegemonia política única. O povo da época sentia essa uniformidade e a expressava em termos geográficos; os gregos referiam-se coletivamente à Grécia, à Itália, ao Egito e ao Oriente Médio como o *oikoumene* ou “mundo habitado/civilizado”.

O Ocidente antigo não foi, em muitos aspectos, uma civilização isolada. Com sucessivos impérios, no curso de um milênio, levando essa civilização a novos lugares, manifesta-se também seu caráter expansionista. O Império Persa levou a cultura do Oriente Médio e do Egito ao que é hoje o Irã; os gregos colonizaram as costas de Chipre, da Líbia, da Itália e da França no mar Mediterrâneo e as costas da Turquia e da Rússia no mar Negro; os romanos estenderam a civilização ocidental para o resto da Itália e da França, noroeste da África, Espanha e Inglaterra. Perto do início do século V d.C. a civilização ocidental estendia-se por uma região que ia do glacial mar do Norte até as areias tórridas do Egito e de Gibraltar ao golfo Pérsico.

Porém, após o colapso do Império Romano, a civilização ocidental mudou em muitos aspectos. O Oeste se dividiu em duas áreas culturais muito distintas: o mundo árabe-iraniano e a Europa. (Como o leitor se lembrará, no Panorama Cultural V: Os Impérios Asiáticos, discutimos a ascensão do islamismo e a cultura árabe-iraniana.) Além disso, uma segunda partição, embora menos rígida, dividiu a Europa num ocidente germânico-latino e num oriente greco-eslávico, uma rup-

tura que ainda se faz sentir no século XX. Verificou-se também um deslocamento gradual do centro político e cultural da Europa rumo ao norte, da bacia do mar Mediterrâneo (Grécia e Roma) para terras banhadas pelos mares do Norte e Báltico: França, Inglaterra, Países Baixos, Alemanha, Escandinávia, Polônia e Rússia. Os grandes impérios do mundo antigo acabaram dando lugar a baronatos feudais. Escravos e pequenos proprietários rurais foram substituídos por servos. Intelectuais e inventores deixaram de se interessar pela ciência pura e a matemática e voltaram suas energias mais e mais para a engenharia e a religião.

Por que a civilização ocidental antiga chegou ao fim? Várias causas podem ser aventadas: o colapso do sistema político romano, o cataclismo decorrente das invasões dos “bárbaros” germanos e eslavos (que conquistaram grande parte do Império Romano no século V d.C. e estabeleceram o feudalismo) e a importância crescente da Igreja católica depois da derrocada do poder civil romano. Não obstante, temos de reconhecer que a civilização ocidental antiga não submergiu subitamente mas que, isto sim, foi se debilitando ao longo dos séculos, havendo ocasiões em que se reerguia ao alento instilado por seus conquistadores. A cultura greco-romana não desapareceu completamente; o que ocorreu foi sua fusão com outras culturas e sociedades — e assim nasceu uma nova civilização, síntese da dos gregos, romanos, germanos, eslavos e outros povos.

O COLAPSO DO SISTEMA POLÍTICO ROMANO

Ao longo de grande parte de sua história o Império Romano padeceu de dois problemas gerados conjuntamente: sua enormidade, que o tornava difícil de governar, e seu sistema político, que produzia líderes medíocres. Com poucas e notáveis exceções, os imperadores romanos ascenderam ao poder através de golpes de Estado militares e governaram apenas por uns poucos anos, tão somente até serem depostos por outros generais com exércitos melhores. As rebeliões eram frequentes e os imperadores viam-se forçados a deixar em segundo plano os negócios de Estado a fim de sufocar insurreições comandadas por rivais. Em vez de procurar meios que lhes assegurassem imperadores melhores para superar essa situação, os romanos optaram por uma divisão político-territorial. Em 305 d.C. o imperador Diocleciano (245-313 d.C.) separou o Império em duas metades: a ocidental, com um imperador em Roma, e a oriental, com um imperador em Bizâncio, mais tarde rebatizada com o nome de Constantinopla, em homenagem ao imperador (oriental) Constantino I (272-337 d.C.). O imperador oriental era considerado hierarquicamente superior ao ocidental e, sob o ponto de vista teórico, desfrutava de autoridade política maior, uma situação que veio a contribuir para o declínio do poder no ocidente. Quando, no século V d.C., os “bárbaros” invadiram o Império Ocidental, seus imperadores não tinham meios de enfrentá-los.

AS INVASÕES “BÁRBARAS”

No final do século IV d.C. o norte e o leste da Europa foram invadidos pelos Hunos, uma tribo de guerreiros ferozes oriunda da Ásia Central. Ao penetrar com estrondo a Europa, os cavaleiros hunos obrigaram os caçadores germanos e eslavos que viviam nas florestas do norte e do leste a se deslocarem no sentido do ocidente. Godos e alanos da Ucrânia, francos e burgúndios do leste do rio Reno na Alemanha, vândalos dos Cárpatos na República Tcheca e eslavos da Rússia Central — acossados todos pelas lanças dos hunos e organizados em bandos guerreiros, infiltraram-se como refugiados nos domínios de Roma.

Uma vez alcançados os territórios romanos, os refugiados transformaram-se em conquistadores. Por volta de 350 d.C. os visigodos fugiram da Ucrânia para escapar das investidas hunas. Estabeleceram-se por algum tempo na província romana do Moésia (hoje Romênia) e em 376 atacaram Constantinopla. Repelidos, dirigiram-se para a Grécia e a Itália onde deixaram a marca de sua ferocidade em assaltos que só cessaram com a morte de seu chefe e condutor Alarico (c. 370-410 d.C.). Perto do ano 406 os hunos expulsaram os vândalos de seus territórios na Europa Central. A marcha dos foragidos através da província romana da Gália nos anos 407 e 408 foi tão devastadora que hoje “vândalo” é sinônimo de saqueador. Ao entrarem na Espanha em 409 os vândalos depuseram o governador romano e estabeleceram seu próprio reino que depois se transferiu, nos anos 420 e 430, para o Norte da África. Bandos de francos que penetraram a Gália na esteira da invasão vândala acabaram se fixando na região. A Britânia, isolada do resto do Império, foi invadida e ocupada pelos anglos e os saxões. Depois que os visigodos concluíram sua pilhagem da Itália (eles se deslocaram para a Espanha onde iriam molestar os vândalos), o país foi assolado pelos ostrogodos e, mais tarde, pelos lombardos.

Quando os hunos, liderados pelo terrível rei Átila (c. 406-453), invadiram a Gália romana em 451, foram derrotados pelo exército combinado romano-franco sob o comando do general romano Aécio (c. 396-454) nos “campos catalônicos”. Mas foi uma vitória vã. Átila voltou sua fúria para a Itália, destruiu grande parte de seu interior, e só interrompeu sua zafia quando lhe faltaram alimentos. A marcha de Átila pelo âmago do Império Romano seguiu-se à dos visigodos por escassos 46 anos. O país ficou em ruínas. Em 476, com pouco esforço, os ostrogodos depuseram o último imperador, e o Império Ocidental chegava ao fim.

O LESTE GRECO-ESLAVO

50 anos mais tarde, sob o Imperador Justiniano I (483-565 d.C.), o Império Romano Oriental lançou um bravo, porém inócuo, contra-ataque. Entre 530 e 550 os generais de Justiniano, Belisário (c. 505-565 d.C.) e Narses (c. 478-573 d.C.), reconquistaram a Itália e norte da África dos ostrogodos e vândalos. Mas os orientais logo se viram assediados por uma série de invasões vindas da Ásia e da Europa Oriental

seguidas pela invasão dos búlgaros eslavos e, depois do ano 640, pela dos árabes. Por volta de 600 o Império Oriental teve de abandonar a Itália para os lombardos e por volta de 700 perdeu o norte da África para os árabes que, também, anexaram o Egito e a Palestina. Despojado da maior parte de seus territórios, o Império Romano Oriental tornou-se essencialmente um reino grego de tamanho médio, embora permanecesse independente até ser conquistado pelos turcos em 1453.

Embora politicamente o governo de Bizâncio (como veio a se chamar o Império Oriental) fosse, depois de 700, pouco mais do que uma sombra do poder imperial romano, a predominantemente grega cidade de Constantinopla permaneceu um centro comercial e cultural importante, lembrando em muitos aspectos a Alexandria dos últimos tempos. O comércio com os povos eslavos que viviam na Europa Oriental era muito ativo. Esses povos copiaram, através desse canal, muitos dos elementos da cultura bizantina; o alfabeto russo, por exemplo, baseia-se no grego e a religião cristã, na forma da Igreja Ortodoxa Grega, espalhou-se pela maior parte do oriente europeu. Culturalmente, as maiores realizações bizantinas se deram no campo da teologia e da lei. O código legal promulgado por Justiniano é considerado uma obra-prima, bem como um marco distintivo na evolução da jurisprudência europeia. Não obstante, os gregos bizantinos eram em geral intelectuais de nível inferior, limitando-se não raro a tecer panegíricos aos imperadores vivos. Continuaram a tradição romana de sobrepor a religião à ciência, incapazes que eram de conciliar as duas coisas. Foi o próprio Justiniano que, sob a pressão de líderes religiosos, ordenou o fechamento da única escola oriental de ciência e filosofia remanescente, a Academia de Atenas, em 529.

A EUROPA OCIDENTAL NA IDADE MÉDIA

Após a queda do Império Romano Ocidental, o poder político na Europa trasladou-se para a Gália (hoje França), ao norte, onde os francos fundaram um sólido império. Originariamente um conjunto de tribos de caçadores germânicos dispersos, os francos se uniram sob o comando do rei Clóvis I (c. 466-511 d.C.) em 481 d.C. Os francos adotaram a religião católica e a economia agrícola dos gálicos celtas e, do cruzamento com esses povos, forjou-se uma sociedade que combinava elementos das culturas franca, latina e celta.

Nos anos 770, durante a disputa entre o rei lombardo da Itália e o Papa, os francos intervieram a favor do último, resultando daí a anexação de grande parte da Itália aos seus domínios. Quando o rei franco Carlos Magno (742-814 d.C.), em 800, reconduziu Leão III à condição de Sumo Pontífice da Igreja Católica, o reconhecido Papa coroou-o imperador de uma “nova Roma” com a denominação de Sacro Império Romano. Carlos Magno empreendeu também longas guerras contra outros povos germânicos, os saxões, os ávaros e os vênnetos, convertendo-os à força ao cristianismo. Construiu um palácio em Aachen (Aix-la-Chapelle), grande para os padrões medievais, embora modesto quando comparado com os edifícios romanos antigos.

Embora carente de instrução, Carlos Magno patrocinou a arte e a literatura. Como centro cultural, porém, Aachen perdia para Constantinopla, e as tentativas de Carlos Magno de rejuvenescer a civilização latina sob os auspícios dos francos não sobreviveram a ele. Após a morte do grande monarca seu império se dividiu entre seus três filhos e a importância do reino franco declinou consideravelmente.

Um segundo Sacro Império Romano se constituiu na Alemanha uns 150 anos após a morte de Carlos Magno, quando o rei germano Óton I (912-973) uniu sob seu comando a maior parte da Europa Central. Esse segundo Sacro Império Romano muito pouca semelhança tinha com os grandes impérios monolíticos dos tempos antigos. Mais uma confederação de vários principados do que um reino centralizado, o segundo Sacro Império Romano era o arquétipo do Estado medieval. Com exceção de Óton e uns poucos outros, seus imperadores eram figuras decorativas eleitas pelos vários senhores e barões germanos. Cada um desses senhores menores governava seu próprio baronato; coletivamente os barões detinham o poder real do Império. Não obstante, o Sacro Império Romano firmou a Alemanha como o centro cultural e comercial do oeste europeu medieval, o que perdurou, pelo menos nominalmente, até sua dissolução em 1806 com as invasões napoleônicas.

A Europa Medieval desenvolveu uma única estrutura social, o *feudalismo*. A maior parte da população se constituía de camponeses pobres, ou servos, que legalmente tinham a obrigação de cultivar as terras dos senhores e pagar pelo seu uso com uma parte da colheita. Teoricamente, os senhores eram vassallos de um rei ou do Sacro Império Romano, embora de fato poucos reis ou imperadores tivessem um poder à altura de seu título. Havia uma classe média urbana formada de mercadores e artesãos. A ascensão social era mínima e a única porta de entrada para a aristocracia era o berço.

Embora os senhores individualmente tivessem autoridade considerável sobre seus domínios, muito pouco poder tinham sobre seus vizinhos. Assim, barões ambiciosos procuravam favorecer seus interesses na corte do rei ou do imperador formando coalizões ou digladiando-se em intermináveis guerras dinásticas. Os reis dependiam da nobreza quanto ao suprimento de dinheiro e soldados, razão pela qual, em sã consciência, não podiam desprezar seus senhores. Quando um dos reis ingleses, João-Sem-Terra (1167?-1216), procurou tornar mais efetivo o sistema judicial inglês (naturalmente centralizando-o em si mesmo), os barões ingleses reuniram suas forças para detê-lo. E para evitar uma guerra civil João-Sem-Terra teve de assinar a Magna Carta, garantindo a continuação do direito tradicional inglês, grandemente consuetudinário e que ainda hoje representa a base das jurisprudências inglesa e americana.

Essa nobreza poderosa, porém, não se concentrava em torno de uma grande corte urbana, constituindo, isto sim, uma aristocracia rural isolada. A instrução da maioria dos barões e duques era bastante reduzida. Os mais notáveis dentre eles eram generais de valor e administradores competentes, mas poucos eram intelectuais esclarecidos. Devido ao fato de que os reis e imperadores tinham poderes mínimos, não se desenvolveram em torno de suas modestas cortes grandes cidades (capitais).

Também o comércio era limitado, carecendo a Europa Medieval de metrópoles. Sendo suas maiores cidades (afora Roma, que abrigava a complexa estrutura da Igreja católica) como que vilas em tamanho grande, a civilização urbana praticamente inexistiu na Europa Ocidental Medieval.

Paralelamente a essa estrutura social civil, embora apartada dela, postava-se a Igreja Católica, sob a orientação de um Papa que exercia suas funções na cidade de Roma, assistido por uma burocracia integrada. Nas principais cidades, como Colônia, Mogúncia, Veneza e Tours, os interesses da Igreja eram fiscalizados pelos bispos. O Papa era tão poderoso que a cidade de Roma e suas cercanias eram um reino independente governado por ele. A Igreja era proprietária de bens patrimoniais vultosos em toda a Europa Ocidental e alguns de seus bispos participavam da eleição dos imperadores sacro-romanos que, significativamente, até o século XVI, eram coroados pelo próprio papa. Toda a região rural da Europa Ocidental estava pontilhada de monastérios, conventos e instituições religiosas engajadas nos misteres da Igreja. Os monastérios eram, aliás, os únicos locais da Europa Ocidental onde se cultuava o saber, e os monges, obviamente, preferiam a religião e a filosofia à ciência; como os bizantinos, eles muitas vezes consideravam esses campos de estudo incompatíveis. A Idade Média produziu vários teólogos mercedamente afamados, como São Bento (falecido c. 547), o primeiro a propor uma vida monástica comunal, com ênfase nos trabalhos manuais, na simplicidade e na preservação do conhecimento e São Francisco de Assis (1182?-1226) que defendia, a mansuetude, a preocupação para com os pobres e o respeito pela vida animal. Mas quase não produziu nenhum cientista ou matemático.

O homem medieval revelou habilidade para a engenharia. Pedreiros e carpinteiros projetaram e construíram catedrais imensas e graciosas, repletas de belos e detalhados vitrais e notáveis arcobotantes. Ferreiros desenvolveram métodos de construção de relógios precisos. Moleiros aperfeiçoaram a roda d'água. Abriram-se longos canais, construíram-se pontes por sobre os mais largos rios e drenaram-se e represaram-se pântanos. Mas os engenheiros medievais não tinham uma formação universitária plantada na ciência pura; eles eram artesãos e mecânicos de parcos conhecimentos teóricos, muitas vezes ignorados pela classe intelectual. Na verdade, a fusão da ciência pura com a tecnologia somente começaria em torno do início do século XX.

O RENASCIMENTO

Nos séculos XIV e XV, quase um milênio depois da queda de Roma, a civilização europeia medieval começa por fim a dar lugar à civilização moderna. Ironicamente, porém, o caminho para a modernidade começou com uma renovação de interesse pela arte e pela ciência antigas. O comércio com os muçulmanos e os gregos bizantinos impulsionou o crescimento de várias cidades italianas depois de 1300, entre elas Veneza, Gênova e Florença. A aristocracia desses lugares se fascinou

não só com os produtos do oriente, mas também, igualmente, com seu saber e sua cultura. Os árabes e os gregos bizantinos haviam preservado cuidadosamente grande parte da arte e da ciência dos tempos clássicos da Grécia e de Roma e agora transmitiam seus conhecimentos aos mercadores italianos. Famílias aristocráticas italianas ricas, como os Médici e os Bórgia, patrocinavam artistas e poetas que se enfiavam nos trabalhos dos mestres gregos e italianos antigos. Esses artistas muitas vezes enveredavam pela ciência antiga. Dentre os eruditos italianos do Renascimento figuram Leonardo Fibonacci (c. 1175-1250), Leonardo da Vinci (1452-1519), Michelangelo (1475-1564) e Benvenuto Cellini (1500-1571). O ressurgimento da cultura ocidental antiga logo se alastrou pelo norte da Europa, onde deflagrou um novo interesse pela ciência e a arte, e os frutos logo surgiram no trabalho do astrônomo polonês Nicolau Copérnico (1473-1543) e no de seu sucessor dinamarquês Tycho Brahe (1546-1601).

Infelizmente, os intelectuais do Renascimento foram incapazes de conciliar normalmente suas ideias sobre ciência com as doutrinas religiosas da Igreja católica e grande parte do trabalho científico da época encontrou tenaz oposição das autoridades eclesiásticas. Temendo a acusação de heresia, muitos intelectuais do Renascimento relutavam em publicar suas teorias, especialmente no campo da astronomia, uma ciência à qual a Igreja se opunha de maneira especial. À medida que a Europa Medieval ia cedendo terreno a uma Europa Moderna, a Igreja católica, que já fora uma força transformadora, enveredava por um conservadorismo crescente. Não só a Igreja desaprovava muitas das descobertas dos cientistas europeus modernos como também chegava a levantar obstáculos para impedir que se fizessem reformas que levassem à substituição do feudalismo por formas mais democráticas de governo. Mas essas histórias serão contadas nos Panoramas Culturais VII: Puritanos e Lobos do Mar e Panoramas Culturais VIII: A Revolta da Classe Média.

A matemática na Europa, de 500 a 1600

8.1 A Alta Idade Média

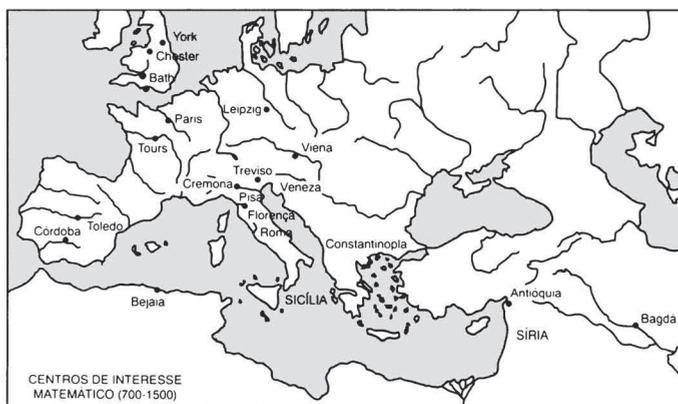
O período que vai da queda do Império Romano, na metade do século V, até o século XI, é conhecido como Alta Idade Média. Durante esse período a civilização na Europa Ocidental atingiu níveis muito baixos: o ensino praticamente deixou de existir, quase todo o saber grego desapareceu e muitas das artes e dos ofícios legados pelo mundo antigo foram esquecidos. Apenas os monges dos mosteiros católicos e uns poucos leigos cultos preservaram um tênue fio de saber grego e latino. O período foi marcado por muita violência física e intensa fé religiosa. A ordem social antiga cedeu lugar a uma outra, feudal e eclesiástica.

Os romanos nunca tiveram inclinação para a matemática abstrata; ao contrário, somente os aspectos práticos da matemática, ligados ao comércio e à engenharia civil, lhes interessavam. Com a queda do Império Romano e a cessação subsequente de grande parte do comércio leste-oeste e, ainda, com o abandono de projetos estatais de engenharia, mesmo esse interesse minguou e não seria exagero dizer que, afora a elaboração do calendário cristão, muito pouca matemática se fez durante o meio milênio da Alta Idade Média.

Dentre as pessoas a quem se creditam, com muito boa vontade, um certo papel na história da matemática na Alta Idade Média, devemos mencionar o estadista romano Boécio, os clérigos eruditos ingleses Beda e Alcuíno e o famoso sacerdote e erudito francês Gerbert, que veio a se tornar o papa Silvestre II.

A importância de Boécio (c. 475-524) na história da matemática se embasa no fato de seus livros de geometria e aritmética terem sido adotados, por muitos séculos, nas escolas monásticas. Embora muito fracos, esses trabalhos acabaram se constituindo no sumo do conhecimento matemático, o que ilustra bem o quanto esse conhecimento se tornou insignificante na Alta Idade Média. A *Geometria* de Boécio se resume nos enunciados das proposições do Livro I e numas poucas proposições escolhidas dos Livros III e IV dos *Elementos* de Euclides, juntamente com algumas aplicações à mensuração; e sua *Aritmética* se baseava na de Nicômaco, escrita quatro séculos antes, um trabalho enfadonho e meio místico, embora tivesse desfrutado de alto prestígio. (Há quem defenda que pelo menos parte da *Geometria* é espúria.) Com esses trabalhos e sua obra filosófica, Boécio tornou-se o fundador da escolástica medieval. Seus ideais

elevados e sua integridade rígida criaram-lhe problemas políticos: preso e condenado, sofreu morte cruel, razão pela qual foi proclamado mártir da Igreja.



Beda (c. 673-735), mais tarde distinguido com o qualificativo de *o Venerável*, nasceu em Northumberland, Inglaterra. Foi um dos maiores eruditos da Igreja nos tempos medievais e sua vasta obra inclui alguns trabalhos sobre matemática, sendo de destacar um tratado sobre o calendário e outro sobre a contagem com os dedos. Outro erudito inglês foi Alcuíno (735-804), nascido em Yorkshire. Foi a ele que Carlos Magno convidou para desenvolver seu ambicioso projeto educacional. Alcuíno escreveu sobre muitos tópicos matemáticos e consta, inclusive, como dele (embora haja dúvidas a respeito) uma coleção de problemas em forma de quebra-cabeça que exerceu muita influência nos autores de textos escolares por muitos séculos (ver Exercício 8.1).

Gerbert (c. 950-1003) nasceu em Auvergne, França, e desde muito cedo revelou talentos incomuns. Foi um dos primeiros cristãos a estudar nas escolas muçulmanas da Espanha e há indícios de que, ao retornar, tenha introduzido na Europa cristã os numerais indo-arábicos (sem o zero). Atribui-se a ele a construção de ábacos, globos terrestres e celestes, um relógio e, talvez, um órgão. Esses feitos corroboraram em alguns de seus contemporâneos a suspeita de que ele tinha vendido a alma ao demônio. Não obstante, ele subiu firmemente na hierarquia da Igreja, acabando por se eleger papa, com o nome de Silvestre II, em 999. Considerado um erudito profundo, escreveu sobre astrologia, aritmética e geometria [ver Exercício 8.1(f)], embora sua obra matemática seja de pouco valor.

8.2 O período de transmissão

Pela época de Gerbert começaram a penetrar na Europa Ocidental os clássicos gregos de ciência e matemática. Seguiu-se um período de transmissão durante o qual o

saber grego, preservado pelos muçulmanos, foi passado para os europeus ocidentais. Isso ocorreu de três maneiras principais: pelas traduções latinas feitas por intelectuais cristãos que se deslocavam até centros de saber muçulmanos, pelas relações entre o reino normando da Sicília e o Oriente e através do intercâmbio comercial entre a Europa Ocidental e o Levante e o mundo árabe. As traduções se faziam mais frequentemente do árabe para o latim, mas havia também algumas do hebreu para o latim e do árabe para o hebreu e algumas, mesmo, do grego para o latim.

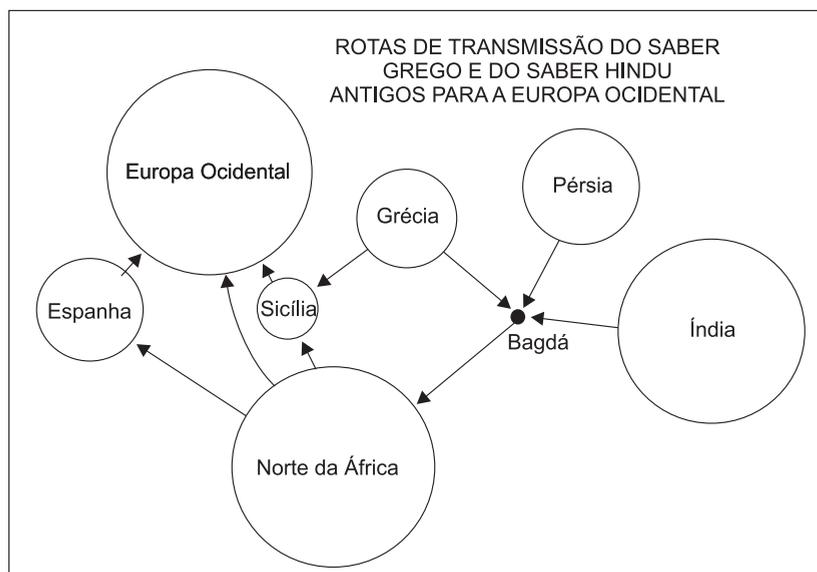
Quando os cristãos retomaram Toledo dos mouros em 1085, verificou-se um influxo de intelectuais cristãos rumo àquela cidade, visando adquirir o saber muçulmano. Coisa semelhante acontece com outros centros mouros da Espanha e o século XII tornou-se, na história da matemática, um século de tradutores. Um dos primeiros intelectuais cristãos a se engajar nessa atividade foi o monge inglês Adelardo de Bath (c. 1120) que, segundo parece, esteve na Espanha entre 1126 e 1129 e viajou extensamente pela Grécia, Síria e pelo Egito. Atribuem-se a ele traduções latinas dos *Elementos* de Euclides e das tábuas astronômicas de Al-Khowârizmî. Há alusões emocionantes aos riscos físicos corridos por Adelardo para a aquisição do saber árabe: para chegar ao conhecimento guardado com tanto zelo teria se disfarçado em estudante árabe. Outro dos primeiros tradutores foi Platão de Tivoli (c. 1120), que traduziu a astronomia de Al-Battânî, a *Esférica* de Teodósio e vários outros trabalhos. O matemático judeu Abraham bar Hiyya, conhecido como Savasorda, tem seu nome ligado ao de Platão. Seu livro *Geometria Prática*, escrito em hebreu, foi traduzido para o latim por Platão, provavelmente num trabalho conjunto com o autor. Foi através dessa obra que o Ocidente teve conhecimento, pela primeira vez, da solução completa da equação quadrática, o que provocou grande impacto. O mais atuante dos tradutores do período foi Gerardo de Cremona (1114-1187), que traduziu para o latim mais de 90 trabalhos árabes, entre eles o *Almagesto* de Ptolomeu, os *Elementos* de Euclides e a álgebra de Al-Khowârizmî. Gerardo certamente não realizou todo esse trabalho individualmente, mas com a colaboração de membros da Escola de Tradutores fundada pelo arcebispo dom Raimundo logo após a queda de Toledo. Na Seção 7-2 já mencionamos o papel desempenhado por Gerardo de Cremona no desenvolvimento de nossa palavra *seno*. Outros tradutores que se sobressaíram no século XII foram João de Sevilha e Robert de Chester.

A localização e a história política da Sicília fizeram da ilha um ponto de encontro do Oriente com o Ocidente. Inicialmente uma colônia grega, a Sicília tornou-se parte do Império Romano, ligou-se a Constantinopla com a queda de Roma, esteve nas mãos dos árabes por quase 50 anos no século IX, foi recapturada pelos gregos e então passou para o controle dos normandos. Durante esse último período as línguas grega, árabe e latina eram usuais e enviados diplomáticos constantemente viajavam para Constantinopla e Bagdá. Assim foram obtidos e traduzidos para o latim muitos manuscritos gregos e árabes sobre ciência e matemática. Esse trabalho foi grandemente encorajado pelos dois reis e patronos da ciência Frederico II (1194-1250) e seu filho Manfredo (c. 1231-1266).

Dentre as primeiras cidades a estabelecer relações mercantis com o mundo árabe estavam os centros comerciais italianos de Gênova, Pisa, Veneza, Milão e Florença.

Os mercadores italianos entraram em contato com grande parte da civilização oriental da qual captaram informações aritméticas e algébricas úteis. Esses mercadores tiveram um papel importante na disseminação dos numerais indo-arábicos.

No período de transmissão discutido acima a Espanha tornou-se o mais importante elo entre o islamismo e o mundo cristão.



8.3 Fibonacci e o século XIII

No limiar do século XIII despontou a figura de Leonardo Fibonacci (“Leonardo, filho de Bonaccio”, c. 1175-1250), o matemático mais talentoso da Idade Média. Também conhecido como Leonardo de Pisa (ou Leonardo Pisano), Leonardo nasceu em Pisa, centro comercial importante, onde seu pai era ligado aos negócios mercantis. Muitas das grandes cidades comerciais italianas daqueles tempos mantinham entrepostos em várias partes do mundo mediterrâneo. Esse foi o caminho que levou Leonardo a receber parte de sua educação em Bejaia, norte da África, onde seu pai fora desempenhar uma função alfandegária. As atividades do pai logo despertaram no garoto um interesse pela aritmética que se canalizou, posteriormente, para extensas viagens ao Egito, à Sicília, à Grécia e Síria, onde pode entrar em contato direto com os procedimentos matemáticos orientais e árabes. Inteiramente convencido da superioridade prática dos métodos indo-arábicos de cálculo, Fibonacci, em 1202, logo depois de retornar a sua terra natal, publicou sua obra famosa intitulada *Liber abaci*.

Conhecemos esse trabalho através de uma segunda versão surgida em 1228. O trabalho se ocupa de aritmética e álgebra elementares e, embora em essência uma pesquisa independente, mostra a influência das álgebras de Al-Khowârizmî e Abû Kâmil. O livro ilustra com profusão e defende com energia a notação indo-arábica, muito se devendo a ele pela introdução desses numerais na Europa. Os 15 capítulos da obra explicam a leitura e a escrita dos novos numerais, métodos de cálculo com inteiros e frações, o cálculo de raízes quadradas e cúbicas e a resolução de equações lineares e quadráticas, tanto pelo método de falsa posição como por processos algébricos. As raízes negativas e imaginárias não são admitidas e a álgebra é retórica. Há aplicações envolvendo permuta de mercadorias, sociedades, ligas e geometria mensurativa. O trabalho contém ainda uma farta coleção de problemas que, durante séculos, serviu de manancial a autores de textos. Na Seção 2-10, mencionamos um problema interessante dessa coleção, provavelmente oriundo de um problema muito mais antigo do papiro Rhind. Outros problemas, como o que deu origem à importante *sequência de Fibonacci* (1, 1, 2, 3, 5, ..., x , y , $x + y$, ...), podem ser encontrados nos Exercícios 8.2, 8.3 e 8.4.



Leonardo Fibonacci
(Coleção David Smith)

Em 1220 apareceu a *Practica geometriae* de Fibonacci, uma alentada coleção de material sobre geometria e trigonometria, numa abordagem hábil, feita com rigor euclidiano e alguma originalidade. Por volta de 1225, Fibonacci escreveu seu *Liber quadratorum*, um trabalho brilhante e original sobre análise indeterminada, que o guindou à posição de matemático mais importante desse campo entre Diofanto e Fermat. Esses trabalhos estavam além da capacidade da maioria dos intelectuais da época.

Os talentos de Fibonacci chamaram a atenção do patrono do saber, o imperador Frederico II, com o conseqüente convite a ele para participar de um torneio matemático na

corde. João de Palermo, um membro do séquito imperial, propôs três problemas. O primeiro consistia em achar um número racional x tal que $x^2 + 5$ e $x^2 - 5$ fossem ambos quadrados de números racionais. Fibonacci deu a resposta $x = 41/12$, que é correta, uma vez que $(41/12)^2 + 5 = (49/12)^2$ e $(41/12)^2 - 5 = (31/12)^2$. Essa solução aparece no *Liber quadratorum*. No segundo problema pedia-se que se achasse uma solução da equação cúbica $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$. Fibonacci tentou provar que nenhuma raiz da equação pode ser expressa irracionalmente na forma $\sqrt{a + \sqrt{b}}$ ou, em outras palavras, que nenhuma raiz pode ser construída com régua e compasso. Obteve então uma resposta aproximada que, expressa em notação decimal, é 1,3688081075 e que é correta até a nona casa. A resposta aparece, sem nenhuma discussão anexa, num trabalho de Fibonacci intitulado *Fios* (“floração” ou “flor”) e tem provocado alguma perplexidade. O terceiro problema, também registrado nesse último trabalho, é mais fácil e pode ser encontrado no Exercício 8.4.

Incipit primum capitulum

Nouem figure indorum he sunt

9 8 7 6 5 4 3 2 1

Cum bis itaque nouem figuris, et cum hoc signo 0, quod arabice zephirum appellatur, scribitur quilibet numerus, ut inferius demonstratur.

[Estes são os nove algarismos indianos

9 8 7 6 5 4 3 2 1

Com esses nove algarismos, e com o sinal 0, que os árabes chamam de *zephirum*, pode-se escrever qualquer número, como se demonstrará a seguir.]

Sentença de abertura do *Liber abaci* de Fibonacci, 1202
(Cortesia da Biblioteca da Universidade de West Virginia)

É evidente que Fibonacci foi um matemático invulgarmente capaz, sem rivais nos nove séculos da Idade Média. Um de seus contemporâneos mais competentes foi Jordanus Nemorarius, às vezes confundido (mas, com toda a certeza, erradamente) com o monge alemão Jordanus Saxus que, em 1222, foi eleito o segundo geral da ordem dos dominicanos, então em rápido crescimento. Jordanus deixou vários trabalhos nas áreas de aritmética, álgebra, geometria e estatística. Esses trabalhos prolixos, dos quais alguns chegaram a alcançar fama considerável na época, podem hoje parecer grandemente triviais, mas sua álgebra, por exemplo, foi o primeiro passo à frente no assunto na Europa Ocidental. Jordanus talvez tenha sido o primeiro a usar letras amplamente para representar números em geral, embora essa prática não tivesse influenciado escritores subsequentes. Fibonacci só uma vez fez isso. Apesar de muitas vezes se pintar um

quadro desolador do século XIII quanto à matemática, foi na sua parte inicial que se atingiu o ponto alto das realizações medievais em aritmética, geometria e álgebra.

Talvez devam ser mencionados ainda Sacrobosco (João de Holywood ou João de Halifax), Campanus e Roger Bacon. O primeiro ensinou matemática em Paris e escreveu uma coleção de regras aritméticas e uma compilação popular de extratos do *Almagesto* de Ptolomeu e de trabalhos de astrônomos árabes. Mas sua fama se deve principalmente à tradução que fez dos *Elementos* de Euclides (já mencionada na Seção 5-3). Roger Bacon, apesar de ter pouca aptidão para a matemática, era um gênio versátil e original que tinha familiaridade com muitas das obras gregas de geometria e astronomia e, como atestam seus elogios, apreciava plenamente o valor desses assuntos.

Os primeiros tempos do século XIII assistiram ao surgimento das universidades de Paris, Oxford, Cambridge, Pádua e Nápoles. As universidades posteriormente se tornaram fatores positivos para o desenvolvimento da matemática, até porque muitos matemáticos se ligaram a uma ou mais dessas instituições.

8.4 O século XIV

O século XIV foi relativamente estéril, matematicamente falando. Foi o século da Peste Negra, que varreu mais de um terço da população da Europa, e da maior parte da Guerra dos Cem Anos, com suas transformações políticas e econômicas no norte da Europa.

O maior matemático do período foi Nicole Oresme, nascido na Normandia por volta de 1323. Faleceu em 1382 depois de uma carreira que se estendeu do magistério ao bispado. Ele escreveu cinco trabalhos matemáticos e traduziu algo de Aristóteles. Num de seus opúsculos encontra-se o primeiro uso conhecido de expoentes fracionários (não, obviamente, em notação moderna); noutro, ele faz a localização de pontos por coordenadas, antecipando assim a geometria analítica. Um século mais tarde, esse último trabalho mereceria várias edições e é possível que tenha influenciado matemáticos do Renascimento, e até mesmo Descartes. Num manuscrito não publicado ele obteve a soma da série

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \frac{5}{32} + \dots,$$

o que faz dele um dos precursores da análise infinitesimal.

Embora a matemática na Idade Média tivesse sido essencialmente prática, a matemática especulativa não desapareceu totalmente. As elucubrações dos filósofos escolásticos levavam a teorizações sutis sobre movimento, infinito e contínuo, conceitos de importância fundamental na matemática moderna. Os séculos de disputas e tergiversações escolásticas podem responder, até certo ponto, pela notável transformação da matemática antiga em moderna; como sugeriu E. T. Bell, essas discussões talvez constituam uma *análise submatemática*. Segundo esse ponto de vista, São Tomás de Aquino (1226-1274), talvez o espírito mais agudo do século XIII, pode muito bem ser visto como alguém que desempenhou um papel no desenvolvimento da matemática. Certamente Thomas Bradwardine

(1290-1349), que, ao falecer, era arcebispo de Canterbury, foi mais matemático no sentido convencional. Além de especulações sobre os conceitos básicos de contínuo e discreto e infinitamente grande e infinitamente pequeno, Bradwardine escreveu quatro opúsculos sobre aritmética e geometria.

8.5 O século XV

O século XV testemunhou o início do Renascimento Europeu na arte e no saber. Com o colapso do Império Bizantino, culminando com a queda de Constantinopla ante os turcos em 1453, verifica-se um afluxo de refugiados para a Itália. Foi assim que muitos tesouros da civilização grega entraram no Ocidente e clássicos que até então só podiam ser conhecidos através de traduções árabes, nem sempre fiéis, agora se tornavam acessíveis em fontes originais. Ademais, com a invenção da imprensa de tipos móveis na metade do século, a comercialização de livros passou por uma revolução, propiciando a disseminação do conhecimento de maneira muito mais rápida. Quando se fechou o século, a América já tinha sido descoberta e logo se faria a circunavegação da Terra.

A atividade matemática no século XV centrou-se grandemente nas cidades italianas e nas cidades de Nuremberg, Viena e Praga na Europa Central e girou em torno da aritmética, da álgebra e da trigonometria. Assim, a matemática floresceu principalmente nas cidades mercantis em desenvolvimento, sob a influência do comércio, da navegação, da astronomia e da agrimensura.

Seguindo a ordem cronológica, primeiro mencionamos Nicholas Cusa (1401-1464), cujo nome deriva do de sua cidade natal, Cuers, junto ao Mosela. Filho de um pescador pobre, ascendeu rapidamente a hierarquia da Igreja, chegando a cardeal. Em 1448 tornou-se governador de Roma. Apenas incidentalmente se tornou um matemático mas isso não impediu seu êxito com uns poucos opúsculos que escreveu sobre o assunto, sendo mais lembrado hoje principalmente por seu trabalho na reforma do calendário e por suas tentativas de quadrar o círculo e trisseccionar o ângulo (ver Exercício 8.6).

Matematicamente superior foi Georg von Peurbach (1423-1463), aliás um ex-aluno de Nicholas Cusa. Depois de ensinar matemática na Itália, Peurbach se estabeleceu em Viena, fazendo da universidade local o centro matemático de sua geração. Ele escreveu uma aritmética, alguns trabalhos de astronomia e coligiu uma tábua de senos. A maioria desses trabalhos só foi publicada depois de sua morte. Ele também iniciou uma tradução latina, a partir do grego, do *Almagesto* de Ptolomeu.

O mais capaz e influente matemático do século foi Johann Müller (1436-1476), geralmente conhecido por Regiomontanus, nome latinizado de sua cidade natal Königsberg (“montanha do rei”). Ainda bem jovem estudou com Peurbach em Viena e mais tarde tomou a si a tarefa de completar a tradução do *Almagesto* iniciada pelo mestre. Traduziu também, do grego, trabalhos de Apolônio, Herão e Arquimedes. Seu tratado *De triangulis omnimodis*, escrito por volta de 1464 mas publicado postumamente em 1533 é a mais importante de suas obras; trata-se da primeira exposição europeia sistemática de trigonometria plana e esférica, num tratamento independente da astronomia. Regiomontanus

viajou consideravelmente pela Itália e a Alemanha, mas em 1471 se estabeleceu por fim em Nuremberg, onde montou um observatório, instalou uma prensa tipográfica e escreveu alguns trabalhos de astronomia. Consta que construiu uma águia mecânica capaz de bater suas asas, considerada uma das maravilhas da época. Em 1475 Regiomontanus foi convidado pelo Papa Sisto IV para participar da reforma do calendário. Logo depois de sua chegada a Roma, morreu súbita e prematuramente aos 40 anos de idade. Seu falecimento está cercado de mistério pois, embora alguns relatos deem conta de que ele provavelmente morreu vitimado pela peste, há rumores de que foi envenenado por um inimigo.

O *De triangulis omnimodis* de Regiomontanus se divide em cinco livros, os dois primeiros dedicados à trigonometria plana e os outros três à trigonometria esférica. Nessa obra o autor revela particular interesse na determinação de um triângulo, satisfeitas três condições dadas. Em várias ocasiões ele aplica a álgebra, como nas Proposições 12 e 23 do Livro II: (II 12) Determinar um triângulo, dado um lado, a altura relativa a esse lado e a razão entre os outros dois lados; (II 23) Determinar um triângulo, dada a diferença entre dois lados, a altura relativa ao terceiro e a diferença entre os segmentos em que a altura divide o terceiro lado. A álgebra é retórica, achando-se uma parte incógnita da figura como raiz de uma equação quadrática. Embora seus métodos possam ser considerados gerais, ele atribui valores numéricos específicos às partes dadas. As únicas funções trigonométricas empregadas são o seno e cosseno. Mais tarde, porém, Regiomontanus calculou uma tábua de tangentes. Noutro trabalho ele aplicou a álgebra e a trigonometria ao problema da construção de um quadrilátero cíclico, dados os quatro lados.



Regiomontanus
(Coleção David Eugene Smith, Biblioteca de Livros e
Manuscritos Raros, Universidade de Colúmbia)

O mais brilhante matemático francês do século XV foi Nicolas Chuquet, que nasceu em Paris mas viveu e se dedicou à medicina em Lyon. Em 1484 ele escreveu uma aritmética intitulada *Triparty en la science des nombres* que só foi impressa no século XIX. A primeira das três partes desse trabalho se ocupa do cálculo com números racionais, a segunda com números irracionais e a terceira aborda a teoria das equações. Chuquet

admitia expoentes inteiros, positivos e negativos, e parte de sua álgebra é sincopada. Seu trabalho era demasiado avançado para a época, razão pela qual acabou não exercendo praticamente nenhuma influência sobre os contemporâneos do autor. Chuquet faleceu por volta de 1500. No Exercício 8.9 se encontram alguns de seus problemas.

Em 1494 apareceu a primeira edição impressa da *Summa de arithmetica, geometrica, proportioni et proportionalita*, comumente conhecida apenas por *Sûma*, do frade franciscano Luca Pacioli (c. 1445-1509). Esse trabalho, uma compilação livre de muitas fontes, pretendia ser um sumário da aritmética, da álgebra e da geometria da época. Embora contenha pouco de importante que não se encontre no *Liber abaci* de Fibonacci, emprega uma notação superior.

A parte aritmética da *Sûma* começa com algoritmos para as operações fundamentais e para a extração de raiz quadrada. A abordagem é bastante completa, contendo, por exemplo, nada menos que oito esquemas para se efetuar a multiplicação. A aritmética mercantil é focalizada extensamente e ilustrada com vários problemas; há um tratamento relevante da escrituração mercantil de partidas dobradas. A regra de falsa posição é discutida e aplicada. Apesar dos muitos erros numéricos, a parte aritmética do trabalho tornou-se o padrão para as práticas da época. A álgebra da *Sûma* chega até equações quadráticas e contém muitos problemas que levam a essas equações. A álgebra é sincopada, com o uso de abreviações como *p* (de *piu*, “mais”) para indicar a adição, *m* (de *meno*, “menos”) para indicar a subtração, *co* (de *cosa*, “coisa”) para a incógnita, *ce* (de *censo*) para x^2 , *cu* (de *cuba*) para x^3 e *cece* (de *censo-censo*) para x^4 . A igualdade às vezes é indicada por *ae* (de *aequalis*). Frequentemente se usam barras para indicar abreviações, como em *Sûma* para *Summa*. De geometria o trabalho contém pouco que interesse. Como na obra de Regiomontanus, usa-se a álgebra na resolução de problemas geométricos. Depois da *Sûma*, a álgebra, que por dois séculos fora negligenciada, experimentou um crescimento intenso na Itália, progredindo também na Alemanha, na Inglaterra e na França.

Pacioli viajou extensamente, ensinou em vários lugares e escreveu muitos trabalhos, nem todos impressos. Em 1509, publicou sua *De divina proportione*, com ilustrações dos sólidos regulares desenhadas por Leonardo da Vinci durante o tempo em que recebeu lições de matemática de Pacioli.

O primeiro registro dos símbolos + e – ocorreu numa aritmética de autoria de Johann Widman (nascido c. 1460 na Boêmia), publicada em Leipzig no ano de 1489. No caso, esses símbolos eram usados meramente para indicar excesso e deficiência e não com os significados operacionais de hoje. É bastante provável que o primeiro desses sinais seja uma contração da palavra latina *et*, que era usada frequentemente para indicar adição; e é possível que o segundo desses sinais decorra da abreviação \overline{m} para menos. Já se deram outras explicações possíveis. Em 1514, o matemático holandês Vander Hoecke usou + e – como símbolos de operações algébricas, mas é provável que eles já tivessem sido usado antes com o mesmo significado¹.

¹ Ver J. W. L. Glaisher, “On the early history of the signs + and - and on the early german arithmeticians”, *Messenger of Mathematics*, nº 51, 1921-1922, pp. 1-148.

8.6 As primeiras aritméticas

Como consequência do interesse pela educação e do crescimento enorme da atividade comercial no Renascimento, começaram a aparecer muitos textos populares de aritmética. Três centenas desses livros foram impressos na Europa antes do século XVII. Essas obras eram de dois tipos, basicamente aquelas escritas em latim por intelectuais de formação clássica, muitas vezes ligados a escolas da Igreja, e outras escritas no vernáculo por professores práticos interessados em preparar jovens para carreiras comerciais. Esses professores muitas vezes também prestavam serviços como topógrafos, notários e coletores de impostos e entre eles estavam os influentes Rechenmeisters mantidos pela Liga Hanseática, uma poderosa associação de cidades comerciais alemãs com fins protecionistas.

A mais antiga aritmética impressa é a anônima e hoje extremamente rara *Aritmética de Treviso*, publicada em 1478 na cidade de Treviso, localizada no caminho que liga Veneza ao norte. Trata-se de uma aritmética amplamente comercial, dedicada a explicar a escrita dos números, a efetuar cálculos com eles e que contém aplicações envolvendo sociedades e escambo. Como os “algoritmos” iniciais do século XIV, ela também inclui questões recreativas. Foi o primeiro livro de matemática a ser impresso no mundo ocidental.

Bem mais influente na Itália que a *Aritmética de Treviso* foi a aritmética comercial escrita por Piero Borghi. Esse trabalho altamente útil foi publicado em Veneza em 1484 e alcançou pelo menos 17 edições, a última de 1557. Em 1491 foi publicada em Florença uma aritmética menos importante, de autoria de Filippo Calandri, porém interessante para nós pelo fato de conter o primeiro exemplo impresso do moderno processo de divisão e também os primeiros problemas ilustrados a aparecerem na Itália. Já falamos da *Sūma* de Pacioli, publicada em 1494, grande parte da qual é dedicada à aritmética. Podem-se recolher muitas informações sobre as práticas comerciais da época nos problemas desse livro.

Uma aritmética muito influente na Alemanha foi a de Widman, publicada em Leipzig no ano de 1489. Outra importante aritmética do período foi a de autoria de Jacob Köbel (1470-1533), um Rechenmeister de Heidelberg. As 22 edições alcançadas por essa aritmética (a primeira é de 1514) atestam sua popularidade. Mas talvez a mais influente de todas as aritméticas comerciais alemãs tenha sido a de Adam Riese (c. 1489-1559), publicada em 1522. Esse trabalho conseguiu uma reputação tão alta que, ainda hoje na Alemanha, *nach Adam Riese* significa cálculo correto.

Sobre Adam Riese conta-se uma anedota jocosa. Ao que parece, certa feita, Riese e um desenhista entraram numa disputa amigável para ver qual dos dois desenharia mais ângulos retos num minuto, usando apenas régua e compasso. O desenhista traçou uma reta e a seguir, procedendo como se ensina hoje nas escolas elementares, começou a erguer perpendiculares à reta. Riese traçou uma semicircunferência sobre uma reta e então, em sequência rápida, traçou um grande número de ângulos retos inscritos. É óbvio que ele ganhou facilmente a disputa.

Per fare de ducati grossi a ozo.				
1	fia	24	fa	24
2	fia	24	fa	48
3	fia	24	fa	72
4	fia	24	fa	96
5	fia	24	fa	120
6	fia	24	fa	144
7	fia	24	fa	168
8	fia	24	fa	192
9	fia	24	fa	216
0	fia	24	fa	0
Per fare de grossi a ozo pisoli.				
1	fia	32	fa	32
2	fia	32	fa	64
3	fia	32	fa	96
4	fia	32	fa	128
5	fia	32	fa	160
6	fia	32	fa	192
7	fia	32	fa	224
8	fia	32	fa	256
9	fia	32	fa	288
0	fia	32	fa	0
Per fare de quarti karatti.				
1	fia	36	fa	36
2	fia	36	fa	72
3	fia	36	fa	108
4	fia	36	fa	144

Uma página (em tamanho reduzido) da *Aritmética de Treviso* de 1478, mostrando os numerais indo-arábicos numa forma já bem acabada (Com permissão da Biblioteca Houghton, Universidade de Harvard)

Algumas das célebres aritméticas antigas foram contribuições da Inglaterra. O primeiro trabalho dedicado inteiramente à matemática a ser publicado na Inglaterra foi uma aritmética escrita por Cuthbert Tonstall (1474-1559). Esse livro, baseado na *Sūma* de Pacioli, foi escrito em latim e impresso em 1552. Durante sua vida agitada, Tonstall ocupou grande número de postos eclesiásticos e diplomáticos. A consideração que seus contemporâneos tinham para com seu saber se evidencia no fato de que a primeira edição impressa dos *Elementos* de Euclides em grego (1533), foi dedicada a ele. Mas o mais influente autor inglês de textos escolares no século XVI foi Robert Recorde (c. 1510-1558).

Recorde escreveu em inglês e seus trabalhos tinham a forma de diálogos entre um mestre e um estudante. Deixou pelo menos cinco livros, o primeiro deles uma aritmética extravagantemente chamada de *The Ground of Artes*, publicada por volta de 1542. Esse livro atingiu pelo menos 29 tiragens. Recorde estudou em Oxford e depois colou o grau de médico em Cambridge. Deu aulas particulares de matemática em ambas essas instituições quando de sua estada nelas. Depois de deixar Cambridge serviu como médico de Eduardo VI e da rainha Maria. No final da vida tornou-se chefe do Departamento de Minas e Moedas da Irlanda. Passou seus últimos dias na prisão, talvez devido a alguma contravenção ligada a seu trabalho na Irlanda.

8.7 O início do simbolismo algébrico

Além de sua aritmética, mencionada na seção anterior, Robert Recorde escreveu um texto de astronomia, um de geometria, um de medicina, uma álgebra e provavelmente outros trabalhos que se perderam. O de astronomia, impresso em 1551 e chamado *The Castle of Knowledge*, é uma das primeiras abordagens do assunto a apresentar o sistema de Copérnico para os leitores ingleses. O de geometria, impresso também em 1551 e chamado *The Pathwaie to Knowledge*, contém uma condensação dos *Elementos* de Euclides. Historicamente, tem interesse particular a álgebra de Recorde, *The Whetstone of Witte*, publicada em 1557, pois foi nela que se fez uso pela primeira vez do moderno símbolo de igualdade. Recorde justificou a adoção de um par de segmentos de reta paralelos como símbolo de igualdade alegando que “não pode haver duas coisas mais iguais”.

Um outro símbolo algébrico moderno, o conhecido radical [adotado talvez porque lembra um r (de raiz) minúsculo] foi introduzido em 1525 por Christoff Rudolff em seu livro de álgebra intitulado *Die Coss*. Esse livro teve muita influência na Alemanha; uma edição melhorada foi publicada por Michael Stifel (1486-1567) em 1553. Costumase apresentar Stifel como o maior algebrista alemão do século XVI. Sua obra matemática mais conhecida é *Arithmetica integra*, publicada em 1544. Divide-se em três partes dedicadas, respectivamente, aos números racionais, números irracionais e álgebra. Na primeira parte Stifel salienta as vantagens de se associar uma progressão aritmética a uma geométrica, prenunciando assim, de quase um século, a invenção dos logaritmos. Nessa parte ele deu também os coeficientes do desenvolvimento binomial até o de ordem 17. A segunda parte é, basicamente, uma apresentação algébrica do Livro X de Euclides e a terceira parte se ocupa de equações. As raízes negativas de uma equação são descartadas, mas se usam os sinais $+$, $-$ e $\sqrt{\quad}$ e se representa a incógnita muitas vezes por uma letra.

Stifel foi um dos personagens mais singulares da história da matemática. Originalmente um monge, acabou se tornando um reformador fanático, depois de convertido por Martinho Lutero. Seu espírito visionário não raro levava-o a enveredar pelo misticismo. De uma análise de certos textos bíblicos, profetizou o fim do mundo para 3 de outubro de 1533. Assim, muitos camponeses crédulos venderam tudo o que tinham para acompanhá-lo ao céu. O rebate falso provocou a indignação dos prejudicados e Stifel teve de buscar refúgio numa prisão, para se salvar. Um exemplo extremo do raciocínio místico de Stifel é

sua prova, através da aritmografia, de que o papa Leão X era a “besta” mencionada no Apocalipse². De LEO DECIMVS ele pinçou as letras L, D, C, I, M, V que têm significado no sistema de numeração romano. Acrescentou então X, de Leão X, e porque *Leo decimus* tem dez letras, e omitiu o M, porque representa *mysterium*. Com um rearranjo das letras obtém-se DCLXVI, ou 666, o “número da besta” do Apocalipse. Essa descoberta proporcionou a Stifel um conforto extremo, pois ele acreditava que sua interpretação devia resultar de alguma inspiração divina.

Alguns anos mais tarde, Napier, o inventor dos logaritmos, mostrou que 666 representa o papa de Roma, ao passo que o padre Bongus, um jesuíta da mesma época, concluiu que ele representa Martinho Lutero. Padre Bongus raciocinou da seguinte maneira: Se de A a I representamos os números de 1 a 9, de K a S os de 10 a 90 (de dez em dez) e de T a Z os de 100 a 500 (de cem em cem),³ obtemos

M	A	R	T	I	N	L	V	T	E	R	A
30	1	80	100	9	40	20	200	100	5	80	1

cuja soma é 666.

Durante a Primeira Guerra Mundial chegou-se à conclusão, através da aritmografia, de que 666 era o número do cáiser Guilherme; do mesmo modo se mostrou, mais tarde, que esse número representava Hitler. E já se mostrou que o nome César Nero, quando expresso com os símbolos das letras da língua aramaica, em que foi escrito o Apocalipse originalmente, se traduz numericamente por 666.

8.8 Equações cúbicas e quárticas

Provavelmente o feito matemático mais extraordinário do século XVI foi a descoberta, por matemáticos italianos, da solução algébrica das equações cúbica e quártica. A história dessa descoberta, em sua versão mais matizada, rivaliza com qualquer página escrita por Benvenuto Cellini.

Resumidamente, eis como os fatos parecem ter acontecido. Por volta de 1515, Scipione del Ferro (1465-1526), professor de matemática da Universidade de Bolonha, resolveu algebricamente a equação cúbica $x^3 + mx = n$, baseando seu trabalho provavelmente em fontes árabes. Ele não publicou o resultado mas revelou o segredo a seu discípulo Antônio Fior. Por volta de 1535, Nicolo Fontana de Brescia, mais conhecido como Tartaglia⁴ (o tartamudo), devido a lesões físicas sofridas quando criança

² “Quem tem sabedoria que conte o número da besta: pois é o número de um homem; e esse número é seiscentos e sessenta e seis”. Ver W. F. White, *A Scrap-Book of Elementary Mathematics*, pp. 180-2.

³ Letras do alfabeto latino, que não possui o *j* e o *w*. Para maiúsculas o *U* figura como *V*.

⁴ O *g* é mudo. O nome aparece também como Tartalea.

que afetaram sua fala, anunciou ter descoberto uma solução algébrica para a equação cúbica $x^3 + px^2 = n$. Achando que se tratava de blefe, Fior desafiou Tartaglia para uma disputa pública envolvendo a resolução de equações cúbicas. Com muito empenho Tartaglia conseguiu resolver também, faltando poucos dias para a disputa, a equação cúbica desprovida do termo quadrático. Como no dia marcado sabia resolver dois tipos de cúbicas, ao passo que Fior só sabia resolver um, Tartaglia triunfou plenamente. Mais tarde, Girolamo Cardano⁵, um gênio inescrupuloso que ensinava matemática e praticava medicina em Milão, depois de um juramento solene de segredo, conseguiu arrancar de Tartaglia a chave da solução da cúbica. Em 1545, porém, quando apareceu em Nuremberg a *Ars Magna* de Cardano, um grande tratado em latim de álgebra, lá estava a solução de Tartaglia da cúbica. Os protestos veementes de Tartaglia foram rebatidos por Ludovico Ferrari, o mais brilhante dos discípulos de Cardano, que argumentou ter seu mestre recebido informações de del Ferro, através de um terceiro personagem, ao mesmo tempo que acusava Tartaglia de ter plagiado a mesma fonte. Seguiu-se uma polêmica acerca da qual Tartaglia, com certeza, deu-se por feliz de sair vivo.

Como os atores dessa novela, segundo parece, nem sempre colocaram a verdade em primeiro plano, encontram-se muitas variações quanto aos detalhes da trama. A resolução da cúbica $x^3 + mx = n$ dada por Cardano em sua *Ars Magna* é essencialmente a seguinte. Considere a identidade

$$(a - b)^3 + 3ab(a - b) = a^3 - b^3.$$

Se escolhermos a e b de modo que

$$3ab = m, \quad a^3 - b^3 = n,$$

então x é dado por $a - b$. Resolvendo para a e b o sistema formado pelas duas últimas equações obtemos

$$a = \sqrt[3]{(n/2) + \sqrt{(n/2)^2 + (m/3)^3}},$$

$$b = \sqrt[3]{-(n/2) + \sqrt{(n/2)^2 + (m/3)^3}},$$

e assim x fica determinado.

Pouco depois da resolução da equação cúbica, encontrou-se também a solução da equação quártica geral. Em 1540, o matemático italiano Zuanne de Tonini da Coi propôs um problema a Cardano que recaía numa equação quártica (ver Exercício 8.15). Embora não conseguisse resolver essa equação, seu discípulo Ferrari teve êxito nessa tarefa, e Cardano teve o prazer de publicar também essa solução em sua *Ars Magna*.

⁵ O nome aparece também como Hieronymus Cardanus, Geronimo Cardano e Jerome Cardan.

The Arte

as their woꝝkes doe extende) to distinge it onely into two partes. The firste is, when one number is equalle vnto one other. And the seconde is, when one number is compared as equalle vnto . . . other numbers.

Alwaies willing you to remember, that you reduce your numbers, to their leaste denominations, and smalleste formes, befoze you procede any farther.

And again, if your equation be suche, that the greatestte denomination *Colike*, be ioined to any parte of a compoūde number, you shall tourne it so, that the number of the greatestte signe alone, maie stande as equalle to the reste.

And this is all that needeth to be taughte, concerning this woꝝke.

Howbeit, soꝝ easie alteration of equations. I will propoūde a fewe exāples, because the extraction of their rootes, maie the more aptly bee taughte. Any to avoide the tedious repetition of these woꝝdes: is equalle to: I will sette as I doe often in woꝝke else, a paire of paralleles, or Geometrical lines of one length, thus: ———, because noe. 2. thynges, can be moꝝre equalle. And now marke these numbers.

1. 14.ze.—+—15.9———71.9.
2. 20.ze.———18.9———102.9.
3. 26.9.—+—10ze———9.9———10ze.—+—215.9.
4. 19.ze.—+—192.9———109.—+—1089.—19ze.
5. 18.ze.—+—24.9.———8.9.—+—2.ze.
6. 349.—12ze———40ze.—+—4809.—9.9.

O método de Ferrari de resolução de quárticas, sintetizado em notação moderna, transcorre do seguinte modo. Uma transformação simples [ver Exercício 8.14(a)] reduz a quártica completa à forma

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0.$$

Daí se obtém

$$x^4 + 2px^2 + p^2 = px^2 - qx - r + p^2$$

ou

$$(x^2 + p)^2 = px^2 - qx + p^2 - r,$$

e então, para um y arbitrário,

$$\begin{aligned} (x^2 + p + y)^2 &= px^2 - qx + p^2 - r + 2y(x^2 + p) + y^2 \\ &= (p + 2y)x^2 - qx + (p^2 - r + 2py + y^2). \end{aligned}$$

Escolhamos agora y de modo que o segundo membro da equação acima seja um quadrado. Isso ocorre quando⁶

$$4(p + 2y)(p^2 - r + 2py + y^2) - q^2 = 0.$$

Mas essa é uma equação cúbica em y que pode ser resolvida pelo método precedente. Tal valor de y reduz o problema original tão somente à extração de raízes quadradas.

Com o tempo se encontraram outras soluções algébricas das equações cúbica e quártica gerais. Na próxima seção consideraremos os métodos descobertos pelo matemático francês do século XVI François Viète. Há uma solução para as quárticas, devida a Descartes (1637), que os textos superiores de teoria das equações muitas vezes trazem [ver Exercício 10.4(e)].

Uma vez que a resolução de uma equação quártica se reduz à resolução de uma cúbica associada a ela, Euler, por volta de 1750, tentou igualmente reduzir a resolução de uma equação quártica geral à de uma quártica associada. Euler falhou nesse seu intento, assim como falharia também Lagrange uns 30 anos mais tarde. O médico italiano Paolo Ruffini, porém, tomou outro caminho: em tentativas de 1803, 1805 e 1813 procurou provar, embora sempre de maneira insuficiente, que as raízes das equações gerais de grau cinco, ou maior, não podem ser expressas por meio de radicais em termos dos coeficientes respectivos, um fato verdadeiro, como se sabe hoje. Esse resul-

⁶ Uma condição necessária e suficiente para que $Ax^2 + Bx + C$ seja o quadrado de uma função linear é que o discriminante, $B^2 - 4AC$, se anule.

tado notável foi demonstrado independente e conclusivamente pelo famoso matemático norueguês Niels Henrik Abel (1802-1829) em 1824. Em 1858, Charles Hermite (1822-1901) deu uma solução da equação quártica geral por meio de funções elípticas. O êxito de Hermite com as equações quárticas levou mais tarde ao fato de que uma raiz de uma equação geral de grau n pode ser representada em termos dos coeficientes por meio de funções fuchsianas. Os desenvolvimentos modernos na teoria das equações, que envolvem nomes como os de Bring, Jerrard, Tschirnhausen, Galois, Jordan e outros, são muito fascinantes mas avançados demais para serem considerados aqui.

Girolamo Cardano é um dos personagens mais extraordinários da história da matemática. Nasceu em Pávia, em 1501, filho ilegítimo de um jurista, vindo sua personalidade a revelar-se extremamente contraditória e arrebatada. Começou sua tumultuada vida profissional como médico, mas, paralelamente, dedicava-se à matemática, estudando, ensinando e escrevendo. Depois de uma viagem que fez, certa feita, à Escócia, veio a ocupar, sucessivamente, cadeiras importantes nas Universidades de Pávia e Bolonha. Esteve preso por algum tempo, acusado de heresia por ter feito e publicado um horóscopo de Jesus Cristo. Renunciando a sua cadeira em Bolonha, mudou-se para Roma, onde se notabilizou como astrólogo, inclusive do Papa, pelo que recebia uma pensão. Faleceu em Roma no ano de 1576 e segundo uma versão, pôs fim à própria vida para não contrariar previsão astrológica feita por ele mesmo sobre a data de sua morte. Contam-se muitas histórias sobre sua perversidade; como a de que, num acesso de raiva, teria cortado as orelhas de seu filho mais jovem. Algumas dessas histórias podem resultar de exageros de seus inimigos; pode ser mesmo que ele tenha sido vítima de muita difamação. Pelo menos é isso que sustenta em sua autobiografia.



Girolamo Cardano
(Coleção da Biblioteca Pública de Nova York)

Um dos homens mais talentosos e versáteis de seu tempo, Cardano deixou uma obra vasta, abrangendo aritmética, astronomia, física, medicina e outros assuntos. Mas dentre os seus muitos livros o mais importante, sem dúvida, é a *Ars Magna*, o primeiro grande tratado em latim dedicado exclusivamente à álgebra. Nele se dá alguma atenção às raízes negativas de uma equação e ao cálculo com números imaginários. Tem-se também um método, embora tosco, de obtenção de um valor aproximado de uma raiz de uma equação de grau genérico. Há indícios de que Cardano tinha algum conhecimento da regra de sinais de Descartes, explicada no Exercício 10.3. Como jogador inveterado, Cardano escreveu um manual do jogador em que abordou algumas questões interessantes de probabilidade.

Tartaglia teve uma infância difícil. Nasceu em Brescia no ano de 1499, filho de pais muito pobres, e presenciou a tomada de sua cidade natal pelos franceses em 1512. Durante o período de violências da invasão francesa, ele e seu pai (que era mensageiro postal da cidade), como muitas outras pessoas, refugiaram-se na catedral local. Mas os soldados franceses não respeitaram o local e massacraram os que lá estavam. O pai de Tartaglia foi morto e ele, com o crânio fraturado e com um corte de sabre profundo que lhe atingiu o palato, foi deixado como morto. Quando sua mãe chegou à catedral, à procura dos parentes, encontrou o filho ainda com vida e diligenciou para transportá-lo seguro de lá. Carecendo de recursos para assistência médica, ela lembrou que um cão machucado sempre lambe suas próprias feridas; de fato, mais tarde Tartaglia atribuiu sua recuperação a esse tratamento. O ferimento no palato deixou-o com um defeito na fala, razão pela qual ganhou a alcunha de “o gago”. Sua mãe só conseguiu dinheiro para mandá-lo à escola por 15 dias e assim Tartaglia teve de aprender a ler e a escrever sozinho, usando para isso, inclusive, um caderno que roubara. Conta-se que, não dispondo de recursos para comprar papel, usava as lápides do cemitério como quadro-negro. Mais tarde passou a ganhar a vida ensinando ciências e matemática em várias cidades da Itália. Faleceu em Veneza em 1557.



Nicolo Tartaglia
(Coleção David Smith)

Tartaglia foi um matemático muito talentoso. Já mencionamos seu papel nas equações cúbicas. Credita-se a ele, também, o mérito de ter sido o primeiro a usar matemática na ciência dos tiros de artilharia. Escreveu também o que se considera a melhor aritmética do século XVI, um tratado em dois volumes que inclui uma discussão ampla das operações numéricas e da aritmética mercantil de seu tempo. Publicou também edições de Euclides e Arquimedes.

Em 1572, uns poucos anos antes de Cardano morrer, Rafael Bombelli publicou uma álgebra que se constituiu numa contribuição notável à resolução das equações cúbicas. Os textos de teoria das equações mostram que, se $(n/2)^2 + (m/3)^3$ é negativa, então a equação cúbica $x^3 + mx = n$ tem três raízes reais. Mas nesse caso, pela fórmula de Cardano-Tartaglia, essas raízes se expressam como diferença de duas raízes cúbicas de *números complexos imaginários*. Essa aparente anomalia, que tantos transtornos causou aos antigos algebristas, caracteriza o chamado *caso irreduzível* das equações cúbicas. Bombelli chamou a atenção para o fato de que só aparentemente as raízes são imaginárias no caso irreduzível. Bombelli colaborou também para o aprimoramento da notação algébrica corrente. Assim, a expressão composta $\sqrt{7 + \sqrt{14}}$ seria escrita por Pacioli como $R\sqrt{7} \bar{p} R14$, onde $R\sqrt{7}$, a *radix universalis*, indica que a raiz quadrada abrange toda a expressão que se segue; Bombelli também poderia ter escrito essa expressão como $R \sqcup 7 p R 14 \sqcup$. Bombelli distinguia a raiz quadrada da cúbica escrevendo, respectivamente, $R q$ e $R c$; e indicava $\sqrt{-11}$ por *di m R q 11*.

8.9 François Viète

O maior matemático francês do século XVI foi François Viète, frequentemente conhecido por Vieta, seu nome semilatinizado. Nascido em Fontenay, em 1540, estudou advocacia e foi membro do parlamento provincial da Bretanha, mas dedicava a maior parte de seu tempo de lazer à matemática. Faleceu em 1603, em Paris.

Contam-se algumas anedotas divertidas sobre Viète. Há, por exemplo, a história do embaixador dos Países Baixos que se gabava ao rei Henrique IV de que a França não tinha nenhum matemático capaz de resolver um problema proposto em 1593 por seu conterrâneo Adrianus Romanus (1561-1615) e que requeria a resolução de uma equação de grau 45. Convocado, logo ao ver a equação Viète percebeu ligações trigonométricas subjacentes e, em poucos minutos, foi capaz de descobrir duas raízes e posteriormente encontrou mais 21. As raízes negativas lhe escaparam. Viète, por sua vez, desafiou Romanus a resolver com os instrumentos euclidianos o problema de Apolônio (ver Seção 6-4); o matemático dos Países Baixos, porém, não deu conta da tarefa. Quando lhe foi apresentada a elegante solução de seu desafiante, Romanus fez questão de viajar até Fontenay para conhecê-lo. Há também a história de como Viète conseguiu quebrar um código usado pela Espanha, formado de aproximadamente 600 caracteres, propiciando uma vantagem para a França, durante dois anos, na guerra travada então pelos dois países. Tão seguro estava o rei Filipe II de que o código era indecifrável que se queixou ao Papa de que a França estava usando magia contra seu país, “o

que era contrário à fé cristã”. Consta que quando Viète se engolfava no estudo da matemática, era capaz de ficar dias seguidos trancado em seu gabinete.



François Viète
(Irmãos Brown)

A vasta obra de Viète compreende trabalhos de trigonometria, álgebra e geometria, sendo os principais *Canon mathematicus seu ad triangula* (1579), *In artem analyticam isagoge* (1591), *Supplementum geometriae* (1593), *De numerosa potestatum resolutione* (1600) e *De aequationum recognitione et emendatione* (publicado postumamente em 1615). Esses trabalhos, exceto o último, foram impressos e distribuídos a expensas de Viète.

Em *Canon mathematicus seu ad triangula* há contribuições notáveis à trigonometria. Trata-se, talvez, do primeiro livro na Europa Ocidental a desenvolver sistematicamente métodos para resolver triângulos planos e esféricos com o auxílio das seis funções trigonométricas (ver Exercício 8.17). Vieta obteve expressões para $\cos n\theta$ como função de $\cos \theta$ para $n = 1, 2, \dots, 9$ e posteriormente sugeriu uma solução trigonométrica para o caso irreduzível das cúbicas.

Mas o mais famoso trabalho de Viète é *In artem* ao qual o desenvolvimento do simbolismo algébrico muito deve. Nesse texto Viète introduziu a prática de se usar vogais para representar incógnitas e consoantes para representar constantes. A convenção atual de se usar as últimas letras do alfabeto para indicar as incógnitas e as primeiras para as constantes foi introduzida por Descartes em 1637. Antes de Viète era comum se usarem letras ou símbolos diferentes para as várias potências de uma quantidade. Viète usava a mesma letra, adequadamente qualificada; assim, o que hoje se indica por x, x^2, x^3 ele expressava por $A, A \text{ quadratum}, A \text{ cubum}$; mais tarde alguns escritores abreviaram essa notação para $A, A q, A c$. Viète adotava qualificar os coeficientes de uma equação polinomial de modo a torná-la homogênea e usava

os símbolos atuais + e – mas não tinha nenhum símbolo para a igualdade. Assim, o que escreveríamos

$$5BA^2 - 2CA + A^3 = D$$

para ele seria

$$B \text{ 5 in } A \text{ quad} - C \text{ plano 2 in } A + A \text{ cub aequatur } D \text{ solido.}$$

Observe como os coeficientes C e D são qualificados de modo a tornar cada termo da equação tridimensional. Viète usava o símbolo = entre duas quantidades não para indicar igualdade mas sim diferença entre elas.

Em *De numerosa*, Viète dá um processo sistemático, que esteve em uso até por volta de 1680, de aproximações sucessivas de uma raiz de uma equação. O método fica tão trabalhoso para equações de grau elevado que um matemático do século XVII o descreveu como “impróprio para um cristão”. Vejamos como se aplica à equação

$$x^2 + mx = n.$$

Suponhamos que x_1 seja um valor aproximado de uma raiz que, portanto, pode ser expressa por $x_1 + x_2$. A substituição dessa soma na equação fornece

$$(x_1 + x_2)^2 + m(x_1 + x_2) = n$$

ou

$$x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + mx_1 + mx_2 = n.$$

Assumindo x_2 tão pequeno que x_2^2 possa ser desprezado, obtemos

$$x_2 = \frac{n - x_1^2 - mx_1}{2x_1 - m}$$

A partir, agora, da aproximação melhorada $x_1 + x_2$ calculamos, da mesma maneira, uma aproximação $x_1 + x_2 + x_3$ ainda melhor e assim por diante. Viète usou esse método para aproximar uma raiz de

$$x^6 + 6000x = 191\,246\,976.$$

O tratado póstumo de Viète contém muita coisa de interesse na teoria das equações. Nele encontramos, por exemplo, a conhecida transformação que acrescenta uma constante às raízes de uma equação e a que as multiplica por uma constante. Viète estava a par das expressões dos coeficientes de uma equação (de grau até cinco) como funções

simétricas das raízes, assim como conhecia a transformação que elimina, num polinômio genérico, o termo vizinho ao de maior grau. Nesse trabalho ele encontrou ainda uma solução elegante da cúbica $x^3 + 3ax = 2b$, a cuja forma se pode reduzir qualquer equação do terceiro grau. Fazendo

$$x = \frac{a}{y} - y,$$

a equação dada se torna

$$y^6 + 2by^3 = a^3,$$

que é uma equação quadrática em y^3 . Acha-se assim y^3 , depois y e depois x . A solução de Viète da quártica é semelhante à de Ferrari. Considere a quártica

$$x^4 + ax^2 + bx = c,$$

a cuja forma se pode reduzir toda quártica completa. Somando $x^2y^2 + y^4/4$ a ambos os membros de

$$x^4 = c - ax^2 - bx$$

(que é equivalente à equação considerada originalmente), obtém-se

$$\left(x_2 + \frac{y^2}{2}\right)^2 = (y^2 - a)x^2 - bx + \left(\frac{y^4}{4} + c\right).$$

Escolhe-se então y de modo que o segundo membro seja um quadrado perfeito. A condição para tanto é que

$$y^6 - ay^4 + 4cy^2 = 4ac + b^2,$$

uma cúbica em y^2 . Pode-se então achar um y e concluir o problema extraindo raízes quadradas.

Viète foi um algebrista excelente, de modo que não é de se surpreender que ele tenha aplicado a álgebra à trigonometria e à geometria. Ele deu sua parcela de contribuição aos três problemas famosos da Antiguidade ao mostrar que tanto o problema da trisseção como o da duplicação dependem da resolução de uma cúbica. Na Seção 4-8 mencionamos o cálculo de π feito por Viète e seu interessante produto infinito convergente para $2/\pi$. Na Seção 6-4 mencionamos sua tentativa de restaurar o trabalho *Tangencias* (extraviado), de autoria de Apolônio.

Em 1594 Viète ganhou uma certa notoriedade negativa ao se envolver numa polêmica inflamada com o astrônomo Clavius sobre a reforma gregoriana do calendário. A atitude de Viète nesse episódio não se revestiu de caráter científico.

8.10 Outros matemáticos do século XVI

Nosso relato da matemática do século XVI não poderia se encerrar sem uma referência a alguns outros nomes. No campo da matemática falaremos um pouco de Clavius, Cataldi e Stevin e no da astronomia de Copérnico, Rhaeticus e Pitiscus.

Christopher Clavius nasceu em Bamberg, Alemanha, em 1537 e faleceu em Roma em 1612. Embora tenha contribuído pouco para a matemática, provavelmente nenhum intelectual alemão do século fez mais do que ele para a promoção dessa ciência. Era um professor inspirado e escreveu textos de aritmética (1583) e álgebra (1608) dignos de respeito. Em 1574, publicou uma edição dos *Elementos* de Euclides, especialmente valiosa pelos seus escólios. Também escreveu sobre trigonometria e astronomia e desempenhou um papel importante na reforma gregoriana do calendário.

Pietro Antônio Cataldi nasceu em Bolonha em 1548, ensinou matemática e astronomia em Florença, Perúgia e Bolonha e faleceu em sua cidade natal em 1626. Deixou muitos trabalhos de matemática, dentre os quais uma aritmética, um tratado sobre números perfeitos, uma edição dos seis primeiros livros dos *Elementos* e um breve tratado de álgebra. Credita-se a ele o mérito de ter dado os primeiros passos na teoria das frações contínuas.



Christopher Clavius
(Coleção David Smith)

O mais destacado e influente matemático dos Países Baixos no século XVI foi Simon Stevin (1548-1620). Foi intendente geral da armada holandesa de 1593 até o fim de sua vida e geriu muitas obras públicas. Na história da matemática Stevin é conhecido principalmente por ter dado uma das exposições mais antigas da teoria das frações decimais. Na física ele é mais conhecido por suas contribuições à estática e à hidrostática. Entre os eruditos de sua época era mais conhecido por seus trabalhos em fortificações e engenharia militar. Junto ao povo de seu tempo o nome de Stevin se tornou popular devido a um veículo movido a velas que inventou, capaz de transportar 28 pessoas ao longo de uma praia, superando facilmente em velocidade um cavalo a galope.

A astronomia contribuiu muito para a matemática; de fato, houve época em que *matemático* significava astrônomo. Dentre os astrônomos que impulsionaram a matemática figura com destaque o polonês Nicolau Copérnico (1473-1543). Depois da sua formação na Universidade de Cracóvia, Copérnico estudou leis, medicina e astronomia em Pádua e Bolonha. Sua teoria do Universo ficou pronta em 1530 mas só foi publicada em 1543, ano de sua morte. O trabalho de Copérnico necessitava de alguns desenvolvimentos em trigonometria e ele próprio se incumbiu de implementá-los num tratado sobre a matéria.

O principal astrônomo matemático teutônico do século XVI foi o discípulo de Copérnico, Georg Joachim Rhaeticus (1514-1576). Ele dedicou 12 anos de sua vida, auxiliado por calculadores remunerados, à construção de duas tábuas trigonométricas notáveis e ainda úteis hoje. Uma delas envolve as seis funções trigonométricas, calculadas com dez casas, para intervalos de $10''$ de arco; a outra é uma tábua de senos, com 15 casas, para intervalos de $10''$ de arco, juntamente com a primeira, a segunda e a terceira diferenças. Rhaeticus foi o primeiro a definir as funções trigonométricas como razões entre lados de um triângulo retângulo. Deve-se à insistência de Rhaeticus o fato de a obra máxima de Copérnico ter sido publicada dramaticamente, com o autor já em seu leito de morte.



Nicolau Copérnico
(American Museum)

A tábua de senos de Rheticus foi aperfeiçoada e editada em 1593 por Bartholomaeus Pitiscus (1561-1613), um clérigo alemão com pendores matemáticos. Seu tratado de trigonometria (bastante satisfatório, aliás) foi o primeiro trabalho sobre o assunto a aparecer com esse nome.

Num resumo das realizações matemáticas do século XVI, pode-se dizer que a álgebra simbólica teve um bom andamento, que os cálculos com numerais indo-arábicos se padronizaram, que as frações decimais ganharam terreno, que se resolveram as equações cúbicas e quárticas e a teoria das equações progrediu, que os números negativos começaram a ser aceitos, que a trigonometria se aprimorou e sistematizou e que se calcularam excelentes tábuas. O campo estava preparado para os notáveis avanços do próximo século.

É interessante registrar que o primeiro trabalho de matemática a ser impresso no Novo Mundo apareceu em 1556 na Cidade do México; era um pequeno compêndio comercial de autoria de Juan Diez.

Exercícios

8.1 Problemas da Alta Idade Média

Alcuíno de York (c. 775) pode ter sido o compilador da coleção latina intitulada *Propositiones ad acuendos juvenes*. Resolva os cinco problemas seguintes, tirados da coleção.

(a) Distribuindo-se 100 bushels* de grãos entre 100 pessoas de modo que cada homem receba 3 bushels, cada mulher 2 e cada criança $1/2$ bushel, quantos são os homens, quantas as mulheres e quantas as crianças?

(b) 30 frascos — 10 cheios, 10 pela metade e 10 vazios — devem ser divididos entre 3 filhos de modo que frascos e conteúdos sejam partilhados igualmente. Como se pode fazer isso?

(c) Um cachorro põe-se a perseguir um coelho que está 150 pés à sua frente, saltando 9 pés enquanto o coelho salta 7. Com quantos saltos o cachorro alcança o coelho?

(d) Um lobo, uma cabra e um repolho devem ser transportados para a outra margem de um rio num barco que só aguenta um deles, além do barqueiro. Como se deve fazer para que o lobo não coma a cabra, nem esta coma o repolho?

(e) O testamento de um moribundo impõe que se sua esposa, que está grávida, tiver um filho, este herdará $3/4$ e a viúva $1/4$ dos bens; mas se nascer uma filha, esta herdará $7/12$ e a viúva $5/12$ dos bens. Como devem ser divididos os bens no caso de

* Na Inglaterra 1 bushel = 36,367 litros. (N. T.)

nascer um casal de gêmeos? (A origem desse problema é romana. A resposta dada por Alcuíno em sua coleção não é satisfatória.)

(f) Em sua *Geometria*, Gerbert resolveu o problema, considerado muito difícil na época, consistindo em determinar os catetos de um triângulo retângulo, conhecida a hipotenusa e a área. Resolva esse problema.

(g) Gerbert expressou a área de um triângulo equilátero de lado a como $(a/2)(a - a/7)$. Mostre que isso é equivalente a fazer $\sqrt{3} = 1,714$.

8.2 A sequência de Fibonacci

(a) Mostre que o seguinte problema, encontrado no *Liber abaci*, dá origem à sequência de Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, ..., x , y , $x + y$, ...

Quantos pares de coelhos serão produzidos num ano, a partir de um único casal, se cada casal procria a cada mês um novo casal que se torna produtivo depois de dois meses?

(b) Se u_n representa o n ésimo termo da sequência de Fibonacci, mostre que

$$1. u_{n+1} u_{n-1} = u_n^2 + (-1)^n, \quad n \geq 2.$$

$$2. u_n = [(1 + \sqrt{5})^n - (1 - \sqrt{5})^n] / 2^n \sqrt{5}.$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n / u_{n-1}) = (\sqrt{5} - 1) / 2.$$

4. u_n e u_{n+1} são primos entre si.

Há uma literatura imensa a respeito das sequências de Fibonacci. Para algumas das aplicações mais esotéricas a quebra-cabeças envolvendo decomposições de figuras, à arte, à filotaxia e à espiral logarítmica ver, por exemplo, *Riddles in Mathematics* de E. P. Northrop.

8.3 Problemas do *Liber Abaci*

Resolva os seguintes problemas, constantes do *Liber abaci* (1202). O primeiro foi proposto a Fibonacci por um mestre em Constantinopla; o segundo foi ideado para ilustrar a regra de três; o terceiro é um exemplo de problema de herança e iria reaparecer depois em trabalhos de Chuquet e Euler.

(a) Se A receber 7 denários* de B, então A ficará com o quádruplo de B; se B receber 5 denários de A, então B ficará com o sétuplo de A. Quanto tem cada um?

* Denário: antiga moeda romana. (N. T.)

(b) Um certo rei envia 30 homens a seu pomar para plantar árvores. Se eles podem plantar 1000 árvores em 9 dias, em quantos dias 36 homens plantariam 4400 árvores?

(c) Um homem deixou para seu filho mais velho 1 besante* mais $1/7$ do que ainda sobrou; então, do restante, deixou para seu segundo filho 2 besantes mais $1/7$ do que ainda sobrou; a seguir, do restante, deixou para seu terceiro filho 3 besantes mais $1/7$ do que ainda sobrou. E assim por diante, deixando para cada filho 1 besante a mais do que para o anterior mais $1/7$ do que sobrasse. Verifica-se, nessa partilha, que o último filho recebe tudo que sobrou e que todos os filhos recebem o mesmo. Quantos eram os filhos e a quanto montavam os bens do homem?

8.4 Problemas adicionais de Fibonacci

(a) Mostre que os quadrados dos números $a^2 - 2ab - b^2$, $a^2 + b^2$, $a^2 + 2ab - b^2$ estão em progressão aritmética. Se $a = 5$ e $b = 4$, a razão é 720 e o primeiro e o terceiro quadrados são $41^2 - 720 = 31^2$ e $41^2 + 720 = 49^2$. Dividindo por 12^2 obtemos a solução de Fibonacci do primeiro dos problemas do torneio mencionado na Seção 8-3, ou seja, achar um número racional x tal que $x^2 + 5$ e $x^2 - 5$ sejam quadrados de números racionais. Esse problema é insolúvel quando se substitui 5 por 1, 2, 3 ou 4. Fibonacci mostrou que se x e b são inteiros tais que $x^2 + b$ e $x^2 - b$ são quadrados perfeitos, então b deve ser um múltiplo de 24. Como exemplos temos $5^2 + 24 = 7^2$, $5^2 - 24 = 1^2$ e $10^2 + 96 = 14^2$, $10^2 - 96 = 2^2$.

(b) Ache uma solução do seguinte problema, o terceiro do torneio mencionado de que participou Fibonacci: Três homens possuem um monte de moedas, sendo suas partes $1/2$, $1/3$, $1/6$. Cada homem retira algumas moedas do monte até que nada reste. O primeiro homem põe então de volta $1/2$ do que retirou, o segundo $1/3$ e o terceiro $1/6$. Quando se divide igualmente entre os três o total das moedas postas de volta, verifica-se que cada homem fica exatamente com a quantia de moedas que lhe pertence. Quantas moedas havia no monte original e quantas cada homem retirou do monte?

(c) Resolva o seguinte problema dado por Fibonacci no *Liber abaci*. Este problema, que contém a essência da ideia de anuidade, reapareceria posteriormente numa quantidade notável de variações.

Um homem entra num pomar, depois de passar por 7 portas, e colhe um certo número de maçãs. Quando deixa o pomar ele dá ao primeiro guarda metade das maçãs que tinha, mais uma. Ao segundo guarda ele dá metade das maçãs restantes, mais uma. Depois de fazer o mesmo com os cinco guardas que ainda faltavam, ele se encontra com uma maçã. Quantas maçãs ele colheu no pomar?

* Antiga moeda bizantina de ouro e prata (N. T.).

8.5 Polígonos estrelados

Um *polígono estrelado regular* é a figura formada quando se ligam com retas todos os pontos r -ésimos, a partir de um deles, dos n pontos que dividem uma circunferência em n partes iguais, sendo $n > 2$ e r e n primos entre si. Representa-se o polígono estrelado assim definido por $\{n/r\}$. Para $r = 1$ tem-se os polígonos regulares. Os polígonos estrelados são chamados às vezes de *n -gramas regulares*. Eles surgiram na escola pitagórica antiga, onde o polígono estrelado $\{5/2\}$, ou pentagrama, era o distintivo da irmandade. Eles aparecem também na geometria de Boécio e nas traduções de Euclides, a partir do árabe, feitas por Adelardo e Campanus. Bradwardine desenvolveu algumas de suas propriedades geométricas. Também Regiomontanus, Charles de Bouelles (1470-1533) e Johann Kepler (1571-1630) se interessaram pelo assunto.

(a) Construa, com o auxílio de um transferidor, os polígonos estrelados $\{5/2\}$, $\{7/2\}$, $\{7/3\}$, $\{8/3\}$, $\{9/2\}$, $\{9/4\}$, $\{10/3\}$.

(b) Seja $\varphi(n)$ a *função φ de Euler*: ela indica o número de números menores que n e primos com n . Mostre que há $[\varphi(n)]/2$ n -gramas regulares.

(c) Mostre que se n é primo, então o número de n -gramas regulares é $(n - 1)/2$.

(d) Mostre que a soma dos ângulos nas “pontas” do polígono estrelado regular $\{n/a\}$ é dada por $(n - 2a)180^\circ$. (Este resultado é de Bradwardine.)

8.6 Jordanus e Cusa

(a) Ao fim de sua tradução do Livro IV dos *Elementos* de Euclides, Campanus descreve uma trissecção que é exatamente a mesma dada por Jordanus em seu *De triangulis*, um trabalho de geometria em quatro livros constituído de 72 proposições correntes, mais algumas outras sobre tópicos como centroide de um triângulo, superfícies curvas e arcos semelhantes. A trissecção, que emprega o princípio de inserção (ver Exercício 4.6), é feita da seguinte maneira: Seja $\angle AOB$, dado como ângulo central de um círculo, o ângulo que se quer trissecionar; trace por A a corda AD de maneira a cortar o diâmetro perpendicular a OB em E , com $ED = OA$; então a reta OF , paralela a DA , trisseciona $\angle AOB$. Prove que essa construção é correta.

(b) Em seu tratado *Tractatus de numeris datis*, Jordanus propõe problemas em que um número dado deve ser dividido de alguma maneira estabelecida. Um dos primeiros problemas do trabalho é: Decomponha um número dado em duas partes tais que a soma dos quadrados das partes seja outro número dado. Resolva esse problema para o caso em que os números dados são 10 e 58, respectivamente.

(c) Cusa deu várias maneiras de aproximar a circunferência de um círculo. Sua melhor tentativa é a seguinte: Seja M o centro de um triângulo equilátero ABC e seja D o ponto médio de AB ; seja E o ponto médio de DB ; então, afirma Cusa, $(5/4)ME$ é o raio de um círculo cuja circunferência é igual ao perímetro do triângulo equilátero. Trace agora um triângulo retângulo de catetos $RS = (5/4)ME$ e $RT = (3/2)AB$ e

construa um ângulo α “de latão ou madeira” igual ao ângulo RST . Para retificar a circunferência de um dado círculo, trace 2 diâmetros perpendiculares UOV e XOY ; ponha o ângulo α com um lado ao longo de UOV e vértice em U ; então o outro lado do ângulo corta o prolongamento de XOY em Z , de maneira tal que OZ é metade da circunferência do círculo procurada. Mostre que o método de Cusa fornece $(24/35)\sqrt{21} = 3,142337\dots$ como aproximação de π .

8.7 Dürer e os quadrados mágicos de ordem $4n$

Na famosa gravura de Albrecht Dürer intitulada *A Melancholia* aparece o quadrado mágico de ordem quatro mostrado na Figura 68. Nota-se que o ano em que a gravura foi feita, 1514, aparece nas duas celas centrais da linha de baixo. Além das propriedades “mágicas” comuns, mostre que:

(a) A soma dos quadrados dos números das duas linhas superiores é igual à soma dos quadrados dos números das duas linhas inferiores.

(b) A soma dos quadrados dos números da primeira e terceira linhas é igual à soma dos quadrados dos números da segunda e quarta linhas.

(c) A soma dos números das diagonais é igual à soma dos números fora das diagonais.

(d) A soma dos quadrados dos números das diagonais é igual à soma dos quadrados dos números fora das diagonais.

(e) A soma dos cubos dos números das diagonais é igual à soma dos cubos dos números fora das diagonais.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Figura 68

Há uma maneira fácil de se construir quadrados mágicos de ordem $4n$. Considere, inicialmente, um quadrado de ordem 4 e visualize as diagonais (ver Figura 69). Começando pelo canto superior esquerdo, enumere da esquerda para a direita, em ordem crescente, as celas das diversas linhas, registrando apenas, os numerais daquelas não cortadas pelas diagonais. Proceda agora da mesma maneira, mas a partir do canto inferior direito, no sentido contrário, registrando apenas os numerais das celas cortadas pelas diagonais. O quadrado mágico resultante difere pouco do de Dürer. A mesma regra se aplica a qualquer quadrado mágico de ordem $4n$, considerando agora

as diagonais dos n^2 sub-blocos 4×4 principais. A Figura 70 mostra a construção, por meio dessa regra, de um quadrado mágico 8×8 .

(f) Construa um quadrado mágico de ordem 12.

		2	3	
5				8
9				12
		14	15	

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

Figura 69

	2	3			6	7	
9			12	13			16
17			20	21			24
	26	27			30	31	
	34	35			38	39	
41			44	45			48
49			52	53			56
	58	59			62	63	

64	2	3	61	60	6	7	57
9	55	54	12	13	51	50	16
17	47	46	20	21	43	42	24
40	26	27	37	36	30	31	33
32	34	35	29	28	38	39	25
41	23	22	44	45	19	18	48
49	15	14	52	53	11	10	56
8	58	59	5	4	62	63	1

Figura 70

8.8 Problemas de Regiomontanus

Resolva os 3 problemas seguintes, os dois primeiros dos quais se encontram em *De triangulis omnimodis* (1464) de Regiomontanus:

(a) Determine um triângulo, sendo dadas a diferença entre dois lados, a altura relativa ao terceiro lado e a diferença entre os segmentos formados pela altura sobre o terceiro lado. (Os valores numéricos dados por Regiomontanus são 3, 10 e 12.)

(b) Determine um triângulo, sendo dados um lado, a altura relativa a esse lado e a razão entre os outros dois lados. (Os valores numéricos dados por Regiomontanus são 20, 5 e $3/5$.)

(c) Construa um quadrilátero cíclico, dados os 4 lados.



A Melancholia, de Albrecht Dürer
(Museu Britânico)

8.9 Problemas de Chuquet

Resolva os seguintes problemas adaptados da obra *Triparty en la science des nombres* (1484) de Chuquet:

(a) Um mercador percorre três feiras. Na primeira ele dobra seu dinheiro e gasta \$30; na segunda triplica seu dinheiro e gasta \$54; na terceira ele quadruplica seu dinheiro e gasta \$72. Se ficou com \$48, que importância tinha ele ao início?

(b) Um carpinteiro aceita um trabalho sob a condição de receber \$5,50 por dia de atividade mas, por outro lado, de ter que pagar \$6,60 por dia em que faltar. Ao fim de 30 dias ele verifica que o que tem a receber é o mesmo que tem a pagar. Quantos dias ele trabalhou?

(c) Dois mercadores de vinho entram em Paris, um com 64 barris de vinho e o outro com 20. Como eles não têm dinheiro suficiente para o acerto das taxas aduaneiras, o primeiro paga com 5 barris de vinho e 40 francos e o segundo paga com 2 barris de vinho e ainda recebe 40 francos de troco. Qual o preço de cada barril de vinho e a taxa respectiva.

(d) Chuquet deu a *regle des nombres moyens* que garante o seguinte: se a, b, c, d são números positivos, então $(a + b)/(c + d)$ está entre a/c e b/d . Prove isso.

8.10 Problemas de Pacioli

Resolva os dois problemas seguintes, tirados da *Sūma* (1494) de Pacioli. O segundo deles é uma elaboração do popular “problema da rã no poço” e admite muitas variações.

(a) O raio do círculo inscrito num triângulo é dado por 4 e os segmentos em que um dos lados é dividido pelo ponto de tangência são dados por 6 e 8. Determine os outros dois lados.

(b) Um rato está no topo de um choupo de 60 pés de altura e um gato está no chão, ao pé da árvore. O rato desce $1/2$ pé durante o dia e à noite retorna $1/6$ de pé. O gato sobe 1 pé durante o dia e escorrega de volta $1/4$ de pé a cada noite. A árvore cresce $1/4$ de pé por dia e se contrai $1/8$ de pé por noite entre o gato e rato. Em quanto tempo o gato alcançará o rato?

8.11 Problemas comerciais antigos

Resolva os seguintes problemas, extraídos de aritméticas europeias antigas.

(a) Este problema, da aritmética de Buteo (1559), baseia-se em dificuldades enfrentadas pelos navegadores romanos antigos.

Dois navios que estavam a 20 000 estádios de distância entre si levantaram âncoras para navegar, cada um em direção ao outro, em linha reta. O primeiro içou suas velas com a aurora e o vento norte soprando. Ao anoitecer, quando já havia navegado 1200 estádios, cessou o vento norte e começou a soprar o sudoeste. Nessa ocasião o outro navio içou suas velas e navegou 1400 estádios durante a noite. Devido ao vento contrário o primeiro navio retrocedeu 700 estádios, mas com o vento norte da manhã

voltou a avançar na direção inicial, enquanto o outro retrocedeu 600 estádios. Assim, alternadamente, dia e noite, os navios avançaram ao vento favorável e retrocederam na situação contrária. Pergunto: quantos estádios os navios navegaram ao todo e quando se encontraram?

(b) Eis um problema dado por Tartaglia para ilustrar a importante questão do câmbio.

Se 100 liras de Módena equivalem a 115 liras de Veneza, 180 liras de Veneza valem 150 em Corfu e 240 liras de Corfu montam a 360 liras de Negroponte, por quantas liras de Módena se cambiam 666 de Negroponte?

(c) As antigas aritméticas traziam muitos problemas envolvendo tarifas alfandegárias. O que se segue é desse tipo e foi adaptado da aritmética de Clavius (1583).

Um mercador comprou 50 000 libras de pimenta em Portugal por 10 000 escudos, tendo de pagar uma taxa de 500 escudos. O transporte da mercadoria para a Itália custou-lhe 300 escudos e para entrar com ela nesse país recolheu uma taxa de 200 escudos. Para enviá-la a Florença gastou mais 100 escudos de frete e ainda teve de pagar 100 escudos de impostos à cidade. Por último, o governo fez incidir sobre cada mercador um imposto de 1000 escudos. Com isso ele ficou meio confuso para determinar o preço de venda da libra de pimenta, de modo que, após todas as despesas, possa obter um lucro de $1/10$ de escudo por libra.

(d) Num manual prático para mercadores escrito pelo florentino Ghaligai em 1521 há o seguinte problema relativo a lucros e perdas.

Um homem comprou vários fardos de lã em Londres, cada um com 200 libras inglesas, ao custo de 24 fl. o fardo. Ele enviou a lã para Florença, gastando entre taxas e outras despesas 10 fl. por fardo. Sua intenção é vender a lã em Florença a um preço tal que seu lucro corresponda a 20% do investimento. Se 100 libras inglesas equivalem a 133 libras florentinas, por quanto deve vender cada 100 libras florentinas de lã?

(e) Problemas sobre juros eram muito comuns. Eis aqui um do *Liber abaci* (1202) de Fibonacci.

Um certo homem aplica 1 denário a uma taxa de juros tal que em 5 anos ele fica com 2 denários e, daí em diante, a cada 5 anos a importância acumulada dobra. Pergunto: quantos denários ele ganharia em 100 anos, a partir de seu denário inicial?

(f) O problema seguinte faz parte de *The Well Spring of Sciences* (1568), de Humphrey Baker, e diz respeito a sociedades.

Dois mercadores montam uma companhia em sociedade, sendo que um deles entra com 640 libras em primeiro de janeiro. O outro só poderá entrar com sua parte em primeiro de abril. Pergunto: qual deve ser a participação deste último, para que a repartição dos lucros se faça meio a meio? (Assuma que a sociedade deve durar 1 ano a partir da data do investimento do primeiro homem.)

(g) Trata-se agora de um problema de anuidade, tirado do *General trattato* (1556) de Tartaglia. Deve-se levar em conta que esse problema foi proposto antes da invenção dos logaritmos.

Um mercador cedeu 2814 ducados a uma universidade com o entendimento de que deveria receber 618 ducados por ano durante 9 anos, ao fim dos quais os 2814 ducados seriam considerados pagos. Que juros compostos fixou ele para remunerar seu dinheiro?

8.12 Os algoritmos da gelosia e da galera

(a) As aritméticas dos séculos XV e XVI traziam descrições de algoritmos para as operações fundamentais. Dentre os muitos métodos criados para efetuar a multiplicação, o da *gelosia* ou *método da “grade”* talvez tenha sido o mais popular. O método, que na Figura 71 está ilustrado pela multiplicação $9876 \times 6789 = 67\,048\,164$ é muito antigo. Talvez tenha surgido na Índia (ver Seção 7-5), pois aparece num comentário sobre o *Lilāvati* em outros trabalhos hindus. Da Índia sua trajetória seguiu por trabalhos chineses, árabes e persas. Foi um dos métodos favoritos dos árabes, através dos quais passou para a Europa Ocidental. A simplicidade de sua aplicação poderia tê-lo mantido em uso até hoje, não fora a necessidade de imprimir, ou desenhar, uma rede de segmentos de reta. O modelo lembra uma grade de janela chamada “gelosia” (em francês “*jalousie*” que significa “rótula”). Ache o produto de 80342 por 7318 pelo método da gelosia.

(b) O algoritmo mais comumente usado para a divisão antes de 1600 era, de longe, o chamado *método da galera* ou *método das riscas* que, com toda a certeza, é de origem hindu. Para esclarecer o método, considere os seguintes passos da divisão de 9413 por 37.

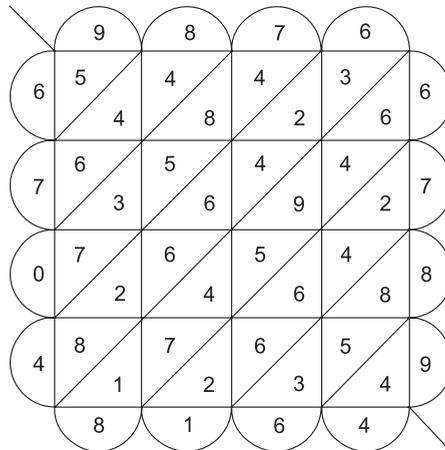


Figura 71

1. Escreva o divisor, 37, abaixo do dividendo, como se mostra ao lado. Obtenha, da maneira habitual, o primeiro algarismo do quociente, 2, e escreva-o à direita do dividendo.

2. Faça mentalmente: $2 \times 3 = 6$ e $9 - 6 = 3$. Risque o 9 e o 3 e escreva 3 acima do 9. Faça mentalmente: $2 \times 7 = 14$, $34 - 14 = 20$. Risque 7, 3 e 4 e escreva 2 acima do 3 e 0 acima do 4.

3. Escreva o divisor, 37, uma casa à direita, diagonalmente. O dividendo resultante após o Passo 2 é 2013. Obtenha o próximo algarismo do quociente, 5. Faça mentalmente: $5 \times 3 = 15$, $20 - 15 = 5$. Risque 3, 2 e 0 e escreva 5 acima do 0. Faça mentalmente: $5 \times 7 = 35$, $51 - 35 = 16$. Risque 7, 5 e 1 e escreva 1 acima do 5 e 6 acima do 1.

4. Escreva o divisor, 37, mais uma vez, uma casa à direita e diagonalmente. O dividendo resultante após o Passo 3 é 163. Obtenha o próximo algarismo do quociente, 4. Faça mentalmente: $4 \times 3 = 12$, $16 - 12 = 4$. Risque 3, 1 e 6 e escreva 4 acima do 6. Faça mentalmente: $4 \times 7 = 28$, $43 - 28 = 15$. Risque 7, 4 e 3 e escreva 1 acima do 4 e 5 acima do 3.

5. O quociente é 254 e o resto é 15.

Com um pouco de prática o método da galera revela-se bem mais fácil do que parece à primeira vista. Sua popularidade decorria do fato de poder ser usado, sem dificuldades, com o ábaco de areia; neste caso o processo de riscar consiste efetivamente em apagar e, se for o caso, fazer uma substituição. O nome *galera* refere-se a uma embarcação com cuja forma achava-se que o aspecto final do processo se parecia. Com efeito, olhando-se o trabalho a partir do fundo da página o quociente se parece com um gurupés; e olhando-se a partir do lado esquerdo ele se parece com um mastro. Para salientar essa segunda maneira de ver, escrevia-se frequentemente o resto como uma flâmula no topo do mastro (da maneira mostrada no exemplo).

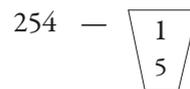
Divida 65 284 por 594 pelo método da galera. (Este problema, resolvido pelo processo pedido, aparece na *Aritmética de Treviso* de 1478.)

$$\begin{array}{r|l} 9413 & 2 \\ 37 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 2 & \\ \cancel{30} & \\ \cancel{94}13 & 2 \\ \cancel{37} & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 1 & \\ 25 & \\ \cancel{30}6 & \\ \cancel{94}13 & 25 \\ \cancel{377} & \\ 3 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 11 & \\ \cancel{23}4 & \\ \cancel{30}65 & \\ \cancel{94}13 & 254 \\ \cancel{3777} & \\ \cancel{33} & \end{array}$$



8.13 Gematria ou aritmografia

Como muitos dos sistemas de numeração antigos eram alfabéticos, tornava-se natural substituir letras por valores numéricos num nome. Isso levou à pseudociência mística conhecida como *gematria* ou *aritmografia*, muito popular entre os hebreus e outros povos antigos e que reviveu na Idade Média.

(a) A palavra *amém* em grego se escreve $\alpha\mu\eta\nu$. Assim sendo, explique a razão de o número 99 aparecer ao fim de uma oração em certos manuscritos cristãos.

(b) Usando gematria “prove”, tomando como chave o inglês, que entre Roosevelt, Churchill e Stalin, o maior político foi o primeiro.

(c) “Bestifique” (todos, menos o último, em numerais romanos; o último em numerais gregos): LUDOVICUS (presumivelmente Luís XIV), SILVESTER SECUNDUS (Gerbert, que se tornou o Papa Silvestre II), PAULO V. VICE-DEO, VICARIUS FILII DEI, DOCTOR ET REX LATINUS, VICARIUS GENERALIS DEI IN TERRIS, DUX CLERI, GLADSTONE.

(d) As seguintes “bestificações” se encontram em *A Budget of Paradoxes* de De Morgan. Faça as verificações.

1. “Um certo senhor James Dunlop estava atirando nos papistas com sua espingarda 666 quando o Dr. Chalmers calmamente lhe disse, ‘Por que, Dunlop, você faz isso?’ e passou-lhe às mãos uma folha de papel em que estavam somados os numerais de IACOBVS DVNLOPVS.”

2. “O senhor Davis Thom encontrou um jovem cavalheiro chamado St. Claire entretido com o número da besta; imediatamente ele somou as letras de $\sigma\tau\ \kappa\lambda\alpha\iota\rho\epsilon$ e encontrou 666.”

(e) John F. Bobalek propôs o seguinte, para usar como chave o inglês: HOWARD W. EVES, A PROFESSOR OF MATHEMATICS AND DOCTOR OF PHILOSOPHY. Ache a assustadora descoberta de Bobalek.

8.14 Equações cúbicas

(a) Mostre que a transformação $x = z - a_1/na_0$ transforma a equação de grau n

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n = 0$$

numa equação em z desprovida do termo de grau $n - 1$.

(b) A transformação $x = z - b/3a$, dada em (a), converte a equação cúbica $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ numa outra da forma $z^3 + 3Hz + G = 0$. Determine H e G em termos de a, b, c, d .

(c) Deduza a fórmula de Cardano-Tartaglia,

$$x = \sqrt[3]{(n/2) + \sqrt{(n/2)^2 + (m/3)^3}} - \sqrt[3]{-(n/2) + \sqrt{(n/2)^2 + (m/3)^3}}$$

resolvendo a equação cúbica $x^3 + mx = n$ (ver Seção 8-8).

(d) Ache uma raiz de $x^3 + 63x = 316$ mediante a fórmula de Cardano-Tartaglia e também pelo método de Viète.

(e) Como exemplo de cúbica do caso irreduzível, resolva $x^3 - 63x = 162$ pela fórmula de Cardano-Tartaglia. Mostre então que $(-3 + 2\sqrt{-3})^3 = 81 + 30\sqrt{-3}$ e $(-3 - 2\sqrt{-3})^3 = 81 - 30\sqrt{-3}$; donde, a raiz dada pela fórmula é -6 disfarçado.

8.15 Equações quárticas

(a) Cardano resolveu a quártica particular $13x^2 = x^4 + 2x^3 + 2x + 1$, somando $3x^2$ aos dois membros. Faça isso e determine suas quatro raízes.

(b) Em 1540, Da Coi propôs o seguinte problema a Cardano: “Dividir 10 em 3 partes que formem uma proporção contínua, sendo o produto das duas primeiras iguais a 6.” Denotando-se por a, b, c as três partes, temos

$$a + b + c = 10, \quad ac = b^2, \quad ab = 6.$$

Mostre que, eliminando a e c , obtém-se a equação quártica

$$b^4 + 6b^2 + 36 = 60b.$$

Foi tentando resolver essa quártica que Ferrari, discípulo de Cardano, descobriu seu método geral.

(c) Obtenha, tanto pelo método de Ferrari como pelo de Viète, a equação cúbica associada à quártica de (b).

8.16 Notação do Século XVI

(a) Escreva, na notação de Bombelli, a expressão

$$\sqrt{[\sqrt[3]{\sqrt{68} + 2} - \sqrt[3]{\sqrt{68} - 2}]}$$

(b) Escreva, em notação moderna, a seguinte expressão (que aparece na obra de Bombelli)

$$Rc \sqcup 4p \text{ di } mRq \text{ 11 } \sqcup pRc \sqcup 4m \text{ di } mRq \text{ 11 } \sqcup$$

(c) Escreva, na notação de Viète,

$$A^3 - 3BA^2 + 4CA = 2D.$$

8.17 Problemas de Viète

(a) Estabeleça as seguintes identidades, dadas por Viète em *Canon mathematicus seu ad triangula* (1579):

$$\text{sen } \alpha = \text{sen } (60^\circ + \alpha) - \text{sen } (60^\circ - \alpha),$$

$$\text{cossec } \alpha + \text{cotg } \alpha = \text{cotg } \frac{\alpha}{2},$$

$$\text{cossec } \alpha - \text{cotg } \alpha = \text{tg } \frac{\alpha}{2}.$$

(b) Expresse $\cos 5\theta$ como função de $\cos \theta$.

(c) Começando com $x_1 = 200$, aproxime, pelo método de Viète, uma raiz de $x^2 + 7x = 60\,750$.

(d) Ache o x_2 , do método das aproximações sucessivas de Viète, da equação cúbica $x^3 + px^2 + qx = r$ (ver Seção 8-9).

(e) Viète deduziu a fórmula

$$\text{sen } x + \text{sen } y = 2 \text{sen } \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

a partir do diagrama da Figura 72, em que os ângulos $x = DOA$ e $y = COD$ aparecem como ângulos centrais de um círculo unitário. Preencha com detalhes o seguinte esboço da demonstração de Viète:

$$\text{sen } x + \text{sen } y = AB + CD = AE = AC \cos \frac{x-y}{2} = 2 \text{sen } \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}.$$

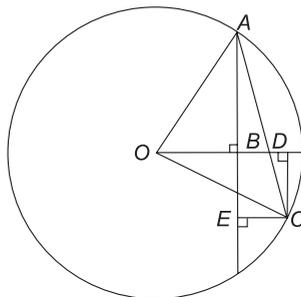


Figura 72

8.18 Problemas de Clavius

Resolva os seguintes problemas recreativos tirados da álgebra de Clavius (1608).

(a) A fim de incentivar o filho a estudar aritmética, um pai se propôs a pagar a ele 8 centavos por problema que o menino acertasse, aplicando, porém, uma multa de 5 centavos por solução errada. Ao fim de 26 problemas o menino nada tem a receber ou a pagar. Quantos problemas ele resolveu acertadamente?

(b) Se eu resolvesse dar 7 centavos a cada mendigo à minha porta, me faltariam 24 centavos. E me faltariam 32 centavos se eu resolvesse dar 9 centavos a cada um. Quantos são os mendigos e quanto eu tenho?

(c) Combinou-se com um criado o salário de \$100 e um casaco, por um ano de trabalho. Após sete meses ele deixa o emprego e recebe o casaco e \$20 como pagamento. Qual é o valor do casaco?

8.19 Alguma geometria

(a) Os Livros IV e VI da *Álgebra* de Bombelli contêm alguns problemas de geometria resolvidos algebricamente. Num deles Bombelli pede o lado de um quadrado inscrito num triângulo ABC , sendo dados $AB = 13$, $BC = 14$, $CA = 15$ e sabendo-se que um dos lados do quadrado está contido em BC . Resolva esse problema.

(b) Johannes Werner (1468-1528) escreveu um trabalho em latim, em 22 livros, sobre *Elementos de cônicas*, impresso em Nuremberg em 1522. Nesse trabalho Werner fornece o seguinte método de localizar pontos, com régua e compasso, de uma parábola de vértice V , eixo VW e *latus rectum* p . Sobre o prolongamento de VW marque $VA = p$. Trace uma circunferência de raio maior que $p/2$, com centro em AW , passando por A . Suponhamos que a circunferência corte AW em B e a perpendicular a AW por V em C e C' . Marque sobre a perpendicular a AW por B as distâncias $BP = BP' = VC$. Então P e P' são pontos da parábola. Traçando um número suficiente de circunferências, podem-se obter tantos pontos da parábola quantos se desejem. Justifique a construção de Werner.

(c) Albrecht Dürer deu a seguinte construção aproximada do eneágono inscrito num círculo dado de centro O . Trace o círculo concêntrico de raio igual ao triplo do raio do círculo dado e seja $AC'BA'CB'$ um hexágono inscrito no último círculo. Com centros B' e C' e raio igual a OA , descreva arcos ligando O a A e cortando a circunferência do círculo original em F e G . Então FG é praticamente igual ao lado do eneágono regular procurado. Pode-se mostrar que a diferença entre o ângulo FOG e o de 40° é inferior a 1° . Efetue a inscrição aproximada de um eneágono regular num círculo dado, pelo método de Dürer.

Para a trisseção aproximada de um ângulo arbitrário pelo método de Dürer, ver o penúltimo parágrafo da Seção 4-6.

(d) Campanus, ao fim do livro IV de sua tradução dos *Elementos* de Euclides, dá o seguinte método de trisseção de um ângulo dado. Seja AOB o ângulo dado e suponha que seu vértice seja o centro de uma circunferência de raio $OA = OB$ arbitrário. Trace

um raio OC perpendicular a OB . Trace por A uma corda AED , com E em OC , observando que $ED = OA$. Finalmente, trace o raio OF paralelo a DEA . Então, ângulo $FOB = 1/3$ (ângulo AOB). Justifique o acerto da construção, sendo admitido o uso do *princípio de inserção* (ver Exercício 4.6).

Temas

- 8/1 Razões para o baixo nível da matemática na Europa durante a maior parte da Idade Média.
- 8/2 Recreações Matemáticas na Idade Média.
- 8/3 O efeito, sobre a matemática europeia, da perda de Toledo pelos mouros em 1085.
- 8/4 Gerbert e sua influência na matemática.
- 8/5 A transmissão do saber grego e hindu antigos para a Europa Ocidental depois da Alta Idade Média.
- 8/6 A onipresença da sequência de Fibonacci.
- 8/7 Os patronos da ciência Frederico II e seu filho Manfredo.
- 8/8 Fatores importantes do desenvolvimento da matemática no Renascimento.
- 8/9 Luca Pacioli (c. 1445-1476).
- 8/10 Leonardo da Vinci e a matemática.
- 8/11 Regiomontanus (1436-1476).
- 8/12 Albrecht Dürer e a matemática.
- 8/13 Copérnico (1473-1543).
- 8/14 A importância da resolução das equações cúbicas no desenvolvimento dos números imaginários.
- 8/15 A vida e a obra de Robert Recorde.
- 8/16 Matteo Ricci (1552-1610).
- 8/17 Viète como o primeiro matemático realmente moderno.
- 8/18 A história das frações decimais.
- 8/19 As principais obras matemáticas impressas do século XV.
- 8/20 Razões do destaque das aritméticas comerciais na segunda metade do século XV.
- 8/21 Os Rechenmeisters.
- 8/22 Gematria.
- 8/23 Algoritmos para a multiplicação.
- 8/24 Algoritmos para a divisão.

Bibliografia

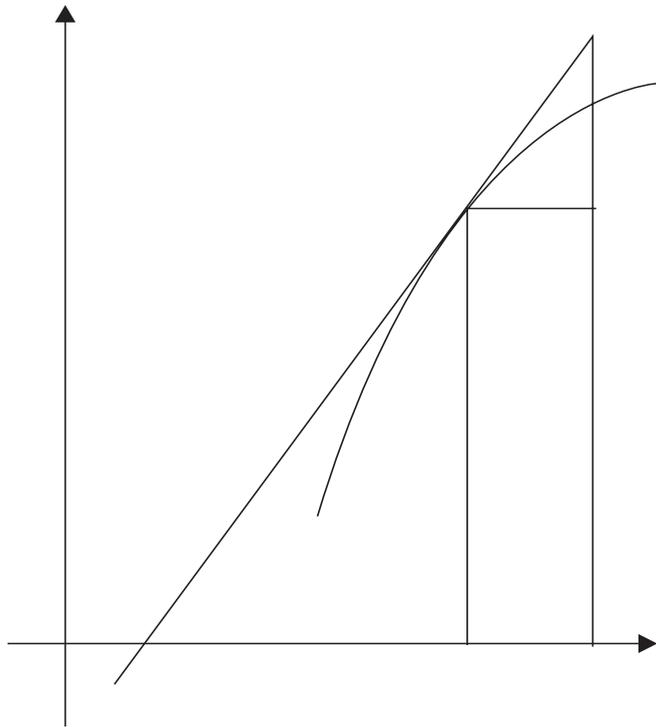
- ADAMCZEWSKI, Jan. *Nicholas Copernicus and His Epoch*. Filadélfia, Copernican Society of America, 1973.
- ARMITAGE, Angus. *The World of Copernicus*. Nova York, The New Library (a Mentor Book), 1947.
- CAJORI, Florian. *A History of Mathematical Notations*. Chicago, Open Court, 1928-1929, 2 vols.
- CARDAN, Jerome. *The Book of My Life*. Trad. do latim para o inglês por Jean Stoner. Nova York, Dover, 1963.
- CARDANO, Girolamo. *The Great Art, or the Rules of Algebra*. Trad. para o inglês por Richard Witmer. Cambridge (Mass.), M. I. T. Press, 1968.
- CLAGETT, Marshall. *The Science of Mechanics in the Middle Ages*. Madison (Wis.), The University of Wisconsin Press, 1959.
- . *Archimedes in the Middle Ages*. The Arabo-Latin Tradition, vol. 1. Madison (Wis.), The University of Wisconsin Press, 1964.
- COOLIDGE, J. L. *The Mathematics of Great Amateurs*. Nova York, Oxford University Press, 1949.
- CROSBY JR., H. L. *Thomas of Bradwardine, His Tractatus de Proportionibus: Its Significance for the Development of Mathematical Physics*. Madison (Wis.), The University of Wisconsin Press, 1955.
- CUNNINGTON, Susan. *The Story of Arithmetic, A Short History of Its Origin and Development*. Londres, Swan Sonnenschein, 1904.
- DAVID, F. N. *Games, Gods and Gambling*. Nova York, Hafner, 1962.
- DAY, M. S. *Scheubel as an Algebraist, Being a Study of Algebra in the Middle of the Sixteenth Century, Together with a Translation of and a Commentary upon an Unpublished Manuscript of Scheubel's Now in the Library of Columbia University*. Nova York, Teachers College, Columbia University, 1926.
- DE MORGAN, Augustus. *A Budget of Paradoxes*. Nova York, Dover, 1954, 2 vols.
- FIERZ, Markus. *Girolamo Cardano (1501-1576)*. Trad. para o inglês por Helga Niman. Boston, Birkhäuser, 1983.
- GRANT, Edward (ed.) *Nicole Oresme: De Proportionibus Proportionum and Ad Pauca Respicientes*. Madison (Wis.), The University of Wisconsin Press, 1966.
- HAMBRIDGE, Jay. *Dynamic Symmetry in Composition*. New Haven, Yale University Press, 1923.
- . *Practical Applications of Dynamic Symmetry*. Editado por Mary C. Hambridge. New Haven, Yale University Press, 1932.
- HAY, Cynthia (ed.). *Mathematics from Manuscript to Print*. Oxford, Oxford University Press, 1987.

- HILL, G. F. *The Development of Arabic Numerals in Europe*. Nova York, Oxford University Press, 1915.
- HOGGATT JR., V. E. *Fibonacci and Lucas Numbers*. Boston, Houghton Mifflin, 1969.
- HUGHES, Barnabas. *Regiomontanus on Triangles*. Madison (Wis.), The University of Wisconsin Press, 1964.
- . *De Numeris Datis*. University of California Press, 1983.
- INFELD, Leopold. *Whom the Gods Love, The Story of Evariste Galois*. Nova York, McGraw-Hill, 1948.
- JOHNSON, R. A. *Modern Geometry*. Boston, Houghton Mifflin Company, 1929.
- KARPINSKI, L. C. *The History of Arithmetic*. Nova York, Russel & Russel, 1965.
- KRAITCHIK, Maurice. *Mathematical Recreations*. Nova York, W. W. Norton, 1942.
- MESCHKOWSKI, Herbert. *Ways of Thought of Great Mathematicians*. São Francisco, Holden-Day, 1964.
- MOODY, E. A. e CLAGETT, Marshall. *The Medieval Science of Weights*. Madison (Wis.), The University of Wisconsin Press, 1952.
- MORLEY, Henry. *Jerome Cardan, The Life of Girolamo Cardano of Milan, Physician*. Londres, Chapman & Hall, 1854, 2 vols.
- NICÔMACO DE GERASA. *Introduction to Arithmetic*. Trad. para o inglês por M. L. D'Ooge, com *Studies in Greek Arithmetics*, de F. E. Robbin e L. C. Karpinski. Ann Arbor (Mich.), University of Michigan Press, 1938.
- NORTHROP, E. P. *Riddles in Mathematics*. Princeton (N. J.), D. Van Nostrand, 1944.
- ORE, Oystein. *Number Theory and Its History*. Nova York, McGraw-Hill, 1948.
- . *Cardano, The Gambling Scholar*. Princeton (N. J.), Princeton University Press, 1953.
- . *Niels Henrik Abel, Mathematician Extraordinary*. Minneapolis, University of Minnesota Press, 1957.
- ORESME, Nicole. *An Abstract of Nicholas Oréme's Treatise on the Breadths of Forms*. Trad. para o inglês por C. G. Wallis. Annapolis (Md.), St. John's Book Store, 1941.
- PISANO, Leonardo. *The Book of Squares*. Tradução (comentada) para o inglês de L. E. Sigler. Orlando (Fla.), Academic Press, 1987.
- ROSE, Pauli. *The Italian Renaissance of Mathematics*. Genebra, Librairie Droz, 1975.
- SMITH, D. E. *Rara Arithmetica*. Boston, Ginn, 1908.
- . *A Source Book in Mathematics*. Nova York, McGraw-Hill, 1929.
- SMITH, D. E. e KARPINSKI, L. C. *The Hindu-Arabic Numerals*. Boston, Ginn, 1911.
- STIMSON, Dorothy. *The Gradual Acceptance of the Copernican Theory of the Universe*. Gloucester (Mass.), Peter Smith, 1972.

- SULLIVAN, J. W. N. *The History of Mathematics in Europe, from the Fall of Greek Science to the Rise of the Conception of Mathematical Rigour*. Nova York, Oxford University Press, 1925.
- SWETZ, F. J. *Capitalism and Arithmetic: The New Math of the 15th Century*. Chicago, Open Court, 1987.
- TAYLOR, R. Emmett. *No Royal Road. Luca Pacioli and His Time*. Chapel Hill (N. C.), University of North Carolina Press, 1942.
- WATERS, W. G. *Jerome Cardan, a Biographical Study*. Londres, Lawrence & Bullen, 1898.
- WHITE, W. F. *A Scrap-Book of Elementary Mathematics*. Chicago, Open Court, 1927.
- WILSON, Curtis. *William Heytesbury, Medieval Logic and the Rise of Mathematical Physics*. Madison (Wis.), The University of Wisconsin Press, 1956.
- YATES, R. C. *The Trisection Problem*. Ann Arbor (Mich.), Edwards Brothers, 1947.
- ZELLER, Sister Mary Claudia. *The Development of Trigonometry from Regiomontanus to Pitiscus*. Ph.D. thesis. Ann Arbor (Mich.), University of Michigan, 1944.

PARTE 2

DO SÉCULO XVII EM DIANTE



Panorama Cultural VII

Puritanos e lobos do mar

A expansão da Europa — 1492 a 1700
(para acompanhar os Capítulos 9, 10 e 11)

Uma penumbra estrelada, cor de prata, pousava sobre a grande cidade de pedras de Tenochtitlán, capital do Império Asteca. Uma multidão enfurecida estava reunida numa rua, do lado de fora de um edifício usado temporariamente como quartel general de um bando de aventureiros espanhóis comandados por Hernán Cortés (1485-1547). Uns dias antes, com a aquiescência do imperador asteca Montezuma (1480?-1520), as tropas de Cortés haviam assassinado 200 nobres astecas. Num esforço desesperado para acalmar a turba, Montezuma apareceu num balcão do edifício. Mas foi recebido a pedradas por seus súditos, sendo atingido na cabeça quando, cambaleante, voltava para dentro. Três dias depois Montezuma morreria em consequência dos ferimentos, e o exército de Cortés freneticamente preparou-se para enfrentar um império enraivecido.

O que tinha em mente Montezuma quando, ao aspirar o ar morno e úmido daquela noite, preparava-se para dirigir pela última vez a palavra a seus súditos? Tudo são especulações: não sabemos o que ele planejava dizer, ou se ele esperava ser morto ou protegido por Cortés, a quem Montezuma provavelmente considerava a reencarnação do deus mágico Quetzalcoatl. Quase certamente, porém, quando a pedra lhe atingiu a cabeça ele deve ter se perguntado “por quê?”.

Teria sido uma pergunta tocante. No verão de 1520, estrangeiros brancos, *os conquistadores* de Cortés, chegaram por mar do oriente em grandes embarcações. Eles montavam animais estranhos, falavam uma língua desconhecida e divertiam-se com armas que vomitavam estrondo e fumaça e que matavam a grande distância. Quando entraram em Tenochtitlán já haviam convencido muitos camponeses da zona rural de que eram deuses; perto do fim do verão, esses estrangeiros já haviam conquistado o mais poderoso império das Américas, arrasado a cidade de Tenochtitlán e se autoproclamado governadores de todo o México. Durante séculos, as terras arenosas do elevado planalto do México foram dominadas por uma série de impérios nativos que, com uma mistura de esplendor e selvageria, governavam suas cidades de pedra dispersas, monumentos à vitalidade de sua civilização. Para os mexicanos, a conquista de Cortés marcou o fim de uma era de brilho cultural que havia trazido a irrigação da agricultura, a domesticação de animais, a emergência de várias classes

sociais e sofisticados sistemas de governo para a América Central. Para os conquistadores da Europa, porém, a queda do Império Asteca não foi senão um dos muitos capítulos, embora mais sangrentos do que a maioria, da história da Era das Explorações, a expansão dos interesses do continente europeu por todos os cantos do mundo.

A Era das Explorações teve início com viagens comerciais. Nos séculos XIV e XV os mercadores europeus começaram a negociar com a Ásia, tendo como intermediários os muçulmanos, e esse comércio, como vimos no Panorama Cultural VI, levou ao Renascimento. Cidades italianas como Veneza, Gênova, Florença e Nápoles ocupavam uma posição geográfica favorável para esse novo comércio, no qual mercadorias do Oriente, como especiarias e tecidos, eram trazidas em navios pelo mar Mediterrâneo. Menos bem localizadas quanto a esse comércio estavam certas cidades europeias do oceano Atlântico. Daí que os mercadores dessas cidades, muitas vezes com apoio oficial de seus governos, procurassem rotas alternativas para o comércio. Na metade do século XV, embarcadores de Lisboa, Portugal, com o patrocínio do príncipe Henrique, o Navegador (1394-1460), irmão do rei, começaram a procurar uma rota marítima para a Índia em torno da África. Essa busca culminou com o êxito da expedição de Vasco da Gama (c. 1469-1524) de 1497 a 1499. O italiano Cristóvão Colombo (1451?-1506) postulava uma rota marítima mais arriscada para a Ásia. E em 1492, navegando rumo a oeste pelo oceano Atlântico, sob o patrocínio do governo espanhol, alcançou a América, em vez da Índia, como esperava.

A corrida estava começando. Mercadores espanhóis, ingleses e franceses, como Colombo, exploraram as costas atlânticas das Américas do Norte e do Sul, em busca de uma saída para a Índia e a China. Mais realistas, os comerciantes holandeses seguiam a trilha portuguesa em torno da África. Os russos infiltraram-se na Sibéria, perseguindo um caminho por terra para a China.

Enquanto a primeira fase da Era das Explorações se caracterizou pelo comércio, a segunda fase foi marcada pela conquista e anexação. Conquistadores espanhóis como Hernán Cortés impuseram violentamente sua hegemonia sobre impérios nativos — os astecas no México (1520), os incas no Peru (1530-1535), os Chibchas na Colômbia (1536) — e sobre as comunidades tribais desunidas das Índias Ocidentais (1492-1511), Argentina (na década de 1530), Chile (na década de 1540) e nas Filipinas (na década de 1560). Os portugueses ergueram fortalezas na Índia (1510), nas Índias Orientais (1511), numa ilha do golfo Pérsico (1515) e na China (1557). Por volta de 1600 os portugueses controlavam vastos trechos da costa africana, várias cidades da Índia, a ilha de Timor nas Índias Orientais e a maior parte do Brasil. Entre 1608 e 1703, a França construiu uma feira de fortes na América do Norte nos vales dos rios Mississipi e São Lourenço, enquanto a Inglaterra fazia o mesmo na costa marítima oriental, de que resultariam mais tarde os Estados Unidos. Os holandeses construíram fortes na África, na Índia, nas Índias Orientais e em Formosa entre 1602 e 1700, incluindo os enclaves maiores de Jacarta, na ilha de Java, e a Cidade do Cabo, no extremo sul da África. Depois de 1462 a Rússia se expandiu

para o Oriente, no sentido da Sibéria, a maior parte da qual foi anexada em torno de 1689.

A maioria dos territórios conquistados ou anexados por países europeus na Era das Explorações não era militarmente poderosa nem avançada política ou tecnologicamente. O Império Asteca e o Império Inca tinham acabado de emergir dos primeiros estágios de sua Revolução Agrícola e, embora densamente povoados, careciam de armamentos tão avançados quanto o dos espanhóis que incluíam até canhões. As costas da África, a Sibéria e a maior parte das Américas eram habitadas por tribos, tinham densidade populacional baixa (os Estados mais densamente povoados do interior da África permaneceram independentes até o século XIX) e também não dispunham de armas de fogo. Países não europeus mais poderosos, como vários Estados muçulmanos, a China e o Japão mantiveram-se independentes. A expansão europeia durante a Era das Explorações deu-se em grande parte graças à fraqueza das vítimas.

A terceira fase da Era das Explorações foi a colonização, a efetiva migração de europeus para outros continentes. As colônias europeias nas Américas, na África e na Ásia eram de vários tipos. Alguns se concentravam em torno da extração de matérias-primas, como as espanholas das minas de prata no Peru e as inglesas de pesca na Terra Nova; outras eram entrepostos comerciais como as inglesas e francesas de comércio e “manufatura” de couro no Canadá. Algumas eram guarnições militares que zelavam as vias navegáveis vitais, como a Colônia do Cabo holandesa; outras eram colônias agrícolas, como Cuba espanhola, o Brasil português e a Virgínia inglesa. Outras ainda serviam de refúgio para minorias políticas e religiosas, como as povoações da Pensilvânia e Nova Inglaterra. A maioria das colônias servia para várias dessas funções. Os colonos da Nova Inglaterra, por exemplo, pescavam bacalhau e outros peixes, eram lenhadores, comerciavam peles com os índios e dedicavam-se à agricultura; tudo isso além do objetivo mais celebrado de estabelecer comunidades religiosas modelo que eles esperavam que fossem “um farol para o mundo”. Na maioria dos casos, os povos nativos eram dominados pelos recém-chegados, seja numericamente, seja pelo poder das armas, passando à condição de classe inferior, como aconteceu com os negros da Colônia do Cabo e os índios do Peru. Os nativos eram destinados à labuta das minas, ou a servir de braços para a lavoura ou então eram violentamente desapossados de tudo e colocados na marginalidade. Os negros africanos eram muitas vezes escravizados, ou para trabalhar como criados nas colônias africanas ou para serem embarcados para as Américas onde havia escassez de mão de obra. Todas as potências coloniais europeias principais, exceto a Rússia, escravizaram negros, e a Espanha também escravizou índios.

Os europeus também lutaram entre si na corrida por riquezas ultramarinas. Saqueadores ingleses, chamados “lobos do mar”, lançavam-se sobre navios espanhóis. Tropas espanholas e portuguesas saqueavam estabelecimentos franceses no Brasil e na Flórida e franceses e ingleses escaramuçavam nas florestas de pinheiros e carvalhos da América do Norte. Frequentemente os entrepostos trocavam de mãos. Os ingleses particularmente apreciavam o jogo da troca de bandeiras; eles adquiriram os

entrepostos da Cidade do Cabo e de Nova Amsterdam (Nova York) dos holandeses, e várias ilhas das Índias Ocidentais da Espanha.

Já descrevemos a forma e a substância da expansão marítima europeia entre 1492 e 1700. Voltemos ao “por quê?” de Montezuma. Os europeus já tinham ciência do modelo geral da geografia do mundo há séculos. Eratóstenes, o matemático e geógrafo alexandrino do século III a.C., que encontramos no Panorama Cultural IV, sabia que o mundo é esférico, tinha conhecimento de sua circunferência aproximada e estava informado das formas da Europa, da África e da Ásia. Os escandinavos já tinham encontrado a América do Norte perto do ano 1000 d.C., tendo mesmo estabelecido colônias, embora sem sucesso, na Groenlândia e na Terra Nova. Quase não há dúvidas de que pescadores irlandeses, ingleses, franceses e bascos visitavam regularmente a América do Norte antes de 1492 fazendo-se ao largo à busca de bacalhau; essas atividades, porém, nunca levaram a um comércio amplo com territórios ultramarinos, nem a uma conquista permanente e à colonização. Por que, então, nos séculos XVI e XVII, a civilização europeia se expandiu tão rapidamente, mudando de maneira tão dramática o modo de vida dos povos da América, da África e da Ásia?

Primeiro devemos entender que a Era das Explorações foi uma consequência natural do Renascimento europeu dos séculos XIV e XV. O comércio com o mundo árabe estimulou uma demanda crescente, entre os europeus ricos, de bens de consumo asiáticos, como especiarias e tecidos finos. Essa demanda rapidamente se tornou demasiado grande para poder ser atendida pelas quantidades relativamente pequenas desses bens que os europeus podiam obter de seus vizinhos muçulmanos. Como consequência, os mercadores da Europa puseram-se a procurar outros fornecedores.

A emergência de Estados nacionais durante a Alta Idade Média propiciou o capital necessário para o financiamento de explorações, conquistas e colonizações. Como vimos no Panorama Cultural VI, a Europa medieval carecia de grandes Estados com governos centralizados fortes. Ao contrário, os reis eram fracos, tinham pouco poder, e a autoridade estava investida na nobreza rural. Perto de 1500, porém, na França, Espanha, Inglaterra e Portugal os monarcas haviam arrebatado algum poder de seus barões e centralizado em torno de si o poder político e econômico. Através de impostos, esses autocratas eram capazes de arrecadar as somas vultosas de capital necessárias para financiar expedições ultramarinas. Em grande parte como o que se verifica hoje, quando apenas superpotências como Estados Unidos e União Soviética podem se permitir explorar o espaço, só a emergência de Estados nacionais na Europa deu ensejo à Era das Explorações.

Espanha e Portugal ganharam a dianteira na expansão ultramarina porque seus monarcas eram os mais poderosos do continente e porque eram potências militares agressivas que já haviam se expandido. Lembre-se de que a maior parte da península Ibérica, a região que compreende Espanha e Portugal, havia sido anexada pelo Império Árabe, no início da Idade Média. No norte da península, porém, alguns pequenos principados cristãos permaneceram independentes e, no curso de vários séculos, numa longa série de guerras, recuperaram grande parte dos territórios perdidos, fi-

nalmente reunidos nos estados nacionais da Espanha e de Portugal. Esse processo, chamado *Reconquista*, completou-se em 1492, quando o último Estado muçulmano da península, o reino de Granada, caiu perante as armas de Fernando e Isabel. De maneira algo simplista, essencialmente Espanha e Portugal ao se expandirem rumo à África e à América, apenas deram prosseguimento a um processo em curso, impedidos por uma tradição militar de vários séculos.

O século XV assistiu também a diversos avanços tecnológicos cruciais para a expansão europeia. Os equipamentos de navegação e os projetos de navios foram melhorados. E o que é mais importante, os armamentos europeus, na forma de espingardas e canhões, tornaram-se mais sofisticados do que em qualquer outra parte do mundo, tornando viáveis as conquistas em grande escala.

A Reforma protestante no século XVI parece ter tido também um impacto na expansão da Europa, embora isso seja difícil de avaliar. A Reforma desafiou o primado da Igreja católica na comunidade cristã da Europa ocidental. Os protestantes exigiam o fundamentalismo bíblico, a restauração da fé e o controle local das igrejas. O protestantismo, porém, foi forte apenas no norte da Europa e havia muito pouca unidade entre suas várias seitas diferentes, que iam dos radicais puritanos e outros calvinistas, para os quais só uns poucos eleitos se destinavam aos céus, até os luteranos e reformadores holandeses mais moderados, passando por pequenas igrejas igualitárias como a dos *quakers*. O impacto da Reforma no mundo secular foi múltiplo: estimulou o desenvolvimento de Estados nacionais na Inglaterra, nos Países Baixos e na Escandinávia, proporcionando aos monarcas um caminho para escapar das intervenções papais em negócios do Estado e para apoderar-se das terras da Igreja e nacionalizá-las. Contudo, a Alemanha, embora altamente protestante, não desenvolveu Estados nacionais antes do século XIX (a Prússia foi o primeiro a emergir) e nações fortemente católicas como Espanha, Portugal e França tornaram-se Estados nacionais. A Reforma enfraqueceu a influência da Igreja católica no norte da Europa, tornando menos efetiva sua oposição à pesquisa científica, posto que as Igrejas protestantes eram em geral mais receptivas à ciência. O debate aberto em torno de questões religiosas provavelmente motivou discussões sobre matérias seculares, incluindo a ciência. Finalmente, o antagonismo entre diferentes seitas protestantes na Inglaterra levou a imigrarem para a América do Norte, como colonos, membros dos movimentos mais radicais, puritanos e *quakers*, entre 1620 e 1700.

Devemos reconhecer também que, uma vez iniciada, a expansão da Europa foi um movimento que se autoalimentou. Quanto mais ouro e prata se descobria nas Américas de Sul e Central, quanto mais fortunas se faziam com o comércio de especiarias e sedas importadas da Ásia, quanto mais terras agricultáveis se encontravam nos novos continentes, mais os europeus buscavam riquezas adicionais. Dois dos empreendimentos comerciais mais lucrativos da Era das Explorações, o comércio de peles e o tráfico negreiro, desenvolveram-se como consequência da expansão europeia. As primeiras explorações se conduziram em escala modesta, mas com o tempo o deslocamento de pessoas e armas assumiu proporções vastas. O que em 1520 eram pequenos postos comerciais em costas distantes, por volta de 1700 eram cidades

comerciais efervescentes, cercadas de uma hinterlândia de agricultores, caçadores de peles e comerciantes.

A Era das Explorações teve um tremendo impacto sobre a Europa. Houve um súbito influxo de capital no continente, especialmente na Espanha (que rapidamente se desviou do comércio em troca da oportunidade de saquear o ouro e a prata da América), embora também se fizessem fortunas na França, em Portugal, na Inglaterra e nos Países Baixos. Cidades portuárias europeias da costa atlântica, que antes de 1500 eram pouco mais do que vilas crescidas, desenvolveram-se rapidamente. Cadiz, na Espanha; Lisboa, em Portugal; La Rochelle, na França; Bristol, na Inglaterra; e Amsterdam, nos Países Baixos tornaram-se importantes mercados comerciais e centros de negócios. E também grande parte da riqueza encaminhou-se às capitais, como Londres, Paris e Madri, para junto das cortes reais. E como aconteceu na Alexandria antiga, os exploradores traziam de volta informações sobre os novos lugares, o que representava uma verdadeira explosão de dados científicos. Nas capitais e nas cidades portuárias, artistas, cientistas e filósofos encontravam emprego, alguns sob o patrocínio real, outros a soldo da nova e crescente classe média dos mercadores. A Era das Explorações despertou uma revolução cultural e científica na Europa, marcada pelo interesse por ideias novas e por novos lugares, por um florescimento das artes e por uma percepção da necessidade de tecnologias novas, especialmente na navegação. A Europa estava na alvorada da era moderna.

A alvorada da matemática moderna

9.1 O século XVII

O século XVII é particularmente importante na história da matemática. Perto do início do século, Napier revelou sua invenção dos logaritmos, Harriot e Oughtred contribuíram para a notação e a codificação da álgebra, Galileu fundou a ciência da dinâmica e Kepler anunciou suas leis do movimento planetário. Mais tarde, Desargues e Pascal inauguraram um novo campo da geometria pura, Descartes lançou a geometria analítica moderna, Fermat estabeleceu os fundamentos da teoria dos números moderna e Huygens deu contribuições de monta à teoria das probabilidades e a outros campos. E então, perto do final do século, na esteira preparada por vários matemáticos do próprio século, Newton e Leibniz contribuíram memoravelmente com a criação de cálculo. Podemos ver então que muitos campos novos e vastos se abriram para a pesquisa matemática durante o século XVII.

O grande ímpeto dado à matemática no século XVII foi partilhado por todas as atividades intelectuais e se deveu, em grande parte, sem dúvida, aos avanços políticos, econômicos e sociais da época. O século testemunhou ganhos ponderáveis na batalha pelos direitos humanos, viu máquinas bem avançadas, dos divertidos brinquedos dos tempos de Herão a objetos de importância econômica crescente, e observou um desenvolvimento no espírito de internacionalismo intelectual e no ceticismo científico. A atmosfera política mais favorável no norte da Europa e a superação geral da barreira do frio e da escuridão nos longos meses de inverno, com os progressos no aquecimento e na iluminação, respondem provavelmente em grande parte pelo deslocamento da atividade matemática no século XVII da Itália para a França e a Inglaterra.

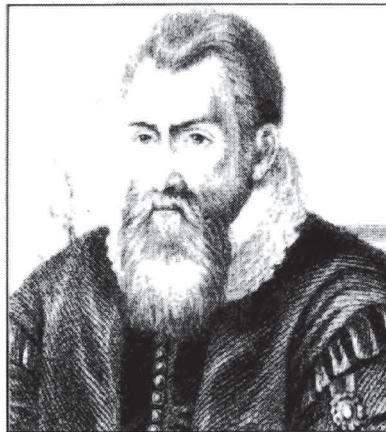
Nada mais justo do que observar aqui dois fatos que contribuirão para a apresentação algo desequilibrada da história da matemática na segunda parte deste livro. O primeiro é que a atividade matemática começou a crescer numa velocidade tão grande que, doravante, devem-se omitir muitos nomes que em períodos menos produtivos teriam sido considerados. O segundo fato é que, com o desenrolar do século XVII, verificou-se uma produção crescente de pesquisa matemática, fora do alcance do leitor comum, pois, como já se asseverou com propriedade, não é possível entender devidamente a história de uma matéria sem conhecer a própria matéria.

Neste capítulo e no próximo, consideraremos os desenvolvimentos do século XVII que podem ser entendidos sem o conhecimento do cálculo. O Capítulo 11 apresenta

um esboço do desenvolvimento do cálculo, desde seu início na Antiguidade grega até as notáveis contribuições feitas por Newton e Leibniz e seus precursores imediatos na segunda metade do século XVII. Os capítulos finais do livro descrevem a transição para o século XX; esses últimos capítulos devem ser necessariamente muito superficiais, pois a maior parte da matemática desse período só pode ser entendida por especialistas.

9.2 Napier

Muitos dos campos nos quais os cálculos numéricos são importantes, como a astronomia, a navegação, o comércio, a engenharia e a guerra fizeram com que as demandas para que esses cálculos se tornassem cada vez mais rápidos e precisos crescessem sempre e continuamente. Quatro notáveis invenções vieram atender sucessivamente essas demandas crescentes: a notação indo-arábica, as frações decimais, os logaritmos e os modernos computadores. É hora de se considerar o terceiro desses grandes dispositivos poupadores de trabalho, os logaritmos, inventados por John Napier perto do início do século XVII. A quarta dessas invenções será considerada mais tarde, na Seção 15-9.



John Napier
(Culver Service)

John Napier (1550-1617), que nasceu quando seu pai tinha apenas 16 anos de idade, viveu a maior parte de sua vida na majestosa propriedade de sua família, o castelo de Merchiston, perto de Edimburgo, Escócia, e gastou grande parte de suas energias em controvérsias políticas e religiosas de seu tempo. Era violentamente anticatólico e defensor das causas de John Knox e Jaime I. Em 1593 publicou um libelo amargo e amplamente lido contra a Igreja de Roma intitulado *A Plaine Discouery of the Whole Reuelation of Saint Iohn*, no qual se propunha a provar que o papa era o Anticristo e

que o Criador tencionava pôr fim ao mundo nos anos entre 1688 e 1700. O livro atingiu 21 edições, pelo menos dez ainda em vida do autor, e Napier acreditava piamente que sua reputação com a posteridade repousaria sobre esse livro.

Profeticamente, Napier também escreveu sobre várias máquinas de guerra infernais, acompanhando seus escritos de projetos e diagramas. Previu que no futuro desenvolver-se-ia uma peça de artilharia que “poderia eliminar de um campo de quatro milhas de circunferência todas as criaturas vivas que excedessem um pé de altura”, que se produziriam “dispositivos para navegar debaixo d’água” e que se criaria um carro de guerra com uma boca que se acenderia para “espalhar a destruição por todas as partes”. A metralhadora, o submarino e o tanque de guerra, respectivamente, vieram concretizar esses vaticínios na Primeira Guerra Mundial.

Não é de surpreender que a engenhosidade e a imaginação de Napier levassem alguns a acreditar que ele fosse mentalmente desequilibrado e outros a considerá-lo um explorador da magia negra. Contam-se muitas histórias, provavelmente infundadas, em defesa dessas opiniões. Uma delas dá conta de que seu galo negro teria identificado para ele os empregados que o roubavam. Um a um os empregados foram enviados a um quarto escuro com instruções para tocar no dorso do galo. Sem que os empregados soubessem, Napier havia coberto o dorso da ave com uma fuligem, e os empregados culpados, temendo tocar no galo, voltavam com as mãos limpas. Houve uma ocasião também em que Napier se irritou com os pombos de seu vizinho que lhe comiam os grãos. Ele ameaçou apreender esses pombos caso o dono não limitasse seus voos. O vizinho, acreditando que seria virtualmente impossível capturar seus pombos, disse a Napier que o deixava à vontade para prendê-los. No dia seguinte, surpreso, viu seus pombos cambaleantes sobre o gramado de Napier enquanto este, calmamente, os recolhia num saco. Napier havia embriagado os pombos espalhando em seu gramado grãos de ervilha embebidos em conhaque.

Para se descontraír de suas polêmicas políticas e religiosas, Napier deleitava-se estudando matemática e ciência, resultando daí que quatro produtos de seu gênio tenham entrado para a história da matemática. São: (1) a invenção dos logaritmos; (2) um engenhoso dispositivo mnemônico, conhecido como *regra das partes circulares*, para reproduzir fórmulas usadas na resolução de triângulos esféricos; (3) pelo menos duas fórmulas trigonométricas de um grupo de quatro conhecidas como *analogias de Napier*, úteis na resolução de triângulos esféricos obliquângulos; (4) a invenção de um instrumento, conhecido como *barras de Napier* ou *ossos de Napier*, usado para efetuar mecanicamente multiplicações, divisões e extrair raízes quadradas de números. Focalizaremos agora a primeira, e a mais notável, dessas contribuições; para uma discussão das outras três, ver Exercícios 9.2 e 9.3.

9.3 Logaritmos

Como sabemos hoje, o poder dos logaritmos como instrumentos de cálculo repousa no fato de que eles reduzem multiplicações e divisões a simples operações de adição e subtração. A fórmula trigonométrica

$$2 \cos A \cos B = \cos(A + B) + \cos(A - B),$$

bem conhecida na época de Napier, é visivelmente uma predecessora dessa ideia. Neste caso o produto dos dois números, $2 \cos A \cos B$, é substituído pela soma dos dois números, $\cos(A + B)$ e $\cos(A - B)$. Pode-se facilmente estender essa fórmula para converter o produto de dois números quaisquer na soma de dois outros números. Suponhamos, por exemplo, que se pretenda o produto de 437,64 por 27,327. De uma tábua de cossenos, ache, usando interpolação se necessário, os ângulos A e B , tais que

$$\cos A = \frac{(0,43764)}{2} = 0,21882 \quad \text{e} \quad \cos B = 0,27327.$$

Então, usando de novo a tábua de cossenos, com interpolação se necessário, encontre $\cos(A + B)$ e $\cos(A - B)$ e some esses números. Tem-se agora o produto de 0,43764 e 0,27327. Finalmente, ajustando de maneira adequada a vírgula decimal na resposta, obtém-se o produto procurado. Assim, o problema de achar o produto $(437,54)(27,327)$ foi engenhosamente reduzido a um simples problema de adição.

Além da fórmula trigonométrica precedente há ainda as três seguintes:

$$2 \sin A \cos B = \sin(A + B) + \sin(A - B),$$

$$2 \cos A \sin B = \sin(A + B) - \sin(A - B),$$

$$2 \sin A \sin B = \cos(A - B) - \cos(A + B).$$

Essas quatro identidades são às vezes conhecidas como *fórmulas de Werner* pois ao que parece o alemão Johannes Werner (1468-1528) as usou para simplificar cálculos envolvendo comprimentos que aparecem em astronomia. As fórmulas passaram a ser largamente usadas por matemáticos e astrônomos perto do fim do século XVII como um método de conversão de produtos em somas e diferenças. O método tornou-se conhecido como *prostaférese*, a partir de uma palavra grega que significa “adição e subtração”. Uma divisão pode ser tratada da mesma maneira. Assim, utilizando-se de novo a primeira das fórmulas de Werner, temos

$$\begin{aligned} \frac{2 \cos A}{\cos B} &= 2 \cos A \sec B = 2 \cos A \cos(90^\circ - B) \\ &= \cos[A + (90^\circ - B)] + \cos[A - (90^\circ - B)]. \end{aligned}$$

Sabemos que Napier estava inteirado do método da prostaférese, e é possível que se tivesse deixado influenciar por ele, pois de outra forma seria difícil explicar por que restringiu seus logaritmos inicialmente aos senos de ângulos. Mas a abordagem de Napier para eliminar o fantasma das longas multiplicações e divisões difere consideravelmente da prostaférese, e se baseia no fato de que, associando-se aos termos de uma progressão geométrica

$$b, b^2, b^3, b^4, \dots, b^m, \dots, b^n, \dots$$

os da progressão aritmética

$$1, 2, 3, 4, \dots, m, \dots, n, \dots,$$

então o produto $b^m b^n = b^{m+n}$ de dois termos da primeira progressão está associado à soma $m+n$ dos termos correspondentes da segunda progressão. Para manter os termos da progressão geométrica suficientemente próximos de modo que se possa usar interpolação para preencher as lacunas entre os termos na correspondência precedente, deve-se escolher o número b bem próximo de 1. Com essa finalidade Napier tomou $1 - 1/10^7 = 0,9999999$ para b . Para evitar decimais, ele multiplicava cada potência por 10^7 . Então, se

$$N = 10^7(1 - 1/10^7)^L,$$

ele chamava L de “logaritmo” do número N . Segue-se que o logaritmo de Napier de 10^7 é 0 e o de $10^7(1 - 1/10^7) = 0,9999999$ é 1. Dividindo-se N e L por 10^7 , virtualmente se encontrará um sistema de logaritmos na base $1/e$, pois

$$(1 - 1/10^7)^{10^7} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n)^n = 1/e.$$

Como é óbvio, deve-se ter em mente que Napier não trabalhava com o conceito de base de um sistema de logaritmos.

Napier dedicou pelo menos 20 anos a essa teoria, tendo finalmente explanado os princípios de seu trabalho em termos geométricos como se segue. Considere um segmento de reta AB e uma semirreta DE , de origem D , conforme a Figura 73. Suponhamos que os pontos C e F se ponham em movimento simultaneamente a partir de A e D , respectivamente, ao longo dessas linhas, com a mesma velocidade inicial. Admitamos que C se mova com uma velocidade numericamente sempre igual à distância CB , e que F se mova com velocidade uniforme. Napier definiu então DF como o logaritmo de CB . Isto é, pondo $DF = x$ e $CB = y$,

$$x = \text{Nap log } y.$$

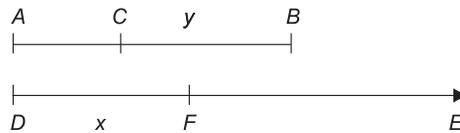


Figura 73

Para evitar o incômodo das frações, Napier tomou o comprimento de AB como 10^7 , pois as melhores tábuas de senos de que dispunha estendiam-se até sete casas. A partir

da definição de Napier e através do uso de conhecimentos com que Napier não contava chega-se a que¹

$$\text{Nap log } y = 10^7 \log_{1/e} \left(\frac{y}{10^7} \right),$$

de modo que a afirmação feita frequentemente de que os logaritmos neperianos são logaritmos naturais não corresponde de fato à verdade. Observe-se que os logaritmos neperianos decrescem conforme os números crescem, ao contrário do que ocorre com os logaritmos naturais.

Nota-se ademais que, sobre uma sucessão de períodos de tempo iguais, y decresce em progressão *geométrica* enquanto x cresce em progressão *aritmética*. Assim, verifica-se o princípio fundamental de um sistema de logaritmos, a associação de uma progressão geométrica a uma aritmética. Daí que, por exemplo, se $a/b = c/d$, então

$$\text{Nap log } a - \text{Nap log } b = \text{Nap log } c - \text{Nap log } d,$$

que é um dos muitos resultados estabelecidos por Napier.

Napier publicou sua abordagem dos logaritmos em 1614 num texto intitulado *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* (Descrição da Maravilhosa Lei dos Logaritmos). O trabalho contém uma tábua que dá os logaritmos dos senos de ângulos para minutos sucessivos de arco. A *Descriptio* despertou interesse imediato e amplo, sendo que no ano seguinte à sua publicação, Henry Briggs (1561-1631), professor de geometria do Gresham College de Londres e posteriormente professor de Oxford, viajou até Edimburgo para dar o tributo de seu reconhecimento ao grande inventor dos logaritmos. Foi durante essa visita que Napier e Briggs concordaram que as tábuas seriam mais úteis se fossem alteradas de modo que o logaritmo de 1 fosse 0 e o logaritmo de 10 fosse uma potência conveniente de 10, nascendo assim os logaritmos *briggsianos* ou *comuns*, os logaritmos dos dias de hoje. Esses

¹ Prova-se facilmente este resultado com um pouco de cálculo. Assim é que temos $AC = 10^7 - y$ e daí

$$\text{velocidade de } C = -dy/dt = y.$$

Isto é, $dy/y = -dt$ ou, integrando, $\ln y = -t + C$. Calculando-se a constante de integração (fazendo $t = 0$), obtemos que $C = \ln 10^7$ e portanto

$$\ln y = -t + \ln 10^7.$$

Por outro lado,

$$\text{velocidade de } F = dx/dt = 10^7,$$

de modo que $x = 10^7 t$. Onde

$$\begin{aligned} \text{Nap log } y &= x = 10^7 t = 10^7 (\ln 10^7 - \ln y) \\ &= 10^7 \ln (10^7/y) = 10^7 \log_{1/e} (y/10^7). \end{aligned}$$

logaritmos, que são essencialmente os logaritmos de base 10, devem sua superioridade em cálculos numéricos ao fato de que nosso sistema de numeração é decimal. Para um outro sistema de numeração de base b e para propósitos computacionais, é claro que seriam mais convenientes tábuas de logaritmos também na base b .

Briggs devotou todas as suas energias à construção de uma tábua com base na nova ideia; e em 1624 publicou sua *Arithmetica logarithmica*, que continha uma tábua de logaritmos comuns, com 14 casas decimais, dos números de 1 a 20 000 e de 90 000 a 100 000. A lacuna entre 20 000 e 90 000 foi preenchida com a ajuda de Adriaen Vlacq (1600-1660), um livreiro e editor holandês. Edmund Gunter (1581-1626), um dos colegas de Briggs, publicou em 1620 uma tábua de logaritmos comuns de senos e tangentes de ângulos, para intervalos de um minuto de arco, com sete casas decimais. Foi Gunter quem inventou os termos *cos seno* e *cotangente*, ele é conhecido dos engenheiros por sua “cadeia de Gunter”. Briggs e Vlacq publicaram quatro tábuas de logaritmos fundamentais, só recentemente superadas, quando, entre 1924 e 1949, se publicaram extensas tábuas de 20 casas decimais como parte das comemorações do tricentenário da descoberta dos logaritmos.

A palavra *logaritmo* significa “número de razão” e foi adotada por Napier depois de ter usado inicialmente a expressão *número artificial*. Briggs introduziu a palavra *mantissa*, que é um termo latino de origem etrusca que significava inicialmente “adição” ou “contrapeso” e que, no século XVI, passou a significar “apêndice”. O termo *característica* também foi sugerido por Briggs e foi usado por Vlacq. É curioso que as primeiras tábuas de logaritmos comuns costumavam trazer impressas tanto a característica como a mantissa; só no século XVIII começou a praxe atual de só se imprimir a mantissa.

A maravilhosa invenção de Napier foi entusiasticamente adotada por toda Europa. Na astronomia, em particular, já estava passando da hora para essa descoberta; pois, como afirmou Laplace, a invenção dos logaritmos “ao diminuir o trabalho, dobrou a vida dos astrônomos”. Bonaventura Cavalieri, sobre o qual falaremos mais no Capítulo 11, empenhou-se em divulgar os logaritmos na Itália. Trabalho análogo foi prestado por Johann Kepler na Alemanha e Edmund Wingate na França. Kepler será focalizado mais amplamente na Seção 9-7; Wingate, que passou muitos anos na França, tornou-se o escritor de textos de aritmética elementar mais destacado da língua inglesa no século XVII.

O único rival de Napier quanto à prioridade da invenção dos logaritmos foi o suíço Jobst Bürgi (1552-1632), um construtor de instrumentos. Bürgi concebeu e construiu uma tábua de logaritmos independentemente de Napier e publicou seus resultados em 1620, seis anos depois de Napier anunciar sua descoberta ao mundo. Embora os dois tenham concebido a ideia dos logaritmos muito antes de publicá-la, acredita-se geralmente que Napier teve a ideia primeiro. Enquanto a abordagem de Napier era geométrica, a de Bürgi era algébrica. Hoje em dia, um logaritmo é universalmente considerado como um expoente; assim, se $n = b^x$, dizemos que x é o logaritmo de n na base b . Dessa definição, as leis dos logaritmos decorrem imediatamente das leis dos expoentes. Uma das incongruências da história da matemática é que os logaritmos foram descobertos antes de se usarem expoentes.

Em 1971 a Nicarágua lançou uma série de selos postais para homenagear as “dez fórmulas matemáticas mais importantes do mundo”. Cada selo estampa uma fórmula particular acompanhada de uma ilustração e traz também um comentário breve em espanhol sobre a importância da fórmula. Um dos selos é dedicado aos logaritmos de Napier. Deve ser extremamente gratificante para cientistas e matemáticos ver suas fórmulas assim homenageadas, pois essas fórmulas certamente contribuíram muito mais para o desenvolvimento da humanidade do que os feitos de reis e generais que muitas vezes se estampam em selos postais².

Durante anos ensinou-se a calcular com logaritmos na escola de segundo grau ou no início dos cursos superiores de matemática; também por muitos anos a régua de cálculo logarítmica, pendurada no cinto, num bonito estojo de couro, foi o símbolo do estudante de engenharia do campus universitário.

Hoje, porém, com o advento das espantosas e cada vez mais baratas calculadoras portáteis, ninguém mais em sã consciência usa uma tábua de logaritmos ou uma régua de cálculo para fins computacionais. O ensino dos logaritmos, como um instrumento de cálculo, está desaparecendo das escolas, os famosos construtores de réguas de cálculo de precisão estão desativando sua produção e célebres manuais de tábuas matemáticas estudam a possibilidade de abandonar as tábuas de logaritmos. Os produtos da grande invenção de Napier tornaram-se peças de museu.

A função logaritmo, porém, nunca morrerá, pela simples razão de que as variações exponencial e logarítmica são partes vitais da natureza e da análise. Consequentemente, um estudo das propriedades da função logaritmo e de sua inversa, a função exponencial, permanecerá sempre uma parte importante do ensino da matemática.

9.4 As cátedras de Henry Savile e Henry Lucas

Como muitos matemáticos britânicos eminentes ocuparam ou a cátedra saviliana de Oxford ou a cátedra lucasiana de Cambridge, é interessante uma breve referência a ambas.

Sir Henry Savile foi, numa certa época, curador do Merton College de Oxford; posteriormente foi preboste de Eton e deu cursos sobre Euclides em Oxford. Em 1619 fundou duas cátedras professorais em Oxford, uma de geometria e outra de astronomia. Henry Briggs foi o primeiro ocupante da cadeira saviliana de Geometria de Oxford. A mais antiga cátedra de matemática da Grã-Bretanha foi fundada por Sir Thomas Gresham em 1596 no Gresham College de Londres e era de geometria. Coube a Briggs, também,

² As outras fórmulas que figuram nesses selos são a fórmula fundamental da contagem $1 + 1 = 2$, a relação pitagórica $a^2 + b^2 = c^2$, a lei das alavancas de Arquimedes $w_1 d_1 = w_2 d_2$, a lei da gravitação universal de Newton, as quatro famosas equações da eletricidade e do magnetismo de Maxwell, a equação dos gases de Ludwig Boltzmann, a equação dos foguetes de Konstantin Tsiolkovskii, a famosa equação da massa-energia $E = mc^2$ de Albert Einstein e a revolucionária equação da matéria-onda de Louis de Broglie.

a honra de ser o primeiro ocupante dessa cadeira. Outros que ocuparam a cátedra savi-liana no século XVII foram John Wallis, Edmund Halley e Christopher Wren.

Henry Lucas, que representou Cambrigde no parlamento de 1639 a 1640, legou recursos à universidade para a fundação, em 1663, da cátedra que tem o seu nome. O primeiro a ocupar essa cadeira foi Isaac Barrow em 1664; seis anos depois Barrow foi substituído por Isaac Newton.

9.5 Harriot e Oughtred

Thomas Harriot (1560-1621) foi outro matemático que viveu a maior parte de sua vida no século XVI mas cujas publicações mais importantes apareceram no século XVII. Ele tem interesse especial para os americanos pois em 1585 foi enviado por Sir Walter Raleigh como agrimensor da expedição de Sir Richard Grenville ao Novo Mundo para fazer um mapa do que então se chamava Virgínia mas é agora a Carolina do Norte. Como matemático, considera-se comumente Harriot como o fundador da escola de algebristas ingleses. Seu grande trabalho neste campo é a *Artis analyticae praxis*, só publicada dez anos após sua morte e que trata em grande parte da teoria das equações. Esse trabalho contribuiu muito no sentido de estabelecer os padrões atuais de um texto sobre o assunto. Ele inclui um tratamento das equações de primeiro, segundo, terceiro e quarto graus; a formação de equações, dadas as raízes; as relações entre raízes e coeficientes de uma equação; as transformações familiares de uma equação noutra cujas raízes guardam com a equação original alguma relação específica. Grande parte desse material encontra-se, obviamente, nos trabalhos de Viète, mas o tratamento de Harriot é mais completo e mais sistematizado. Harriot seguia o plano de Viète de usar vogais para indicar incógnitas e consoantes para indicar constantes, mas ele usava letras minúsculas em vez de maiúsculas. Ele melhorou a notação de Viète para potências, representando a^2 por *aa*, a^3 por *aaa* e assim por diante. São dele também os símbolos $>$ e $<$ para “maior que” e “menor que”, respectivamente; mas esses símbolos não foram aceitos imediatamente por outros autores.

Creditam-se erroneamente a Harriot várias outras inovações e descobertas matemáticas, tais como uma bem elaborada geometria analítica (antes da publicação de Descartes em 1637), a afirmação de que todo polinômio de grau n tem n raízes e a “regra de sinais de Descartes”. Alguns desses erros se devem a inserções, feitas por escritores posteriores, em manuscritos de Harriot preservados. Há oito volumes de manuscritos de Harriot no Museu Britânico, mas D. E. Smith mostrou que a parte que lida com a geometria analítica é uma interpolação feita por mãos posteriores.

Harriot também foi um astrônomo eminente, tendo descoberto as manchas solares e observado os satélites de Júpiter, independentemente de Galileu e por volta da mesma época. Harriot morreu em 1621 de uma úlcera cancerosa na narina esquerda; essa úlcera foi decorrência da inalação de fumo de tabaco, uma prática que lhe foi ensinada pelos índios da América em 1586, sendo esse talvez o primeiro caso registrado de morte provocada pelo tabaco.



Harriot
(Coleção David Smith)

No mesmo ano (1631) em que veio à luz o trabalho póstumo de Harriot sobre álgebra, apareceu também a primeira edição da popular *Clavis mathematicae* de William Oughtred, um trabalho sobre aritmética e álgebra que muito fez no sentido de divulgar o conhecimento matemático na Inglaterra. William Oughtred (1574-1660) foi um dos autores ingleses de matemática mais influentes do século XVII. Embora clérigo de carreira (da paróquia de Bletchington), dava aulas particulares de matemática a alunos interessados. Entre esses estavam John Wallis, Christopher Wren e Seth Ward, mais tarde famosos, respectivamente, como matemático, arquiteto e astrônomo.

Segundo parece, Oughtred provavelmente ignorou as regras habituais da boa saúde por toda a sua longa vida. E quando finalmente morreu, diz-se que estava num transporte de alegria com as novas da restauração de Carlos II. Quanto a isso, Augusto De Morgan uma vez observou: “Deve-se acrescentar, a título de escusas, que ele tinha 86 anos de idade”.

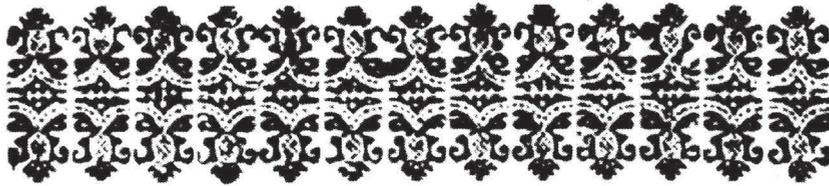
Em seus escritos Oughtred deu ênfase aos símbolos matemáticos, contribuindo com mais de 150 deles. Entre todos, somente três chegaram aos nossos tempos: o de multiplicação (\times), os quatro pontos ($::$) das proporções e o de diferença (\sim), ainda usado. O símbolo de multiplicação de Oughtred não foi, porém, adotado imediatamente pois, como objetava Leibniz, assemelhava-se muito com o x . Embora Oughtred tivesse tido ocasião de usar o ponto (\cdot) para a multiplicação, esse símbolo não foi usado predominantemente até Leibniz adotá-lo. Leibniz também usava o símbolo (\times) para a multiplicação, símbolo esse usado hoje para indicar a intersecção na teoria dos conjuntos. O símbolo anglo-americano (\div) da divisão também é do século XVII, tendo aparecido impresso pela primeira vez em 1659 numa álgebra do suíço Johann Heinrich Rahn (1622-1676). Tal símbolo tornou-se conhecido na Inglaterra alguns anos mais tarde quando esse trabalho foi traduzido. Esse símbolo

de divisão foi usado longamente no continente europeu para indicar subtração. De-vem-se a Leibniz os familiares símbolos da geometria – (\sim) para semelhança e (\cong) para congruência.



William Oughtred
(Coleção David Smith)

Além da *Clavis mathematicae*, Oughtred publicou *The Circles of Proportion* (1632) e *Trigonometrie* (1657). O segundo trabalho tem alguma importância histórica por apresentar uma das primeiras tentativas de introduzir abreviações para os nomes das funções trigonométricas. O primeiro descreve a régua de cálculo circular. A descrição feita por Oughtred da régua de cálculo circular não foi, porém, a primeira a aparecer impressa, e a questão da prioridade da invenção pende entre ele e Richard Delamain, um de seus discípulos. Parece indubitável que Oughtred inventou a régua de cálculo logarítmica reta, por volta de 1622. Em 1620 Gunter construiu uma escala logarítmica reta em que as distâncias entre os números são proporcionais aos logaritmos dos números indicados (ver Figura 74) com a qual efetuava mecanicamente multiplicações e divisões, simplesmente somando e subtraindo os segmentos da escala com a ajuda de um par de ponteiros operando como um compasso. A ideia de efetuar essas adições e subtrações com duas escalas logarítmicas como essa, uma deslizando ao longo da outra, como na Figura 75, se deve a Oughtred. Embora tivesse inventado essa régua de cálculo simples em 1622, só em 1632 Oughtred publicou uma descrição dela. Em 1675 Isaac Newton sugeriu um trilho para a régua de cálculo, mas essa ideia só veio a ser concretizada quase um século mais tarde. No século XVII inventaram-se vários tipos de régua de cálculo para propósitos especiais, como transações comerciais, medida de vigas de madeira e outros. A escala log log foi inventada em 1815 e foi só em 1850 que o oficial do exército francês Amédée Mannheim (1831-1906) padronizou as modernas régua de cálculo.



*Nota seu symbola quibus in sequen-
tibus utor:*

Æquale =	Simile <i>Sim.</i>
Majus \sqsubset .	Proxime majus \sqsubset .
Minus \sqsupset .	Proxime minus \sqsupset .
Non majus \sqsubset .	Æquale vel minus \sqsubset .
Non minus \sqsupset .	Æquale vel majus \sqsupset .
Proportio, sive ratio æqualis ::	
Major ratio $\text{---} \cdot \cdot$.	Minor ratio $\text{---} \cdot \cdot$.
Continuè proportionales $\text{---} \cdot \cdot$.	
Commensurabilia \square .	
Incommensurabilia \square .	
Commensurabilia potentiâ \square .	
Incommensurabilia potentiâ \square .	
Rationale, $\rho\eta\tau\epsilon\nu$, R, vel κ .	
Irrationale, $\acute{\alpha}\lambda\omicron\gamma\omicron\nu$, χ .	
Medium sive mediale π .	
Linea secta secundum extremam	} σ
& mediam rationem	
Major ejus portio σ	
Minor ejus portio τ .	
Z est A + E.	ξ est a + e.
X est A - E.	ζ est a - e.

A 2

Z est

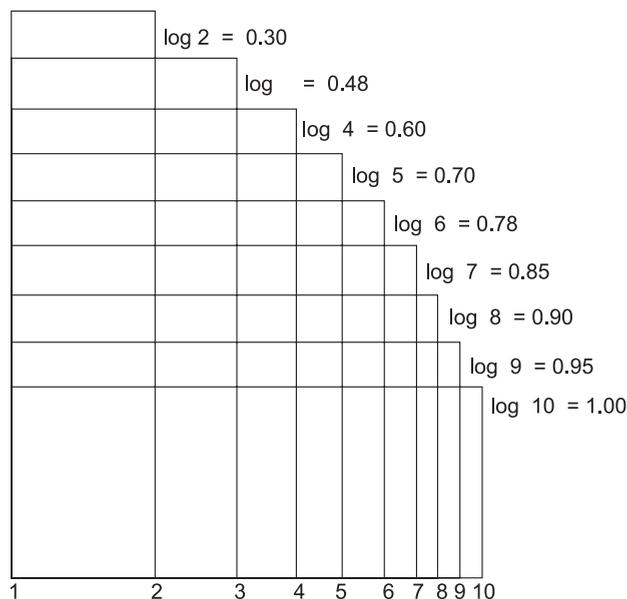


Figura 74

Acredita-se que Oughtred tenha sido o autor do notável apêndice anônimo de 16 páginas da tradução inglesa da *Descriptio* de Napier, editada por Edward Wright em 1618. Nesse apêndice usa-se pela primeira vez o símbolo (\times) para a multiplicação e o método da raiz para o cálculo de logaritmos [ver Exercício 9.1(c)] e aparece também a primeira tábua de logaritmos naturais. Oughtred escreveu também um trabalho sobre *volumes de barris* (cálculo do volume de barris e tonéis) e traduziu e editou um trabalho francês sobre recreações matemáticas.

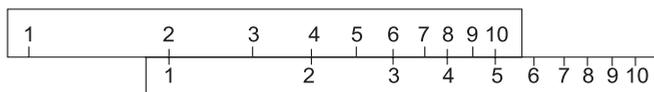


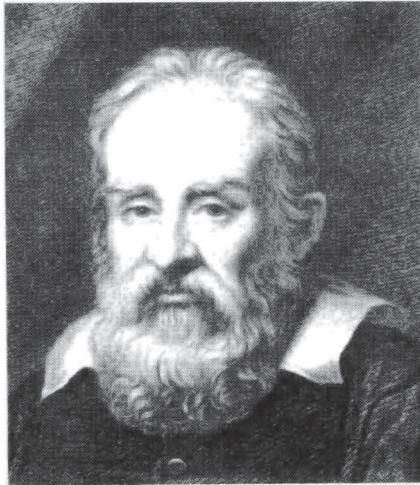
Figura 75

9.6 Galileu

Dois importantes astrônomos contribuíram notavelmente para a matemática perto do início do século XVII: o italiano Galileu Galilei e o alemão Johann Kepler.

Galileu, filho de um nobre florentino empobrecido, nasceu em Pisa em 1564, no dia em que faleceu Michelangelo. Aos 17 anos de idade foi encaminhado pelos

pais à Universidade de Pisa para estudar medicina. Um dia, quando assistia a um serviço na Catedral de Pisa, seu espírito se distraiu observando o grande lustre de bronze suspenso da elevada abóbada. A lâmpada tinha sido posta para fora a fim de iluminar mais facilmente e, solta, oscilava para cá e para lá com amplitude que decrescia gradualmente. Usando as batidas de seu pulso para marcar o tempo, ele ficou surpreso ao verificar que o período de uma oscilação da lâmpada independia da amplitude do arco de oscilação³. Posteriormente, por experiências, ele mostrou que o período de um pêndulo em movimento também independe do peso de sua massa oscilante, dependendo assim apenas do comprimento de sua haste. Relata-se que o interesse de Galileu pela ciência e pela matemática surgiu desse problema e foi estimulado, posteriormente, pela oportunidade de assistir a um curso de geometria na Universidade. Como resultado solicitou da família (e conseguiu) permissão para abandonar a medicina e dedicar-se à ciência e à matemática, campos para os quais possuía forte talento natural.



Galileu Galilei
(Coleção David Smith)

Aos 25 anos de idade Galileu foi indicado professor de matemática da Universidade de Pisa, tendo, segundo consta, realizado experiências públicas sobre a queda dos corpos enquanto exerceu essa função. Conta uma história que, perante uma multidão de estudantes, professores e religiosos, ele deixou cair dois pedaços de metal, um deles com peso dez vezes o do outro, do alto da torre de Pisa. Os dois pedaços chocaram-se contra o chão praticamente no mesmo momento, contrariando assim Aristóteles, segundo quem o corpo mais pesado teria de cair muito mais rapidamente do que o

³ Isso é apenas aproximadamente verdadeiro, sendo a aproximação tanto melhor quanto menor for a amplitude da oscilação.

outro. Galileu estabeleceu a lei segundo a qual a distância percorrida por um corpo em queda livre é proporcional ao quadrado do tempo de queda, e que se traduz na fórmula familiar $s = gt^2/2$. Porém, nem mesmo a evidência dos experimentos de Galileu abalaram a fé dos outros professores da universidade nos ensinamentos de Aristóteles. As autoridades universitárias de Pisa ficaram tão chocadas com o sacrilégio de Galileu em contradizer Aristóteles que tornaram desagradável sua vida ali, fazendo-o renunciar à sua cadeira em 1591. No ano seguinte ele aceitou uma cadeira na Universidade de Pádua, onde a atmosfera com relação às atividades científicas era mais amigável. Em Pádua, por quase 18 anos, Galileu continuou com suas experiências e suas aulas, ganhando amplo prestígio.

Por volta de 1607 um aprendiz do oculista holandês Hans Lippershey, enquanto se divertia com algumas lentes de seu patrão, descobriu que colocando-se duas delas a uma distância apropriada uma da outra, os objetos vistos através do par de lentes tornavam-se maiores. O aprendiz levou sua descoberta à consideração de seu patrão, que colocou duas lentes num tubo e exibiu o instrumento como um brinquedo na vitrina de sua loja. O brinquedo foi visto por um funcionário do governo que o comprou e deu de presente ao príncipe Maurício de Nassau. Como comandante das forças armadas dos Países Baixos, o príncipe Maurício percebeu as possibilidades daquele brinquedo como óculos de alcance para fins militares.

Por volta de 1609 as novas da invenção dos óculos de alcance chegaram a Galileu, que logo construiu um outro par muito superior ao de Lippershey. A pedidos, ele fez uma demonstração de seu instrumento em Veneza, onde, do alto da igreja mais alta da cidade, os senadores venezianos puderam ver as velas de um navio que se aproximava, bem umas duas horas antes de ele ser visível a olho nu. Galileu presenteou com esse exemplar o doge de Veneza, que, como o príncipe Maurício de Nassau, reconheceu as imensas possibilidades do instrumento em operações navais e militares e Galileu teve seus estímulos consideravelmente aumentados.

Galileu construiu mais quatro telescópios (como veio a se chamar o novo instrumento — do grego *tele*, “distante”, *skopos*, “observar”), cada um mais potente do que o outro. Com o quinto telescópio, cuja potência era de 30 diâmetros, Galileu observou, na noite de 7 de janeiro de 1610, duas pequenas estrelas a leste do planeta Júpiter e uma a oeste. Na noite seguinte, para surpresa sua, as três estrelas estavam a oeste do planeta, e três noites depois ele notou que havia mais outra estrela pequena girando em torno de Júpiter. Ele havia descoberto quatro satélites luminosos de Júpiter, confirmando de maneira notável a teoria de Copérnico dos corpos pequenos girando em torno de outros maiores. Com o telescópio Galileu observou as manchas do Sol, as montanhas da Lua, as fases de Vênus e os anéis de Saturno. Mas essas descobertas apenas fizeram com que surgissem uma vez mais a oposição fanática de muitos homens da Igreja, que aceitavam a autoridade de Aristóteles; Aristóteles garantira que o Sol não tem manchas e que a Terra, e, portanto o homem, é o centro do Universo. Um religioso chegou mesmo a acusar Galileu de colocar os quatro satélites de Júpiter dentro de seu telescópio.

Por fim, em 1633, um ano depois da publicação de um livro em que sustentava a teoria de Copérnico, Galileu foi citado a comparecer perante a Inquisição, quando, já

doente e envelhecido, foi forçado, sob ameaça de tortura, a retratar-se de suas descobertas científicas. Seu livro foi colocado no *index*, onde ficou por dois séculos. O perjúrio que cometeu contra sua consciência destruiu a vida do velho sábio. Foi-lhe permitido continuar apenas com um trabalho científico inócuo, mas ficou cego e morreu em janeiro de 1642, ainda sob a vigilância da Inquisição e virtualmente prisioneiro em sua própria casa⁴.

Há uma lenda segundo a qual Galileu, ao se retratar e negar o movimento da Terra publicamente, murmurou para si mesmo: “Não obstante a Terra continua a mover-se”. Qualquer que seja a base dessa história, ela vem a ser como uma espécie de provérbio, no sentido de que a verdade sempre prevalecerá apesar de todas as tentativas de amordaçá-la. E foi o que se passou, pois o ano de 1642, que assistiu à morte de Galileu no cativeiro, também assistiu ao nascimento de Newton.

Devemos a Galileu o moderno espírito científico na forma de uma harmonia entre experiência e teoria. Ele fundou a mecânica dos corpos em queda livre, lançou os fundamentos da dinâmica em geral, e sobre esses fundamentos mais tarde Newton foi capaz de construir uma ciência. Foi ele o primeiro a perceber a natureza parabólica da trajetória de um projétil no vácuo; e especular sobre leis envolvendo momentos. Ele inventou o primeiro microscópio moderno e o compasso de setores (ver Exercício 9.6) que chegou a ser muito popular. Do ponto de vista histórico são interessantes as colocações de Galileu que mostram que ele captou a ideia de equipotência de conjuntos infinitos (ver Exercício 9.7), um ponto fundamental na teoria dos conjuntos de Cantor no século XIX, com tantas implicações importantes no desenvolvimento da análise moderna. Essas colocações e a parte principal das ideias de Galileu sobre a dinâmica encontram-se no seu *Discorsi e Dimonstrazioni Matematiche intorno a Due Nuove Scienze*, publicado em Leyden em 1638. Costuma-se citar Galileu por ter dito: “No que se refere à ciência, a autoridade de mil pessoas não vale o simples raciocínio de um indivíduo apenas”.

Poderia parecer que Galileu tinha um certo ciúme de seu contemporâneo Johann Kepler pois, embora este tivesse anunciado suas três importantes leis do movimento planetário perto de 1619, essas leis foram completamente ignoradas por Galileu.

Galileu foi, por toda vida, um homem religioso e um católico devoto. Consequentemente, angustiava-o notar que pontos de vista a que chegava irresistivelmente por suas observações e seus raciocínios como cientista eram condenados por contrariar as escrituras da Igreja, da qual ele se considerava um membro fiel. Por conseguinte, sentia-se compelido a conceber ao seu modo as relações entre a ciência e as escrituras. Muitos cientistas, de tempos em tempos, já se viram nessa situação. Ocorreu, por exemplo, na metade do século XIX, quando se encontraram dificuldades para conciliar a teoria da evolução de Darwin com a descrição bíblica da criação dos seres vivos.

A conclusão de Galileu se resume em que a Bíblia não é, e nunca pretendeu ser, um texto de astronomia, biologia ou qualquer outra ciência. Em suma, sustentava Galileu,

⁴ Em 1980, 347 anos após ter sido condenado pela Igreja por ter usado telescópio para provar que a Terra gira em torno do Sol, o Vaticano, mediante solicitação do papa João Paulo II, começou a rever a acusação de heresia de Galileu. [Em 1992 ele foi inocentado. (N. T.)]

ela não foi concebida como um livro para nos ensinar verdades científicas que podemos descobrir por conta própria. Foi concebida, isto sim, como um livro para revelar verdades espirituais que não poderíamos descobrir sozinhos. Então, o conflito entre a ciência e as escrituras reside no fato de que essas verdades espirituais se expressaram na Bíblia de maneira natural para as pessoas a quem, e através de quem, elas se revelaram originalmente. Mas isso é obviamente apenas uma conjuntura temporal a que se deveria dar o devido desconto. Um cientista não deveria se desconcertar ao ver a Bíblia pintar o mundo de uma maneira natural para os hebreus antigos, e os sacerdotes não deveriam se desconcertar ao ver os cientistas pintarem o mundo de uma maneira contrária à descrição da Bíblia. A maneira como se descreve o mundo é inteiramente incidental para o verdadeiro objetivo da Bíblia e de maneira nenhuma é inconsistente com os seus ensinamentos espirituais.

9.7 Kepler

Johann Kepler nasceu em 1571 perto da cidade de Stuttgart e estudou na Universidade de Tübingen. Sua intenção inicial era tornar-se ministro luterano, mas um profundo interesse pela astronomia levou-o a mudar seus planos. Em 1594 aceitou indicação para uma cadeira na Universidade de Grätz, na Áustria. Cinco anos mais tarde tornou-se assistente do famoso, mas briguento, astrônomo dinamarquês-sueco Tycho Brahe que havia se mudado para Praga como astrônomo da corte do rei Rodolfo II. Em 1601 Brahe faleceu subitamente e Kepler herdou, além do posto de seu mestre, sua vasta e muito acurada coleção de dados astronômicos sobre o movimento dos planetas.

Diz-se muitas vezes que quase todo problema pode ser resolvido mantendo-se para com ele uma preocupação constante e trabalhando-se nele um tempo suficientemente longo. Se, como dizia Thomas Edison, uma invenção depende um por cento de inspiração e noventa e nove por cento de transpiração, resolver um problema depende um por cento de imaginação e noventa e nove por cento de perseverança. Talvez em nenhum lugar da história da matemática se demonstre isso mais claramente do que na incrível persistência de Kepler ao resolver o problema do movimento dos planetas em torno do Sol. Inteiramente convencido da teoria copernicana de que os planetas descrevem órbitas em torno do Sol, Kepler procurou de maneira infatigável determinar a natureza e a posição dessas órbitas e como elas são percorridas pelos planetas. Depois de muitas tentativas, feitas quando seus poucos dados eram complementados pela imaginação, Kepler herdou a massa enorme de observações muito acuradas feitas por Tycho Brahe sobre o movimento dos planetas. O problema tornou-se então o seguinte: obter um modelo do movimento dos planetas que se ajustasse exatamente a esse grande conjunto de observações. Tão seguros eram os registros de Brahe que qualquer solução que diferisse das posições observadas por ele, mesmo que apenas por um quarto de diâmetro aparente da Lua, deveria ser descartada como incorreta. Kepler precisava, então, primeiro descobrir com a *imaginação* alguma solução plausível, e a seguir, com laboriosa *perseverança*, empenhar-se em um sem número de cálculos tediosos para confirmar

ou rejeitar sua suposição. Ele fez centenas de tentativas infrutíferas e preencheu resmas e resmas de papel com cálculos, num trabalho efetuado com zelo e paciência constantes durante 21 anos. Por fim, em 1609, viu-se em condições de formular suas duas primeiras leis do movimento planetário e, dez anos depois, em 1619, a terceira.



Johann Kepler
(Coleção David Smith)

Essas leis são marcos fundamentais da história da astronomia e da matemática. Pois, num esforço para justificá-las, Isaac Newton foi levado a criar a mecânica celeste moderna. Essas leis são:

- I. *Os planetas movem-se em torno do Sol em trajetórias elípticas com o Sol num dos focos.*
- II. *O raio vetor que liga um planeta ao Sol varre áreas iguais em intervalos de tempo iguais.*
- III. *O quadrado do tempo para que um planeta complete sua revolução orbital é diretamente proporcional ao cubo do semieixo maior da órbita.*

A descoberta empírica dessas leis, a partir da massa de dados de Brahe, constitui um dos mais notáveis trabalhos de indução jamais feitos na ciência.

Nunca se sabe quando uma parte da matemática pura poderá receber uma aplicação inesperada. Como disse William Whewell uma vez: “Se os gregos não tivessem estudados as secções cônicas, Kepler jamais teria superado Ptolomeu”. É muito interessante que 1800 anos depois de os gregos terem desenvolvido as propriedades das cônicas, meramente para satisfazer seus pruridos intelectuais, viesse a ocorrer uma feliz aplicação prática delas. Com justificável orgulho, Kepler prefaciou seu *A Harmonia dos Mundos* de 1619 com as seguintes palavras de entusiasmo:

Estou escrevendo um livro para meus contemporâneos ou — não importa — para a posteridade. Pode ser que meu livro tenha de esperar cem anos por um leitor. Deus não esperou 6000 anos por um observador?

Kepler foi um dos precursores do cálculo. Para calcular as áreas envolvidas em sua segunda lei dos movimentos planetários, teve de recorrer a uma forma tosca de cálculo integral. E também em seu *Stereometria doliorum vinorum* (*Geometria sólida dos barris de vinho*, 1615) aplicou processos de integração toscos para achar os volumes de 93 sólidos obtidos pela rotação de segmentos de secções cônicas em torno de um eixo de seu plano. Dentre esses estavam o toro e dois sólidos que ele chamou de *a maçã* e *o limão*; estes dois últimos ele obtinha fazendo girar um arco maior e um arco menor, respectivamente, de uma circunferência em torno da corda do arco, tomada como eixo. Kepler interessou-se por essa questão ao observar alguns dos precários métodos de calcular volumes de barris de vinho usados em seu tempo. É bem possível que esse trabalho de Kepler tenha influenciado Cavalieri, que deu um passo à frente no cálculo infinitesimal com seu *método dos indivisíveis*. Voltaremos a uma discussão sobre isso no Capítulo 11.

Kepler deu também notáveis contribuições ao estudo dos poliedros. Parece ter sido ele o primeiro a observar o *antiprisma* (obtido de um prisma efetuando-se uma rotação de sua base superior em seu próprio plano de modo a fazer seus vértices corresponderem aos lados da base inferior, e ligando então, em zigue-zague, os vértices das duas bases). Ele também descobriu o cuboctaedro, o dodecaedro rômbo e o triacontraedro rômbo⁵. O segundo desses poliedros aparece na natureza na forma de cristal de granada. Dos quatro poliedros estrelados regulares, dois foram descobertos por Kepler e os outros dois em 1809 por Louis Poincaré (1777-1859), um pioneiro nos trabalhos de mecânica geométrica. Os poliedros estrelados de Kepler-Poincaré são os análogos no espaço dos polígonos estrelados planos (ver Exercício 8.5). Kepler também se interessou pelo problema da pavimentação de um plano com polígono regulares (não necessariamente todos similares) e o de preencher o espaço com poliedros regulares (ver Exercício 9.9).

Kepler resolveu o problema da determinação do tipo de cônica dado por um vértice, o eixo por esse vértice e uma tangente com seu ponto de tangência e introduziu a palavra *foco* na geometria das cônicas. Ele aproximou o perímetro de uma elipse de semieixos a e b pelo uso da fórmula $\pi(a + b)$. Estabeleceu também o chamado *princípio de continuidade* que essencialmente postula a existência no infinito, num plano, de pontos e retas ideais com muitas das propriedades dos pontos e retas usuais. Argumentava que se poderia considerar uma reta como fechada no infinito, que duas retas paralelas teriam um ponto comum no infinito e que uma parábola pode ser considerada como um caso limite ou de uma elipse ou de uma hipérbole fazendo-se um dos focos retroceder ao infinito. Esse conceito foi grandemente ampliado em 1822 pelo geômetra francês Poncelet num

⁵ Podem-se encontrar modelos de construção desses sólidos em *Patterns of Polyhedrons* (ed. rev.), de Miles C. Hartley.

esforço para encontrar na geometria uma justificativa “real” para os imaginários que ocorrem aqui e ali em matemática.

O trabalho de Kepler não raro é uma mescla de especulações místicas e fantasiosas, combinada com um domínio verdadeiramente profundo de verdades científicas. É uma pena que sua vida pessoal fosse marcada por uma sucessão quase insuportável de infortúnios terrenos. Uma infecção de varíola, quando tinha apenas quatro anos de idade, deixou-o com a visão bastante prejudicada. Além de sua debilidade física geral em toda vida, teve uma juventude infeliz; seu casamento foi uma fonte constante de infelicidades; seu filho favorito morreu de varíola; sua esposa enlouqueceu e veio a falecer; foi expulso de sua cadeira na Universidade de Grätz quando a cidade foi subjugada pelos católicos; sua mãe foi acusada de feitiçaria e presa e, por quase um ano, ele tentou desesperadamente salvá-la da câmara de torturas; ele próprio escapou por pouco de uma condenação por heterodoxia; e seus salários sempre estavam atrasados. De acordo com um relato, seu segundo casamento foi mais infeliz até do que o primeiro, embora ele tivesse tomado a precaução de analisar cuidadosamente os méritos e deméritos de 11 candidatas, antes de se decidir por uma. Era forçado a aumentar seus proventos dedicando-se à astrologia. E morreu em 1630 durante uma viagem para receber alguns de seus salários atrasados.

9.8 Desargues

Em 1639, nove anos após a morte de Kepler, apareceu em Paris um tratado notavelmente original, mas que pouca atenção mereceu, sobre secções cônicas⁶. Seu autor, Gérard Desargues, era um engenheiro e arquiteto, outrora oficial do exército francês, nascido em Lyon em 1591 e que faleceria nessa mesma cidade em 1661. O trabalho foi tão negligenciado pelos outros matemáticos que cedo foi esquecido, e todas as cópias da publicação desapareceram. Dois séculos depois, quando o geometa francês Michel Chasles (1793-1880) escreveu sua ainda valiosa história da geometria, não houve como estimar a importância do trabalho de Desargues. Porém, seis anos depois, em 1845, Chasles encontrou por acaso uma cópia manuscrita do tratado, feita por Philippe de la Hire (1640-1718), um discípulo de Desargues; desde então, o trabalho é considerado um clássico do desenvolvimento inicial da geometria projetiva sintética.

Várias razões podem ser aventadas para responder por essa negligência inicial para com o pequeno volume de Desargues. Ele foi eclipsado pela geometria analítica, muito mais flexível, introduzida por Descartes dois anos antes. Os geometas estavam, em geral, com suas energias voltadas para o desenvolvimento deste novo e poderoso instrumento ou tentando aplicar infinitésimos à geometria. E, também, infelizmente, o estilo de escrever de Desargues era demasiado excêntrico. Ele introduziu cerca de 70 novos termos, muitos com origem recôndita na botânica, dos quais apenas um, *involução*, se

⁶ *Brouillon Projet d'une Atteinte aux Événements des Rencontres d'un Cone avec un Plan.* (Esboço de Projeto de uma Tentativa de Lidar com os Casos Possíveis de Intersecção de um Cone com um Plano.)

preservou porque foi esse o único termo do jargão técnico de Desargues escolhido por um crítico para os ataques e zombarias mais agudos.

Desargues escreveu outros livros além desse sobre secções cônicas, inclusive um tratado sobre como ensinar as crianças a cantar bem. Mas é o seu pequeno livro sobre secções cônicas que o coloca como o autor das contribuições mais originais à geometria sintética no século XVII. Começando com a teoria de Kepler sobre a continuidade, o trabalho desenvolve muitos dos teoremas fundamentais sobre involução, conjuntos harmônicos, homologia, polos e polares e perspectiva: tópicos familiares àqueles que fizeram um curso de geometria projetiva⁷. Uma noção interessante é a extensão do conceito de polos e polares às esferas e a certas outras superfícies de segundo grau. É provável que Desargues só tivesse conhecimento de algumas das superfícies de segundo grau, muitas das quais possivelmente permaneceram desconhecidas até serem catalogadas completamente por Euler em 1748. Noutra parte encontramos o teorema fundamental de Desargues sobre dois triângulos: *Se dois triângulos, coplanares ou não, situam-se de maneira que as retas que unem os pares de vértices correspondentes são concorrentes, então os pontos de intersecção dos pares de lados correspondentes são colineares e vice-versa* (ver Figura 76).

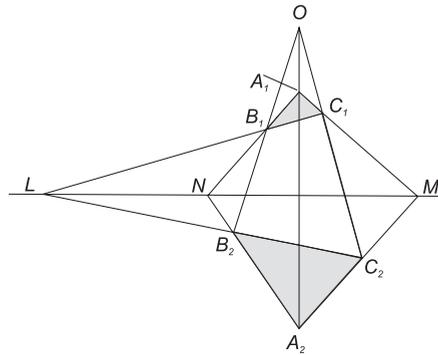


Figura 76

Quando estava na faixa dos 30 anos de idade e vivia em Paris, Desargues impressionou consideravelmente seus contemporâneos através de uma série de conferências gratuitas. Seu trabalho foi muito apreciado por Descartes e Blaise Pascal, certa feita, referiu-se a ele como a fonte de grande parte de sua inspiração. La Hire, num esforço considerável, procurou mostrar que todos os teoremas do *Secções cônicas* de Apolônio podiam ser deduzidos da circunferência pelo método da projeção central de Desargues. A despeito disso tudo, porém, a nova geometria ganhou pouco fôlego no século XVII,

⁷ No Capítulo 6 assinalou-se que os gregos antigos conheciam alguns desses conceitos.

permanecendo praticamente adormecida até algum tempo depois do início do século XIX, quando se desenvolveu um interesse enorme pelo assunto, o que resultou em grandes avanços feitos por homens como Gergonne, Poncelet, Brianchon, Dupin, Chasles e Steiner. Enquanto Desargues pode ter sido motivado pela necessidade de uma teoria da perspectiva para arquitetos e desenhistas, esses últimos desenvolveram o assunto por seu encanto intrínseco.

9.9 Pascal

Um dos poucos contemporâneos de Desargues que mostraram saber avaliar seu trabalho foi Blaise Pascal, um gênio matemático de alto quilate. Pascal nasceu na província francesa de Auvergne em 1623 e muito cedo revelou aptidão extraordinária para a matemática. Através de sua irmã Gilberta, que se tornou Madame Périer, ficamos sabendo de muitas de suas façanhas juvenis. Devido à sua fragilidade física, o garoto era mantido em casa, como garantia contra algum esforço excessivo. Seu pai decidiu ainda que a educação do filho deveria de início restringir-se ao estudo de línguas, não incluindo nada, portanto, de matemática. Mas isso provocou nele uma curiosidade muito grande, fazendo com que indagasse de seu preceptor sobre a natureza da geometria. O preceptor informou-lhe que a geometria era o estudo das figuras exatas e das propriedades de suas diferentes partes. Estimulado por essa descrição e pela objeção do pai, ele abandonava seu tempo de recreio e, clandestinamente, em poucas semanas, descobriu por conta própria muitas das propriedades das figuras geométricas, em particular a de que a soma dos ângulos de um triângulo é igual a um ângulo raso. Esta última foi conseguida por algum processo de dobrar um triângulo de papel, talvez dobrando os vértices sobre o centro do círculo inscrito, como se mostra na Figura 77, ou dobrando os vértices sobre o pé de uma altura conforme mostra a Figura 78. Quando seu pai chegou até ele um dia e o viu em suas atividades geométricas, ficou tão feliz com a capacidade do garoto que resolveu lhe dar um exemplar dos *Elementos* de Euclides, que o jovem Pascal leu avidamente e logo dominou.

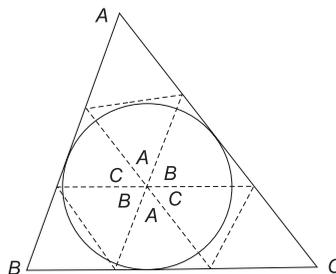


Figura 77

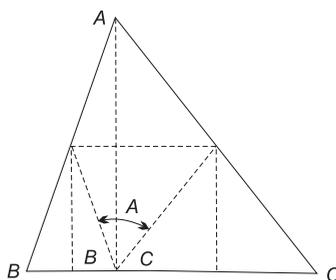


Figura 78

Aos 14 anos de idade Pascal já participava de uma reunião semanal de um grupo de matemáticos franceses, germe da futura Academia Francesa, afinal fundada em 1666. Aos 16 anos escreveu um trabalho sobre secções cônicas que Descartes duvidou pudesse ser trabalho de adolescente, preferindo considerá-lo de autoria do pai. Entre 18 e 19 anos de idade, inventou a primeira máquina de calcular, que idealizou para ajudar seu pai nas funções de fiscal do governo em Rouen. Pascal chegou a construir mais de 50 dessas máquinas de calcular, algumas delas ainda preservadas no Conservatório de Artes e Ofícios de Paris. Aos 21 anos de idade interessou-se pelo trabalho de Torricelli sobre pressão atmosférica, emprestando seu talento incomum à física e deixando como resultado o *Princípio da Hidrodinâmica de Pascal*, hoje bem conhecido dos alunos do segundo grau. Poucos anos mais tarde, em 1648, ele escreveu um inteligente manuscrito não publicado sobre secções cônicas.

Essa espantosa e precoce atividade subitamente chegou a um fim em 1650, quando, por estar com a saúde debilitada, Pascal decidiu abandonar suas pesquisas em matemática e ciência e se dedicar à contemplação religiosa. Três anos mais tarde, porém, Pascal retornou brevemente à matemática. Nessa época, escreveu seu *Traité du Triangle Arithmétique*, conduziu diversas experiências sobre a pressão dos fluidos e, juntamente com Fermat, lançou os fundamentos da teoria das probabilidades. Mas, ao fim de 1654, recebeu o que considerou um grande aviso de que o reencetamento dessas atividades não estava agradando a Deus. O toque divino ocorreu quando seus cavalos desenfreados lançaram-se sobre o parapeito de uma ponte em Neuilly, e ele se salvou apenas porque por milagre os tirantes dos arreios se romperam. Fortalecido com uma referência ao acidente escrita num pequeno pedaço de pergaminho que daí para frente levava consigo perto do coração, ele respeitosamente voltou às suas meditações religiosas.

Apenas uma vez mais, em 1658, Pascal retornou à matemática. Acometido de violenta dor de dente, ocorreram-lhe certas ideias geométricas e a dor subitamente cessou. Considerando isso como um sinal da vontade divina, obediente e ingentemente aplicou-se durante oito dias a desenvolver tais ideias, produzindo durante esse período uma descrição bastante completa da geometria da cicloide e resolvendo alguns problemas que logo depois, quando propostos como desafio, frustraram outros matemáticos.

Suas famosas *Cartas a um provincial* e seus *Pensamentos*, considerados hoje obras-primas da literatura francesa, foram escritos perto do fim de sua curta vida que se findou em Paris em 1662. Desargues e Pascal morreram no mesmo ano; Desargues com 69 anos de idade, Pascal com apenas 39.



Blaise Pascal
(Irmãos Brown)

Deveríamos também acrescentar aqui que o pai de Pascal, Étienne Pascal (1588-1640), foi também, um matemático de méritos; o nome *limaçon de Pascal* [ver Exercício 47(c)], embora usado impropriamente, refere-se a ele.

Já se descreveu Pascal como a maior das “promessas” na história da matemática. Com seu talento incomum e com uma intuição geométrica tão profunda, sob condições mais favoráveis, ele deveria ter produzido uma obra muito maior. Mas sua saúde era tal que passou grande parte de sua vida sofrendo de padecimentos físicos; ademais, desde que se tornou adulto, sentiu-se compelido a participar das controvérsias religiosas de sua época.

O manuscrito de Pascal sobre as secções cônicas baseava-se no trabalho de Desargues e se perdeu, mas foi visto por Descartes e Leibniz. Nele figurava o famoso teorema do *hexagrama místico* de Pascal da geometria projetiva: *Se um hexágono está inscrito numa cônica, então os pontos de intersecção dos três pares de lados opostos são colineares e reciprocamente* (ver Figura 79). Ele provavelmente demonstrou o teorema à maneira de Desargues, primeiro provando que ele é verdadeiro para uma circunferência e depois estendendo-o por projeção a qualquer secção cônica. Embora esse teorema seja um dos mais ricos de toda a geometria projetiva (ver Exercício 9.12), provavelmente deveríamos tomar como leviana a história muitas vezes contada de que Pascal deduziu mais de 400 corolários dele. O manuscrito nunca foi publicado, e provavelmente sequer completado, mas em 1640 Pascal imprimiu um trabalho em uma página larga intitulado *Essay pour les Coniques*, que divulgava algumas de suas descobertas. Somente se

sabe de duas cópias desse famoso folheto, uma entre os papéis de Leibniz em Hanover e a outra na Biblioteca Nacional de Paris. O segundo lema do panfleto envolve o teorema do hexagrama místico de Pascal.

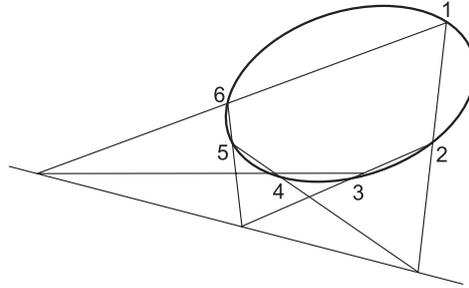


Figura 79

O *Traité du Triangle Arithmétique* de Pascal foi escrito em 1653 mas só foi publicado em 1665. Ele construiu seu “triângulo aritmético” conforme a Figura 80. Obtém-se qualquer elemento (da segunda linha em diante) como soma de todos os elementos da linha precedente situados exatamente acima ou à esquerda do elemento desejado. Assim, na quarta linha,

$$35 = 15 + 10 + 6 + 3 + 1.$$

1	1	1	1	1	1	1	...
1	2	3	4	5	6	...	
1	3	6	10	15	21	...	
1	4	10	20	35	56	...	
1	5	15	35	70	126	...	
1	6	21	56	126	252	...	
.	

Figura 80

Obtém-se o triângulo, que pode ser de qualquer ordem, desenhando-se uma diagonal como mostra a figura. Os alunos do curso colegial perceberão que os números ao longo da diagonal são os coeficientes sucessivos de uma expansão binomial. Por exemplo, os números ao longo da quinta diagonal, a saber, 1, 4, 6, 4, 1, são os coeficientes sucessivos da expansão de $(a + b)^4$. A determinação dos coeficientes binomiais era uma das aplicações que Pascal fazia do seu triângulo. Ele também o usava, particularmente

em suas discussões sobre probabilidade, para determinar o número de combinações de n objetos tomados r de cada vez [ver Exercício 9.13(g)], o que ele corretamente afirmava ser

$$\frac{n!}{r!(n-r)!},$$

onde $n!$ é a notação⁸ atual para o produto

$$n(n-1)(n-2)\dots(3)(2)(1).$$

Há muitas relações envolvendo os números do triângulo aritmético, várias delas desenvolvidas por Pascal (ver Problema 9.13). Pascal não foi o primeiro a mostrar o triângulo aritmético — vários séculos antes esse arranjo numérico foi antecipado por escritores chineses (ver Seção 7-3). Como Pascal foi por longo tempo (até 1935) o primeiro descobridor conhecido do triângulo no mundo ocidental e devido ao desenvolvimento e aplicações que fez de muitas das propriedades do triângulo, este se tornou conhecido como *triângulo de Pascal*. Uma das manifestações mais antigas aceitáveis do princípio de indução matemática aparece no tratado de Pascal sobre o triângulo.

Embora os filósofos gregos da Antiguidade discutissem necessidade e contingência longa e detalhadamente, talvez seja correto dizer que não houve nenhum tratamento matemático da probabilidade até por volta do final do século XV e início do século XVI, quando alguns matemáticos italianos tentaram avaliar as possibilidades em alguns jogos de azar, como o de dados. Como se observou na Seção 8-8, Cardano escreveu um breve manual do jogador que envolvia alguns aspectos da probabilidade matemática. Mas em geral se concorda que a questão à qual está ligada a origem da ciência da probabilidade é o *problema dos pontos*. Esse problema pede que se determine a divisão das apostas de um jogo de azar interrompido, entre dois jogadores igualmente hábeis, supondo-se conhecida a contagem no momento da interrupção e o número de pontos necessários para se ganhar o jogo. Pacioli, em sua *Sūma*, de 1494, foi um dos primeiros autores a introduzir o problema dos pontos num trabalho de matemática. O problema foi também discutido por Cardano e Tartaglia. Mas só se verificou um avanço efetivo quando, em 1654, o Chevalier de Méré, um hábil e experiente jogador, cujo raciocínio teórico sobre o problema não coincidia com suas observações, o propôs a Pascal. Este se interessou pelo problema e o levou ao conhecimento de Fermat. Seguiu-se uma notável correspondência entre os dois matemáticos⁹, na qual o problema foi resolvido corretamente mas diferentemente por cada um deles. Pascal resolveu o caso geral, obtendo muitos resultados através do uso do triângulo

⁸ O símbolo $n!$, chamado *fatorial de n* , foi introduzido em 1808 por Christian Kramp (1760-1820) de Strasburgo, que o escolheu para contornar dificuldades gráficas verificadas com um símbolo previamente usado. Por conveniência define-se $0! = 1$.

⁹ Essa correspondência figura em *A Source Book in Mathematics* de D. E. Smith.

aritmético. Essa correspondência lançou os fundamentos da moderna teoria das probabilidades¹⁰.

O último trabalho de Pascal foi sobre a *cicloide*, a curva descrita por um ponto da circunferência de um círculo, conforme este rola ao longo de uma reta sem escorregar (ver Figura 81). Essa curva, que é muito rica em propriedades matemáticas e físicas, desempenhou um papel importante no desenvolvimento inicial dos métodos do cálculo. Galileu foi um dos primeiros a chamar a atenção para a cicloide, recomendando que fosse usada para arcos de pontes. Não demorou muito e se determinou a área sob um arco da curva e se descobriram métodos de traçar tangentes a ela. Essas descobertas levaram os matemáticos a considerar questões relativas a superfícies e volumes de revolução obtidos girando-se um arco de cicloide em torno de diversos eixos. Esses problemas, bem como outros relativos aos centroides das figuras formadas, foram resolvidos por Pascal e alguns desses resultados foram propostos por ele, como problemas-desafio, a outros matemáticos. Pascal chegava às suas soluções pelo método dos indivisíveis do pré-cálculo — uma forma equivalente de se avaliarem muitas das integrais definidas que figuram nos atuais cursos de cálculo. A cicloide tem tantas propriedades bonitas e interessantes e gerou tantas controvérsias que foi chamada “a Helena da geometria” ou “o pomo da discórdia”.



Figura 81

É interessante registrar que se atribui a Pascal a invenção do carrinho de mão de uma roda como o conhecemos hoje. Aos 35 anos de idade concebeu também o ônibus, uma ideia logo posta em prática a cinco soldos a viagem. Pascal às vezes escrevia sob o pomposo nome de Lovis de Montalte, ou seu anagrama, Amos Dettonville.

Exercícios

9.1 Logaritmos

(a) Usando as familiares leis dos expoentes, demonstre as seguintes propriedades úteis dos logaritmos:

¹⁰ Os métodos de Pascal e Fermat para resolver o problema dos pontos estão descritos no fim da Seção 10-3.

1. $\log_a mn = \log_a m + \log_a n.$
2. $\log_a (m/n) = \log_a m - \log_a n.$
3. $\log_a (m^r) = r \log_a m.$
4. $\log_a \sqrt[s]{m} = (\log_a m)/s.$

(b) Mostre que

1. $\log_b N = \log_a N / \log_a b$ (com esta fórmula pode-se calcular logaritmos numa base b quando se dispõe de uma tábua de logaritmos em alguma base a).

2. $\log_N b = 1 / \log_b N.$
3. $\log_N b = \log_{1/N}(1/b).$

(c) Extraíndo-se a raiz quadrada de 10, depois a raiz quadrada do resultado assim obtido e assim por diante, pode-se construir a seguinte tábua.

$10^{1/2}$	= 3,16228	$10^{1/256}$	= 1,00904
$10^{1/4}$	= 1,77828	$10^{1/512}$	= 1,00451
$10^{1/8}$	= 1,33352	$10^{1/1024}$	= 1,00225
$10^{1/16}$	= 1,15478	$10^{1/2048}$	= 1,00112
$10^{1/32}$	= 1,07461	$10^{1/4096}$	= 1,00056
$10^{1/64}$	= 1,03663	$10^{1/8192}$	= 1,00028
$10^{1/128}$	= 1,01815	

Com essa tábua pode-se calcular o logaritmo comum de qualquer número entre 1 e 10 e então, ajustando a característica, de qualquer número positivo. Assim, seja N um número entre 1 e 10. Divide-se N pelo maior número da tábua que não excede N . Suponha que o divisor seja $10^{1/p_1}$ e que o quociente seja N_1 . Então $N = 10^{1/p_1} N_1$.

Repetindo-se o mesmo raciocínio com N_1 e continuando o processo obtém-se

$$N = 10^{1/p_1} 10^{1/p_2} \dots 10^{1/p_n} N_n.$$

Paremos quando N_n diferir da unidade apenas na sexta casa decimal. Então, até 5 casas,

$$N = 10^{1/p_1} 10^{1/p_2} \dots 10^{1/p_n}$$

e

$$\log N = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_n} .$$

Esse procedimento é conhecido como *método da raiz* para cálculo de logaritmos. Calcule, dessa maneira, $\log 4,26$ e $\log 5,00$.

9.2 Napier e a trigonometria esférica

(a) Há 10 fórmulas úteis para a resolução de triângulos esféricos. Não há necessidade de memorizar essas fórmulas, pois é fácil reproduzi-las por meio de duas regras idealizadas por Napier. Na Figura 82 está desenhado um triângulo esférico, com as letras usadas da maneira convencional. À direita do triângulo aparece um círculo dividido em 5 partes, com as mesmas letras do triângulo, exceto C , dispostas na mesma ordem. As barras sobre c, B e A significam *complemento de* (assim \overline{B} significa $90^\circ - B$). As quantidades angulares $a, b, \overline{c}, \overline{A}, \overline{B}$ são chamadas *partes circulares*. No círculo há duas partes circulares contíguas a uma dada parte e duas não contíguas a ela. Chamamos a parte dada de *parte média*, as duas partes contíguas a ela de *partes adjacentes* e as duas não adjacentes de *partes opostas*. Podem-se enunciar as regras de Napier como se segue:

1. O seno de qualquer parte média é igual ao produto dos cossenos das duas partes opostas.

2. O seno de qualquer parte média é igual ao produto das tangentes das duas partes adjacentes.

Aplicando-se cada uma dessas regras a cada uma das partes circulares obtém-se as 10 fórmulas de resolução de triângulos esféricos.

(b) A fórmula que interliga os lados a, b e c de um triângulo esférico reto chama-se *relação pitagórica* do triângulo. Encontre as relações pitagóricas de um triângulo esférico reto.

(c) As seguintes fórmulas são conhecidas como *analogias de Napier* (onde se usa analogia no sentido arcaico de “proporção”):

$$\frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(A-B)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(A+B)} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(a-b)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}c},$$

$$\frac{\operatorname{cos} \frac{1}{2}(A-B)}{\operatorname{cos} \frac{1}{2}(A+B)} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(a+b)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}c},$$

$$\frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(a-b)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(a+b)} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A-B)}{\operatorname{cotg} \frac{1}{2}C},$$

$$\frac{\operatorname{cos} \frac{1}{2}(a-b)}{\operatorname{cos} \frac{1}{2}(a+b)} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A+B)}{\operatorname{cotg} \frac{1}{2}C}.$$

Essas fórmulas, que são análogas à lei das tangentes da trigonometria plana, podem ser usadas para resolver triângulos esféricos obliquângulos quando as partes dadas são 2 lados e o ângulo que formam ou 2 ângulos e o lado comum.

1. Determine A , C , b para um triângulo esférico em que $a = 125^\circ 38'$, $c = 73^\circ 24'$, $B = 102^\circ 16'$.

2. Determine A , B , c para um triângulo esférico em que $a = 93^\circ 8'$, $b = 46^\circ 4'$, $C = 71^\circ 6'$.

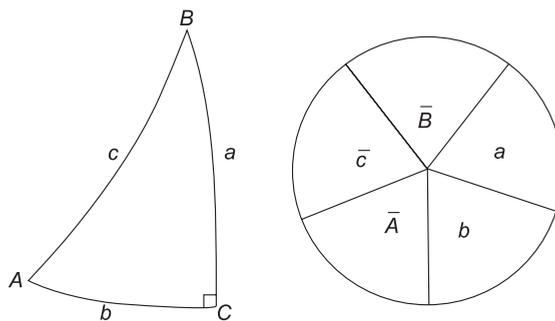


Figura 82

9.3 Barras de Napier

Eram tão amplas as dificuldades experimentadas na multiplicação de números grandes que se buscaram métodos mecânicos para levar a cabo o processo. Nesse sentido a invenção de Napier, conhecida como *barras de Napier* ou *ossos de Napier*, descrita em seu trabalho, *Rabdologiae*, publicado em 1617, conseguiu alcançar muita fama. Quanto aos princípios não difere da rede ou grade árabe, método que se descreveu na Seção 7-5; no que toca à invenção, porém, o processo é posto em prática com a ajuda de tiras de ossos, metal, madeira ou cartão, preparadas de antemão. Para cada um dos 10 dígitos devem-se ter algumas tiras, como aquela mostrada na Figura 83 para o 6, com

os vários múltiplos desse dígito. Como ilustração do uso dessas tiras, escolhemos o exemplo dado por Napier em sua *Rabdologiae*, a multiplicação de 1615 por 365. Ponha as tiras encabeçadas por 1, 6, 1, 5 lado a lado, como mostra a Figura 83. Os resultados da multiplicação de 1615 pelo 5, pelo 6 e pelo 3 de 365, a saber 8075, 9690 e 4845 podem então ser lidos facilmente, sendo necessário no máximo efetuar algumas adições simples de 2 dígitos na diagonal. Obtém-se o produto final por meio de uma adição, como mostra a figura.

- (a) Construa um conjunto de barras de Napier e efetue algumas multiplicações.
 (b) Explique como as barras de Napier podem ser usadas para efetuar divisões.

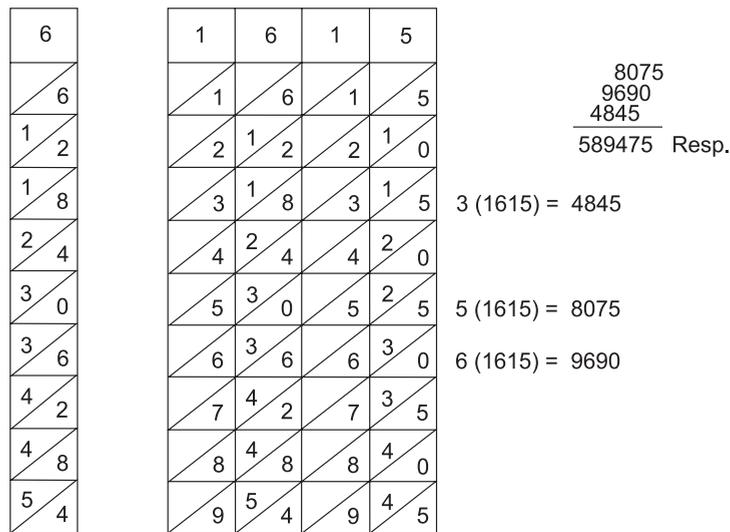


Figura 83

9.4 A régua de cálculo

(a) Construa, com a ajuda de tábuas, uma escala logarítmica, a ser designada como escala D , de cerca de 10 polegadas de comprimento. Use a escala, juntamente com um compasso de ponta seca, para efetuar multiplicações e divisões.

(b) Construa duas escalas logarítmicas, a serem chamadas escala C e escala D , de mesmo comprimento. Fazendo C deslizar ao longo de D , efetue algumas multiplicações e divisões. [Recorra às leis dos logaritmos (Exercício 9.1) para uma sugestão.]

(c) Construa uma escala logarítmica com a metade do comprimento da escala precedente D , e designe por A o conjunto de duas dessas escalas menores unidas em linha pelas extremidades. Mostre como as escalas A e D podem ser usadas para extrair raízes quadradas.

(d) Como se poderia planejar uma escala a ser usada com D para extração de raízes cúbicas?

(e) Construa uma escala exatamente como as escalas C e D , mas avançando em sentido contrário, e chame-a de escala CI (C invertida). Mostre como as escalas CI e D podem ser usadas para efetuar multiplicações. Qual a vantagem das escalas CI e D sobre as escalas C e D para esse propósito?

9.5 Corpos em queda livre

Admitindo que todos os corpos caem com uma mesma aceleração constante g , Galileu mostrou que a distância d percorrida por um corpo que cai é proporcional ao quadrado do tempo t gasto para percorrê-la. Estabeleça as seguintes etapas do raciocínio de Galileu:

(a) Se v é a velocidade ao fim do tempo t , então $v = gt$.

(b) Se v e t dizem respeito a um corpo em queda e V e T a um segundo corpo em queda, então $v/V = t/T$, e portanto o triângulo retângulo cujos catetos medem v e t é semelhante ao triângulo retângulo cujos catetos são V e T .

(c) Como a velocidade cresce uniformemente, a velocidade média de queda é $v/2$, e então $d = vt/2 = \text{área do triângulo retângulo de catetos } v \text{ e } t$.

(d) $d/D = t^2/T^2$. Mostre também que $d = gt^2/2$.

Galileu ilustrava a veracidade de sua lei final observando os tempos de descida de bolas postas a rolar em planos inclinados.

9.6 Compasso de setores

Por volta de 1597 Galileu aperfeiçoou o *compasso de setores*, um instrumento que desfrutou de considerável popularidade por mais de dois séculos. O instrumento consiste em dois braços mantidos juntos numa das extremidades por um pino, como mostra a Figura 84. Em cada braço há uma escala que se inicia com o 0 no próprio pino. Além dessas escalas podem-se usar outras, algumas delas descritas abaixo. Podem-se resolver muitos problemas com as escalas do compasso, usando como teoria apenas a semelhança de triângulos.

(a) Mostre como se pode usar o compasso de setores para dividir um dado segmento de reta em 5 partes iguais.

(b) Mostre como se pode usar o compasso de setores para mudar a escala de um desenho.

(c) Mostre como se pode usar o compasso de setores para determinar a quarta proporcional x de três quantidades a , b , c (isto é, para achar x tal que $a : b = c : x$), e assim ser aplicado em problemas de câmbio.

(d) Galileu ilustrava o uso de seu compasso calculando a importância em dinheiro que deveria ter sido investida 5 anos atrás, a juros compostos anuais de 6%, para resultar hoje num montante de 150 escudos. Tente resolver este problema com o compasso de setores.

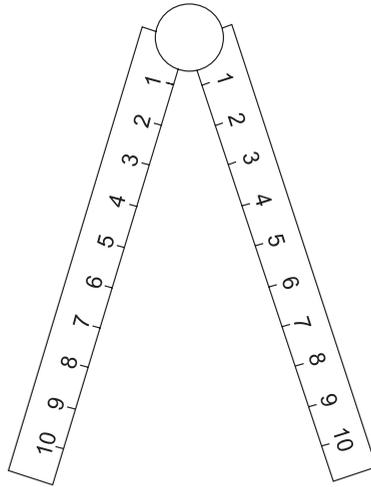


Figura 84

Dentre as escalas adicionais frequentemente encontradas nos braços de um compasso de setores há uma (a *linha de áreas*) marcada de acordo com os quadrados dos números envolvidos e usada para determinar quadrados e raízes quadradas de números. Outra escala (a *linha de volumes*) era marcada de acordo com os cubos dos números envolvidos. Outra dava as cordas de arcos de números de graus especificados para um círculo de raio unitário e servia aos engenheiros como um transferidor. Outra ainda (chamada *linha de metais*) continha os símbolos medievais do ouro, do ferro, da prata, do cobre, e assim por diante, espaçados de acordo com as densidades desses metais, e era usada para resolver problemas de como achar o diâmetro de uma esfera de ferro cujo peso era igual ao de uma esfera de cobre dada.

O compasso de setores, além de não ser preciso, não é tão fácil de manipular como a régua de cálculo.

9.7 Alguns paradoxos simples do Discorsi de Galileu

Explique os dois paradoxos geométricos seguintes, considerados por Galileu em seu *Discorsi* de 1638.

(a) Suponha que o círculo maior da Figura 85 tenha feito uma revolução completa ao rolar numa linha reta de A a B , de maneira que AB é igual ao com-

primento da circunferência do círculo maior. Então o círculo menor, preso ao maior, também fez uma revolução completa, de modo que CD é igual à circunferência do círculo menor. Segue-se então que *os dois círculos têm circunferências iguais!*

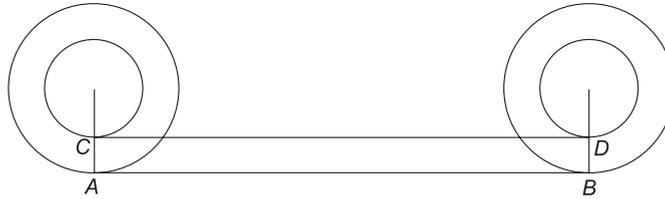


Figura 85

Esse paradoxo havia sido descrito anteriormente por Aristóteles e é às vezes mencionado como *roda de Aristóteles*.

(b) Seja $ABCD$ um quadrado e HE uma reta paralela a BC cuja intersecção com a diagonal BD é G , como mostra a Figura 86. Suponha que a circunferência $B(C)$ corte HE em F e trace os três círculos $H(G)$, $H(F)$ e $H(E)$. Mostre primeiro que a área do círculo $H(G)$ é igual à área do anel entre os círculos $H(F)$ e $H(E)$. Suponha então que H se aproxime de B de modo que, no limite, o círculo $H(G)$ se torne o ponto B , e o anel se torne a circunferência $B(C)$. Pode-se concluir então que *o ponto B sozinho é igual a toda a circunferência $B(C)$!*

(c) Explique a observação no *Discorsi* de que “nem o número de quadrados é menor do que a totalidade dos números, nem esta última é maior do que aquele”.

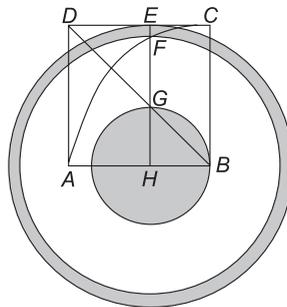


Figura 86

9.8 Leis de Kepler

(a) Em que posição de sua órbita se encontra um planeta quando é máxima sua velocidade?

(b) Teste, aproximadamente, a terceira lei de Kepler usando os seguintes dados modernos (U.A. é uma abreviação para *unidade astronômica*, o comprimento de semieixo maior da órbita da Terra).

<i>Planeta</i>	<i>Tempo em anos</i>	<i>Semieixo maior</i>
Mercúrio	0,241	0,387 U.A.
Vênus	0,615	0,723 U.A.
Terra	1,000	1,000 U.A.
Marte	1,881	1,524 U.A.
Júpiter	11,862	5,202 U.A.
Saturno	29,457	9,539 U.A.

(c) Qual seria o período de um planeta de semieixo maior igual a 100 U.A.?

(d) Qual seria o semieixo maior de um planeta cujo período é 125 anos?

(e) Dois planetas hipotéticos se movem em torno do Sol em órbitas elípticas de semieixos maiores iguais. O semieixo menor de um deles é, porém, metade do do outro. Qual a relação entre os períodos desses planetas?

(f) A Lua dá uma volta em torno da Terra em 27,3 dias numa órbita elíptica cujo semieixo maior é 60 vezes o raio da Terra. Qual seria o período de um satélite hipotético girando muito próximo da superfície da Terra?

9.9 Mosaicos

Um problema muito interessante sobre mosaicos é o de pavimentar o plano com polígonos regulares congruentes. Seja n o número de lados de cada polígono. Então cada um dos ângulos interiores de cada um dos polígonos mede $(n - 2)180^\circ/n$. Prove essa afirmação.

(a) Impondo-se que um vértice de um polígono não possa ficar no interior de um lado de outro polígono, mostre que o número de polígonos em cada vértice é dado por $2 + 4/(n - 2)$ e, portanto, deve-se ter $n = 3, 4$ ou 6 . Construa mosaicos ilustrativos.

(b) Impondo-se que um vértice de um polígono fique no interior de um lado de outro polígono, mostre que o número de polígonos acumulados em torno desse vértice é dado por $1 + 2/(n - 2)$ e, portanto, deve-se ter $n = 3$ ou $n = 4$. Construa mosaicos ilustrativos.

(c) Construa mosaicos formados de (1) triângulos equiláteros de dois tamanhos, sendo os lados dos maiores o dobro do dos menores e de modo que lados de triângulos de mesmo tamanho não se superponham; (2) quadrados de dois tamanhos, sendo os lados dos maiores o dobro do dos menores e de modo que os lados dos quadrados menores

não se superponham; (3) triângulos equiláteros congruentes e dodecágonos regulares congruentes; (4) triângulos equiláteros congruentes e hexágonos regulares congruentes; (5) quadrados congruentes e octógonos regulares congruentes.

(d) Suponhamos que se tenha um mosaico formado de 3 tipos diferentes de polígonos regulares diferentes em cada vértice. Se os polígonos de cada um desses três tipos de polígonos têm, respectivamente, p , q e r lados, mostre que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{1}{2}.$$

Uma solução inteira dessa equação é $p = 4$, $q = 6$ e $r = 12$. Construa um mosaico do tipo em consideração formado de quadrados congruentes, hexágonos regulares congruentes e dodecágonos regulares congruentes.

9.10 Provando teoremas por projeção

(a) Se l é uma reta dada em um plano π e O é um centro de projeção (não em π) dado, mostre como achar um plano π' tal que a projeção de l sobre π' seja a reta no infinito de π' . (A operação de escolher um centro de projeção O e um plano de projeção π' convenientes de modo que uma reta dada de um plano dado venha a se projetar na reta no infinito de π' chama-se “projetar uma reta dada no infinito”.)

(b) Mostre que, para a projeção de (a), a reta no infinito de π se projetará na intersecção de π' com o plano por O paralelo a π .

(c) Sejam UP , UQ , UR três retas coplanares concorrentes cortadas por duas retas OX e OY em P_1, Q_1, R_1 e P_2, Q_2, R_2 (ver Figura 87). Prove que as intersecções de Q_1R_2 e Q_2R_1 , R_1P_2 e R_2P_1 , P_1Q_2 e P_2Q_1 são colineares.

(d) Prove que se $A_1B_1C_1$ e $A_2B_2C_2$ são dois triângulos coplanares tais que B_1C_1 e B_2C_2 se encontram em L , C_1A_1 e C_2A_2 se encontram em M , A_1B_1 e A_2B_2 se encontram em N , onde L , M e N são colineares, então A_1A_2 , B_1B_2 e C_1C_2 são concorrentes. (Este é o recíproco do teorema dos dois triângulos de Desargues dado na Seção 9-8.)

(e) Mostre que por projeção paralela (uma projeção em que o centro de projeção está no infinito) uma elipse sempre pode se projetar num círculo.

(f) Em 1678 o italiano Giovanni Ceva (1648-1734) publicou um trabalho com o teorema seguinte (ver Figura 88), hoje conhecido pelo seu nome: *As 3 retas que ligam 3 pontos L, M, N dos lados BC, CA, AB de um triângulo ABC aos vértices opostos são concorrentes se, e somente se,*

$$\left(\frac{AN}{NB} \right) \left(\frac{BL}{LC} \right) \left(\frac{CM}{MA} \right) = +1.$$

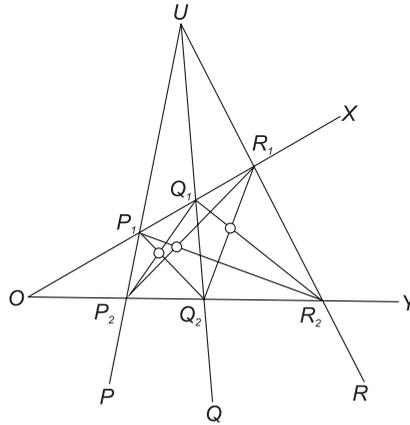


Figura 87

Trata-se de um parceiro do teorema de Menelau, enunciado na Seção 6-5. Usando o teorema de Ceva prove que as retas que ligam os vértices de um triângulo aos pontos opostos de tangência com a circunferência inscrita são concorrentes. Então, fazendo uso de (e), prove que as retas que ligam os vértices de um triângulo aos pontos opostos de tangência com uma elipse inscrita são concorrentes.

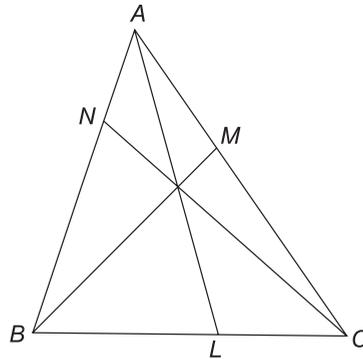


Figura 88

(g) La Hire inventou a seguinte interessante aplicação do plano nele próprio (ver Figura 89): Trace duas retas paralelas a e b e escolha um ponto P do plano de ambas. Por um segundo ponto M do plano, trace uma reta que corta a em A e b em B . Tome-se como imagem M' de M o ponto de intersecção com MP da paralela a AP por B .

1. Mostre que M' independe da particular reta MAB por M usada para determiná-la.
2. Generalize a aplicação de La Hire para o caso de a e b não serem paralelas.

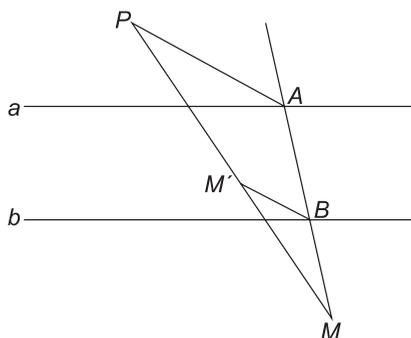


Figura 89

9.11 A “demonstração” empírica juvenil de Pascal

Preencha detalhadamente as “demonstrações” empíricas indicadas nas Figuras 77 e 78.

9.12 O teorema de Pascal

As consequências do teorema do hexagrama místico de Pascal são muito numerosas e encantadoras e o montante de pesquisas efetuadas em torno de sua configuração é quase inacreditável. Há 60 maneiras possíveis de formar um hexágono com 6 pontos de uma cônica e, pelo teorema de Pascal, a cada hexágono corresponde uma *reta de Pascal*. Essas 60 retas passam, 3 a 3, por 20 pontos, chamados *pontos de Steiner* que, por sua vez, estão, 4 a 4, em 15 retas chamadas *retas de Plücker*. As retas de Pascal também concorrem, 3 a 3, noutro conjunto de pontos, os chamados *pontos de Kirkman*, que são 60. Em correspondência a cada ponto de Steiner há 3 pontos de Kirkman tais que os 4 estão numa reta, chamada *reta de Cayley*. Há 20 retas de Cayley e elas passam, 4 a 4, por 15 pontos, chamados *pontos de Salmon*. Há muitas outras extensões e propriedades da configuração e o número de provas diferentes já dadas do teorema do hexagrama místico é muito grande. Neste exercício consideraremos uns poucos dos muitos corolários do teorema do hexagrama místico que podem ser obtidos fazendo-se com que alguns dos 6 pontos coincidam com outros. Para simplificar numeraremos os pontos do hexagrama por 1, 2, 3, 4, 5, 6. O teorema de Pascal garante então que as intersecções dos pares de retas 12, 45; 23, 56; 34, 61 são colineares se, e somente se, os 6 pontos estão numa cônica.

(a) Se um pentágono 12345 está inscrito numa cônica, mostre que os pares de retas 12, 45; 23, 51; 34 e a tangente 1, se cortam em 3 pontos colineares.

(b) Dados 5 pontos, trace por um deles a tangente à cônica determinada pelos 5 pontos.

(c) Dados 4 pontos de uma cônica e a tangente a ela num dos pontos, construa outros pontos da cônica.

(d) Mostre que os pares de lados opostos de um quadrângulo inscrito numa cônica, juntamente com os pares de tangentes aos vértices opostos, cortam-se em 4 pontos colineares.

(e) Mostre que se um triângulo está inscrito numa cônica, então as tangentes aos vértices cortam os lados opostos em 3 pontos colineares.

(f) Dados 3 pontos de uma cônica e as tangentes a dois deles, construa a tangente ao outro.

9.13 O triângulo de Pascal

Estabeleça as seguintes relações, todas elas desenvolvidas por Pascal, envolvendo os números do triângulo aritmético.

(a) Qualquer elemento (não da primeira linha nem da primeira coluna) do triângulo aritmético é igual à soma do elemento exatamente acima dele com o elemento exatamente à sua esquerda.

(b) Qualquer elemento do triângulo aritmético, subtraído de 1, é igual à soma de todos os elementos acima da linha e à esquerda da coluna que contêm o elemento dado.

(c) O m -ésimo elemento da n -ésima linha é $(m+n-2)!/(m-1)!(n-1)!$, onde, por definição, $0! = 1$.

(d) O elemento da m -ésima linha e da n -ésima coluna é igual ao elemento da n -ésima linha e m -ésima coluna.

(e) A soma dos elementos de uma diagonal qualquer é duas vezes a soma dos elementos da diagonal precedente.

(f) A soma dos elementos da n -ésima diagonal é 2^{n-1} .

(g) Consideremos uma coleção de n objetos. Qualquer conjunto de r desses objetos, considerados sem se levar em conta a ordem, chama-se *combinação dos n objetos tomados r de cada vez* (ou r a r). Ou ainda, mais resumidamente, r -*combinação* dos n objetos. Usaremos o símbolo $C(n, r)$ para denotar o número dessas combinações. Assim, as 2-combinações das 4 letras a, b, c, d são

$$ab, ac, ad, bc, bd, cd,$$

donde $C(4, 2) = 6$. Os textos de matemática do colegial mostram que

$$C(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

Mostre que $C(n, r)$ aparece na intersecção da $(n + 1)$ -ésima diagonal com a $(r + 1)$ -ésima coluna do triângulo aritmético.

Temas

- 9/1 Razões para a ascensão da matemática no século XVII.
- 9/2 Napier como escritor de ficção científica em sua época.
- 9/3 A utilização das barras de Napier e do compasso de setores de Galileu.
- 9/4 Os selos nicaraguenses de 1971 sobre fórmulas científicas.
- 9/5 Razões para a base logarítmica e e para o radiano como unidade de medida de ângulos.
- 9/6 Harriot como o pai da moderna teoria das equações.
- 9/7 Harriot na América.
- 9/8 Os símbolos matemáticos de Oughtred.
- 9/9 Os efeitos perniciosos da Inquisição.
- 9/10 Ciência e religião podem ser conciliadas?
- 9/11 Kepler e o princípio de continuidade.
- 9/12 A arte como motivação para a geometria projetiva.
- 9/13 O triângulo de Pascal antes de Pascal.
- 9/14 História da cicloide.

Bibliografia

- BARLOW, C. W. C. e BRYAN, G. H. *Elementary Mathematical Astronomy*. Londres, University Tutorial Press, 1923.
- BELL, E. T. *Men of Mathematics*. Nova York, Simon and Schuster, 1937.
- BISHOP, M. G. *Pascal, The Life of Genius*. Nova York, Reynal & Hitchcock, 1936.
- BIXBY, William. *The Universe of Galileo and Newton*. Nova York, Harper & Row, 1964.
- BRASCH, F. F. (ed.) *Johann Kepler, 1571-1630. A Tercentenary Commemoration of His Life and Work*. Baltimore, Williams & Wilkins, 1931.
- CAJORI, Florian. *A History of Logarithmic Slide Rule and Allied Instruments*. Nova York, McGraw-Hill, 1909.
- . *William Oughtred, A Great Seventeenth-Century Teacher of Mathematics*. Chicago, Open Court, 1916.

- CAJORI, Florian. *A History of Mathematical Notation*. Chicago, Open Court, 1929, 2 vols.
- CASPAR, Max. *Kepler*. Trad. para o inglês por Doris Hellman. Nova York, Abelard-Schuman, 1959.
- COOLIDGE, J. L. *A History of Geometrical Methods*. Nova York, Oxford University Press, 1940.
- . *The Mathematics of Great Amateurs*. Nova York, Oxford University Press, 1949.
- COXETER, H. S. M. *Regular Polytopes*. Nova York, Pitman, 1949.
- DAVID, F. N. *Games, Gods and Gambling*. Nova York, Hafner, 1962.
- DE SANTILLANA, Giorgio. *The Crime of Galileo*. Chicago, University of Chicago Press, 1955.
- DRAKE, Stillman. *Galileo at Work, His Scientific Biography*. Chicago, University of Chicago Press, 1978.
- DREYER, J. L. E. *Tycho Brahe: A Picture of the Scientific Life and Work in the Sixteenth Century*. Nova York, Dover, 1963.
- EDWARDS, A. W. F. *Pascal's Arithmetic Triangle*. Oxford, Oxford University Press, 1987.
- FAHIE, J. J. *Galileo, His Life and Work*. Londres, John Murray, 1903.
- FERMI, Laura e FERMI, Bernardini. *Galileo and the Scientific Revolution*. Nova York, Basic Books, 1961.
- GADE, J. A. *The Life and Times of Tycho Brahe*. Princeton (N.J.), Princeton University Press, 1970.
- GALILEI, Galileu. *Dialogues Concerning Two New Sciences*. Trad. para o inglês por Henry Crew e Alfonso de Salvio. Introdução de Antônio Favaro. Nova York, Macmillan, 1914. Reimpresso por Dover, Nova York.
- . *Discourses on the Two Chief Systems*. Editado por Stillman Drake. Berkeley (Calif.), University of California Press, 1953.
- . *Discourses on the Two Chief Systems*. Editado por Giorgio de Santillana. Chicago, University of Chicago Press, 1953.
- GRAY, J. V. e FIELD, J. J. *The Geometrical Work of Girard Desargues*. Nova York, Springer-Verlag, 1987.
- HACKER, S. G. *Arithmetical View Points*. Pullman (Wash.), mimeografado no Washington State College, 1948.
- HARTLEY, Miles C. *Patterns of Polyhedrons*. Ann Arbor (Mich.), Edwards Brothers, 1957.
- HOOPER, Alfred. *Makers of Mathematics*. Nova York, Random House, 1948.
- IVINS JR., W. M. *Art and Geometry*. Cambridge (Mass.), Harvard University Press, 1946.
- KNOTT, C. G. *Napier Tercentenary Memorial Volume*. Londres, Longmans, Green, 1915.
- KOESTLER, Arthur. *The Watershed, a Life of Kepler*. Nova York, Doubleday, 1960.
- KRAITCHIK, Maurice. *Mathematical Recreations*. Nova York, W. W. Norton, 1942.
- McMULLIN, Ernan. (ed.). *Galileo: Man of Science*. Nova York, Basic Books, 1967.

- MESNARD, Jean. *Pascal, His Life and Works*. Nova York, Philosophical Library, 1952.
- MORTIMER, Ernest. *Blaise Pascal: The Life and Work of a Realist*. Nova York, Harper and Brothers, 1959.
- MUIR, Jane. *Of Men and Numbers, The Story of the Great Mathematicians*. Nova York, Dodd, Mead, 1961.
- NORTHROP, E. P. *Riddles in Mathematics*. Princeton (N. J.), D. Van Nostrand, 1944.
- PEARCE, Peter e PEARCE, Susan. *Polyhedra Primer*. Nova York, Van Nostrand, 1978.
- RONAN, Colin. *Galileo*. Nova York, C. P. Putnam's Sons, 1974.
- SMITH, D. E. *A Source Books in Mathematics*. Nova York, McGraw-Hill, 1929.
- SULLIVAN, J. W. N. *The History of Mathematics in Europe, From the Fall of Greek Science to the Rise of the Conception of Mathematical Rigour*. Nova York, Oxford University Press, 1925.
- TODHUNTER, Isaac. *A History of the Mathematical Theory of Probability, From the Time of Pascal to that of Laplace*. Nova York, Chelsea, 1949.
- TURNBULL, H. N. *The Great Mathematicians*. Nova York, New York University Press, 1961.

A geometria analítica e outros desenvolvimentos pré-cálculo

10.1 Geometria analítica

Enquanto Desargues e Pascal abriam um novo campo, a geometria projetiva, Descartes e Fermat concebiam as ideias da geometria analítica moderna. Há uma diferença fundamental entre as duas matérias, pois enquanto a primeira é um *ramo* da geometria a segunda é um *método* da geometria. Poucas experiências escolares podem ser mais emocionantes para um aluno do curso colegial avançado ou início de faculdade do que uma introdução a esse novo e poderoso método de enfrentar problemas geométricos. A essência da ideia, quando aplicada ao plano, lembre-se, consiste em estabelecer uma correspondência entre pontos do plano e pares ordenados de números reais, viabilizando assim uma correspondência entre curvas do plano e equações em duas variáveis, de maneira tal que para cada curva do plano está associada uma equação bem definida $f(x, y) = 0$ e para cada equação dessas está associada uma curva (ou conjunto de pontos) bem definida do plano. Estabelece-se, além disso, uma correspondência entre as propriedades algébricas e analíticas da equação $f(x, y) = 0$ e as propriedades geométricas da curva associada. Transfere-se assim, de maneira inteligente, a tarefa de provar um teorema em geometria para a de provar um teorema correspondente em álgebra e análise.

Há divergências de opinião sobre quem inventou a geometria analítica e mesmo sobre a época que merece o crédito dessa invenção. É óbvio, porém, que para responder a essas questões é preciso antes que haja um entendimento a respeito do que constitui a geometria analítica. Já vimos que os gregos antigos dedicaram-se consideravelmente à álgebra geométrica e que a ideia de coordenadas foi usada no mundo antigo pelos egípcios e os romanos na agrimensura e pelos gregos na confecção de mapas. Pesa particularmente a favor dos gregos o fato de que Apolônio deduziu o cerne de sua geometria das secções cônicas de equivalentes geométricos de certas equações cartesianas dessas curvas, uma ideia que parece ter-se originado com Menecmo. Já observamos também, na Seção 8-4, que no século XIV Nicole Oresme antecipou outros aspectos da geometria analítica ao representar graficamente certas leis, confrontando a variável dependente (*latitudo*) com a independente (*longitudo*), à medida que se permitia que esta última sofresse pequenos acréscimos. Os que defendem Oresme como o inventor da geometria analítica argumentam com esse

aspecto de seu trabalho, que seria a primeira manifestação explícita da equação da reta, e com algumas outras noções a que ele chegou envolvendo espaços de dimensões superior. Um século depois de ter sido escrito, o texto de Oresme mereceu várias tiragens; daí que pode ter influenciado matemáticos posteriores.

As apreciações precedentes sobre a geometria analítica parecem confundir o assunto com um ou mais de seus aspectos. Mas a essência real desse campo da matemática reside na transferência de uma investigação geométrica para uma investigação algébrica correspondente. Antes de a geometria analítica poder desempenhar plenamente esse papel, teve de esperar o desenvolvimento do simbolismo e dos processos algébricos. Assim, parece mais correto concordar com a maioria dos historiadores que consideram as contribuições decisivas feitas no século XVII pelos matemáticos franceses René Descartes e Pierre de Fermat como a origem essencial do assunto. Sem dúvida, só depois da contribuição dada por esses dois homens à geometria analítica é que esta ganhou os contornos iniciais da forma com que estamos familiarizados.

10.2 Descartes

René Descartes nasceu perto de Tours em 1596. Aos oito anos de idade foi enviado a uma escola jesuíta em La Flèche. Foi então que desenvolveu (de início devido à sua saúde frágil) o hábito que o acompanhou por toda a vida de ficar até tarde na cama de manhã. Posteriormente Descartes consideraria essas horas matinais de descanso como seus períodos de tempo mais produtivos. Em 1612 deixou a escola e foi para Paris onde, logo depois, em companhia de Mersenne e Mydorge (ver Seção 10-6), passou a dedicar parte de seu tempo ao estudo da matemática. Em 1617, juntando-se ao exército do príncipe Maurício de Orange, iniciou uma carreira militar de vários anos. Depois de abandonar a vida militar passou quatro ou cinco anos viajando pela Alemanha, Dinamarca, Holanda, Suíça e Itália. Retornando a Paris, onde ficaria uns dois anos, continuou seus estudos matemáticos e suas contemplações filosóficas e, por algum tempo, dedicou-se a construir instrumentos ópticos. Depois disso resolveu mudar para a Holanda, então no auge de seu poder, onde viveu cerca de 20 anos, consagrando-se à filosofia, à matemática e à ciência. Em 1649, relutantemente, foi para a Suécia a convite da rainha Cristina. Poucos meses mais tarde ele contraiu uma infecção pulmonar, vindo a morrer em Estocolmo no início de 1650. O grande filósofo e matemático foi sepultado na Suécia e os esforços visando levar seus restos mortais para a França não tiveram êxito. Só depois de 17 anos de sua morte é que seus ossos foram levados para a França e reenterrados em Paris, exceto os da mão direita que foram guardados como “souvenir” pelo alto funcionário francês incumbido do transporte da ossada.

Foi durante a sua estada de 20 anos na Holanda que Descartes produziu seus escritos. Os primeiros quatro anos foram gastos para escrever *Le monde*, uma descrição física do Universo que acabou sendo abandonada incompleta quando Descartes soube da condenação de Galileu pela Igreja. Pôs-se então a escrever um tratado filosófico sobre a ciência universal sob o título de *Discours de la Méthode pour Bien Conduire sa Raison*

et Chercher la Vérité dans les Sciences (Discurso do método para bem conduzir a razão e procurar a verdade nas ciências); acompanhavam esse tratado três apêndices: *La dioptrique*, *Les météores* e *La géométrie*. O *Discours*, com seus apêndices, foi publicado em 1637; a contribuição de Descartes à geometria analítica aparece no último desses três apêndices. Em 1641 Descartes publicou um trabalho intitulado *Meditationes* devotado grandemente à explanação de suas ideias filosóficas esboçadas no *Discours*. Em 1644 lançou *Principia philosophiae*, um trabalho que apresenta algumas leis da natureza imprecisas e uma teoria cosmológica inconsistente envolvendo vórtices.



René Descartes
(Coleção David Smith)

La géométrie, o famoso terceiro apêndice do *Discours*, ocupa cerca de cem páginas do trabalho completo e se divide em três partes. Trata-se da única publicação matemática de Descartes. A primeira parte contém uma explanação de alguns dos princípios da geometria algébrica e revela um avanço real em relação aos gregos. Para os gregos, uma variável correspondia ao comprimento de um segmento, o produto de duas variáveis à área de algum retângulo e o produto de três variáveis ao volume de algum paralelepípedo retângulo. Os gregos não iam além disso. Para Descartes, por outro lado, x^2 não sugeria uma área, antes porém o quarto termo da proporção $1 : x = x : x^2$, suscetível de ser representado por um segmento de reta fácil de construir quando se conhece x . Usando-se um segmento unitário é possível, dessa maneira, representar qualquer potência de uma variável, ou um produto de variáveis, por meio de um segmento de reta e então, quando se atribuem valores a essas variáveis, construir efetivamente o segmento de reta com os instrumentos euclidianos. Com essa aritmetização da geometria, Descartes, na primeira parte de *La géométrie*, marcava x num eixo dado e então um comprimento y , formando um ângulo fixo com esse eixo, com o objetivo de construir pontos cujo x e cujo y satisfizessem uma relação dada (ver Figura 90). Se, por exemplo, temos a relação $y = x^2$, então, para cada valor de x , estamos em condições de construir o y correspondente como quarto termo da proporção acima. Descartes mostrou um

interesse especial em obter relações como essa para curvas descritas cinematicamente. Como aplicação desse método, ele discutiu o problema: Se $p_1, \dots, p_m, p_{m+1}, \dots, p_{m+n}$ são os comprimentos de $m+n$ segmentos de reta traçados de um ponto P a $m+n$ retas dadas, formando ângulos dados com essas retas, e se

$$p_1 p_2 \dots p_m = k p_{m+1} p_{m+2} \dots p_{m+n}.$$

onde k é constante, ache o lugar de P . Os gregos antigos resolveram esse problema para os casos em que m e n não excedem 2 (ver Seção 6-9), mas o problema geral frustrara todos os esforços. Facilmente Descartes mostrou que casos superiores do problema levam a lugares de grau maior que dois. Em certos casos, ele efetivamente foi capaz de construir pontos do lugar com os instrumentos euclidianos [ver Exercício 10.2(a)]. O fato de a geometria analítica de Descartes ter condições de fazer frente ao problema geral é um tributo esplêndido à potência do novo método. Consta que Descartes se inspirou nas tentativas que fez de resolver esse problema para inventar a geometria analítica.

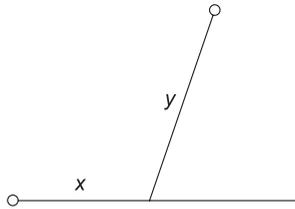


Figura 90

A segunda parte de *La géométrie* traz, entre outras coisas, uma classificação de curvas agora superada e um método interessante de construir tangentes a curvas que, em linhas gerais, é o seguinte (ver Figura 91). Sejam $f(x, y) = 0$ a equação da curva dada e (x_1, y_1) as coordenadas do ponto P da curva pelo qual se deseja traçar a tangente. Seja Q um ponto do eixo x , de coordenadas $(x_2, 0)$. Então a equação da circunferência de centro Q pelo ponto P é

$$(x - x_2)^2 + y^2 = (x_1 - x_2)^2 + y_1^2.$$

Eliminando-se y do sistema formado pela equação acima e por $f(x, y) = 0$, obtém-se uma equação em x que leva às abscissas dos pontos onde a circunferência corta a curva dada. Determina-se a seguir x_2 de modo que essa equação em x tenha um *par* de raízes iguais a x_1 . Essa condição faz com que Q seja a intersecção do eixo x com a normal à curva em P , uma vez que a circunferência é agora tangente à curva dada em P . Desenhada essa circunferência, pode-se facilmente construir a tangente desejada. Como exemplo do método, considere a construção da tangente à parábola $y^2 = 4x$ no ponto $(1, 2)$. Temos aqui

$$(x - x_2)^2 + y^2 = (1 - x_2)^2 + 4.$$

A eliminação de y fornece

$$(x - x_2)^2 + 4x = (1 - x_2)^2 + 4,$$

ou

$$x^2 + 2x(2 - x_2) + (2x_2 - 5) = 0.$$

A condição para que essa equação quadrática tenha duas raízes iguais é que seu discriminante seja nulo — isto é, que

$$(2 - x_2)^2 - (2x_2 - 5) = 0,$$

ou

$$x_2 = 3.$$

Pode-se traçar então a circunferência de centro $(3, 0)$ pelo ponto $(1, 2)$ da curva o que propicia a construção da tangente desejada. Descartes aplicou esse método de construir tangentes a muitas curvas diferentes, inclusive a uma das ovas quárticas que tem seu nome.¹ Temos assim um processo geral que nos mostra exatamente o que fazer para resolver nosso problema, mas deve-se confessar que nos casos mais complicados a álgebra necessária pode ser assustadora. Aí está um ponto fraco da geometria analítica elementar: muitas vezes sabemos o que fazer mas falta capacidade técnica para fazê-lo. Obviamente há métodos muito melhores do que esse de Descartes para se encontrar tangentes a curvas.

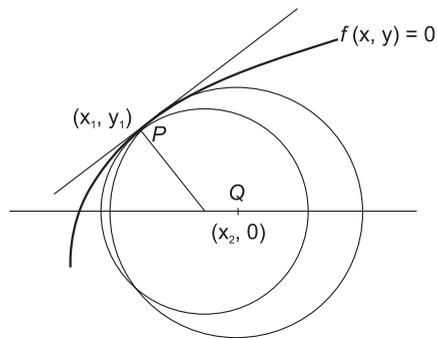


Figura 91

¹ *Oval cartesiana* é o lugar dos pontos cujas distâncias, r_1 e r_2 , a dois pontos fixos, satisfazem a relação $r_1 + mr_2 = a$, onde m e a são constantes. As cônicas centrais são particulares ovas cartesianas.

LIVRE SECOND. 321

Après cela prenant vn point a discretion dans la courbe, comme C, sur lequel ie suppose que l'instrument qui fert a la descrire est appliqué, ie tire de ce point C la ligne CB parallele a GA, & pourceque CB & BA sont deux quantités indeterminées & inconnuës, ie les nomme l'vne y & l'autre x . mais afin de trouuer le rapport de l'vne à l'autre; ie considere aussy les quantités connuës qui determinent la description de cete ligne courbe, comme GA que ie nomme a , KL que ie nomme b , & NL parallele à GA que ie nomme c . puis ie dis, comme NL est à LK, ou c à b , ainsi CB, ou y , est à BK, qui est par consequent $\frac{b}{c}y$: & BL est $\frac{b}{c}y - b$, & AL est $x + \frac{b}{c}y - b$. de plus comme CB est à LB, ou y à $\frac{b}{c}y - b$, ainsi a , ou GA, est à LA, ou $x + \frac{b}{c}y - b$. de façon que multipliant

Sf tipliant

A terceira parte de *La géométrie* trata da resolução de equações de grau maior que dois. Faz-se uso do que chamamos agora *regra de sinais de Descartes*, cuja finalidade é determinar limites para o número de raízes positivas e o número de raízes negativas de um polinômio (ver Exercício 10.3). A convenção do uso das primeiras letras de nosso alfabeto para indicar constantes e as últimas letras para indicar variáveis começou com Descartes em *La géométrie*. Deve-se a ele também nossa atual notação para potências (como a^3 , a^4 e assim por diante), o que representa um grande avanço em relação a Viète, e a percepção de que uma letra poderia representar qualquer quantidade, positiva ou negativa. O uso do *princípio de identidade de polinômios* também começou com Descartes. No exemplo do último parágrafo, impusemos a anulação do discriminante da equação quadrática

$$x^2 + 2x(2 - x_2) + (2x_2 - 5) = 0,$$

a fim de determinar o valor de x_2 para o qual as duas raízes fossem iguais a 1. Como ilustração do princípio de identidade de polinômios, poderíamos obter x_2 fazendo

$$x^2 + 2(2 - x_2)x + (2x_2 - 5) \equiv (x - 1)^2 \equiv x^2 - 2x + 1,$$

o que, igualando-se os coeficientes dos termos semelhantes, fornece

$$2(2 - x_2) = -2 \quad \text{e} \quad 2x_2 - 5 = 1.$$

De qualquer das igualdades anteriores tira-se $x_2 = 3$.

La géométrie não é, de maneira nenhuma, um desenvolvimento sistemático do método analítico, e o leitor é obrigado a quase construir o método por si mesmo, a partir de certas informações isoladas. Há 32 figuras no livro, mas em nenhuma delas se encontram colocados explicitamente os eixos coordenados. O texto foi escrito intencionalmente de maneira obscura e como resultado era difícil de ler, o que limitava muito a divulgação de seu conteúdo. Em 1649 veio à luz uma tradução latina da obra, com notas explanatórias de F. de Beaune, editada e comentada por Frans van Schooten, o filho. Tanto essa como uma outra edição revisada de 1659-1661 tiveram ampla circulação. Um século depois, ou um pouco mais, o assunto adquiriu a forma hoje familiar nos textos universitários. As palavras *coordenadas*, *abscissa* e *ordenada*, no sentido técnico que têm hoje, foram contribuições de Leibniz em 1692.

Vejamus duas lendas que descrevem o estalo através do qual Descartes teria tido sua visão inicial da geometria analítica. De acordo com uma delas isso ocorreu num sonho. Na véspera do dia de São Martinho, 10 de novembro de 1616, no acampamento de inverno de sua tropa às margens do Danúbio, Descartes passou pela experiência de três sonhos singularmente vividos e coerentes que, segundo ele, mudaram o curso de sua vida. Os sonhos, conforme suas palavras, iluminaram os propósitos de sua vida e determinaram seus futuros esforços revelando-lhe uma “ciência maravilhosa” e uma “descoberta assombrosa”. Descartes nunca revelou explícita e exatamente do que se tratava, mas há

suposições de que essa ciência seria a geometria analítica, ou a aplicação da álgebra à geometria. Só 18 anos mais tarde ele iria expor algumas de suas ideias em seu *Discours*. Outra lenda, parecida com a história da queda da maçã de Isaac Newton, dá conta de que o estalo inicial da geometria analítica teria ocorrido a Descartes ao observar uma mosca que caminhava pelo forro de seu quarto, junto a um dos cantos. Teria chamado a sua atenção que o caminho da mosca sobre o forro poderia ser descrito se, e somente se, a relação ligando as distâncias dela às paredes adjacentes fosse conhecida. Embora essa história seja apócrifa, é inquestionável seu valor pedagógico.

Um dos outros dois apêndices do *Discours* é dedicado à óptica e o outro à explanação de numerosos fenômenos meteorológicos ou atmosféricos, incluindo o arco-íris.

Dentre outras contribuições atribuídas a Descartes figura a quase descoberta da relação $v - a + f = 2$, ligando o número de vértices v , arestas a e faces f de um poliedro conexo (ver Exercício 3-12). Foi ele o primeiro a discutir a chamada *folium de Descartes* uma curva nodal cúbica, mas ele nunca a descreveu completamente. Em sua correspondência considerou parábolas de ordem superior ($y^n = px$, $n > 2$) e deu uma construção notavelmente elegante da construção da tangente à cicloide.

10.3 Fermat

Ao mesmo tempo em que Descartes formulava as bases da geometria analítica moderna, o assunto também ocupava a atenção de outro gênio matemático francês, Pierre de Fermat. A atribuição da prioridade a Fermat se apoia numa carta escrita a Roberval em setembro de 1636, na qual afirma que suas ideias já tinham então sete anos. Os detalhes a respeito apareceram no artigo *Isogoge ad locus planos et solidos*, publicado postumamente. Nele encontramos a equação geral da reta e da circunferência e uma discussão sobre hipérbolas, elipses e parábolas. Num trabalho sobre tangentes e quadraturas, concluído antes de 1637, Fermat definiu muitas curvas novas analiticamente. Onde Descartes sugeriu umas poucas curvas novas, geradas por movimentos mecânicos, Fermat propôs muitas curvas novas, definidas por equações algébricas. As curvas $x^m y^n = a$, $y^n = ax^m$ e $r^n = a\theta$ são ainda conhecidas como *hipérbolas*, *parábolas* e *espirais de Fermat*. Também se deve a Fermat, na esteira de seu trabalho com quadraturas, a curva que posteriormente seria chamada *feiticeira de Agnesi*, em alusão à matemática, linguista e filósofa do século XVIII, Maria Gaetana Agnesi (ver Seção 12-7). Assim, em grande escala, onde Descartes partia de um lugar geométrico e então encontrava sua equação, Fermat partia de uma equação e então estudava o lugar correspondente. São esses os dois aspectos recíprocos do princípio fundamental da geometria analítica. Fermat usou a notação de Viète para escrever seu trabalho que, assim, tinha uma aparência arcaica em termos de simbolismo quando comparado ao de Descartes.

Segundo um registro aparentemente confiável, Fermat nasceu em Beaumont de Lomagne, perto de Toulouse, a 17 de agosto de 1601. Sabe-se que morreu em Castres ou Toulouse a 12 de janeiro de 1665. Em sua laje tumular, originalmente na igreja dos agostinianos em Toulouse e depois transferida para o museu local, consta a data prece-

dente como a da morte de Fermat, com 57 anos de idade. Devido a esse conflito de datas costuma-se escrever (1601?-1665) para nascimento e morte de Fermat. De fato, por várias razões, seu ano de nascimento, a julgar pelas informações de vários escritores, varia de 1590 a 1608.



Pierre De Fermat
(Coleção David Smith)

Fermat era filho de um comerciante de couro e recebeu sua educação inicial em casa. Com a idade de 30 anos alcançou o posto de conselheiro do parlamento de Toulouse onde sua atuação se pautou pelo cumprimento do dever, modesta e escrupulosamente. Como advogado humilde e discreto, reservou o melhor de seu tempo de lazer à matemática. Embora publicasse muito pouco durante sua vida, manteve correspondência científica com muitos dos principais matemáticos de seu tempo e, dessa maneira, exerceu considerável influência sobre seus contemporâneos. Fermat enriqueceu tantos ramos da matemática com tantas contribuições importantes que é considerado o maior matemático francês do século XVII.

Dentre as variadas contribuições de Fermat à matemática, a mais importante é a fundação da moderna teoria dos números. Neste campo a intuição e o talento de Fermat eram extraordinários. Sua atenção para a teoria dos números provavelmente foi despertada pela tradução latina da *Aritmética* de Diofanto, feita por Bachet de Méziriac em 1621. Muitas das contribuições de Fermat ao assunto se deram na forma de enunciados e notas escritos nas margens do exemplar que tinha do trabalho de Bachet. Em 1670, cinco anos após sua morte, esse material foi incorporado numa nova, mas infelizmente muito mal impressa, edição da *Aritmética*, publicada por um dos filhos de Fermat, Clément-Samuel. Muitos dos teoremas enunciados

por Fermat mostraram-se depois verdadeiros. Os exemplos seguintes ilustram o caráter das investigações de Fermat.

1. *Se p é primo e a é primo com p , então $a^{p-1} - 1$ é divisível por p .* Por exemplo se $p = 5$ e $a = 2$, então $a^{p-1} - 1 = 15 = (5)(3)$. Esse teorema, conhecido como *pequeno teorema de Fermat*, foi apenas enunciado por Fermat numa carta de 18 de outubro de 1640 a Frénicle de Bessy. A primeira demonstração publicada desse teorema data de 1736 e é devida a Euler (ver Exercício 10-5).

2. *Todo primo ímpar pode ser expresso como a diferença de dois quadrados de uma, e uma só, maneira.* Fermat deu uma demonstração simples desse fato. Se p é um primo ímpar, pode-se verificar facilmente que

$$p = \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{p-1}{2}\right)^2.$$

Por outro lado, se $p = x^2 - y^2$, então $p = (x+y)(x-y)$. Mas, como p é primo, os únicos fatores de p são 1 e p ; daí, $x+y = p$ e $x-y = 1$ ou $x = (p+1)/2$ e $y = (p-1)/2$.

3. *Um primo da forma $4n+1$ pode ser representado como a soma de dois quadrados.* Por exemplo, $5 = 4 + 1$, $13 = 9 + 4$, $17 = 16 + 1$, $29 = 25 + 4$. O primeiro enunciado desse teorema é de Fermat e figura em uma carta a Mersenne, datada de 25 de dezembro de 1640. A primeira demonstração publicada desse resultado, incluindo a unicidade da representação, é de Euler e data de 1754.

4. *Um número primo de forma $4n+1$ é apenas uma vez a hipotenusa de um triângulo retângulo de lados inteiros; seu quadrado é duas vezes; seu cubo é três vezes; e assim por diante.* Por exemplo, considere $5 = 4(1) + 1$. Tem-se $5^2 = 3^2 + 4^2$; $25^2 = 15^2 + 20^2 = 7^2 + 24^2$; $125^2 = 75^2 + 100^2 = 35^2 + 120^2 = 44^2 + 117^2$.

5. *Todo inteiro não negativo pode ser representado como soma de no máximo quatro quadrados.* Esse difícil teorema foi demonstrado por Lagrange em 1770.

6. *A área de um triângulo retângulo de lados inteiros não pode ser um quadrado perfeito inteiro.* Esse resultado também foi estabelecido por Lagrange posteriormente.

7. *Há uma única solução inteira de $x^2 + 2 = y^3$ e apenas duas de $x^2 + 4 = y^3$.* Esse problema foi lançado como um desafio aos matemáticos ingleses. A solução da primeira equação é $x = 5$, $y = 3$ e as soluções da segunda são $x = 2$, $y = 2$ e $x = 11$, $y = 5$.

8. *Não existem inteiros positivos x, y, z tais que $x^4 + y^4 = z^2$.*

9. *Não existem inteiros positivos x, y, z, n , onde $n > 2$, de modo que $x^n + y^n = z^n$.* Esta é a famosa conjectura conhecida como *último "teorema" de Fermat*. Ela foi enunciada por Fermat na margem de seu exemplar da *Aritmética* de Diofanto, em tradução de Bachet, ao lado do Problema 8 do Livro II: "Dado um número quadrado, dividi-lo em dois quadrados". Na nota marginal de Fermat lê-se, "Dividir um cubo em dois cubos, uma quarta potência ou, em geral uma potência qualquer em duas potências da mesma denominação acima da segunda é impossível, e eu seguramente encontrei uma prova

admirável desse fato, mas a margem é demasiado estreita para contê-la². Será sempre um enigma saber se Fermat tinha ou não, realmente, uma demonstração correta de sua afirmação. O fato é que, desde então, muitos dos mais brilhantes matemáticos empenharam seu talento na resolução do problema, mas a conjectura geral ainda permanece aberta. Em algum lugar Fermat demonstrou o caso $n = 4$; e Euler forneceu uma prova (depois melhorada por outros) para $n = 3$. Por volta de 1825 Legendre e Dirichlet demonstraram independentemente o caso $n = 5$; o teorema foi provado em 1839 por Lamé para $n = 7$. O matemático alemão E. Kummer (1810-1893) empreendeu avanços significativos no estudo do problema. Em 1843 submeteu uma pretensa prova do teorema a Dirichlet que localizou nela um erro de raciocínio. Kummer retornou então ao problema com vigor renovado e, em poucos anos, depois de desenvolver um importante aliado na álgebra superior, um assunto chamado *teoria dos ideais*, deduziu condições de insolubilidade muito gerais para a relação de Fermat. Quase todos os progressos subsequentes na resolução do problema basearam-se nas investigações de Kummer. Sabe-se agora que o último “teorema” de Fermat é efetivamente verdadeiro para $n < 125\,000^2$ e para muitos outros valores especiais de n . Em 1908 o matemático alemão Paul Wolfskehl legou 100 000 marcos à Academia de Ciências de Göttingen como prêmio para a primeira demonstração completa do “teorema”. O resultado foi uma avalanche de supostas provas motivadas pela glória e pelo dinheiro; inclusive, desde então, o problema tem obcecado amadores, como o da bissecção do ângulo e o da quadratura do círculo. O último “teorema” de Fermat³ ganhou a distinção de ser o problema matemático com maior número de demonstrações incorretas publicadas.

10. Fermat conjecturou que $f(n) = 2^{(2^n)} + 1$ é primo para todo inteiro não negativo n . A conjectura se revelou incorreta quando Euler mostrou que $f(5)$ é um número composto. Sabe-se que $f(n)$ é composto para $5 \leq n \leq 16$ e, pelo menos, para outros 47 valores de n , sendo o maior deles talvez $n = 1945$. Já se encontraram os fatores primos de $f(5)$, $f(6)$ e $f(8)$ e um dos fatores primos de $f(9)$.

Em 1879 encontrou-se numa biblioteca de Leyden, entre os manuscritos de Christiaan Huygens, um escrito em que Fermat descreve um método geral através do qual pode ter feito muitas de suas descobertas. Conhecido como *método da descida infinita* ele é particularmente útil para estabelecer resultados negativos. Vejamos, resumidamente, em que consiste. Para provar que uma certa relação ligando inteiros positivos é impossível assuma, ao contrário, que ela possa ser satisfeita por algum conjunto particular de inteiros positivos. A partir dessa suposição mostre que a mesma relação também vale para um outro conjunto de inteiros positivos menores. Então, repetindo o raciocínio, a relação deve valer para outro conjunto de inteiros ainda menores e assim por diante *ad infinitum*. Como os inteiros positivos não podem decrescer em valor indefinidamente, segue-se que a suposição inicial é insustentável e que, portanto, a relação original é impossível. Fermat usou esse método para estabelecer o resultado 8

² Resultado estabelecido em anos recentes com a ajuda da computação eletrônica.

³ Em 1995, o matemático inglês Andrew Wiles (1953-), publicou uma demonstração correta do Último Teorema de Fermat. Finalmente se sabia, sem sombra de dúvida, que o Último Teorema de Fermat era, realmente, um teorema.(N.T.)

acima. Para tornar claro o método, apliquemo-lo para provar de novo que $\sqrt{2}$ é irracional. Se $\sqrt{2} = a/b$, onde a e b são inteiros positivos, como

$$\sqrt{2} + 1 = \frac{1}{\sqrt{2} - 1},$$

então

$$\frac{a}{b} + 1 = \frac{1}{\frac{a}{b} - 1} = \frac{b}{a - b},$$

e

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} = \frac{b}{a - b} - 1 = \frac{2b - a}{a - b} = \frac{a_1}{b_1}.$$

Mas, como $1 < \sqrt{2} < 2$, depois de substituir $\sqrt{2}$ por a/b e multiplicar então por b obtém-se $b < a < 2b$. De $a < 2b$ decorre que $0 < 2b - a = a_1$. E de $b < a$ decorre que $a_1 = 2b - a < a$. Ou seja, a_1 é um inteiro positivo menor que a . Repetindo-se o raciocínio chega-se a $\sqrt{2} = a_2/b_2$, onde a_2 é um inteiro positivo menor que a_1 . O processo pode ser repetido indefinidamente. Como, porém, os inteiros positivos não podem decrescer em valor indefinidamente, segue-se que $\sqrt{2}$ não pode ser racional.

Já mencionamos, na Seção 9-9, que a correspondência Pascal-Fermat levou à fundação da ciência da probabilidade. Lembre-se de que a matéria começou com o chamado *problema dos pontos*: “Determine a divisão das opostas de um jogo de azar entre dois jogadores igualmente hábeis, supondo-se conhecido o marcador no momento da interrupção e o número de pontos necessários para ganhar o jogo”. Fermat discutiu o caso em que o jogador A precisava de 2 pontos para ganhar e o jogador B de 3. Eis a solução de Fermat para este caso particular. Como é claro que mais quatro partidas decidem o jogo, seja a uma partida ganha por A e seja b uma partida ganha por B ; consideremos então os 16 arranjos completos, de ordem 4, das letras a e b :

$aaaa$	$aaab$	$abba$	$bbab$
$baaa$	$bbaa$	$abab$	$babb$
$abaa$	$baba$	$aabb$	$abbb$
$abab$	$baab$	$bbba$	$bbbb$

Os casos em que a aparece duas ou mais vezes são favoráveis a A e há 11 deles. Os casos em que b aparece três ou mais vezes são favoráveis a B e há cinco deles. Portanto as apostas devem ser divididas na razão 11:5. Para o caso geral, em que A precisa de m pontos para ganhar e B precisa de n , anotam-se os 2^{m+n-1} arranjos completos, de ordem $m+n-1$, das duas letras a e b . Procura-se o número α de casos em que a aparece m ou mais vezes e o número β de casos em que b aparece n ou mais vezes. As apostas devem ser divididas então na razão $\alpha : \beta$.

Pascal resolveu o problema dos pontos utilizando seu “triângulo aritmético” descrito na Seção 9-9. Indicando por $C(n, r)$ o número de combinações simples, de ordem

r , de n objetos [ver Exercício 9.13(g)], pode-se facilmente mostrar que os números ao longo da quinta diagonal do “triângulo aritmético” são, respectivamente,

$$C(4,4) = 1, \quad C(4,3) = 4, \quad C(4,2) = 6, \quad C(4,1) = 4, \quad C(4,0) = 1.$$

Retornando ao particular problema dos pontos considerado acima, como $C(4, 4)$ é o número de maneiras de obter quatro letras a , $C(4, 3)$ é o número de maneiras de obter três letras a e assim por diante, segue-se que a solução do problema é dada por

$$[C(4,4) + C(4,3) + C(4,2)] : [C(4,1) + C(4,0)] = (1 + 4 + 6) : (4 + 1) = 11:5.$$

No caso geral, em que A precisa de m pontos para ganhar e B precisa de n , escolhe-se a $(m + n)$ -ésima diagonal do triângulo de Pascal. Calculam-se então a soma α dos primeiros n números da diagonal considerada e a soma β de seus últimos m números. Então, devem-se dividir as opostas segundo a razão $\alpha : \beta$.

Pascal e Fermat, em sua histórica correspondência de 1654, refletiram sobre outros problemas relacionados com o problema dos pontos, como a divisão da aposta para o caso de mais do que dois apostadores ou para o caso de dois jogadores com habilidades diferentes. Foi esse trabalho de Pascal e Fermat que lançou as bases da teoria matemática da probabilidade. Em 1657 Christiaan Huygens (1629-1695) escreveu o primeiro tratado formal sobre o assunto, embasado na correspondência Pascal-Fermat. Foi a melhor exposição sobre a teoria das probabilidades até o aparecimento, em 1713, da *Ars Conjectandi* de Jakob Bernoulli (1654-1705), que continha uma reimpressão do trabalho anterior de Huygens. Após esses esforços pioneiros, vemos o assunto ser levado à frente por matemáticos como Abraham De Moivre (1667-1754), Daniel Bernoulli (1700-1782), Leonhard Euler (1707-1783), Joseph Louis Lagrange (1736-1813), Pierre-Simon Laplace (1749-1827) e tantos outros.

É impressionante, e mesmo algo surpreendente, que os matemáticos tenham sido capazes de desenvolver uma ciência (a teoria matemática das probabilidades) que estabelece leis racionais para reger situações determinadas puramente pelo azar. Essa ciência está muito longe de não ter aplicações práticas, como fica evidente pelas experiências efetuadas em grandes laboratórios, pela existência de companhias de seguro altamente respeitáveis e pela logística das empresas de grande porte e da guerra.

Voltaremos a Fermat no próximo capítulo (Seção 11-7) quando consideraremos o uso que fez de infinitésimos em geometria, particularmente aplicando-os a questões de máximos e mínimos, com o que se tornou um dos importantes pioneiros do cálculo diferencial.

10.4 *Roberval e Torricelli*

Dedicaremos esta seção a um francês e a um italiano, respectivamente Gilles Persone de Roberval e Evangelista Torricelli, contemporâneos, ambos geômetras e físicos

competentes, dotados das mesmas preferências e talentos matemáticos e que acabaram se envolvendo em disputas sobre prioridades.

Gilles Persone, um indivíduo rixento, nasceu em Roberval, perto de Beauvais, em 1602, e faleceu em Paris em 1675. Adotou o nome senhoril de Roberval ao qual não tinha direito. Sua extensa correspondência serviu de meio para intercomunicação de ideias matemáticas numa época anterior às revistas especializadas. Tornou-se bastante conhecido por seu método de traçar tangentes e por suas descobertas no campo das curvas planas superiores. Esforçou-se no sentido de considerar uma curva como gerada por um ponto cujo movimento se compõe de dois movimentos conhecidos. Então, a resultante dos vetores velocidades dos dois movimentos conhecidos fornece a reta tangente à curva. Por exemplo, no caso de uma parábola, podemos considerar os dois movimentos em sentido oposto ao foco e em sentido oposto à diretriz. Como as distâncias do ponto em movimento ao foco e à diretriz são sempre iguais, os vetores velocidades dos dois movimentos devem também ter módulos iguais. Segue-se que a tangente a um ponto da parábola bissecciona o ângulo entre o raio focal pelo ponto e a perpendicular por este à diretriz (ver Figura 92).

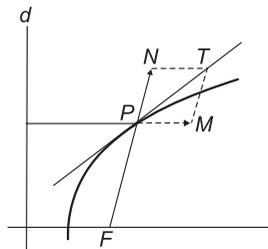


Figura 92

Como Torricelli trabalhava também com a ideia precedente de tangente, seguiu-se uma questão de prioridade. Roberval também reivindicou para si a invenção do método pré-cálculo dos indivisíveis (discutido na Seção 11-6) e a primazia de ter quadrado a cicloide antes de Torricelli. É difícil esclarecer essas questões de prioridade pois, coerentemente, Roberval era moroso para divulgar suas descobertas. Essa morosidade se explica pelo fato de que, por 40 anos, a partir de 1634, Roberval manteve uma cadeira no Colégio Real. Essa cadeira tornava-se vaga automaticamente a cada três anos e era preenchida num concurso aberto sobre matemática cujas questões eram elaboradas pelo detentor do lugar até então. Para manter-se na cadeira, Roberval guardava suas descobertas a fim de, formulando-as como questões nos concursos, poder ao mesmo tempo respondê-las e embaraçar seus competidores. De qualquer maneira, Roberval empregou com sucesso o método dos indivisíveis para determinar muitas áreas, volumes e centroides. Apesar de seu êxito em geometria, o interesse principal de Roberval era a física.

Evangelista Torricelli, uma alma sensível, nasceu perto de Faenza, Itália, em 1608 e morreu em Florença em 1647. Foi, por curto tempo, aluno de Galileu — durante o último ano de vida do mestre. Embora fosse 44 anos mais novo que Galileu, sobreviveu apenas cinco anos a este, morrendo aos 39 anos de idade, como sucederia com Pascal 15 anos mais tarde. Um relato talvez excessivamente romântico conta que Torricelli morreu de desalento e humilhação ao ser acusado de plágio por Roberval.

Já observamos que Galileu apreciava a cicloide pela forma graciosa que ela proporcionava a arcos em arquitetura. Em 1599 ele tentou avaliar a área sob um arco da curva comparando os pesos de um molde cicloidal com moldes circulares do tamanho do círculo gerador. E incorretamente concluiu que a área sob o arco se aproximava bastante, mas não era exatamente igual, do triplo da área do círculo. A primeira demonstração matemática publicada de que a área é *exatamente* três vezes a do círculo gerador foi dada em 1644 por Torricelli, seu discípulo, usando métodos infinitesimais primitivos. Ao mesmo tempo Torricelli publicou a construção da tangente à cicloide num ponto genérico da curva. Como ele não fez nenhuma referência ao fato de que Roberval tinha chegado anteriormente tanto à área como à tangente, isso irritou Roberval que, em 1646, escreveu-lhe uma carta em que o acusava de plágio. Não está claro que a prioridade da descoberta caiba a Roberval, mas a prioridade da publicação é de Torricelli que, segundo parece provável, redescobriu independentemente os dois resultados.

Para determinar a tangente, tanto Roberval quanto Torricelli empregaram o método de composição de movimentos descrito antes, quando do traçado de uma tangente à parábola. No caso da cicloide, pode-se imaginar um ponto P da curva como sujeito a dois movimentos iguais, um de translação e o outro de rotação. Conforme o círculo gerador rola ao longo da reta AB numa base horizontal (ver Figura 93), o ponto P é conduzido horizontalmente enquanto que, ao mesmo tempo, gira em torno de O , o centro do círculo. Traça-se portanto, a partir de P , um vetor horizontal PR como componente da translação e um vetor PS , tangente ao círculo gerador, como componente de rotação. Ademais, como os dois vetores têm módulos iguais, a tangente pretendida situa-se ao longo da bissetriz PT do ângulo RPS formado pelos dois vetores.

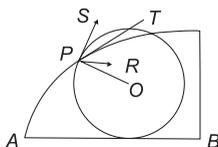


Figura 93

Fermat propôs a Torricelli o problema de se determinar um ponto no plano de um triângulo de modo que a soma de suas distâncias aos três vértices fosse mínima. A solução de Torricelli foi publicada em 1659 por seu discípulo Viviani. Esse ponto,

chamado *centro isogônico* do triângulo, foi o primeiro ponto notável de um triângulo a ser descoberto desde os tempos da matemática grega antiga. Uma análise elegantemente simples do problema foi fornecida no século XIX por Jacob Steiner⁴. Em 1640 Torricelli determinou o comprimento de um arco de espiral logarítmica. Essa curva também tinha sido retificada dois anos antes, por Descartes e foi a primeira curva, depois da circunferência, a ser retificada.

Em 1641 Torricelli notou que uma área infinita, se submetida a uma rotação em torno de um eixo de seu plano, pode às vezes fornecer um sólido de revolução de volume finito. Por exemplo, a área limitada pela hipérbole $xy = k^2$, a ordenada $x = b$ ($b > 0$) e o eixo x é infinita, mas o volume do sólido de rotação obtido girando-se a área em torno do eixo x é finita. Não foi Torricelli, porém, o primeiro a notar essa aparente anomalia.

Torricelli é muito mais conhecido por suas contribuições à física, na qual desenvolveu a teoria do barômetro e trabalhou em questões como o valor da aceleração da gravidade, a teoria dos projéteis e o movimento dos fluidos.



Evangelista Torricelli
(Coleção David Smith)

10.5 Huygens

O grande gênio holandês Christiaan Huygens levou uma vida rotineira mas notavelmente produtiva. Nasceu em Haia em 1629 e estudou em Leiden sob a orientação

⁴ Ver, por exemplo, R. A. Johnson, *Modern Geometry*, pp. 218-25 e Richard Courant e H. E. Robbins, *What is Mathematics?*, pp. 354-61.

de Frans van Schooten, o filho. Em 1651, quando tinha 22 anos de idade, publicou um artigo apontando argumentos falsos usados por Saint-Vincent em seu trabalho sobre a quadratura do círculo. Seguiram-se a esse trabalho vários opúsculos sobre a quadratura de cônicas e sobre o aprimoramento trigonométrico de Snell ao método clássico de calcular π (ver Seção 4-8). Em 1654 ele e seu irmão descobriram uma maneira nova, e superior, de polir lentes; isso propiciou a Huygens condições de resolver muitas questões de astronomia de observação, como a natureza dos anéis de Saturno. O trabalho de Huygens em astronomia o levou, mais tarde, a inventar o relógio de pêndulo com o objetivo de ter meios mais precisos de medir o tempo.

Como se assinalou na Seção 10-3, em 1657 Huygens escreveu o primeiro tratado formal sobre probabilidade, baseando-se na correspondência Pascal-Fermat. Huygens resolveu muitos problemas interessantes e instigantes e introduziu o importante conceito de “esperança matemática”: Se p indica a probabilidade de que uma pessoa ganhe uma certa soma s , então sp se denomina sua *esperança matemática*. Huygens mostrou, entre outras coisas, que se p é a probabilidade de uma pessoa ganhar uma soma a e q é a de ganhar uma soma b , então seu ganho esperado é $ap + bq$.

Em seus *Pensamentos*, publicados oito anos após sua morte, Pascal fez uma aplicação especiosa da noção de esperança matemática. Ele argumentava que, como o valor da felicidade eterna deve ser infinito, então, mesmo que a probabilidade de uma vida religiosa proporcionar felicidade seja muito pequena, ainda assim a esperança (produto desses dois valores) deve ser suficiente para fazer com que valha a pena ser religioso.

Em 1665 Huygens mudou-se para Paris a fim de usufruir de uma bolsa concedida a ele por Luís XIV. É desse período, em 1668, um artigo em que comunicava à Royal Society de Londres sua demonstração experimental de que o momento combinado de dois corpos numa certa direção é igual, antes e depois da colisão.

A maior de suas publicações, *Horologium oscillatorium*, apareceu em Paris em 1673. Trata-se de um trabalho em cinco partes ou capítulos. A primeira parte diz respeito ao relógio de pêndulo que o autor inventara em 1656. A segunda parte se dedica à discussão de corpos em queda livre no vácuo, deslizando num plano inclinado liso ou ao longo de uma curva lisa. Aí encontra-se provada a propriedade de que uma cicloide invertida é tautócrona, isto é, se um ponto material deslizar por um arco de cicloide invertido, ele alcançará o ponto mais baixo do arco num espaço de tempo que não depende do ponto onde começou a descida. A terceira parte inclui um tratamento de evolutas e evolventes. A *evoluta* de uma curva plana é a envoltória das normais à curva; se a evoluta de uma curva C é uma curva E , então C se diz *evolvente* de E . Como aplicação de sua teoria geral, Huygens encontrou a evoluta de uma parábola e de uma cicloide. No primeiro caso obteve uma parábola semicúbica; no segundo obteve outra cicloide de mesmo tamanho. Na quarta parte encontra-se um tratamento do pêndulo composto com a demonstração de que o centro de oscilação e o ponto de suspensão são permutáveis. A última parte do trabalho diz respeito à teoria dos relógios. Nela encontramos uma descrição do pêndulo cicloidal (ver Exercício 10.7) para o qual o período de oscilação é o mesmo, não importa quão grande ou quão pequena seja a amplitude da oscilação, o que é apenas aproximadamente verdadeiro para o período de oscilação de um pêndulo

simples. Esta última parte se encerra com 13 teoremas relacionados com a força centrífuga num movimento circular, sendo demonstrado, entre outras coisas, o fato agora familiar de que num movimento circular uniforme a intensidade da força centrífuga é diretamente proporcional ao quadrado da velocidade linear e inversamente proporcional ao raio do círculo. Em 1675, sob a supervisão de Huygens, construiu-se o primeiro relógio regulado por uma mola de compensação; Luís XIV recebeu-o de presente.



Christiaan Huygens
(Coleção David Smith)

Huygens retornou à Holanda em 1681, construiu algumas lentes de comprimento focal muito grande e inventou a ocular acromática para telescópios. Em 1689 visitou a Inglaterra onde teve oportunidade de conhecer Isaac Newton a quem tanto admirava por seu trabalho. Logo depois de seu retorno à Holanda no ano seguinte, publicou um tratado em que expunha a teoria ondulatória da luz. Com base nessa teoria foi capaz de deduzir geometricamente as leis da reflexão e da refração e explicar o fenômeno da refração dupla. Como Newton, porém, defendia a teoria da emissão da luz, muitos cientistas da época, influenciados por sua grandeza, adotaram essa teoria, em prejuízo da ondulatória.

Huygens também escreveu muitos opúsculos de menor importância. Ele retificou a cissoide de Dioclés; investigou a geometria da catenária (a curva assumida por uma corrente perfeitamente flexível e inextensível, de densidade linear uniforme, pendurada em dois ganchos não situados na mesma vertical); escreveu sobre a curva logarítmica; deu, em forma moderna, para polinômios, a regra de Fermat para máximos e mínimos; e fez inúmeras aplicações da matemática à física.

Como muitas das demonstrações dadas por Newton, Huygens elaborava suas provas, quase que inteiramente, com grande rigor, pelo método geométrico dos gregos.

Lendo-se seus trabalhos não se percebe que ele estava inteirado dos poderosos métodos da geometria analítica e do cálculo. Huygens morreu em sua cidade natal em 1695.

10.6 Alguns matemáticos franceses e italianos do século XVII

Cumpre mencionar aqui, mesmo que com brevidade, os trabalhos de alguns matemáticos de expressão menor do século XVII. Dedicaremos esta seção e as duas seguintes a essa tarefa, dividindo esses matemáticos por áreas geográficas.

Entre os primeiros europeus especialistas em Diofanto é digno de nota o francês Claude-Gaspar Bachet, Sieur de Méziriac (1581-1638), comumente conhecido como Bachet de Méziriac. Como intelectual seus interesses foram múltiplos: matemático, filósofo, teólogo, poeta e escritor que foi. Seu encantador e clássico *Problèmes Plaisants et Délectables* que apareceu em 1612 e foi republicado, com ampliações, em 1624, contém muitas questões e truques aritméticos que iriam reaparecer em praticamente todas as coleções subsequentes de recreações e quebra-cabeças matemáticos. Em 1621 publicou uma edição do texto em grego da *Aritmética* de Diofanto, junto com uma tradução latina acompanhada de notas.

Outro francês da teoria dos números, escritor prolífico em muitos campos, foi o frade minimista Marin Mersenne (1588-1648). Manteve correspondência constante com os maiores matemáticos de seus dias e funcionou admiravelmente, numa época em que não havia revistas especializadas, como uma espécie de câmara de compensação de ideias matemáticas. Editou trabalhos de muitos dos matemáticos gregos e escreveu sobre vários assuntos. Ele é especialmente conhecido hoje devido aos chamados *primos de Mersenne*, os números primos da forma $2^p - 1$, que discutiu em alguns pontos de seu trabalho *Cogitata physico-mathematica*, de 1644. Na Seção 3-3 assinalou-se a ligação entre os primos de Mersenne e os números perfeitos. O primo de Mersenne correspondente a $p = 4253$ foi o primeiro número primo conhecido com mais de 1000 dígitos em sua expansão decimal e o primo de Mersenne correspondente a $p = 216091$ era o maior número primo conhecido em 1986. Com os progressos extraordinários da moderna computação eletrônica, provavelmente é irrelevante continuar a registrar dados atualizados dessa espécie.

Claude Mydorge (1585-1647), nascido em Paris e parisiense por predileção, era amigo íntimo de Descartes. Foi geômetra e físico. Publicou alguns trabalhos sobre óptica e um tratamento sintético das seções cônicas em que simplificava muitas das demonstrações prolixas de Apolônio. Deixou um interessante manuscrito com os enunciados e soluções de mais de mil problemas de geometria e editou a popular *Récréations Mathématiques* de Leurechon.

Na Seção 9-8 já falamos alguma coisa sobre o trabalho do francês Phillipe de la Hire (1640-1718). Homem de gênio multiface, foi pintor, arquiteto, astrônomo e matemático. Além de seu trabalho com seções cônicas já descrito antes, escreveu sobre métodos gráficos, curvas de ordem superior e quadrados mágicos. Construiu mapas da

Terra por *projeção globular* na qual o centro de projeção não é um polo da esfera, como na projeção estereográfica de Ptolomeu (ver Exercício 6.10), mas sim um ponto no prolongamento do raio por um polo, à distância $r \operatorname{sen} 45^\circ$ da esfera.

Dentre os matemáticos italianos do segundo escalão a serem mencionados aqui está Vincenzo Viviani (1622-1703), outro discípulo de Galileu, que se dedicou à física e à geometria. Em vida foi cumulado de honradas. Dentre seus feitos geométricos figura a determinação da tangente à cicloide; porém, vários outros matemáticos resolveram esse problema antes. Em 1692 propôs o seguinte problema, que atraiu ampla atenção: Um domo hemisférico tem quatro janelas iguais e de tamanho tal que o resto da superfície pode ser quadrado exatamente; mostrar como isso é possível. Muitos matemáticos contemporâneos eminentes forneceram soluções para o problema. Viviani resolveu o problema da trisseção do ângulo usando uma hipérbole equilátera.

Deve-se mencionar também a notável família Cassini. Ítalo-franceses, vários de seus membros contribuíram notavelmente para a astronomia e fizeram aplicações matemáticas de talento a esse campo. A dinastia científica Cassini começou com Giovanni Domenico Cassini, que nasceu em Perinaldo, Itália, em 1625, e faleceu em Paris em 1712. A *oval de Cassini*, que é o lugar geométrico dos pontos cujo produto das distâncias a dois pontos fixos é constante, foi estudada por Giovanni Cassini em 1680 no contexto de seu trabalho sobre os movimentos relativos da Terra e Sol. Numa família de ovais de Cassini confocais se encontra a figura em forma de oito chamada lemniscata de Bernoulli, um fato que só foi notado no fim do século XVIII. Podem-se encontrar as ovais de Cassini como intersecções de um toro com planos paralelos ao eixo desse toro. Giovanni Cassini foi professor de astronomia em Bolonha, mas, em 1669, convidado por Luís XIV, mudou para Paris onde, em 1671, tornou-se o primeiro astrônomo real da França. Como se naturalizou francês e seu segundo filho, Jacques Cassini (1677-1756), nasceu na França, esse ramo da família deixou de ser italiano. Em 1712 Jacques sucedeu o pai como astrônomo real. Em 1756 Jacques foi sucedido por seu filho César-François Cassini que, por sua vez, foi sucedido por Jacques Dominique Cassini (1748-1845), um de seus filhos. Todos esses homens preservaram a tradição de família quanto às contribuições à ciência.

10.7 Alguns matemáticos da Alemanha e dos Países Baixos no século XVII

O auspicioso progresso verificado na matemática alemã durante o século XVI não teve continuidade no século XVII. A Guerra dos Trinta Anos (1618-1648) e a inquietação subsequente nos países teutônicos tornaram esse século inóspito para o progresso intelectual. Kepler e Leibniz foram os únicos matemáticos alemães do período a se sobressairerem num plano de excelência e o único matemático menor a ser citado aqui é Ehrenfried Walther von Tschirnhausen (1651-1708). Tschirnhausen dedicou grande parte de seu tempo à matemática e à física, deixando sua marca no estudo das curvas e na teoria das equações. Em 1682 ele introduziu e estudou as *curvas catacústicas*, definidas como envoltórias de raios de luz, emitidos de uma fonte pontual, após refletirem-se numa curva

dada. A espiral sinusoidal particular, $a = r \cos^3(\theta/3)$, é conhecida como *cúbica de Tschirnhausen*. A espiral sinusoidal geral, $r^n = a \cos n\theta$, onde n é racional, foi estudada por Colin Maclaurin em 1718 (ver Exercício 10.8). Na teoria das equações, Tschirnhausen é particularmente conhecido pela transformação que converte uma equação polinomial de grau n em x numa equação de grau n em y em que os coeficientes de y^{n-1} e y^{n-2} são ambos nulos. Posteriormente, em 1834, G. B. Jerrard encontrou a transformação de Tschirnhausen que converte uma equação polinomial de grau n em x numa equação polinomial de grau n em y em que os coeficientes de y^{n-1} , y^{n-2} e y^{n-3} são todos nulos. Essa transformação, para aplicação em polinômios quárticos, já tinha sido dada em 1786 por E. S. Bring e é importante na resolução transcendental de equações quárticas por meio de funções elípticas.

A despeito dos tempos tumultuados, a região geográfica agora conhecida por Países Baixos produziu muitos matemáticos menores no século XVII. Willebrord Snell (1580 ou 1581-1626) já foi mencionado por seu trabalho envolvendo a medida da circunferência. Snell foi um menino prodígio notável; consta que por volta dos 12 anos de idade já estava inteirado de todos os trabalhos de matemática correntes na época. O nome *loxodroma* para a curva sobre uma superfície esférica que faz um ângulo constante com os meridianos foi introduzido por Snell que, também, foi um dos primeiros a investigar as propriedades dos triângulos esféricos polares. Esse último assunto já fora discutido por Viète.

Albert Girard (1595-1632), que parece ter vivido principalmente na Holanda, também se interessou por geometria esférica e trigonometria. Em 1626 ele publicou um tratado de trigonometria que contém o mais antigo uso das abreviações *sin*, *tan* e *sec* para seno, tangente e secante. Ele deu a expressão da área de um triângulo esférico em termos de seu excesso esférico. Girard foi também um algebrista de méritos consideráveis. Editou as obras de Simon Stevin.

Grégoire de Saint-Vincent (1584-1667) foi um eminente quadrador do círculo do século XVII. Aplicou métodos do pré-cálculo a vários problemas de quadratura.

Frans van Schooten, o filho (1615-1660 ou 1661), foi professor de matemática de Huygens, Hudde e Sluze e foi o responsável por duas edições latinas de *La géométrie* de Descartes. Escreveu sobre perspectiva e editou também os trabalhos de Viète. Seu pai, Frans van Schooten, e seu meio irmão, Petrus van Schooten, também foram professores de matemática.

Johann Hudde (1633-1704) foi burgomestre de Amsterdam. Escreveu sobre máximos e mínimos e sobre teoria das equações. Nesse último assunto ele obteve uma regra engenhosa para encontrar as raízes múltiplas de um polinômio, regra essa equivalente ao método que se usa presentemente e que utiliza a derivada do polinômio.

René François Walter de Sluze (1622-1685), cônego de sua Igreja, escreveu vários opúsculos sobre matemática. Discuti espirais, pontos de inflexão e determinação de médias geométricas. As curvas da família $y^n = k(a-x)^p x^m$, onde os expoentes são inteiros positivos, chamam-se *pérolas de Sluze*.

Concluimos com Nicolaus Mercator (c. 1620-1687) que nasceu em Holstein, então uma localidade da Dinamarca, mas que passou a maior parte de sua vida na Inglaterra. Editou os *Elementos* de Euclides e escreveu sobre trigonometria, astronomia, cálculo de logaritmos e cosmografia. A série

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots,$$

que, independentemente, foi descoberta por Saint-Vincent, é às vezes mencionada como *série de Mercator*. Ela converge para $-1 < x \leq 1$, e pode ser usada de maneira muito satisfatória para calcular logaritmos (ver Exercício 10.11). O conhecido mapa de uma esfera, chamado *projeção de Mercator*, no qual as loxodromas aparecem como linhas retas, não é de Nicolaus Mercator mas de Gerardo Mercator (1512-1594).

10.8 Alguns matemáticos britânicos do século XVII

A Grã-Bretanha teve o seu quinhão de matemáticos menores no século XVII. Em algum lugar já mencionamos o nobre William Brouncker (1620-1684). Ele foi um dos fundadores e o primeiro presidente da Royal Society de Londres e mantinha relações com Wallis, Fermat e outros matemáticos de primeira linha. Escreveu sobre a retificação da parábola e da cicloide e não tinha escrúpulos em usar séries infinitas para expressar quantidade que não podia determinar de outra maneira. Provou assim que a área limitada pela hipérbole equilátera $xy = 1$, o eixo x e as retas $x = 1$ e $x = 2$ é igual a

$$\frac{1}{(1)(2)} + \frac{1}{(3)(4)} + \frac{1}{(5)(6)} + \dots$$

e a

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

Brouncker foi o primeiro britânico a investigar e usar as propriedades das frações contínuas. Demos, na Seção 4-8, sua interessante fração contínua para o desenvolvimento de $4/\pi$.

O matemático escocês James Gregory (1638-1675) também já foi mencionado (Seção 4-8). Ele se tornou sucessivamente, em 1668 e 1674, professor de matemática das Universidades de Saint Andrews e Edimburgo. Gregory se interessava igualmente por física e publicou um trabalho em óptica em que descreveu o telescópio refletor hoje conhecido pelo seu nome. Em matemática ele fez a expansão em série infinita de $\arctg x$, $\operatorname{tg} x$ e $\operatorname{arcsec} x$ (1667) e foi um dos primeiros a fazer distinção entre série con-

vergente e divergente. Deu uma demonstração engenhosa, mas insatisfatória, de que a quadratura euclidiana do círculo é impossível. A série

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots,$$

que desempenhou um papel tão importante no cálculo de π , é conhecida por seu nome. Morreu muito jovem, pouco depois de ficar cego em virtude de doença ocular causada por suas observações astronômicas. É interessante que seu sobrinho, David Gregory (1661-1708), também foi professor de matemática da Universidade de Edimburgo (de 1684 a 1691), após o que foi indicado professor saviliano de astronomia da Universidade de Oxford. Ele, também, se interessou por óptica, tendo escrito sobre esse assunto bem como sobre geometria e teoria newtoniana.



Sir Christopher Wren
(Coleção David Smith)

Já se disse que, não fora pelo Grande Incêndio de Londres em 1666, Sir Christopher Wren (1632-1723) teria se tornado mais conhecido como matemático do que como arquiteto. Foi professor saviliano de astronomia e ensinou geometria em Oxford de 1661 a 1673. Foi também um dos fundadores da Royal Society da qual, por algum tempo, foi presidente. Escreveu sobre as leis que regem o choque de corpos, sobre assuntos ligados com a óptica, resistência dos fluidos e outros tópicos de física-matemática e mecânica celeste. Credita-se a ele a descoberta, em 1669, dos dois sistemas de retas geradoras de um hiperbolóide de uma folha. Em 1658 mostrou, independentemente, que um arco de cicloide tem comprimento igual a oito vezes o raio do círculo gerador. Depois do grande incêndio, porém, Wren teve uma participação tão grande na reconstrução da catedral de São Paulo, além de na de umas outras 50 igrejas e edifícios públicos, que sua fama de arquiteto acabou obscurecendo seu nome em matemática. Após sua morte, foi sepulta-

do na catedral de São Paulo e seu epitáfio — *Si monumentum requiris, circumspice* (Se procuras um monumento, olha à tua volta) — não poderia ser mais adequado⁵.

Talvez também se devam mencionar Robert Hooke (1635-1703) e Edmund Halley (1656-1742), embora ambos tenham ganho fama não na matemática mas em campos afins. Por mais de 40 anos Hooke foi professor de geometria do Gresham College. Todo estudante de física elementar o conhece por sua lei relacionando as deformações e as tensões a que se submete um corpo elástico. Ele inventou o pêndulo cônico e tentou achar a lei que expressa a força de atração entre dois corpos (que Newton mostrou, mais tarde, ser inversamente proporcional ao quadrado da distância), sob a qual os planetas giram em torno do Sol. Tanto ele como Huygens projetaram relógios regulados por uma mola de compensação. Halley sucedeu Wallis como professor saviliano de geometria e mais tarde tornou-se astrônomo real. Restaurou, por inferência, o desaparecido Livro VIII da obra *Secções cônicas* de Apolônio e editou vários trabalhos dos gregos antigos, tendo traduzido alguns desses do árabe, embora não conhecesse uma palavra sequer dessa língua. Coligiu também um conjunto de tábuas de mortalidade, do tipo daquelas básicas agora no negócio dos seguros de vida. Mas suas contribuições mais originais à ciência se deram principalmente em astronomia e são de excelente qualidade. Enquanto ele era amável e generoso no trato com outros intelectuais, Hooke era ciumento e irascível. Grande parte de seu trabalho foi feito no século XVIII.

Exercícios

10.1 Álgebra geométrica

(a) Dado um segmento unitário e um segmento de comprimento x , construa com régua e compasso os segmentos de comprimento x^2, x^3, x^4, \dots .

(b) Dado um segmento unitário e segmentos de comprimento x, y, z , construa segmentos de comprimentos xy e xyz .

(c) Dado um segmento unitário, mostre que, se $f(x)$ e $g(x)$ são polinômios em x cujos coeficientes indicam segmentos de retas dados, podemos construir um segmento de comprimento $y = f(x)/g(x)$ correspondente a qualquer segmento de reta assumido por x .

(d) É dada uma equação quadrática $x^2 - gx + h = 0, g > 0, h > 0$. Tomando como diâmetro um segmento de reta de comprimento g , trace uma semicircunferência C e depois uma reta paralela ao diâmetro de C a uma distância \sqrt{h} dele. Se P é um ponto

⁵ É interessante para os norte-americanos que no College of William and Mary, de Williamsburg, Virgínia, haja o edifício Wren, que data de 1695 e cujo projeto se atribui a Wren. É o prédio acadêmico mais antigo ainda em uso nos Estados Unidos. Há também um grande retrato de Wren num painel de vidro na William and Mary Law School.

de intersecção, baixe por ele a perpendicular ao diâmetro de C dividindo-o em partes r e s . Mostre que r e s representam as raízes da equação quadrática dada. Resolva $x^2 - 7x + 12 = 0$ por esse método.

(e) É dada uma equação quadrática $x^2 + gx - b = 0$, $g > 0$, $b > 0$. Tomando um segmento de reta de comprimento g como diâmetro, trace uma circunferência C e então uma tangente a C . Nessa tangente, a partir do ponto de tangência, marque um comprimento igual a \sqrt{h} . Da outra extremidade dessa tangente trace uma secante que passe pelo centro de C . Denotando toda a secante por r e seu segmento externo por s , mostre que $-r$ e s representam as raízes da equação quadrática dada. Resolva $x^2 + 4x - 21 = 0$ por esse método.

10.2 “La Géométrie” de Descartes

(a) São dadas cinco retas, L_1, \dots, L_5 , dispostas como na Figura 94. Indique-se por p_i a distância de um ponto P à reta L_i . Tomando L_5 e L_4 como eixos x e y , encontre a equação do lugar de um ponto P que se move de maneira que

$$p_1 p_2 p_3 = a p_4 p_5.$$

(O lugar é uma cúbica que Newton chamou de *parábola cartesiana* e que às vezes é, também, chamada de *tridente*; ela aparece com frequência em *La géométrie*.)

(b) Mostre que, com os instrumentos euclidianos, podem-se construir tantos pontos quantos se desejem do lugar obtido em (a).

(c) Dadas quatro retas quaisquer L_1, L_2, L_3 e L_4 , denote por p_i a distância de um ponto P à reta L_i . Mostre que se P se move de maneira que $p_1 p_2 = k p_3 p_4$, o lugar descrito é uma cônica.

(d) Utilize-se do método de Descartes para traçar a tangente à parábola $y^2 = 2mx$ num ponto genérico (x_1, y_1) e mostre que isso leva ao fato de que a subnormal (projeção sobre o eixo da parábola do segmento da normal situado entre a curva e o eixo) tem comprimento constante, igual ao *latus rectum* da parábola.

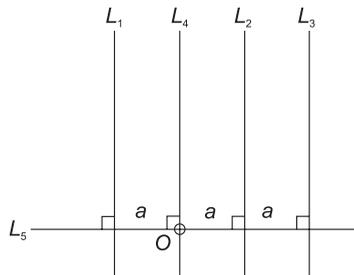


Figura 94

10.3 Regra de sinais de Descartes

(a) Se c_1, c_2, \dots, c_m são m números reais não nulos e se dois termos consecutivos dessa sequência têm sinais opostos, dizemos que esses dois termos apresentam uma variação de sinais. Com esse conceito podemos enunciar a *regra de sinais de Descartes* cuja demonstração pode ser encontrada nos textos de teoria das equações. É a seguinte: *Seja $f(x) = 0$ uma equação polinomial de coeficientes reais escrita segundo as potências decrescentes de x . O número de raízes positivas da equação é igual ao número de variações de sinais apresentadas pelos coeficientes de $f(x)$ ou menor e, neste caso, a diferença é um número positivo par. O número de raízes negativas é igual ao número de variações de sinal apresentadas pelos coeficientes de $f(-x)$ ou menor e, neste caso, a diferença é um número positivo par. Contam-se m vezes uma raiz de multiplicidade m .* Investigue a natureza das raízes das seguintes equações por meio da regra de sinais de Descartes:

1. $x^9 + 3x^8 - 5x^3 + 4x + 6 = 0$,

2. $2x^7 - 3x^4 - x^3 - 5 = 0$,

3. $3x^4 + 10x^2 + 5x - 4 = 0$.

(b) Mostre que $x^n - 1 = 0$ tem exatamente duas raízes reais se n é par e apenas uma raiz real se n é ímpar.

(c) Mostre que $x^5 + x^2 + 1 = 0$ tem quatro raízes imaginárias.

(d) Prove que se p e q são reais, $p > 0$ e $q \neq 0$, a equação $x^3 + px + q = 0$ tem duas raízes imaginárias.

(e) Prove que se todas as raízes de uma equação polinomial são positivas, os sinais dos coeficientes são alternadamente positivos e negativos.

10.4 Problemas de Descartes

(a) Trace o gráfico do folium de Descartes,

$$x^3 + y^3 = 3axy.$$

A reta $x + y + a = 0$ é uma assíntota.

(b) Obtenha a equação polar do folium de Descartes.

(c) Faça $y = tx$ e obtenha a representação paramétrica da folium de Descartes, tomando t como parâmetro. Ache os intervalos em que t fornece: o laço, o ramo inferior e o ramo superior.

(d) Encontre a equação cartesiana da folium de Descartes tomando o ponto nodal como origem e a reta de simetria da curva como eixo x .

(e) A solução de Descartes para uma equação quártica sem o termo em x^3 utiliza-se do princípio de identidade de polinômios. Como exemplo considere a equação quártica

$$x^4 - 2x^2 + 8x - 3 = 0.$$

Imponha que o primeiro membro da equação seja igual ao produto de dois fatores quadráticos da forma $x^2 + kx + b$ e $x^2 - kx + m$. Igualando os coeficientes dos termos *semelhantes* dos dois membros da equação, obtenha três relações envolvendo k , b e m . Elimine b e m das três relações, obtendo uma equação de grau seis em k que pode ser considerada como uma cúbica em k^2 . Dessa maneira reduz-se a resolução da equação quártica original à resolução de uma cúbica associada a ela. Conhecido que uma raiz da cúbica em k^2 é $k^2 = 4$, obtenha as quatro raízes da equação original.

10.5 Teoremas de Fermat

Por volta de 1760, Euler propôs e resolveu o problema de determinar o número de inteiros positivos menores do que um inteiro positivo n dado e primos com n . Denota-se usualmente esse número por $\varphi(n)$. A correspondência $n \rightarrow \varphi(n)$ é uma função definida e com valores no conjunto dos inteiros positivos, conhecida como *função φ de Euler* (às vezes chamada *indicador de n*). Assim, se $n = 42$, verifica-se que os doze inteiros 1, 5, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29, 31, 37 e 41 são os únicos inteiros positivos menores do que 42 e primos com esse número. Logo $\varphi(42) = 12$.

(a) Calcule $\varphi(n)$ para $n = 2, 3, \dots, 12$. J. W. L. Glaisher construiu uma tábua de valores de $\varphi(n)$ para $n \leq 10\,000$.

(b) Se p é primo, mostre que $\varphi(p) = p - 1$ e $\varphi(p^a) = p^a(1 - 1/p)$.

(c) Pode-se mostrar que, se $n = ab$, onde a e b são primos entre si, então $\varphi(n) = \varphi(a)\varphi(b)$. Usando esse fato, calcule $\varphi(42)$ a partir dos resultados de (a); mostre também que se $n = p_1^a p_2^a \dots p_r^a$ onde p_1, p_2, \dots, p_r são primos distintos, então

$$\varphi(n) = n(1 - 1/p_1)(1 - 1/p_2) \dots (1 - 1/p_r).$$

Empregando esta última fórmula, calcule $\varphi(360)$.

(d) Euler mostrou que se a é um inteiro positivo qualquer, primo com n , então $a^{\varphi(n)} - 1$ é divisível por n . Mostre que o pequeno teorema de Fermat é um caso particular desse resultado.

(e) Mostre que para a demonstração do último “teorema” de Fermat é suficiente considerar-se apenas expoentes primos $p > 2$.

(f) Admitindo o último “teorema” de Fermat, mostre que a curva $x^n + y^n = 1$, onde n é um inteiro positivo maior do que 2, não contém nenhum ponto de coordenadas racionais, exceto aqueles em que a curva corta os eixos coordenados.

(g) Admitindo o item (6) da Seção 10-3 (que a área de um triângulo retângulo de lados inteiros não pode ser um quadrado perfeito), mostre que a equação $x^4 - y^4 = z^2$ não admite nenhuma solução constituída só de inteiros positivos e prove então o último “teorema” de Fermat para o caso $n = 4$.

(h) Utilizando o método da descida infinita de Fermat, mostre que $\sqrt{3}$ é irracional.

10.6 O problema dos pontos

Faça a divisão das apostas de um jogo de azar entre dois jogadores igualmente hábeis nos seguintes casos:

(a) A precisa de mais um ponto para ganhar e B precisa de mais quatro pontos para ganhar (use o método de Fermat).

(b) A precisa de mais três pontos para ganhar e B precisa de mais quatro pontos para ganhar (use o método de Pascal).

10.7 Problemas de Huygens

(a) Um jogador ganha \$300 se no lançamento de um único dado o resultado for 6. Qual é sua esperança matemática?

(b) Um jogador ganha \$300 se no lançamento de um único dado o resultado for 6 e ganha \$600 no caso de o resultado ser 5. Qual é sua esperança matemática?

A seguir estão alguns exemplos de problemas de probabilidade resolvidos por Huygens:

1. A e B lançam alternadamente um par de dados comuns. A ganhará se obtiver uma soma 6 antes de B obter uma soma 7 e B ganhará se obtiver uma soma 7 antes de A obter uma soma 6. Supondo-se que A comece, então sua probabilidade de ganhar está para a probabilidade de B ganhar na razão 30:31.

2. Os jogadores A e B , cada um com 12 tentos, jogam com três dados de acordo com as especificações seguintes: quando a soma for 11, A dá um tento a B ; quando for 14 é B quem dá um tento a A ; e ganha o jogo quem primeiro ficar com todos os tentos. Então, a probabilidade de A está para a de B na razão 244 140 625 : 282 429 536 481.

3. A e B participam de um jogo com dois dados; se der a soma 7, então A ganha; se der 10, então é B quem ganha; e se der outro número qualquer, então há empate. Nessas condições, a probabilidade de A ganhar está para a de B assim como 13 está para 11.

(c) Use o fato de a cicloide ter a propriedade de ser tautócrona e o fato de a *evoluta* de uma cicloide ser outra cicloide de mesmo tamanho para mostrar que um

pêndulo que oscila entre dois arcos de cicloide invertida (ver Figura 95) deve ter período constante.

(d) Uma bola, presa à extremidade de um fio, gira num círculo fazendo uma revolução por minuto. Dobrando-se o comprimento do fio e meando-se o período de revolução, qual a relação entre a força centrífuga dessa situação com a da anterior?

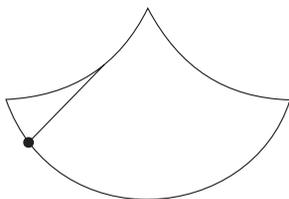


Figura 95

10.8 Curvas planas superiores

(a) Tomando como focos de uma oval de Cassini os pontos $(-a, 0)$ e $(a, 0)$ de um sistema retangular cartesiano e denotando por k^2 o produto constante das distâncias, obtenha a equação cartesiana da curva.

(b) Mostre que a equação polar correspondente da curva é

$$r^4 - 2r^2a^2\cos 2\theta + a^4 = k^4.$$

Note que, para $k = a$, a curva se transforma na *lemniscata de Bernoulli*⁶,

$$r^2 = 2a^2\cos 2\theta.$$

(c) Mostre que a lemniscata de Bernoulli é a cissoide (ver Exercício 4.4) de uma circunferência de raio $a/2$ e ela própria, para um polo O distante $a\sqrt{2}/2$ unidades de seu centro.

(d) Faça cuidadosamente o gráfico da hipérbole equilátera $xy = k^2$ e trace vários membros da família das circunferências de centros na hipérbole e que passam pela origem. A envoltória dessa família é a lemniscata de Bernoulli.

(e) Usando o fato de que a normal num ponto da lemniscata de (b) faz um ângulo de 2θ com o raio vetor desse ponto, mostre como se podem traçar tangentes à lemniscata.

⁶ Assim chamada (da palavra grega que significa “fita”) por Jakob Bernoulli (1654-1705) em 1694. Suas propriedades principais foram encontradas em 1750 pelo italiano G. C. Fagnano (1682-1766) que mostrou também que sua retificação leva a integrais elípticas.

(f) Mostre que se têm os seguintes casos particulares da espiral sinusoidal, $r^n = a \cos n\theta$, onde n é um número racional.

n	curva
- 2	hipérbole equilátera
- 1	reta
- 1/2	parábola
- 1/3	cúbica de Tschirnhausen
1/2	cardioide
1	circunferência
2	lemniscata de Bernoulli

(g) Uma *epicicloide* é a curva descrita por um ponto da circunferência de um círculo que rola externamente sobre um círculo fixo tomado como base. A catacáustica de uma circunferência para uma fonte de luz tomada no infinito é uma epicicloide de duas cúspides cuja base circular é concêntrica com a circunferência dada e cujo raio é metade do raio da circunferência dada. Uma epicicloide de duas cúspides se denomina *nefroide*. A catacáustica de uma circunferência para uma fonte de luz sobre a própria é uma epicicloide de uma cúspide cuja base circular é concêntrica com a circunferência dada e cujo raio é um terço do raio da circunferência dada. Uma epicicloide de uma cúspide recebe o nome de *cardioide*. Jakob Bernoulli mostrou, em 1692, que a catacáustica de uma cardioide, quando a fonte de luz está na cúspide desta última, é uma nefroide. Podem-se ver catacáusticas de uma circunferência como curvas luminosas na superfície de café numa xícara ou sobre a mesa, no interior de uma argola de guardanapo. Observe algumas catacáusticas de uma circunferência usando um copo de algum líquido e uma fonte de luz móvel.

10.9 Problemas recreacionais de Bachet

A seguir estão algumas recreações aritméticas que se encontram nos *Problèmes plaisants et délectables* de Bachet. Todos eles, e outros problemas de Bachet, se encontram também em *Mathematical Recreations and Essays* de Bali e Coxeter.

(a) (1) Peça a uma pessoa que escolha secretamente um número e então triplique-o. (2) Pergunte se o produto é par ou ímpar; se for par, peça-lhe que subtraia dele sua metade; se for ímpar, peça a ela que acrescente 1 e então tome metade do resultado. (3) Diga a ela para multiplicar o resultado obtido em (2) por 3 e para lhe dizer quantas vezes, digamos n , 9 está contido exatamente no produto. Então o número originalmente escolhido é $2n$ ou $2n + 1$, conforme o resultado no passo 1 tenha sido par ou ímpar. Prove isso.

(b) Peça a uma pessoa que escolha secretamente um número menor que 60 e para dizer os restos, digamos a, b, c , da divisão desse número por 3, 4, e 5. Então o número originalmente escolhido pode ser obtido como o resto da divisão de $40a + 45b + 36c$ por 60. Prove isso.

(c) Diga a A para pegar secretamente um número qualquer, maior do que 5, de fichas e para B pegar o triplo dessa quantidade. Diga a A para dar 5 fichas a B e então diga a B para passar a A o triplo de fichas com que A ficou. Agora você pode dizer a B que ele tem 20 fichas. Explique a razão disso e generalize para p e q em lugar de 3 e 5.

(d) Secretamente A escolhe um dos números de um conjunto de dois, um ímpar e o outro par, sendo que o outro número é dado a B . Peça a A que dobre seu número e a B que triplique o seu. Solicite a soma dos dois produtos. Se a soma é par, então A escolheu o número ímpar; caso contrário, A escolheu o número par. Explique esse fato.

(e) Peça a alguém que pense numa hora, digamos m , e então para apontar num relógio o número que marca uma outra hora, digamos n . Se, começando com o número apontado, ele for tocando sucessivamente, no sentido anti-horário, os números do relógio, enquanto mentalmente conta os toques como $m, m + 1$ e assim por diante, até alcançar o número $n + 12$, então o último número em que tocou é a hora originalmente pensada. Prove isso.

10.10 Alguma geometria

(a) Mostre, pelo método de Roberval, que a tangente e a normal num ponto de uma cônica central bisseccionam os ângulos entre os dois raios focais que concorrem no ponto.

(b) Define-se um *grau esférico* como qualquer área esférica equivalente a $1/720$ da superfície da esfera. Mostre que a área de um fuso cujo ângulo é n° é igual a $2n$ graus esféricos.

(c) Mostre que a área de um triângulo esférico, em graus esféricos, é igual ao excesso esférico do triângulo.

(d) Mostre que a área A de um triângulo esférico de excesso esférico E é dada por

$$A = \frac{\pi r^2 E}{180^\circ},$$

onde r é o raio da esfera.

(e) Determine a área de um triângulo trirretângulo sobre uma esfera cujo diâmetro mede 28 polegadas.

(f) Mostre (usando o cálculo integral) que a área limitada pela hipérbole $xy = 6$, a reta $x = 2$ e o eixo x é infinita. Por outro lado, mostre que o volume obtido girando-se essa área em torno do eixo x é finito.

Esse problema deu origem ao chamado *paradoxo da tinta*. Uma vez que a área acima é infinita, é necessária uma quantidade infinita de tinta para pintá-la. Como, porém, o volume acima é finito, basta uma quantidade finita de tinta para preenchê-lo. Mas o volume contém a área concernente dentro de si mesmo. Explique o paradoxo.

10.11 Cálculo de logaritmos por séries

A série de Mercator

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

converge, para $-1 < x \leq 1$. Substituindo x por $-x$ segue-se que a série

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots$$

deve convergir, para $-1 \leq x < 1$. Como uma série cujos termos são as diferenças dos termos correspondentes de duas séries dadas certamente converge para todos os valores de x para os quais ambas as séries convergem, segue-se que, para $-1 < x < 1$,

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) &= \ln(1+x) - \ln(1-x) \\ &= 2\left(x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots\right) \end{aligned}$$

Fazendo-se $x = 1/(2N+1)$, observamos que $-1 < x < 1$, para todo positivo N , e $(1+x)/(1-x) = (N+1)/N$. Substituindo na última equação, obtemos

$$\ln(N+1) = \ln N + 2\left[\frac{1}{2N+1} + \frac{1}{3(2N+1)^3} + \frac{1}{5(2N+1)^5} + \dots\right],$$

série essa convergente, e bastante rapidamente, para todos os valores positivos de N .

- Fazendo $N = 1$, calcule $\ln 2$ até a quarta casa decimal.
- Calcule $\ln 3$ até a quarta casa decimal.
- Calcule $\ln 4$ até a quarta casa decimal.

Temas

- 10/1 A técnica transformar-resolver-inverter.
- 10/2 A geometria analítica como exemplo por excelência da técnica transformar-resolver-inverter.
- 10/3 A geometria analítica como método de descoberta.
- 10/4 Quem inventou a geometria analítica?
- 10/5 O maior matemático francês do século XVII.
- 10/6 Os cinco matemáticos franceses mais importantes do século XVII.
- 10/7 O método da descida infinita de Fermat.
- 10/8 A origem da probabilidade matemática.
- 10/9 A anomalia de uma área infinita gerar um volume de revolução finito.
- 10/10 O método de Roberval-Torricelli para traçado de tangentes.
- 10/11 O pêndulo de segundos perfeito de Huygens.
- 10/12 O centro isogônico de um triângulo.
- 10/13 Os Teoremas de Ceva e Commandino.
- 10/14 As duas primeiras curvas planas superiores a ter aplicações práticas.
- 10/15 A notável família Cassini.
- 10/16 Os computadores eletrônicos modernos e novas descobertas em teorias dos números.

Bibliografia

- ADAMS, O. S. *A Study of Map Projections in General*. Washington, Coast and Geodetic Survey, Department of Commerce, 1919, Special Publication n° 60.
- ADAMS, O. S. e DEETZ, C. H. *Elements of Map Projection, With Applications to Map and Chart Construction*. Washington, Coast and Geodetic Survey, Department of Commerce, 1938, Special Publication n° 68.
- ARCHIBALD, R. C. *Mathematical Table Makers*. Nova York, Scripta Mathematica, Yeshiva University, 1948.
- AUDREY, John. *Brief Lives*. Editado por Richard Berber. B & N Imports, 1983.
- BALL, W. W. R. e COXETER, H. S. M. *Mathematical Recreations and Essays*. 12ª ed. Toronto, University of Toronto Press, 1974. Reimpresso por Dover, Nova York.
- BELL, A. E. *Christian [sic] Huygens and the Development of Science in the Seventeenth Century*. Londres, Edward Arnold, 1948.

- BELL, E. T. *Men of Mathematics*. Nova York, Simon and Schuster, 1937.
- . *The Last Problem*. Nova York, Simon and Schuster, 1961.
- BOYER, C. B. *History of Analytic Geometry*. Nova York, Scripta Mathematica, Yeshiva University, 1956.
- . *The History of the Calculus and Its Conceptual Development*. Nova York, Dover, 1959.
- CONKWRIGHT, N. B. *Introduction to the Theory of Equations*. Boston, Ginn, 1941.
- COOLIDGE, J. L. *A History of Geometrical Methods*. Nova York, Oxford University Press, 1940.
- . *A History of the Conic Sections and Quadric Surfaces*. Nova York, Oxford University Press, 1947.
- . *The Mathematics of Great Amateurs*. Nova York, Oxford University Press, 1949.
- COURANT, Richard e ROBBINS, Herbert. *What is Mathematics?* Nova York, Oxford University Press, 1941.
- DAVID, F. N. *Games, Gods and Gambling*. Nova York, Hafner, 1962.
- DESCARTES, René. *The Geometry of René Descartes*. Trad. para o inglês por D. E. Smith e Marcia L. Latham. Nova York, Dover, 1954.
- HACKER, S. G. *Arithmetical View Points*. Pullman (Wash.), Washington State College, 1948. (mimeo.)
- HACKING, Ian. *The Emergence of Probability*. Londres, Cambridge University Press, 1975.
- HALDANE, Elizabeth S. *Descartes: His Life and Times*. Nova York, E. P. Dutton, 1905.
- JOHNSON, R. A. *Modern Geometry*. Boston, Houghton Mifflin. Reimpresso por Dover, Nova York, 1929.
- KRAITCHIK, Maurice. *Mathematical Recreations*. Nova York, W. W. Norton, 1942.
- MAHONEY, M. S. *The Mathematical Career of Pierre de Fermat, 1601-1655*. Princeton (N. J.), Princeton University Press, 1972.
- MAISTROV, L. E. *Probability: A Historical Sketch*. Nova York, Academic Press, 1974.
- MERRIMAN, Mansfield. *The Solution of Equations*. 4ª ed., Nova York, John Willey, 1906.
- MILLER, G. A. *Historical Introduction to Mathematical Literature*. Nova York, Macmillan, 1916.
- MUIR, Jane. *Of Men and Numbers, The Story of the Great Mathematicians*. Nova York, Dodd, Mead, 1961.
- ORE, Oystein. *Number Theory and Its History*. Nova York, McGraw-Hill, 1948.
- SMITH, D. E. *History of Modern Mathematics*. 4ª ed. Nova York, John Wiley, 1906.
- . *A Source Books in Mathematics*. Nova York, McGraw-Hill, 1929.
- SULLIVAN, J. W. N. *The History of Mathematics in Europe, From the Fall of Greek Science to the Rise of the Conception of Mathematical Rigor*. Nova York, Oxford University Press, 1925.

- SUMMERSON, John. *Sir Christopher Wren*. N^o 9 da série Brief Lives. Nova York, Macmillan, 1953.
- TODHUNTER, Isaac. *A History of Mathematical Theory of Probability from the Time of Pascal to that of Laplace*. Nova York, Chelsea, 1949.
- TURNBULL, H. W. *The Great Mathematicians*. Nova York, New York University Press, 1961.
- VEITCH, John. *The Method, Meditation and Philosophy of René Descartes*. Nova York, Tudor, 1901.
- VROOMAN, Jack. *René Descartes, a Biography*. Nova York, C. P. Putnam's Sons, 1970.
- WILLIAMSON, Benjamin. *An Elementary Treatise on the Differential Calculus*. Londres, Longmans, Green, 1899.
- WINGER, R. M. *An Introduction to Projective Geometry*. Boston, D. C. Heath, 1923.
- YATES, R. C. *A Handbook on Curves and Their Properties*. Ann Arbor (Mich.), J. W. Edwards, 1947.

O cálculo e conceitos relacionados

11.1 Introdução

Já vimos que o século XVII foi extremamente produtivo para o desenvolvimento da matemática, graças, em grande parte, às novas e vastas áreas de pesquisa que nela se abriram. Indubitavelmente, porém, a realização matemática mais notável do período foi a invenção do cálculo, perto do final do século, por Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz. Com essa invenção a matemática criativa passou a um plano superior e a história da matemática elementar essencialmente terminou. Este capítulo se dedica a relatar brevemente as origens e desenvolvimentos dos conceitos principais do cálculo. Esses conceitos têm tanto alcance e tantas implicações no mundo moderno que talvez seja correto dizer que sem algum conhecimento deles dificilmente hoje uma pessoa poderia considerar-se culta.

É curioso que o desenvolvimento histórico do cálculo seguiu a ordem contrária à daquela dos textos e cursos básicos atuais sobre o assunto: ou seja, primeiro surgiu o cálculo integral e só muito tempo depois o cálculo diferencial. A ideia de integração teve origem em processos somatórios ligados ao cálculo de certas áreas e certos volumes e comprimentos. A diferenciação, criada bem mais tarde, resultou de problemas sobre tangentes a curvas e de questões sobre máximos e mínimos. Mais tarde ainda, verificou-se que a integração e a diferenciação estão relacionadas entre si, sendo cada uma delas operação inversa da outra.

Embora a maior parte de nossa história se situe no século XVII devemos retornar, de início, à Grécia do século V a.C.

11.2 Paradoxos de Zenão

É válido admitir-se que uma grandeza pode ser subdividida indefinidamente ou que é formada de um número muito grande de partes atômicas indivisíveis? A primeira suposição parece mais razoável, mas a segunda é tão útil em termos de descobertas que isso faz com que perca sua aparente absurdidade. Há evidências de que na Grécia antiga se desenvolveram escolas de raciocínio matemático que abraçaram uma ou outra dessas premissas.

O filósofo Zenão de Eleia (c. 450 a.C.) chamou a atenção, de maneira candente, para as dificuldades lógicas ocultas em cada uma dessas suposições, através de alguns paradoxos que engendrou com essa finalidade. Esses paradoxos, que tiveram influência profunda na matemática, garantem que, admitindo-se qualquer das suposições consideradas, o movimento é impossível. Para ilustrar sua natureza, vejamos dois desses paradoxos.

A Dicotomia: Se um segmento de reta pode ser subdividido indefinidamente, então o movimento é impossível pois, para percorrê-lo, é preciso antes alcançar seu ponto médio, antes ainda alcançar o ponto que estabelece a marca de um quarto do segmento, e assim por diante, *ad infinitum*. Segue-se, então, que o movimento jamais começará.

A Flecha: Se o tempo é formado de instantes atômicos indivisíveis, então uma flecha em movimento está sempre parada, posto que em cada instante ela está numa posição fixa. Sendo isso verdadeiro em cada instante, segue-se que a flecha jamais se move.

Já se deram muitas explicações para os paradoxos de Zenão. Por outro lado, não é difícil mostrar que eles desafiam as seguintes crenças da intuição comum: de que a soma de um número infinito de quantidades positivas é infinitamente grande, mesmo que

cada uma delas seja extremamente pequena $\left(\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i = \infty \right)$ e de que a soma de um número finito ou infinito de quantidade de dimensão zero é zero ($n \times 0 = 0$ e $\infty \times 0 = 0$). Qualquer que tenha sido a motivação dos paradoxos, o fato é que eles excluíram os infinitésimos da geometria demonstrativa grega¹.

11.3 O método de exaustão de Eudoxo

Os primeiros problemas da história do cálculo diziam respeito ao cálculo de áreas, volumes e comprimentos de arcos. Em sua abordagem encontram-se indícios das duas suposições consideradas na Seção 11-2 a respeito de divisão de grandezas.

Uma das contribuições importantes mais antigas ao problema da quadratura do círculo foi dada por Antífon, o Sofista (c. 430 a.C.), um contemporâneo de Sócrates. Consta que Antífon teria antecipado a ideia de que, por sucessivas duplicações do número de lados de um polígono regular inscrito num círculo, a diferença entre o círculo e o polígono ao fim exaurir-se-ia. E como se pode construir um quadrado de área igual à de qualquer polígono, seria então possível construir um quadrado de área igual à do círculo. A crítica que imediatamente se levantou contra esse argumento sustentava-se no princípio de que uma grandeza pode ser subdividida indefinidamente e que, assim, o processo de Antífon jamais esgotaria a área do círculo. Não obstante, a corajosa abordagem de Antífon continha o germe do famoso *método de exaustão* grego.

¹ Para um tratamento histórico informativo dos paradoxos de Zenão, ver Florian Cajori, "History of Zeno's arguments on motion", *The American Mathematical Monthly*, nº 22, 1915, pp. 1-6, 39-47, 77-82, 109-15, 145-9, 179-86, 215-20, 253-8, 292-7.

O método de exaustão, que pode ser considerado como a resposta da escola platônica aos paradoxos de Zenão, comumente é creditado a Eudoxo (c. 370 a.C.). O método admite que uma grandeza possa ser subdividida indefinidamente e sua base é a proposição: *Se de uma grandeza qualquer se subtrai uma parte não menor que sua metade, do restante subtrai-se também uma parte não menor que sua metade, e assim por diante, se chegará por fim a uma grandeza menor que qualquer outra predeterminada da mesma espécie.* Empreguemos o método de exaustão para provar que se A_1 e A_2 são as áreas de dois círculos de diâmetros d_1 e d_2 , então

$$A_1 : A_2 = d_1^2 : d_2^2 .$$

Mostremos primeiro, com a ajuda da proposição básica, que a diferença entre a área de um círculo e a de um polígono regular inscrito pode-se tornar tão pequena quanto se deseje. Seja AB , na Figura 96, o lado de um polígono regular inscrito e seja M o ponto médio do arco AB . Note-se que a área do triângulo AMB é metade da do retângulo $ARSB$ e portanto maior que a metade da área do segmento circular AMB . Assim, dobrando-se o número de lados do polígono regular inscrito, a área do polígono aumentará de mais do que a metade da diferença entre a área do círculo e a do polígono. Logo, repetindo-se a operação de dobrar o número de lados um número suficiente de vezes, pode-se fazer com que a diferença entre a área do círculo e a do polígono se torne menor do que qualquer área fixada previamente, por menor que seja.

Voltemos ao nosso teorema. Suponhamos que, em vez da igualdade, tivéssemos

$$A_1 : A_2 > d_1^2 : d_2^2 .$$

Podemos, então, inscrever no primeiro círculo um polígono regular cuja área P_1 difira tão pouco da de A_1 que

$$P_1 : A_2 > d_1^2 : d_2^2 .$$

Seja P_2 a área de um polígono regular semelhante ao de área P_1 considerado, mas inscrito no segundo círculo. Então, por um conhecido teorema sobre polígonos regulares semelhantes,

$$P_1 : P_2 = d_1^2 : d_2^2 .$$

Segue-se então que $P_1 : A_2 > P_1 : P_2$, ou $P_2 > A_2$, o que é absurdo, pois a área de um polígono regular não pode superar a de seu circuncírculo. De maneira análoga se prova que não pode ocorrer

$$A_1 : A_2 < d_1^2 : d_2^2 .$$

Donde, por uma dupla *reductio ad absurdum*, o teorema fica demonstrado. Assim, se A é a área e d é o diâmetro de um círculo, $A = kd^2$, onde k é uma constante (na verdade $\pi/4$), que é a mesma para todos os círculos.

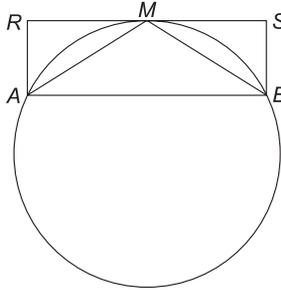


Figura 96

Demócrito (c. 410 a.C.), segundo Arquimedes, tinha conhecimento de que o volume de uma pirâmide qualquer é um terço do volume do prisma de mesma base e mesma altura. Muito pouco se sabe sobre Demócrito, mas dificilmente ele poderia ter dado uma demonstração rigorosa desse teorema. Lembre-se de que um prisma pode ser decomposto numa soma de prismas de base triangular e que por outro lado, um prisma triangular pode ser decomposto em três pirâmides triangulares U, V, W tais que U e V tenham bases equivalentes e alturas iguais, o mesmo ocorrendo para V e W . Assim, o ponto crucial do problema de Demócrito é mostrar que duas pirâmides de bases equivalentes e mesma altura têm volumes iguais. Uma demonstração desse fato foi feita por Eudoxo, usando o método de exaustão.

Como, então, poderia ter Demócrito chegado a este último resultado? A chave é fornecida por Plutarco, ao relatar o dilema a que chegou certa vez Demócrito quando considerou a possibilidade de um cone ser formado de uma infinidade de secções planas paralelas à base. Se duas secções “adjacentes” fossem do mesmo tamanho, o sólido seria um cilindro e não um cone. Se, por outro lado, duas secções adjacentes tivessem áreas diferentes, a superfície do sólido seria formada de uma série de degraus, o que certamente não se verifica. Neste caso se assumiu que o volume do cone pode ser subdividido indefinidamente (ou seja, numa infinidade de secções planas atômicas), mas que o conjunto dessas secções é contável, no sentido de que, dada uma delas, há uma outra que lhe é vizinha; suposição que se situa, até certo ponto, entre as duas já consideradas sobre a divisibilidade de grandezas. Demócrito pode ter argumentado que se duas pirâmides de bases equivalentes e alturas iguais são seccionadas por planos paralelos às bases, verificando-se a divisão das alturas numa mesma razão, então as secções correspondentes assim formadas são equivalentes. Portanto as pirâmides contêm mesmo número infinito de secções planas equivalentes, o que implica que seus volumes devem ser iguais. Tem-se aí o que seria um exemplo primitivo do chamado *método dos indivisíveis* de Cavalieri, a ser focalizado na Seção 11-6.

Dos antigos, quem aplicou de maneira mais elegante o método de exaustão e quem mais se aproximou da atual e verdadeira integração, sem dúvida foi Arquimedes. Como um dos exemplos mais antigos, vejamos como ele procedeu à quadratura de um segmento parabólico. Sejam C, D, E os pontos do arco de segmento parabólico (ver Figura 97) obtidos traçando-se LC, MD, NE paralelos ao eixo da parábola pelos pontos médios L, M, N de AB, CA, CB . Usando a geometria da parábola, Arquimedes mostrou que

$$\Delta CDA + \Delta CEB = \frac{\Delta ACB}{4}.$$

Repetindo sucessivamente esse raciocínio conclui-se que a área do segmento parabólico é dada por

$$\begin{aligned} \Delta ABC + \frac{\Delta ABC}{4} + \frac{\Delta ABC}{4^2} + \frac{\Delta ABC}{4^3} + \dots \\ = \Delta ABC \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots \right) \\ = \frac{4}{3} \Delta ABC. \end{aligned}$$

Aqui o trabalho foi abreviado usando-se a fórmula da soma da série geométrica; Arquimedes, porém, procedia por dupla *reductio ad absurdum*, nos moldes do método de exaustão.

Na sua abordagem de áreas e volumes, Arquimedes chegou a resultados equivalentes a muitas integrais definidas que hoje figuram nos textos elementares de cálculo.

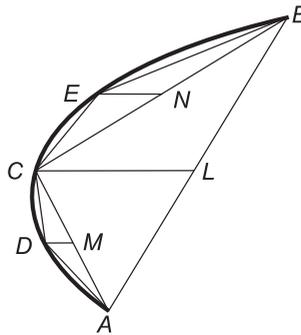


Figura 97

11.4 O método de equilíbrio de Arquimedes

O método de exaustão é rigoroso mas estéril. Em outras palavras, uma vez conhecida uma fórmula, o método de exaustão pode se constituir num elegante instrumento para prová-la, mas o método, por si só, não se presta para a descoberta inicial do resultado. Quanto a esse aspecto, o método de exaustão assemelha-se muito ao princípio de indução matemática. Como, então, Arquimedes descobria as fórmulas que tão elegantemente demonstrava pelo método de exaustão?

A questão se esclareceu finalmente em 1906, com a descoberta feita por Heiberg, em Constantinopla, de uma cópia de *O método*, um tratado de Arquimedes enviado em forma de carta a Eratóstenes e que se encontrava perdido desde os primeiros séculos de nossa era. O manuscrito se encontrava num palimpsesto (ver Seção 1-8); isto é, o texto foi escrito num pergaminho, no século X, e depois, no século XIII, foi raspado para dar lugar a um texto religioso. Felizmente, foi possível restaurar a maior parte do texto original.

Vejam os qual é a ideia fundamental do método de Arquimedes. Para determinar uma área ou um volume, corte a região correspondente num número muito grande de tiras planas ou de fatias paralelas finas e (mentalmente) pendure esses pedaços numa das extremidades de uma alavanca dada, de tal maneira a estabelecer o equilíbrio com uma figura de área ou volume e centroide conhecidos. Ilustremos esse método usando-o para descobrir a fórmula do volume de uma esfera.

Seja r o raio da esfera. Faça com que o diâmetro polar da esfera esteja sobre o eixo x (horizontal), com polo norte N na origem (ver Figura 98). Construa o cilindro e o cone de revolução obtidos pela rotação do retângulo $NABS$ e do triângulo NCS em torno do eixo x . Tome agora nos três sólidos as fatias verticais delgadas (que serão vistas como cilindros achatados) correspondentes às secções de abscissas x e $x + \Delta x$. Os volumes dessas fatias são, aproximadamente,

esfera:	$\pi x (2r - x) \Delta x$
cilindro:	$\pi r^2 \Delta x$
cone:	$\pi x^2 \Delta x$.

Penduremos no ponto T , dado por $TN = 2r$, as fatias da esfera e do cone. Seu momento combinado² em relação a N é

$$[\pi x (2r - x) \Delta x + \pi x^2 \Delta x] 2r = 4\pi r^2 x \Delta x.$$

² O momento de um volume em relação a um ponto é o produto do volume pela distância do ponto ao centroide do volume.

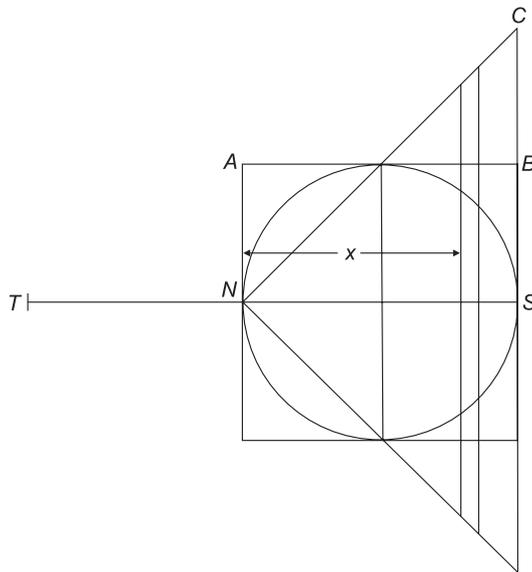


Figura 98

Observemos que o resultado anterior é o quádruplo do momento da fatia cilíndrica quando ela é mantida em sua posição original. Efetuando-se a soma de um número grande dessas fatias, resulta

$$2r [\text{volume da esfera} + \text{volume do cone}] = 4r [\text{volume do cilindro}],$$

ou

$$2r \left[\text{volume da esfera} + \frac{8\pi r^3}{3} \right] = 8\pi r^4,$$

ou

$$\text{volume da esfera} + \frac{4\pi r^3}{3}.$$

Essa, informa-nos *O método*, foi a maneira como Arquimedes descobriu a fórmula do volume da esfera. Sua consciência matemática, porém, não se satisfazia com esse procedimento, daí porque ele recorria ao método de exaustão para fornecer uma demonstração mais rigorosa em casos como o que acabamos de focalizar. Pelo método de equilíbrio pode-se ver a fertilidade da ideia que consiste em considerar toda grandeza

como sendo formada de um número muito grande de porções atômicas, embora essa ideia não tenha uma fundamentação precisa. É desnecessário dizer que, com o moderno método dos limites, pode-se fazer com que o método de equilíbrio de Arquimedes se torne perfeitamente rigoroso, confundindo-se, em essência, com a moderna integração.

11.5 Primeiros passos da integração na Europa Ocidental

No período que vai das notáveis realizações de Arquimedes até praticamente os tempos modernos, a teoria da integração quase não foi ativada. Só por volta de 1450 os trabalhos de Arquimedes chegaram à Europa Ocidental, através de uma tradução, achada em Constantinopla, de uma cópia (do século IX) de seus manuscritos. Essa tradução foi revisada por Regiomontanus e impressa em 1540. Alguns anos mais tarde apareceu uma outra tradução. Mas só por perto do início do século XVII as ideias de Arquimedes passaram por outros desdobramentos.

Dois dos primeiros matemáticos dos tempos modernos a usarem métodos comparáveis aos de Arquimedes foram o engenheiro flamengo Simon Stevin (1548-1620) e o matemático italiano Luca Valerio (c. 1552-1618). Ambos tentaram evitar a dupla *reductio ad absurdum* do método de exaustão fazendo uma passagem direta ao limite, de maneira bastante parecida com o procedimento aplicado perto do fim da Seção 11-3, quando do cálculo da área de um segmento parabólico. Stevin usava esse método em seu trabalho no campo da hidrostática, para determinar a força exercida pela pressão de um fluido sobre um dique vertical. Basicamente, sua ideia consistia em dividir o dique em faixas horizontais e então fazer cada uma girar em torno de suas bordas superior e inferior, até que elas se tornassem paralelas ao plano horizontal. Fundamentalmente é esse o método usado hoje em dia em nossos textos elementares de cálculo.

Dos primeiros europeus modernos a desenvolver ideias relativas a infinitésimos em trabalhos com a integração, merece menção especial o nome de Johann Kepler. Já observamos (na Seção 9-7) que Kepler teve de recorrer a procedimentos de integração a fim de calcular as áreas envolvidas em sua segunda lei do movimento planetário e os volumes de que se ocupou em seu tratado sobre a capacidade dos barris de vinho. Mas Kepler, como outros em seu tempo, tinha pouca paciência com o rigor demasiado cuidadoso do método de exaustão e, impelido pela tentação de ganhar tempo e economizar trabalho, adotava, sem preocupação nenhuma, métodos que Arquimedes consideraria tão somente heurísticos. Assim, Kepler considerava uma circunferência como um polígono regular de um número infinito de lados. Tomando-se cada um desses lados como base de um triângulo cujo vértice é o centro da circunferência, então a área do círculo correspondente fica dividida numa infinidade de triângulos delgados, todos de altura igual ao raio do círculo. Como a área de cada um desses triângulos delgados é o semiproduto de sua base por sua altura, segue-se que a área do círculo é igual ao semiproduto da circunferência pelo raio. Analogamente, pode-se considerar uma esfera como

constituída de uma infinidade de pirâmides delgadas de vértice (comum) no centro da esfera. Disso decorre que o volume da esfera é um terço do produto de sua superfície pelo raio. Embora passíveis de objeções, sob o ponto de vista do rigor matemático, esses métodos produzem resultados corretos de maneira bem mais simples. Mesmo no século XX, esses métodos “atômicos” ainda são usados bastante regularmente por físicos e engenheiros para armar um problema, ficando o tratamento rigoroso “por limites” para os matemáticos profissionais³. Os geômetras frequentemente recorrem aos convenientes conceitos de pontos “consecutivos” e curvas e superfícies “consecutivas” numa família uniparametral de tais entes⁴.

11.6 O método dos indivisíveis de Cavalieri

Bonaventura Cavalieri nasceu em Milão em 1598, tornou-se jesuado (e não jesuíta, como muitas vezes se afirma erradamente) aos 15 anos de idade, foi aluno de Galileu e atuou como professor de matemática da Universidade de Bolonha de 1629 até 1647, ano de sua morte. Deixou uma obra vasta abrangendo matemática, óptica e astronomia. Em grande parte foi o responsável pela introdução, logo, dos logaritmos na Europa. Tudo isso fez dele um matemático muito influente. Mas a obra que mais o projetou, aliás sua grande contribuição à matemática, é o tratado *Geometria indivisibilibus*, publicado em sua versão inicial no ano de 1635. Nesse trabalho ele apresenta seu *método dos indivisíveis*, cujas raízes remontam a Demócrito (c. 410 a.C.) e Arquimedes (c. 287-212 a.C.) mas cuja motivação direta talvez se encontre nas tentativas de Kepler de achar certas áreas e certos volumes.

O tratado de Cavalieri é demasiado prolixo e pouco claro, sendo difícil até descobrir o que ele entendia por “indivisível”. Tudo indica que um indivisível de uma porção plana dada é uma corda dessa porção e um indivisível de um sólido dado é uma secção desse sólido. Considera-se que uma porção plana seja formada de uma infinidade de cordas paralelas e que um sólido seja formado de uma infinidade de secções planas paralelas. Então, argumentava Cavalieri, fazendo-se deslizar cada um dos elementos do conjunto das cordas paralelas de uma porção plana dada ao longo de seu próprio eixo, de modo que as extremidades das cordas ainda descrevam um contorno contínuo, a área da nova porção plana é igual à da original, uma vez que ambas são formadas das mesmas cordas. Um procedimento análogo com os elementos do conjunto das secções planas paralelas de um sólido dado fornecerá um outro sólido com o mesmo volume do original. (Este último resultado pode ser ilustrado claramente formando-se uma pilha vertical de cartas

³ “Assim, na medida em que limitamos nossa atenção às diferenciais primeiras, podemos considerar como reta uma pequena parte de uma curva e como plana uma pequena porção de uma superfície nas vizinhanças de um ponto; durante um espaço de tempo pequeno dt , pode-se considerar que uma partícula se mova com velocidade constante e que um processo físico ocorra a uma taxa constante.” H. B. Phillips, *Differential Equations*, 3ª ed. rev., p. 28.

⁴ “Em outras palavras, a característica de uma superfície [de uma família uniparametral de superfícies] é a curva em que uma superfície consecutiva a ela intercepta-a.” E. P. Lane, *Metric Differential Geometry of Curves and Surfaces*, p. 81.

e depois deformando suas laterais transformando-as em superfícies curvas; o volume evidentemente não se altera com essa deformação.) Esses resultados, ligeiramente generalizados, fornecem os chamados *princípios de Cavalieri*:

1. *Se duas porções planas são tais que toda reta secante a elas e paralela a uma reta dada determina nas porções segmentos de reta cuja razão é constante, então a razão entre as áreas dessas porções é a mesma constante.*

2. *Se dois sólidos são tais que todo plano secante a eles e paralelo a um plano dado determina nos sólidos secções cuja razão é constante, então a razão entre os volumes desses sólidos é a mesma constante.*

Os princípios de Cavalieri representam ferramentas poderosas para o cálculo de áreas e volumes e, ademais, sua base intuitiva pode facilmente tornar-se rigorosa com o cálculo integral moderno. Com a aceitação desses princípios como evidentes, intuitivamente, podem-se resolver muitos problemas de mensuração que normalmente requeriam técnicas avançadas de cálculo.



Bonaventura Cavalieri
(Coleção David Smith)

Ilustremos o uso dos princípios de Cavalieri, primeiro no caso plano para determinar a área compreendida por uma elipse de semieixos a e b e depois no caso sólido para determinar o volume de uma esfera de raio r .

Considere a elipse e a circunferência

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > b \quad \text{e} \quad x^2 + y^2 = a^2,$$

referidas ao mesmo sistema de coordenadas retangulares, como mostra a Figura 99. Tirando y em função de x em cada uma dessas equações obtém-se, respectivamente,

$$y = \frac{b}{a}(a^2 - x^2)^{1/2} \quad , \quad y = (a^2 - x^2)^{1/2} .$$

Daí resulta que a razão entre duas ordenadas correspondentes quaisquer da elipse e da circunferência é b/a . Portanto a razão entre duas cordas verticais correspondentes da elipse e da circunferência é b/a . Pelo princípio de Cavalieri conclui-se que

$$\text{área da elipse} = \frac{b}{a}(\text{área do círculo})$$

ou

$$\text{área da elipse} = \frac{b}{a}(\pi a^2) = \pi ab .$$

Basicamente, foi esse o procedimento usado por Kepler para estabelecer a área da região limitada por uma elipse.

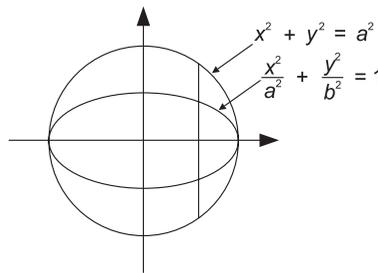


Figura 99

Determinemos agora a conhecida fórmula do volume de uma esfera de raio r . Na Figura 100 temos, à esquerda, um hemisfério de raio r e, à direita, um cilindro circular de raio r e altura r , cilindro esse de que se removeu o cone cuja base é sua base superior e cujo vértice é o centro de sua base inferior. Os dois sólidos estão assentados sobre o mesmo plano. Seccionaremos agora ambos os sólidos com um plano paralelo ao plano da base de ambos e a uma distância h dele. Esse plano corta o hemisfério segundo um círculo e o outro sólido segundo uma coroa circular. É fácil mostrar, através da geometria elementar, que ambas as secções têm área igual a $\pi(r^2 - h^2)$. Segue-se então do princípio de Cavalieri que os dois sólidos têm volumes iguais. Logo, o volume V da esfera é dado por

$$V = 2 (\text{volume do cilindro} - \text{volume do cone})$$

$$= 2 \left(\pi r^3 - \frac{\pi r^3}{3} \right) = \frac{4\pi r^3}{3}.$$

A admissão e o uso consistente do segundo princípio de Cavalieri pode simplificar grandemente a dedução de muitas fórmulas de volumes incluídas nos tratamentos iniciais da geometria sólida. Esse procedimento foi adotado por muitos autores de textos de geometria e costuma ser defendido por razões pedagógicas. Ao deduzir a conhecida fórmula do volume do tetraedro ($V = Bh/3$), por exemplo, a parte desagradável consiste em provar antes que dois tetraedros de bases equivalentes e alturas relativas a essas bases iguais têm volumes iguais. A dificuldade inerente à questão manifestou-se em todas as abordagens da geometria sólida, desde os *Elementos* de Euclides. Com o segundo princípio de Cavalieri, porém, a dificuldade simplesmente desaparece.

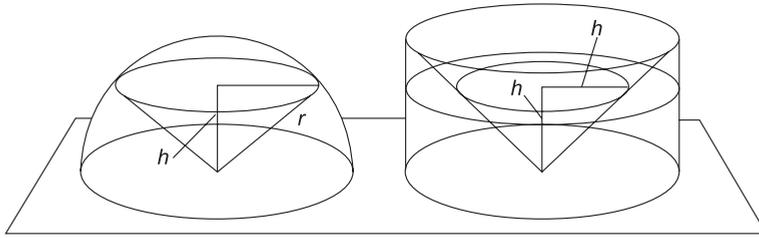


Figura 100

A nebulosa concepção de indivisível de Cavalieri, como uma espécie de parte atômica de uma figura, suscitou muita discussão e críticas sérias de alguns estudiosos do assunto, em particular do ourives e matemático suíço Paul Guldin (1577-1642). Cavalieri remodelou seu trabalho na expectativa vã de levantar essas objeções. O matemático francês Roberval, que manipulou com muita habilidade o método, proclamou-se seu inventor. Na verdade o método dos indivisíveis, ou outros equivalentes a ele, foram efetivamente usados por Torricelli, Fermat, Pascal, Saint-Vincent, Barrow e outros. No curso de seu trabalho esses matemáticos chegaram a resultados equivalentes à integração de expressões como x^n , $\sin \theta$, $\sin^2 \theta$ e $\theta \sin \theta$.

11.7 Os primeiros passos da diferenciação

Pode-se dizer que a diferenciação se originou de problemas relativos ao traçado de tangentes a curvas e de questões objetivando a determinação de máximos e mínimos de funções. Embora essas considerações remontem aos gregos antigos, parece razoável

afirmar que a primeira manifestação realmente clara do método diferencial se encontra em algumas ideias de Fermat, expostas em 1629.

Kepler observou que os incrementos de uma função tornam-se infinitesimais nas vizinhanças de um ponto de máximo ou de mínimo comum. Fermat transformou esse fato num processo para determinar esses pontos de máximo ou de mínimo. Esse método será considerado aqui em poucas linhas. Se $f(x)$ tem um máximo ou mínimo comum em x e se e é muito pequeno, então o valor de $f(x - e)$ é quase igual ao de $f(x)$. Portanto, pode-se experimentar fazer $f(x - e) = f(x)$ e, para tornar essa igualdade correta, impor que e assuma o valor zero. As raízes da equação resultante darão, então, os valores de x para os quais $f(x)$ assume um máximo ou um mínimo.

Ilustremos o procedimento esboçado, considerando o primeiro exemplo de Fermat: dividir uma quantidade em duas partes tais que seu produto seja máximo. Fermat usava a notação de Viète em que as consoantes maiúsculas representavam constantes e as vogais maiúsculas representavam variáveis. Seguindo essa notação, seja B a quantidade dada e denotemos as partes procuradas por A e $B - A$. Formando

$$(A - E)[B - (A - E)]$$

e igualando esse produto a $A(B - A)$, obtemos

$$A(B - A) = (A - E)(B - A + E)$$

ou

$$2AE - BE - E^2 = 0.$$

Dividindo por E chegamos a

$$2A - B - E = 0.$$

Fazendo, então, $E = 0$, conclui-se que $2A = B$, estabelecendo-se assim a divisão desejada.

Embora a lógica do processo de Fermat deixe muito a desejar, vê-se que o método equivale a impor

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 0,$$

isto é, a impor que a derivada de $f(x)$ em x seja nula. Esse é o método habitual de se acharem máximos e mínimos de uma função $f(x)$, às vezes referido nos textos elementares de cálculo como *método de Fermat*. Fermat, porém, ignorava que a condição de a derivada de $f(x)$ se anular não é suficiente para se ter um máximo ou mínimo comum, mas apenas necessária. O método de Fermat também não distinguia entre valor máximo e valor mínimo.

Fermat também descobriu um procedimento geral para determinar a tangente por um ponto de uma curva cuja equação cartesiana é dada. Sua ideia consistia em achar a *subtangente* relativa a esse ponto, isto é, o segmento de reta cujas extremidades são a projeção do ponto de tangência sobre o eixo x e a intersecção da tangente com esse eixo. A ideia de tangente usada pelo método é a de posição limite de uma secante quando os dois pontos de intersecção com a curva tendem a coincidir. Vejamos, em notação moderna, em que consiste o método. Seja $f(x, y) = 0$ a equação da curva (Figura 101) e procuremos sua subtangente a relativa a (x, y) . Por semelhança de triângulos, facilmente se estabelece que as coordenadas de um ponto da tangente, próximo do ponto de tangência, são $[x + e, y(1 + e/a)]$. Tratando-se esse ponto como se ele fosse da curva, obtém-se

$$f\left[x + e, y\left(1 + \frac{e}{a}\right)\right] = 0.$$

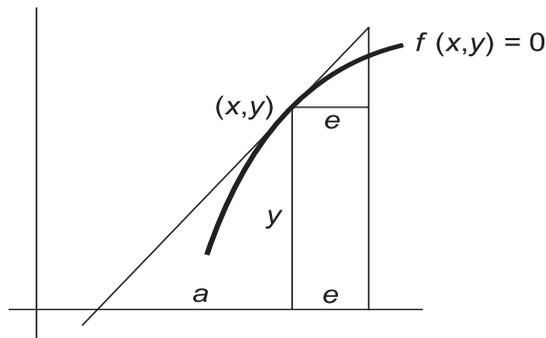


Figura 101

E, para que essa igualdade possa ser considerada correta, faz-se com que e assumo o valor zero. Determina-se, então, a partir da equação resultante, a subtangente a em função das coordenadas x e y do ponto de tangência. Isso, obviamente, equivale a fazer

$$a = -y \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x}},$$

uma fórmula que apareceu posteriormente num trabalho de Sluze. À sua maneira, Fermat determinou tangentes às seguintes curvas: elipse, cicloide, cissoide, conchoide, quadratriz e folium de Descartes. Ilustremos o método com a determinação da subtangente relativa a um ponto genérico da folium de Descartes:

$$x^3 + y^3 = nxy.$$

Neste caso temos

$$(x + e)^3 + y^3 \left(1 + \frac{e}{a}\right)^3 - ny(x + e) \left(1 + \frac{e}{a}\right) = 0,$$

ou

$$e \left(3x^2 + \frac{3y^3}{a} - \frac{ny}{a} - ny\right) + e^2 \left(3x + \frac{3y^3}{a^2} - \frac{ny}{a}\right) + e^3 \left(1 + \frac{y^3}{a^3}\right) = 0.$$

Agora, dividindo por e e fazendo $e = 0$, encontramos

$$a = -\frac{3y^3 - ny}{3x^2 - ny}.$$

Fermat desenvolveu um trabalho pioneiro não só no que se refere à diferenciação, mas também no que se refere à integração, como se insinuou ao fim da Secção 11-6. Fermat foi um matemático singularmente brilhante e versátil.

11.8 Wallis e Barrow

Os predecessores imediatos de Isaac Newton na Inglaterra foram John Wallis e Isaac Barrow.

John Wallis, que nasceu em 1616, foi um dos matemáticos mais capazes e originais de seu tempo. Foi um escritor produtivo e original em muitos campos e, segundo consta, um dos primeiros a criar um sistema de ensino para surdos-mudos. Foi aluno de Oughtred e, de 1649 até sua morte em 1703, professor saviliano de geometria de Oxford. Fez uso sistemático das séries em análise, contribuindo muito nesse campo para abrir caminho para seu grande contemporâneo Isaac Newton.

Wallis foi um dos primeiros a discutir as cônicas como curvas de segundo grau, em vez de considerá-las como secções de um cone. Em 1655 apareceu sua *Arithmetica infinitorum* (dedicado a Oughtred) — um livro que, a despeito de algumas imperfeições lógicas, manteve-se como um tratado modelo por muitos anos. Nesse livro são sistematizados e estendidos os métodos de Descartes e Cavalieri e induzidos muitos resultados notáveis a partir de casos particulares. Assim, há a afirmação de que a fórmula que hoje escreveríamos como

$$\int_0^1 x^m dx = \frac{1}{m+1},$$

onde m é inteiro, também vale quando m é fracionário ou negativo mas diferente de -1 . Wallis foi o primeiro a explicar de maneira razoavelmente satisfatória o significado dos expoentes zero, negativos e fracionários; deve-se a ele também a introdução do atual símbolo de infinito (∞).



John Wallis
(Biblioteca do Congresso)

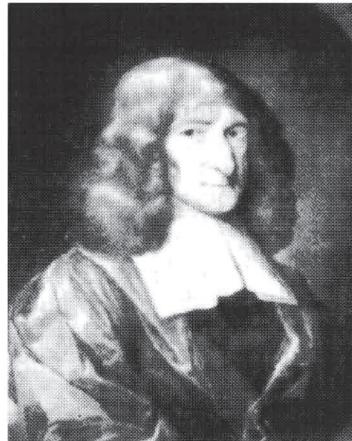
Wallis empenhou-se em determinar π buscando uma expressão para a área, $\pi/4$, de um quadrante do círculo $x^2 + y^2 = 1$. Isso equivale a calcular $\int_0^1 (1-x^2)^{1/2} dx$, que ele não tinha condições de fazer diretamente, uma vez que desconhecia o teorema geral do binômio. Conseqüentemente ele calculou $\int_0^1 (1-x^2)^0 dx$, $\int_0^1 (1-x^2)^1 dx$, $\int_0^1 (1-x^2)^2 dx$, ..., obtendo assim a seqüência $1, 2/3, 8/15, 16/35, \dots$. Isso levou-o a considerar o problema da determinação da lei que para $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ forneceria a seqüência precedente. O que ele procurava era o valor interpolado dessa lei para $n = 1/2$. Por um longo e complicado processo, finalmente chegou à sua expressão de $\pi/2$ como produto infinito (ver Seção 4-8). Os matemáticos da época com freqüência recorriam a processos de interpolação para calcular quantidades que não conseguiam obter diretamente.

Wallis deu outras contribuições à matemática. Foi ele o matemático que mais perto esteve de resolver a questão-desafio de Pascal sobre a cicloide (ver Seção 9-9). Podem-se encontrar argumentos razoáveis para defender que ele obteve um resultado equivalente à fórmula

$$ds = \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{1/2} dx$$

do comprimento de um elemento de arco de uma curva. Sua *De algebra tractatus; historicus & practicus*, escrita em 1673, mas publicada em inglês em 1685 e em latim em 1693, é considerada a primeira tentativa séria de uma história da matemática na Inglaterra. Nesse trabalho encontra-se o primeiro esforço registrado de dar às raízes complexas de uma equação quadrática real uma interpretação gráfica. Wallis editou partes dos trabalhos de muitos dos grandes matemáticos gregos e escreveu sobre uma ampla gama de assuntos físicos. Foi um dos fundadores da Royal Society e por muitos anos assessorou o governo como criptologista.

Enquanto as principais contribuições de Wallis ao cálculo situam-se na teoria da integração, as mais importantes de Isaac Barrow talvez sejam aquelas ligadas à teoria da diferenciação.



Isaac Barrow
(Coleção David Smith)

Isaac Barrow nasceu em Londres em 1630. Há uma história segundo a qual em seus primeiros tempos de escola era uma criatura tão turbulenta que certa vez se ouviu seu pai rezando para que, se Deus resolvesse lhe levar um filho, que antes fosse Isaac. Barrow completou seus estudos em Cambridge, onde ganhou fama como um dos melhores especialistas em grego de seu tempo. Foi um homem de grande estofamento acadêmico, alcançando projeção em matemática, física, astronomia e teologia. Contam-se histórias interessantes sobre sua força física, bravura, escrupulosidade e sobre seu humor inteligente e sempre alerta. Depois de dois anos como professor de geometria do Gresham College de Londres, tornou-se o primeiro ocupante da cátedra lucasiana de Cambridge. Mas, ao aceitar convite em 1669 para se tornar o capelão de Carlos II, renunciou a essa cátedra.

Para substituí-lo em Cambridge, sugeriu o nome de seu jovem colega Isaac Newton, cujos talentos extraordinários foi ele um dos primeiros a reconhecer e admirar. Barrow faleceu em Cambridge em 1677.

O trabalho matemático mais importante de Barrow é *Lectiones opticae et geometricae*, do ano em que ele renunciou à sua cátedra em Cambridge. O prefácio do tratado tece agradecimentos penhorados a Newton por parte do material do livro, provavelmente aquela que se ocupa da óptica. É nesse livro que se encontra uma abordagem muito próxima do processo moderno de diferenciação, mediante o uso do chamado *triângulo diferencial*, que ainda se encontra nos textos atuais de cálculo. Suponhamos que se pretenda obter a tangente à curva da Figura 102 no ponto P . Seja Q um ponto da curva, vizinho de P . Então os triângulos PTM e PQR são praticamente semelhantes entre si e, argumentava Barrow, considerando o triângulo menor indefinidamente pequeno, vale a relação

$$\frac{RP}{QR} = \frac{MP}{TM}.$$

Façamos $QR = e$ e $RP = a$. Então, se as coordenadas de P são x e y , as de Q são $x - e$ e $y - a$. Substituindo esses valores na equação da curva e desprezando os quadrados e potências superiores tanto de e como de a , encontramos a razão a/e . Temos então

$$OT = OM - TM = OM - MP \left(\frac{QR}{RP} \right) = x - y \left(\frac{e}{a} \right),$$

e a tangente está determinada. Barrow aplicou seu método de construir tangentes às curvas: (a) $x^2(x^2 + y^2) = r^2y^2$ (*curva kappa*), (b) $x^3 + y^3 = r^3$ (uma particular *curva de Lamé*), (c) $x^3 + y^3 = rxy$ (*folium de Descartes*, chamada por Barrow de *la galande*), (d) $y = (r-x)\operatorname{tg}\pi x/2r$ (*quadratriz*) e (e) $y = r\operatorname{tg}\pi x/2r$ (*tangenteide*). Como ilustração, apliquemos o método à curva (b). Neste caso

$$(x - e)^3 + (y - a)^3 = r^3,$$

ou

$$x^3 - 3x^2e + 3xe^2 - e^3 + y^3 - 3y^2a + 3ya^2 - a^3 = r^3.$$

Desprezando os quadrados e as potências superiores de e e a e usando o fato de que $x^3 + y^3 = r^3$, obtém-se

$$3x^2e + 3y^2a = 0,$$

do que resulta

$$\frac{a}{e} = -\frac{x^2}{y^2}.$$

A razão a/e é, obviamente, nosso moderno dy/dx e o questionável procedimento de Barrow pode facilmente tornar-se rigoroso com o uso da teoria dos limites.

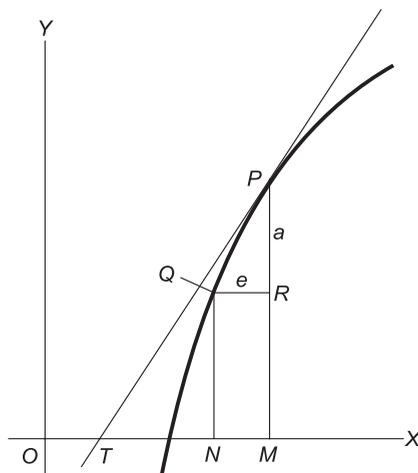


Figura 102

Apesar de indícios tênues que apontam noutra direção, em geral considera-se que Barrow foi o primeiro a perceber, de maneira plena, que a diferenciação e a integração são operações inversas uma da outra. Essa importante descoberta é conhecida como *teorema fundamental do cálculo* e aparece enunciada e provada nas *Lectioes* de Barrow.

Embora dedicasse a maior parte de sua vida à teologia, Barrow publicou, em 1675, uma edição (com comentários) dos primeiros quatro livros da *Secções cônicas* de Apolônio e de trabalhos remanescentes de Arquimedes e Teodósio.

Nesta altura do desenvolvimento do cálculo diferencial e integral já se tinham feito muitas integrações; muitas cubaturas, quadraturas e retificações já haviam sido efetuadas; já aflorara um processo de diferenciação e muitas tangentes a curvas haviam sido construídas; a ideia de limite já fora concebida; e o teorema fundamental reconhecido. O que mais faltava fazer? Faltava ainda a criação de um simbolismo geral com um conjunto sistemático de regras analíticas formais e também um redesenvolvimento, consistente e rigoroso, dos fundamentos da matéria. Foi à primeira dessas duas coisas, ou seja, à criação de um *cálculo* manipulável e proveitoso, que Newton e Leibniz, trabalhando independentemente, deram sua contribuição. Assim, embora Newton e Leibniz tenham tido muitos precursores, a criação do cálculo em geral é atribuída a eles. O redesenvolvimento dos conceitos fundamentais do cálculo em bases aceitáveis, rigorosamente falando, teria de esperar o período de aplicação vigorosa do assunto e seria levado a efeito pelo grande analista francês Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) e seus sucessores do século XIX. Essa história será contada no próximo capítulo.

11.9 Newton

Isaac Newton nasceu na aldeia de Woolsthorpe no dia de natal de 1642, ano do passamento de Galileu. Filho póstumo de um proprietário agrícola, pelos planos iniciais da família deveria abraçar a mesma atividade do pai. O jovem, porém, revelou grande habilidade para projetar miniaturas mecânicas engenhosas e deleitava-se com suas experiências. Assim, construiu um moinho de brinquedo que triturava o trigo, transformando-o em farinha, usando como força motriz um rato e construiu também um relógio de madeira movido a água. Em vista disso sua permanência na escola foi se prolongando. E aos 18 anos de idade, foi para o Trinity College, Cambridge. Foi só nessa altura, devido a um livro de astrologia que lhe caiu nas mãos, que sua atenção se voltou para a matemática. Esse novo interesse levou-o a ler primeiro os *Elementos* de Euclides, que achou demasiado óbvio, e depois *La géométrie* de Descartes, que achou algo difícil. Leu também a *Clavis* de Oughtred, trabalhos de Kleper e Viète e a *Arithmetica infinitorum* de Wallis. Não demorou para que ele passasse a criar sua própria matemática, primeiro descobrindo o teorema do binômio generalizado, depois inventando o método dos fluxos, como ele chamava o atual *cálculo diferencial*. Do final do verão de 1665 até o final do verão de 1667, salvo por um breve período de reabertura da metade de março à metade de junho de 1666, a Universidade de Cambridge esteve com suas portas praticamente fechadas, devido a uma violenta peste bubônica. Geralmente se relata que foi em 1665, durante o primeiro ano de fechamento da universidade, quando se encontrava em sua cidade natal, que Newton desenvolveu o seu cálculo (até o ponto em que lhe era possível achar a tangente a uma curva num de seus pontos e o raio de curvatura respectivo), interessou-se por várias questões físicas, levou a efeito suas primeiras experiências em óptica e formulou os princípios básicos de sua teoria da gravitação. Pesquisas recentes mostram, porém, que esse relato é um mito, posteriormente disseminado pelo próprio Newton para ajudá-lo a ganhar a primazia na questão da descoberta do cálculo e que essas descobertas não foram feitas antes de sua estada em Cambridge, em 1666, durante o breve período de reabertura da universidade.

Em 1667 Newton retornou a Cambridge e por dois anos ocupou-se com pesquisas no campo da óptica. Em 1669, com a renúncia de Barrow à cátedra lucasiana, assume esse lugar, dando início assim a seus 18 anos de docência na universidade. Suas primeiras preleções, que versaram sobre óptica, foram mais tarde comunicadas num artigo à Royal Society, suscitando muito interesse e discussão. Sua teoria das cores e certas deduções que fez a partir de suas experiências em óptica foram atacadas veementemente por alguns cientistas. Newton achou a discussão subsequente tão desagradável que jurou jamais publicar mais nada em ciência. Essa enorme aversão pela controvérsia, que parecia tocar as raias do patológico, teve importantes desdobramentos na história da matemática, uma vez que a grande maioria de suas criações só veio a ser publicada muitos anos depois das descobertas. Essa postergação constante levou mais tarde a uma polêmica de baixo nível com Leibniz, em torno da prioridade da criação do cálculo. E foi devido a essa polêmica que os matemáticos ingleses, tomando incondicionalmente o partido de Newton, voltaram as costas para o Continente, retardando o progresso matemático na Inglaterra por quase um século.



Isaac Newton
(Coleção David Smith)

Newton prosseguiu com suas pesquisas em óptica e, em 1675, comunicou à Royal Society sua teoria das emissões ou teoria corpuscular da luz. Sua reputação científica e sua engenhosa abordagem da teoria fizeram com que ela ganhasse aceitação geral e só muitos anos mais tarde se mostrou que a teoria ondulatória se constitui numa hipótese bem melhor para as pesquisas. As atividades docentes universitárias de Newton no período de 1673 a 1683 se concentraram em álgebra e teoria das equações. Foi nesse período, em 1679, que ele verificou sua lei da gravitação⁵, usando uma nova medida do raio da Terra, em conjunção com o estudo do movimento da Lua. Estabeleceu também a compatibilidade de sua lei da gravitação com as leis do movimento planetário de Kepler, com base na hipótese de que o Sol e os planetas podem ser considerados pontos materiais. Mas Newton não comunicou a ninguém essas descobertas antes de 1684. Nesse ano, ao procurá-lo para discutir a lei da força que faz com que o movimento planetário seja elíptico, Halley acabou se inteirando delas. Essa conversa reacendeu o interesse de Newton pela mecânica celeste, levando-o a elaborar muitas das proposições que posteriormente seriam fundamentais para o primeiro livro dos *Principia*. Quando Halley, algum tempo mais tarde, viu o manuscrito de Newton, percebeu sua enorme importância e obteve a garantia do autor de enviar os resultados à Royal Society, o que Newton fez. Por volta da mesma época ele finalmente resolveu um problema que o vinha preocupando há alguns anos, a saber, que um corpo esférico cuja densidade em cada ponto depende só de sua distância ao centro da esfera atrai uma partícula externa a ela, como se toda a sua massa se concentrasse no centro. Esse teorema completava sua justificação das leis do movimento planetário de Kepler, pois o pequeno desvio do Sol e dos planetas da esfericidade

⁵ Duas partículas quaisquer do universo atraem-se mutuamente com uma força diretamente proporcional ao produto de suas massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre elas.

verdadeira é no caso desprezível. Newton agora trabalhava a sério em sua teoria e, num esforço intelectual gigantesco, escreveu o primeiro livro de seus *Principia* por volta do verão de 1685. Um ano mais tarde, também o segundo estava pronto e o terceiro iniciado. Acusações ciumentas de Hooke, com os desgostos subsequentes, quase o fizeram abandonar o terceiro livro, do que foi dissuadido por Halley. O tratado completo, intitulado *Philosophiae naturalis principia mathematica*, foi publicado, a expensas de Halley, na metade de 1687, sendo sua repercussão na Europa imediata e impressionante.

Em 1689 Newton representou a universidade no parlamento. Em 1692 foi acometido de uma curiosa doença que durou quase dois anos e que implicava uma certa forma de distúrbio mental. A maior parte de sua vida daí para a frente foi dedicada à química, à alquimia e à teologia. Aliás, mesmo nos primeiros tempos de sua vida, ele provavelmente gastava tanto tempo com essas matérias como com a matemática e a filosofia natural. Embora seu trabalho criativo em matemática praticamente tivesse cessado, sua capacidade notável se conservou, pois ele continuou a resolver magistralmente numerosos problemas-desafio que lhe eram submetidos e que ultrapassavam a capacidade dos outros matemáticos ingleses. Em 1696 foi indicado inspetor da Casa da Moeda, sendo promovido a diretor dessa instituição em 1699. Em 1703 foi eleito presidente da Royal Society, reelendo-se para essa posição anualmente até sua morte; em 1705 recebeu o título de cavaleiro. A infeliz polêmica com Leibniz turvou a paz de seus últimos anos de vida. Newton faleceu em 1727 aos 84 anos de idade, após uma demorada e penosa doença. Seu corpo foi enterrado na Abadia de Westminster.

Todas as importantes publicações de Newton, exceto os *Principia*, só apareceram anos depois de o autor descobrir seus conteúdos e quase sempre por pressões de amigos. As datas de publicação dessas obras, em ordem cronológica, são: *Principia*, 1687; *Opticks*, com dois apêndices, *Cubic Curves* e *Quadrature and Rectification of Curves by the Use of Infinite Series*, 1704; *Arithmetica universalis*, 1707; *Analysis per series, Fluxiones, etc.* e *Methodus differentialis*, 1711; *Lectiones opticae*, 1729; e *The Method of Fluxions and Infinite Series*, traduzido do original latino de Newton por J. Colson em 1736. Caberia mencionar também duas importantes cartas escritas a H. Oldenburg, secretário da Royal Society, nas quais Newton descreve alguns de seus métodos.

Foi nessas cartas que Newton descreveu e explicou o teorema do binômio generalizado que ele expressou na forma

$$(P + PQ)^{m/n} = P^{m/n} + \frac{m}{n}AQ + \frac{m-n}{2n}BQ + \frac{m-2n}{3n}CQ + \dots,$$

onde A representa o primeiro termo (ou seja, $P^{m/n}$), B representa o segundo [a saber, $(m/n)AQ$], C representa o terceiro e assim por diante. O ajuste, com as restrições devidas, da expansão binomial para todos os valores complexos do expoente só seria estabelecida mais de 150 anos depois pelo matemático norueguês N. H. Abel (1802-1829).

Por volta da mesma época Newton fez uma descoberta matemática mais importante, o método dos fluxos, cuja essência ele comunicou a Barrow em 1669. Seu *Method*

of Fluxions, embora escrito em 1671, só foi publicado em 1736. Para Newton, nesse trabalho, uma curva era gerada pelo movimento contínuo de um ponto. Feita essa suposição, a abscissa e a ordenada de um ponto gerador passam a ser, em geral, quantidades variáveis. A uma quantidade variável ele dava o nome de *fluente* (uma quantidade que flui) e à sua taxa de variação dava o nome de *fluxo* do fluente. Se um fluente, como a ordenada do ponto gerador, era indicada por y , então o fluxo desse fluente era denotado por \dot{y} . Em notação moderna esse fluxo equivale a dy/dt , onde t representa o tempo. A despeito dessa intromissão do tempo em geometria, pode-se excluir a ideia de tempo, admitindo-se que alguma quantidade, digamos, a abscissa do ponto móvel, cresça de maneira constante. Essa taxa de crescimento constante de alguma fluente é o que ele chamava *fluxo principal*, podendo o fluxo de qualquer outro fluente ser comparado com esse fluxo principal. Newton indicava o fluxo de \dot{y} por \dot{y} e assim por diante. Por outro lado, denotava o fluente de y pelo próprio y no interior de um pequeno quadrado, ou às vezes por y^1 . Newton introduziu também um outro conceito, chamado por ele de *momento* de um fluente: trata-se do incremento infinitamente pequeno sofrido por um fluente como x , por exemplo, num intervalo, de tempo infinitamente pequeno o . Assim, o momento do fluente x é dado por $\dot{x}o$. Newton salientou que podemos, em qualquer problema, desprezar, os termos que aparecem multiplicados por potências de o iguais a ou maiores que 2 e obter assim uma equação envolvendo as coordenadas x e y do ponto gerador da curva e seus fluxos \dot{x} e \dot{y} . Como exemplo consideremos a curva cúbica $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$. Substituindo x por $x + \dot{x}o$ e y por $y + \dot{y}o$, obtemos

$$\begin{aligned} & x^3 + 3x^2(\dot{x}o) + 3x(\dot{x}o)^2 + (\dot{x}o)^3 \\ & - ax^2 - 2ax(\dot{x}o) - a(\dot{x}o)^2 \\ & + axy + ay(\dot{x}o) + a(\dot{x}o)(\dot{y}o) + ax(\dot{y}o) \\ & - y^3 - 3y^2(\dot{y}o) - 3y(\dot{y}o)^2 - (\dot{y}o)^3 = 0. \end{aligned}$$

Usando agora o fato de que $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$, desprezando os termos em que o figura com expoente igual a ou maior que dois, e então dividindo por o chegamos a

$$3x^2\dot{x} - 2ax\dot{x} + ay\dot{x} + ax\dot{y} - 3y^2\dot{y} = 0.$$

Newton considerou dois tipos de problemas. No primeiro, dada uma relação ligando alguns fluentes, pretende-se estabelecer uma relação envolvendo esses fluentes e seus fluxos, como no exemplo anterior; isso é equivalente, como é claro, à diferenciação. No segundo, dada uma relação entre alguns fluentes e seus fluxos, pretende-se achar uma relação envolvendo apenas os fluentes. Trata-se do problema inverso, que equivale a resolver uma equação diferencial. A ideia de desprezar termos em que o aparece com expoente igual a ou maior que 2 foi justificada mais tarde por Newton através de ideias primitivas sobre limites. Newton fez numerosas e notáveis aplicações de seu método dos fluxos. Determinou máximos e mínimos, tangentes a curvas, curvaturas de curvas,

pontos de inflexão e convexidade e concavidade de curvas; aplicou-o também a muitas quadraturas e retificações de curvas. Demonstrou habilidade extraordinária na integração de algumas equações diferenciais. Seu trabalho inclui também um método (do qual uma variação é conhecida agora pelo nome de Newton) para aproximação dos valores das raízes reais de uma equação numérica, algébrica ou transcendente.

A *Arithmetica universalis* contém a essência das lições de Newton de 1673 a 1683. Nela se encontram muitos resultados importantes da teoria das equações, como o fato de que as raízes complexas de uma equação real aparecem em pares de números conjugados, regras para determinação de limites superiores das raízes de uma equação real, as fórmulas expressando a soma das potências enésimas das raízes de uma equação em termos dos coeficientes dessa equação, uma extensão da regra de sinais de Descartes estabelecendo limites para o número de raízes imaginárias de um polinômio real e muitas outras coisas.

Cubic Curves, que apareceu como um apêndice de *Opticks*, investiga as propriedades das curvas cúbicas por meio da geometria analítica. Em sua classificação das curvas cúbicas, Newton enumerou 72 das 78 formas possíveis que uma cúbica pode assumir. Muitos de seus teoremas são apenas enunciados, sem demonstração. O mais fascinante de todos, e também o mais frustrador, é o que afirma que, assim como todas as cônicas podem ser obtidas como projeções centrais de uma circunferência, assim também todas as cúbicas podem ser obtidas como projeções centrais das curvas

$$y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Esse teorema permaneceu como um quebra-cabeça até 1731, quando por fim foi provado.

Obviamente, os *Principia* são a obra-prima de Newton. Nela se encontra a primeira sistematização completa da dinâmica e uma formulação completa dos principais fenômenos de movimento, terrestres e celestes. Mostrou-se o mais influente e admirado trabalho na história da ciência. É interessante que seus teoremas, embora alguns, talvez, tenham sido obtidos pelo método dos fluxos, são provados magistralmente pelos métodos da geometria grega clássica, com a ajuda, aqui e ali, de algumas noções simples de limites. Até o desenvolvimento da teoria da relatividade, toda a física e a astronomia se assentavam na hipótese, feita por Newton em seu trabalho, de um sistema de referência privilegiado. Nos *Principia* encontram-se muitos resultados relativos a curvas planas superiores e teoremas geométricos fascinantes, como os dois seguintes:

1. *O lugar geométrico dos centros de todas as cônicas tangentes aos lados de um quadrilátero é uma reta (reta de Newton) que passa pelos pontos médios de suas diagonais.*
2. *Se um ponto P que se move ao longo de uma reta está ligado a dois pontos fixos O e O' e se as retas OQ e O'Q formam ângulos fixos com OP e O'P, então o lugar dos pontos Q é uma cônica.*

Newton jamais foi batido pelos muitos problemas-desafio que circulavam nos meios matemáticos de seu tempo. Um dos que resolveu, proposto por Leibniz, consiste em encontrar as trajetórias ortogonais de uma família de curvas.

Se no campo experimental Newton demonstrou uma habilidade pouco comum, como analista foi soberbo. Como matemático, figura entre os maiores que o mundo já produziu em todos os tempos. Sua acuidade para com os problemas físicos e a habilidade para abordá-los matematicamente provavelmente nunca foram superados. Sua grandeza foi reconhecida por juízes de elevado quilate científico, como Leibniz, que nobremente lhe prestou um tributo dizendo: “Tomando a matemática desde o início do mundo até a época em que Newton viveu, o que ele fez foi, em grande escala, a metade melhor”. E há também a observação de Lagrange considerando Newton o maior gênio de todos os tempos, e também o mais feliz, pois só há um sistema do Universo e coube a ele o privilégio de instituí-lo. Suas realizações foram expressas poeticamente por Alexandre Pope nos versos

*A Natureza e as leis da Natureza jaziam ocultas na noite;
Deus disse, ‘Faça-se Newton’, e a luz se fez.*

Contrastando com esses elogios há a avaliação modesta de Newton sobre seu próprio trabalho: “Não sei o que o mundo pode pensar de mim; mas eu mesmo me considero tão somente um menino que, brincando na areia da praia, se diverte ao encontrar um seixo arredondado ou uma concha mais bonita que as comuns, enquanto o grande oceano da verdade jaz indecifrável ante meus olhos”. Generoso para com seus predecessores, disse uma vez que, se tinha ido mais longe do que outros, é porque pudera alçar-se aos ombros de gigantes.

Há relatos segundo os quais Newton passava 18 ou 19 horas por dia escrevendo e que dão conta de sua notável capacidade de concentração. Contam-se histórias pitorescas, talvez apócrifas, para ilustrar sua distração quando mergulhado em elucubrações.

Narra uma delas que, certa vez, quando oferecia um jantar a seus amigos, Newton saiu da mesa para buscar uma garrafa de vinho, engolfou-se em cogitações, esqueceu-se do que ia fazer, foi para o quarto, vestiu a sobrepeliz e acabou na capela.

Noutra ocasião, Newton foi convidado por seu amigo, Dr. Stukeley, para um jantar. O prato era frango e, como o convidado demorasse, foi servido em sua ausência, numa travessa coberta por uma tampa. Achando talvez que o amigo se tivesse esquecido do convite, o Dr. Stukeley resolveu jantar sozinho: tirou a tampa da travessa trinchou e comeu o frango, pôs os ossos na mesma travessa e tampou-a. Mas Newton acabou aparecendo, cumprimentou o amigo, sentou-se, levantou a tampa da travessa e, ao ver apenas os restos, disse: “Tinha me esquecido de que já jantamos”.

E noutra oportunidade, quando ia a cavalo para casa, Newton desmontou ao pé de uma colina a fim de conduzir o animal pela rédea na subida. Mas o cavalo, que ainda não conhecia bem os hábitos do dono, acabou escapulindo, deixando-o apenas com as rédeas nas mãos. Newton, porém, só foi descobrir isso quando, no topo da subida, procurou saltar de novo para a sela.

11.10 Leibniz

Gottfried Wilhelm Leibniz, o grande gênio universal do século XVII e rival de Newton na invenção do cálculo, nasceu em Leipzig em 1646. Bastante criança aprendeu latim e grego por conta própria; e aos 12 anos de idade já dominava todo o conhecimento corrente de matemática, filosofia, teologia e leis publicado pelos textos da época. Por essa época, ainda menino, começou a desenvolver as primeiras ideias de sua *characteristica generalis*, concepção que envolvia uma matemática universal, algo que posteriormente iria irromper na lógica simbólica de George Boole (1815-1864) e, mais tarde, em 1910, nos *Principia mathematica*, grande obra de Whitehead e Russell. Quando, ostensivamente devido à sua pouca idade, foi-lhe negado o grau de doutor em leis na Universidade de Leipzig, ele se mudou para Nuremberg onde escreveu um ensaio brilhante sobre o ensino de leis pelo método histórico, dedicado ao eleitor de Mainz. Devido a isso foi indicado pelo eleitor para uma comissão incumbida de recodificar alguns estatutos. Daí para a frente, pelo resto de sua vida, Leibniz esteve engajado no serviço diplomático, primeiro a serviço do eleitor de Mainz e depois, de 1676 até sua morte, a serviço da corte de Hanover.



Gottfried Wilhelm Leibniz
(Coleção David Smith)

Em 1672, quando cumpria uma missão diplomática em Paris, Leibniz conheceu Huygens, que na ocasião residia lá, e o jovem diplomata convenceu o cientista a dar-lhe aulas de matemática. No ano seguinte Leibniz foi enviado em missão política a Londres, onde travou relações de amizade com Oldenburg e outros e teve ocasião de exhibir à Royal Society uma máquina de calcular que inventara. Antes de deixar Paris e assumir o rendoso posto de bibliotecário e conselheiro do eleitor de Hanover, Leibniz já havia

descoberto o teorema fundamental do cálculo, desenvolvido grande parte de sua notação para o assunto e estabelecido muitas das fórmulas elementares de diferenciação.

Sua indicação para o serviço público de Hanover proporcionou-lhe tempo de lazer para se dedicar a seus estudos prediletos e, em consequência, escrever uma montanha de artigos sobre toda espécie de assunto. Foi um linguista de escola, tendo ganho fama por sua erudição em sânscrito, e seus trabalhos de filosofia guindaram-no a uma posição de destaque nesse campo. Empreendeu vários grandes projetos que redundaram em nada, como o de reunir as Igrejas católicas e protestantes e, mais tarde, as duas seitas protestantes de seu tempo. Em 1682 ele e Otto Mencke fundaram uma revista chamada *Acta eruditorum* da qual se tornou o editor-chefe. Muitos de seus artigos matemáticos, em grande parte escritos no período de 1682 a 1692, apareceram nessa revista. A *Acta eruditorum* alcançou grande circulação na Europa Continental. Em 1700 Leibniz criou a Academia de Ciências de Berlim e posteriormente se empenhou em criar academias semelhantes em Dresden, Viena e São Petersburgo.

Os últimos sete anos da vida de Leibniz foram amargurados pela polêmica, fomentada por outros, com Newton, a respeito da primazia da criação do cálculo. Em 1714 seu empregador tornou-se o primeiro rei alemão da Inglaterra, o que lhe acarretou a marginalização em Hanover. Conta-se que quando faleceu, dois anos depois, em 1716, apenas seu fiel secretário compareceu ao funeral.

As pesquisas de Leibniz em torno de sua *characteristica generalis* levaram-no a conceber planos de uma teoria da lógica matemática, estruturada em regras formais, que obviaria as necessidades do raciocínio. Embora seu sonho somente agora tenha atingido um nível de realização perceptível, Leibniz conseguiu, em terminologia corrente, formular as principais propriedades da adição, multiplicação e negação lógicas, considerou a classe vazia e a inclusão de classes e notou a semelhança entre algumas propriedades da inclusão de classes e a implicação de proposições (ver Exercício 11.10).

Leibniz inventou o seu cálculo entre 1673 e 1676. Usou pela primeira vez o símbolo de integral, um S alongado, derivado da primeira letra da palavra latina *summa* (soma) em 29 de outubro de 1675. O objetivo era indicar uma soma de indivisíveis. Algumas semanas depois ele já escrevia diferenciais e derivadas como o fazemos hoje, assim como escrevia $\int x \, dy$ e $\int y \, dx$ para integrais. Seu primeiro artigo sobre o cálculo diferencial só apareceu em 1684. Nele se define dx como um intervalo finito arbitrário e dy pela proporção

$$dy : dx = y : \text{subtangente.}$$

Leibniz deduziu muitas das regras de diferenciação que os alunos aprendem logo no início de um curso de cálculo. A fórmula da derivada n ésima do produto de duas funções (ver Exercício 11.6) é conhecida em geral por *regra de Leibniz*.

Leibniz tinha uma sensibilidade muito grande para a forma matemática e discernia com clareza as potencialidades de um simbolismo bem engendrado. Sua notação para o cálculo mostrou-se muito feliz e, inquestionavelmente, é mais conveniente e flexível

do que a de Newton. Os matemáticos ingleses, porém, apegaram-se à notação de seu líder. Só em 1812, com a criação em Cambridge da Analytical Society (assim chamada por Charles Babbage, um de seus fundadores), que defendia o d-ismo puro em contraposição à notação pontual adotada na universidade, essa situação começou a se reverter. Convém lembrar que o deísmo, sistema filosófico racionalista, estava em voga entre a intelectualidade da época.

Comumente atribui-se a Leibniz, em 1693, a criação da teoria dos determinantes, visando o estudo de sistemas de equações lineares, embora considerações semelhantes já tivessem sido feitas dez anos antes no Japão por Seki Kōwa. Também se deve a Leibniz a generalização do teorema binomial para o teorema multinomial, consistindo em fazer a expansão de

$$(a + b + \dots + n)^r.$$

Ele também contribuiu muito para lançar os fundamentos da teoria das envoltórias e definiu círculo osculador, mostrando sua importância no estudo das curvas.

Não entraremos aqui em discussões sobre a infeliz polêmica Newton-Leibniz. A opinião generalizada hoje é que ambos criaram o cálculo independentemente. Embora a descoberta de Newton seja anterior, Leibniz foi o primeiro a publicar seus resultados. Se Leibniz não era tão profundo em matemática quanto Newton, era talvez mais eclético, e embora inferior ao seu rival inglês como analista e físico-matemático, era provavelmente dotado de uma imaginação mais aguda e um sentido superior quanto à forma matemática. A controvérsia, que irrompeu por maquinacões de outras partes, levou os britânicos a negligenciar por muito tempo os progressos da matemática no Continente em prejuízo de sua própria matemática.

Por algum tempo depois de Newton e Leibniz, os fundamentos do cálculo permaneceram obscuros e despercebidos, pois era a enorme aplicabilidade da matéria o que atraía os primeiros pesquisadores. Por volta de 1700, a maior parte do cálculo que hoje se vê nos cursos de graduação já fora estabelecida, juntamente com tópicos mais avançados, como o cálculo de variações. O primeiro texto de cálculo foi publicado em 1696; seu autor, o marquês de L'Hospital (1661-1704), por um acordo singular, publicou as lições que recebera de seu professor particular, Johann Bernoulli. Nesse livro encontra-se a chamada *regra de L'Hospital*, para determinar o limite de uma fração cujo numerador e cujo denominador tendem simultaneamente para zero.

Leibniz era um otimista inveterado. Não só acreditava poder reunir as seitas religiosas conflitantes de seu tempo numa única Igreja universal, como, também, acreditava que podia encontrar um meio de cristianizar a China através do que ele considerava ser a imagem da criação na aritmética binária. Como Deus pode ser representado pela unidade e o nada pelo zero, ele imaginava que Deus tivesse criado o tudo do nada, assim como na aritmética binária todos os números se expressam por meio da unidade e do zero. Essa ideia agradava tanto a Leibniz que a comunicou ao jesuíta Grimaldi, presidente do Conselho de Matemática da China, na esperança de que ele pudesse converter o imperador chinês (que era muito ligado à ciência) e, indiretamente, toda a China ao cristianismo.

Um outro exemplo das tendências teológicas de Leibniz se encontram na observação que fez a respeito dos números imaginários que seriam como os espíritos sagrados das Escrituras: espécies de anfíbios, entre coisas que são e coisas que não são.



Marquês De L'hospital
(Coleção David Smith)

Fecharemos nossos comentários sobre Leibniz com uma espécie de hino ao seu talento único. A matemática se compõe de dois domínios amplos e antitéticos, o contínuo e o discreto; e em toda a história da matemática o único homem a transitar nesses dois domínios com soberbo desembaraço foi Leibniz.

Exercícios

11.1 O método de exaustão

(a) Assumindo o chamado *axioma de Arquimedes*: *Dadas duas grandezas de mesma espécie, pode-se achar então um múltiplo da menor que supera a maior, demonstre a proposição básica do método de exaustão: Se de uma grandeza qualquer se subtrai uma parte não menor que sua metade, do restante subtrai-se também uma parte não menor que sua metade, e assim por diante, se chegará por fim a uma grandeza menor que qualquer outra predeterminada da mesma espécie.* (O axioma de Arquimedes é consequência da quarta definição do Livro V dos *Elementos* de Euclides e a proposição básica do método é a Proposição I do Livro X dessa obra.)

(b) Mostre, com a ajuda da proposição básica do método de exaustão, que a diferença entre a área de um polígono regular circunscrito a um círculo e a área do círculo pode se tornar tão pequena quanto se deseje.

11.2 O método de equilíbrio

A Figura 103 mostra um segmento parabólico limitado pela corda AC . CF é tangente à parábola em C e AF é paralelo ao eixo da parábola. OPM também é paralelo ao eixo da parábola. K é o ponto médio de FA e $HK = KC$. Tome HC como uma alavanca ou balança de braços, com fulcro em K . Coloque OP com seu centro em H , e deixe OM onde está.

(a) Usando o fato geométrico de que $OM/OP = AC/AO$, mostre, pelo método de equilíbrio de Arquimedes, que a área do segmento parabólico é $1/3$ da área do triângulo AFC .

(b) Deduza, a partir de (a), que a área do segmento parabólico é $2/3$ da área do triângulo limitado pela corda do segmento e pelas duas tangentes à parábola nos pontos extremos da corda.

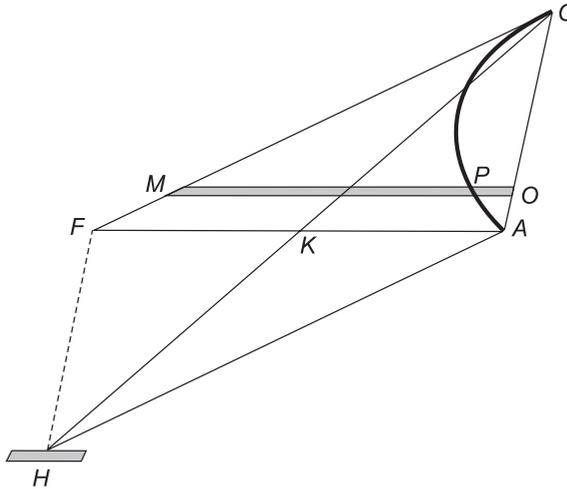


Figura 103

11.3 Alguns problemas arquimedianos

Arquimedes dedicou muitos de seus trabalhos à resolução de problemas de volumes e áreas. Ele estabeleceu seus resultados pelo “método de exaustão”. Resolva, por métodos modernos, os seguintes problemas arquimedianos.

- (a) Determine a área da zona esférica de altura h e raio r .
- (b) Determine o centroide de um segmento esférico.
- (c) Determine o volume da *cunha cilíndrica* ou *casco*, obtida seccionando-se um cilindro circular reto por meio de um plano por um diâmetro da base do cilindro.
- (d) Determine o volume comum a dois cilindros circulares retos de raios iguais, cujos eixos se cortam perpendicularmente.

11.4 O método dos indivisíveis

(a) (1) Mostre que todo prisma triangular pode ser decomposto em três pirâmides triangulares U, V, W tais que U e V tenham bases equivalentes e alturas iguais, o mesmo ocorrendo com V e W . (2) Mostre, pelo segundo princípio de Cavalieri, que se duas pirâmides triangulares têm bases equivalentes e alturas iguais, então elas têm mesmo volume. (3) Mostre então que o volume de uma pirâmide triangular é igual a $1/3$ do produto da área de sua base por sua altura.

(b) Deduza o princípio de Cavalieri a partir da moderna teoria da integração.

(c) Ache, pelo segundo princípio de Cavalieri, o volume da *cunha cilíndrica* [ver Exercício 11.3(c)], em função do raio r do cilindro associado e da altura h da cunha. (Divida a cunha em duas partes iguais com um plano p pelo eixo do cilindro e indique por A a área da resultante secção transversal triangular. Construa um prisma quadrangular regular reto cuja área da base seja A , base essa sobre o plano p , e altura igual r . Remova desse prisma uma pirâmide cuja base é a base do prisma que não está em p e cujo vértice é um ponto da outra base do prisma. O sólido consistindo no prisma menos a pirâmide removida pode ser usado como sólido de comparação com uma das metades da cunha.)

(d) Ache, pelo segundo princípio de Cavalieri, o volume do *anel esférico* obtido de uma esfera pela remoção de um canal cilíndrico coaxial com o eixo polar da esfera. (Use como sólido de comparação uma esfera cujo diâmetro é igual à altura h do anel.)

(e) Mostre que todos os anéis esféricos de mesma altura têm mesmo volume, quaisquer que sejam os raios das esferas associadas.

(f) Descubra um *poliedro* que possa ser usado como sólido de comparação para a determinação do volume de uma esfera de raio r , por meio do segundo princípio de Cavalieri. [Sejam AB e CD dois segmentos de reta do espaço tais que (1) $AB = CD = 2r\sqrt{\pi}$, (2) AB e CD são perpendiculares à reta unindo seus pontos médios, (3) o segmento unindo esses pontos médios tem comprimento $2r$, (4) AB é ortogonal a CD . O tetraedro $ABCD$ pode ser usado como poliedro de comparação.]

(g) Ache, pelo segundo princípio de Cavalieri, o volume de um *toro*, sólido formado ao se girar um círculo de raio r em torno de uma reta no plano do círculo a uma distância $c \geq r$ do centro do círculo. (Coloque o toro num plano p perpendicular ao seu eixo. Tome como sólido de comparação um cilindro reto de raio r e altura $2\pi c$ e ponha-o longitudinalmente sobre o plano p .)

(h) Ache, pelo primeiro princípio de Cavalieri, a área circundada pela curva

$$b^2y^2 = (b + x)^2(a^2 - x^2),$$

onde $b \geq a > 0$.

(i) Mostre que não existe nenhum polígono que possa ser usado como área de comparação, segundo o primeiro princípio de Cavalieri, para se estabelecer a área de um círculo dado.

11.5 A fórmula prismoidal

Um *prismatoide* é um poliedro cujos vértices se situam em dois planos paralelos. As faces que estão nesses planos paralelos chamam-se *bases* do prismatoide. Se as duas bases têm o mesmo número de lados, o prismatoide chama-se *prismoide*. Denomina-se *prismoide generalizado* todo sólido que tem duas bases paralelas planas e tal que as áreas das secções paralelas a essas bases sejam dadas por uma função quadrática de suas distâncias a uma base.

(a) Mostre que os volumes de um prisma, uma cunha (prisma triangular reto virado de maneira tal que uma de suas faces laterais passe a ser a base) e uma pirâmide são dados pela *fórmula prismoidal*:

$$V = \frac{h(U + 4M + L)}{6},$$

onde h é a altura e U , L e M são as áreas da base superior, base inferior e secção média respectivamente.

(b) Mostre que o volume de qualquer prismatoide convexo é dado pela fórmula prismoidal.

(c) Mostre, pelo princípio de Cavalieri, que o volume de qualquer prismoide generalizado é dado pela fórmula prismoidal.

(d) Estabeleça (c) por meio do cálculo integral.

(e) Mostre, por meio do cálculo integral, que a fórmula prismoidal expressa o volume de qualquer sólido com duas bases paralelas, sempre que as áreas das secções paralelas a essas bases sejam dadas por uma função *cúbica* de suas distâncias a uma das bases.

(f) Usando a fórmula prismoidal, ache os volumes de (1) uma esfera, (2) um elipsoide, (3) uma cunha cilíndrica, (4) o sólido do Exercício 11.3(d).

11.6 Diferenciação

(a) Ache a inclinação da tangente ao círculo $x^2 + y^2 = 25$ no ponto (3,4) pelo:

1. Método de Fermat;
2. Método de Barrow;
3. Método dos fluxos de Newton;
4. Método moderno.

(b) Se $y = uv$, onde u e v são funções de x , mostre que a derivada de ordem n de y em relação a x é dada por

$$y^{(n)} = uv^{(n)} + nu'v^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{2!}u''v^{(n-2)} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}u'''v^{(n-3)} + \dots + u^{(n)}v.$$

Essa é a conhecida *regra de Leibniz*.

11.7 O teorema binomial

(a) Mostre que o enunciado de Newton do teorema binomial, conforme foi dado na Seção 11-9, é equivalente à conhecida expansão

$$(a+b)^r = a^r + ra^{r-1}b + \frac{r(r-1)}{2!}a^{r-2}b^2 + \frac{r(r-1)(r-2)}{3!}a^{r-3}b^3 + \dots$$

(b) Mostre, através do teorema binomial, que se $(a+ib)^k = p+iq$, onde a, b, p, q são reais, k é um inteiro positivo e $i = \sqrt{-1}$, então se $(a-ib)^k = p-iq$.

(c) Mostre, usando (b), que as raízes imaginárias de um polinômio real aparecem em pares de complexos conjugados. (Este resultado foi dado por Newton.)

11.8 Um limite superior para as raízes de uma equação polinomial

(a) Usando o teorema do binômio, ou de outra maneira, mostre que se $f(x)$ é um polinômio de grau n , então

$$f(y+h) \equiv f(h) + f'(h)y + f''(h)\frac{y^2}{2!} + \dots + f^{(n)}(h)\frac{y^n}{n!}.$$

(b) Mostre que qualquer número que torna um polinômio real $f(x)$ e todas as suas derivadas $f'(x), f''(x), \dots, f^{(n)}(x)$ positivas é um limite superior do conjunto das raízes de $f(x) = 0$. (Este resultado foi dado por Newton.)

(c) Mostre que se para $x = a$ as derivadas $f^{(n-k)}(x), f^{(n-k+1)}(x), \dots, f^{(n)}(x)$ são todas positivas, então elas também serão todas positivas para qualquer número $x > a$.

(d) Os resultados de (b) e (c) podem ser usados para achar um limite superior próximo das raízes reais de uma equação polinomial real. O procedimento geral é o seguinte: *Tome o menor inteiro que faz $f^{(n-1)}(x)$ positivo. Substitua esse inteiro em $f^{(n-2)}(x)$. Se o resultado obtido é negativo, aumente o inteiro sucessivamente de uma unidade até encontrar um inteiro que torne essa função positiva. Proceda com o novo inteiro da mesma maneira. Continue com esse procedimento até encontrar um inteiro que faça todas as funções $f(x), f'(x), \dots, f^{(n-1)}(x)$ positivas.* Ache, por esse processo, um limite superior do conjunto de raízes reais de

$$x^4 - 3x^3 - 4x^2 - 2x + 9 = 0.$$

11.9 Soluções aproximadas de equações

(a) Newton descobriu um método para aproximar os valores das raízes reais de uma equação numérica, aplicável tanto para equações algébricas como para equações transcendentais. A variante desse método, que hoje se conhece por *método de Newton*, diz o seguinte: *Se $f(x) = 0$ tem apenas uma raiz no intervalo $[a, b]$ e se nem $f'(x)$ nem $f''(x)$ se anulam nesse intervalo, escolhido x_0 como aquele dos dois números a e b para o qual $f(x_0)$ e $f''(x_0)$ têm mesmo sinal, então*

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

situa-se mais perto da raiz do que x_0 . Prove esse resultado.

(b) Aplique o método de Newton à cúbica $x^3 - 2x - 5 = 0$ no que se refere à raiz situada entre 2 e 3.

(c) Aplique o método de Newton à equação $x = \operatorname{tg} x$ no que se refere à raiz situada entre 4,4 e 4,5.

(d) Aplique o método de Newton para achar $\sqrt{12}$ corretamente até a terceira casa decimal.

(e) Por meio da hipérbole $xy = k$, $k > 0$, mostre que se x_1 é uma aproximação de \sqrt{k} , então $x_2 = (x_1 + k/x_1)/2$ é uma aproximação melhor e assim por diante. (Este é o método de aproximação da raiz quadrada de Herão. Ver Seção 6-6.)

(f) Aplicando o método de Newton a $f(x) = x^2 - k$, obtenha o procedimento de (e).

(g) Pela aplicação do método de Newton a $f(x) = x^n - k$, onde n é um inteiro positivo, mostre que se x_1 é uma aproximação de $\sqrt[n]{k}$, então

$$x_2 = \frac{(n-1)x_1 + \frac{k}{x_1^{n-1}}}{n}$$

é uma aproximação melhor e assim por diante.

(h) Procure num texto de teoria das equações o chamado *teorema de Fourier* cujo enunciado dá as condições sob as quais o método de Newton funciona.

[Em 1690, Joseph Raphson (1648-1715), um membro da Royal Society de Londres, publicou um opúsculo, *Analysis aequationum universalis*, que, essencialmente, descreve o método de Newton para aproximação das raízes reais de uma equação. Por essa razão, esse método é hoje muitas vezes conhecido como *método de Newton-Raphson*. Newton descreveu seu método, ilustrando-o na cúbica de (b), em *Method of Fluxions* que, embora escrito em 1671, só foi publicado em 1736. A primeira explicação impressa do método de Newton apareceu na *Algebra* de Wallis, em 1685.]⁶

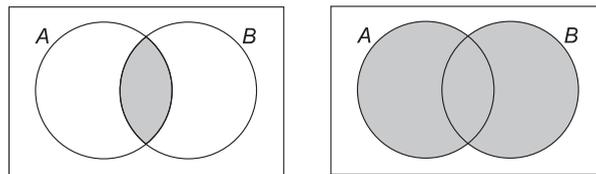


Figura 104

11.10 Álgebra de classes

O conceito de “classe de objetos” é fundamental em lógica. Leibniz desenvolveu algumas das álgebras de classes elementares. Usando notação moderna, se A e B são classes de objetos, então $A \cap B$ (chamada *intersecção*, ou *produto*, de A e B) representa a classe dos objetos que pertencem tanto a A como a B e $A \cup B$ (chamada *união* ou *soma*, de A e B) representa a classe dos objetos que pertencem a A ou a B .

A álgebra das classes pode ser ilustrada graficamente por meio dos chamados *diagramas de Venn*⁷, nos quais se representa uma classe A por meio de uma região plana.

⁶ Ver F. Cajori, “Historical notes on the Newton-Raphson method of approximation”, *The American Mathematical Monthly*, nº 18, 1911, pp. 29-33.

⁷ Em referência a John Venn (1834-1923), um lógico inglês que empregou o dispositivo em 1876 num artigo sobre o sistema lógico de Boole e também em 1894 em seu excelente livro *Symbolic Logic*.

Assim, representando-se as classes A e B pelos círculos A e B , como mostra a Figura 104, então $A \cap B$ é representada pela região comum a esses dois círculos e $A \cup B$ pela região formada pelos pontos que estão num ou noutro desses círculos. Representando-se todas as classes dentro de um retângulo circundante, entende-se por *complemento* de A , e indica-se por A' a região que está contida no retângulo mas é exterior à região que representa A .

(a) Represente num diagrama de Venn, por meio de um sombreamento, as seguintes regiões:

$$A \cap (B' \cup C), (A' \cap B) \cup (A \cap C'), (A \cup B)' \cup C'.$$

(b) Sombreado as regiões apropriadas de um diagrama de Venn, verifique as seguintes equações da álgebra de classes:

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C, A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), (A \cup B)' = A' \cap B'.$$

(c) Sombreado as regiões, apropriadas de um diagrama de Venn, verifique quais das seguintes igualdades são verdadeiras:

$$(A' \cup B)' = A \cap B', A' \cup B' = (A \cup B)', A \cup (B \cap C)' = (A \cup B') \cap C'.$$

Temas

- 11/1 A relação dos paradoxos de Zenão com o cálculo.
- 11/2 A contribuição grega para o desenvolvimento do cálculo integral.
- 11/3 Precusores modernos de Newton e Leibniz no desenvolvimento do cálculo.
- 11/4 O uso do segundo princípio de Cavalieri num curso inicial de geometria sólida.
- 11/5 A maior descoberta matemática do século XVII.
- 11/6 A concepção de diferencial de Leibniz.
- 11/7 Barrow e o teorema fundamental do cálculo.
- 11/8 A controvérsia Newton-Leibniz.
- 11/9 As quatro maiores obras matemáticas do século XVII.
- 11/10 Os cinco matemáticos britânicos mais importantes do século XVII.
- 11/11 Homens que se destacaram simultaneamente em matemática e física no século XVII.
- 11/12 Os seis países líderes em matemática no século XVII, arranjados em ordem de importância.
- 11/13 O Newton japonês.
- 11/14 A história das frações contínuas.

- 11/15 Os determinantes na matemática japonesa do século XVII.
 11/16 Roger Cotes (1682-1716).
 11/17 A Royal Society.

Bibliografia

- ANTHONY, H. D. *Sir Isaac Newton*. Nova York, Abelard-Schuman, 1960.
- BARON, M. E. *The Origins of the Infinitesimal Calculus*. Nova York, Dover Publications, 1987.
- BELL, E. T. *Men of Mathematics*. Nova York, Simon and Schuster, 1937.
- BOYER, C. B. *The History of the Calculus and Its Conceptual Development*. Nova York, Dover Publications, 1959.
- BREWSTER, Sir David. *Life of Newton*. Londres, John Murray, 1831.
- BRODETSKY, Selig. *Sir Isaac Newton: A Brief Account of His Life and Work*. Londres, Methuen & Co., 1927.
- CAJORI, Florian. *A History of the Conceptions of Limits and Fluxions in Great Britain, From Newton to Woodhouse*. Chicago, Open Court, 1919.
- . *A History of Mathematical Notations*. Chicago, Open Court, 1928-1929, 2 vols.
- . *Sir Isaac Newton's Mathematical Principles of Natural Philosophy and His System of the World*. Revisão da tradução de Andrew Motte, de 1729. Berkeley (Calif.), University of California Press, 1934.
- CHILD, J. M. *The Geometrical Lectures of Isaac Barrow*. Chicago, Open Court, 1916.
- . *The Early Mathematical Manuscripts of Leibniz*. Chicago, Open Court, 1920.
- CHRISTIANSON, G. E. *In the Presence of the Creator: Isaac Newton and His Times*. Nova York, The Free Press, 1984.
- COOLIDGE, J. L. *Geometry of the Complex Domain*. Nova York, Oxford University Press, 1924.
- . *A History of Geometrical Methods*. Nova York, Oxford University Press, 1940.
- . *The Mathematics of Great Amateurs*. Nova York, Oxford University Press, 1949.
- DE MORGAN, Augustus. *Essays on the Life and Work of Newton*. Chicago, Open Court, 1914.
- EDWARDS, Jr. C. H. *The Historical Development of the Calculus*. Nova York, Springer-Verlag, 1980.
- GROWING, Ronald. *Roger Cotes: Natural Philosopher*. Cambridge, Cambridge University Press, 1983.

- HALL, A. R. e HALL, M. B. (eds.). *Unpublished Scientific Papers of Isaac Newton*. Nova York, Cambridge University Press, 1962.
- . *Philosophers at War: The Quarrel Between Newton and Leibniz*. Nova York, Cambridge University Press, 1980.
- HEATH, T. L. *The Works of Archimedes*. Nova York, Cambridge University Press, 1897. Reimpresso por Dover Publications, Nova York.
- . *The Method of Archimedes Recently Discovered by Heiberg*. Nova York, Cambridge University Press, 1912. Contido em *The Works of Archimedes*. Reimpresso por Dover Publications, Nova York.
- . *History of Greek Mathematics*, vol. 2. Nova York, Oxford University Press, 1921. Reimpresso por Dover Publications, Nova York, 1981.
- . *A Manual of Greek Mathematics*. Nova York, Oxford University Press, 1931.
- HERIVEL, John. *The Background to Newton's Principia*. Oxford, Oxford University Press, 1965.
- HOFFMAN, J. E. *Leibniz in Paris, 1672-1676*. Cambridge, Cambridge University Press, 1964.
- KERN, W. F. e BLAND, J. R. *Solid Mensuration: With Proofs*. 2ª ed. Nova York, John Wiley, 1938.
- LANE, E. P. *Metric Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Chicago, University of Chicago Press, 1940.
- LEE, H. D. P. (ed.) *Zeno of Elea*. Cambridge, Cambridge University Press, 1936.
- LOVITT, W. V. *Elementary Theory of Equations*. Englewood Cliffs (N. J.), Prentice-Hall, 1939.
- MACFARLANE, Alexander. "Lectures on ten british mathematicians of the nineteenth century", *Mathematical Monographs*, nº 17. Nova York, John Wiley, 1916.
- MANHEIM, J. H. *The Genesis of Point Set Topology*. Nova York, Macmillan, 1964.
- MANUEL, F. E. *A Portrait of Isaac Newton*. Cambridge (Mass.), Harvard University Press, 1968.
- MELLONE, S. H. *The Dawn of Modern Thought—Descartes, Spinoza, and Newton*. Londres, Oxford University Press, 1930.
- MERZ, John. *Leibniz*. Nova York, Hecker Press, 1948.
- MESCHKOWSKI, Herbert. *Ways of Thought of Great Mathematicians*. São Francisco, Holden-Day, 1964.
- MEYER, R. W. *Leibniz and the Seventeenth Century Revolution*. Trad. para o inglês por J. P. Stern. Cambridge, Bowes and Bowes, 1952.
- MORE, L. T. *Isaac Newton, a Biography*. Nova York, Dover Publications, 1962.
- MUIR, Jane. *Of Men and Numbers, The Story of the Great Mathematicians*. Nova York, Dodd, Mead, 1961.
- MUIR, Thomas. *The Theory of Determinants in the Historical Order of Development*. Nova York, Dover Publications, 1960, 4 vols.
- NEUGEBAUER, Otto. *The Exact Sciences in Antiquity*. 2ª ed. Nova York, Harper & Row, 1962.

- NEWTON, Sir Isaac. *Mathematical Principles of Natural Philosophy*. Trad. para o inglês por Andrew Motte, editado por Florian Cajori. Berkeley (Calif.), University of California Press, 1934.
- . *Mathematical Works*. Editado por D. T. Whiteside. Nova York, Johnson Reprint, 1964-1967, 2 vols.
- . *Mathematical Papers*. Editado por D. T. Whiteside. Nova York, Cambridge University Press, 1967, 7 vols.
- PHILLIPS, H. B. *Differential Equations*. 3ª ed. Nova York, John Wiley, 1934.
- PRIESTLEY, W. M. *Calculus: An Historical Approach*. Nova York, Springer-Verlag, 1979.
- ROSENTHAL, A. “The history of calculus”, *The American Mathematical Monthly*, n° 58, 1951, pp. 75-86.
- ROYAL SOCIETY OF LONDON. *Newton Tercentenary Celebrations. 15-19 July, 1946*. Nova York, Macmillan, 1947.
- SABRA, A. I. *Theories of Light, from Descartes to Newton*. Londres, Oldburne Book Company, 1957.
- SCOTT, J. T. *The Mathematical Work of John Wallis (1616-1703)*. Londres, Taylor and Francis, 1938.
- SMITH, D. E. *History of Modern Mathematics*. 4ª ed. Nova York, John Wiley, 1906.
- . *A Source Book in Mathematics*. Nova York, McGraw-Hill, 1929.
- SULLIVAN, J. W. N. *The History of Mathematics in Europe, From the Fall of Greek Science to the Rise of the Conception of Mathematical Rigour*. Nova York, Oxford University Press, 1925.
- . *Isaac Newton 1642-1727*. Nova York, Macmillan, 1938.
- TAYLOR, E. G. R. *The Mathematical Practitioners of Tudor and Stuart England*. Cambridge, Cambridge University Press, 1954.
- THOMSON, Thomas. *History of the Royal Society from Its Institution to the End of the 18th Century*. Ann Arbor (Mich.), University Microfilms, 1967.
- TOEPLITZ, Otto. *The Calculus, a Genetic Approach*. Chicago, University of Chicago Press, 1963.
- TURNBULL, H. W. *Mathematical Discoveries of Newton*. Glasgow, Blackie & Sons, 1945.
- . *The Great Mathematicians*. Nova York, New York University Press, 1961.
- . (ed.) *Correspondence of Isaac Newton*. Cambridge, Cambridge University Press, 1959-1977, 7 vols.
- WALKER, Evelyn. *A Study of the Traité des Indivisibles of Gilles Personne de Roberval*. Nova York, Teachers College, Columbia University, 1932.
- WELD, Charles. *A History of the Royal Society*. Nova York, Arno Press, 1975.
- WESTFALL, Richard. *Never at Rest: A Biography of Isaac Newton*. Cambridge, Cambridge University Press, 1980.

Panorama Cultural VIII

A revolta da classe média

A Europa e a América no século XVIII
(Para acompanhar o Capítulo 12)

O século XVIII foi uma época de turbulência e revoltas na Europa e na América. Uma nova classe média, a burguesia, emergiu derrubando a antiga ordem aristocrática na Inglaterra, na França e nos Estados Unidos. As ideias políticas, sociais e econômicas do feudalismo, baseadas, na agricultura de subsistência, foram substituídas pela filosofia do liberalismo clássico, um sistema que propugnava uma democracia limitada, a igualdade de oportunidades e a santidade da propriedade privada e, conseqüentemente, promoveu a Revolução Industrial do século XIX.

Em 1690, num livro intitulado *Do Governo Civil*, o filósofo inglês John Locke (1632-1704) propôs a ideia de liberalismo clássico como uma estrutura social, política e econômica. Socialmente, Locke acreditava que todos os seres humanos, pobres ou ricos, homens ou mulheres, camponeses ou senhores eram naturalmente iguais ou, em suas palavras, livres “para dispor de seus bens e de suas pessoas como assim o entendessem, dentro dos limites da lei natural”. Ele defendia, em especial, a tolerância religiosa. Em política, esse inglês macilento aderiu a uma retórica revolucionária. Os líderes, sustentava ele, não podem governar sem o consentimento expresso de seus súditos; e estes têm o direito moral de depor governantes injustos. Economicamente, Locke acreditava na propriedade privada, desde que explorada em pequena escala e beneficentemente. “A propriedade de um homem”, escreveu ele, “é toda a terra que puder lavrar, beneficiar, cultivar e usar em proveito próprio.” Os princípios do liberalismo no século XVIII eram: propriedade privada em escala modesta, governo que expressasse a vontade da maioria dos cidadãos e igualdade perante a lei.

As ideias de Locke encontraram eco em outros pensadores, como o filósofo francês Jean Jacques Rousseau (1712-1778). “Na grande família [da sociedade]”, escreveu Rousseau, “todos os membros ... são naturalmente iguais.” Porém, ao contrário de Locke, Rousseau não queria dizer com isso que *todas* as pessoas são iguais; por acreditar que as mulheres fossem inferiores aos homens, era contrário a que elas tivessem direitos iguais aos do sexo oposto. Outros pensadores liberais excluíaam os escravos negros e algumas minorias religiosas, como a dos judeus, de seus conceitos de igualdade.

Por volta de 1776 o liberalismo tinha se tornado um credo revolucionário. Thomas Jefferson (1743-1826), buscando dar à Revolução Americana um embasamento teórico, inspirou-se em Locke para redigir sua célebre *Declaração de Independência*: “Consideramos como verdades evidentes por si mesmas que todos os homens foram criados iguais, que são dotados pelo Criador de certos direitos inalienáveis, entre os quais estão a Vida, a Liberdade e a procura da Felicidade. Que, para assegurar tais direitos, são instituídos os governos entre os homens, nascendo seus justos poderes do consentimento dos governados. Que quando qualquer forma de governo torna-se prejudicial a essas finalidades, o povo tem o direito de modificá-la ou de aboli-la...”.

O liberalismo clássico englobava os anseios da classe social de proprietários que recentemente emergira: a burguesia. Essa classe (constituída de proprietários agrícolas abastados, comerciantes, banqueiros, artesãos prósperos, advogados, médicos, servidores civis e outros) tinha crescido muito em importância na Europa nos séculos XV, XVI e XVII. Durante a Idade Média, 90% da população europeia era formada de camponeses, a maioria servos sem terras próprias. Os camponeses desfrutavam de pouco poder político ou econômico, poder esse que se concentrava nas mãos de uma classe numericamente pequena, compreendendo cerca de 2% da população, a aristocracia. Os 8% restantes (artesãos, comerciantes, advogados e indigentes) viviam nas cidades.

A burguesia começou a crescer numericamente e a ganhar poder nos últimos tempos da Idade Média e durante a Era das Explorações. A superpopulação rural, juntamente com o grande desenvolvimento comercial verificado na Era das Explorações (ver Panorama Cultural VII) provocaram o êxodo de camponeses para as cidades à busca de trabalho. À medida que trabalhadores e capitais afluíam para cidades europeias como Londres, Paris, Frankfurt, Antuérpia, Milão e Sevilha, muitos comerciantes e artesãos ampliaram seus negócios. Em alguns casos tornaram-se ricos o suficiente para não mais ter de trabalhar, venderam suas empresas e investiram seu capital em terras ou o emprestaram a juros para a aristocracia. Mesmo na Idade Média as cidades europeias haviam ficado à margem dos fluxos principais da sociedade feudal, dominada pela aristocracia hereditária. As cidades tinham seus próprios governantes e os que nelas residiam desfrutavam de privilégios especiais negados aos camponeses rurais, como a isenção do trabalho obrigatório nas propriedades dos aristocratas. Um ditado da Idade Média dizia “o ar da cidade é um ar livre”. Essa liberdade, porém, era relativa. A prefeitura comumente era ocupada pelos comerciantes mais ricos e pelos banqueiros, e a população urbana, que trabalhava como empregada em casas comerciais e pequenas manufaturas, pouco usufruía das regalias cívicas.

À medida que, entre 1400 e 1700, a burguesia ganhava proeminência, seus membros passaram a acumular ressentimentos para com a velha aristocracia. Comerciantes ricos e *rentiers* (como os franceses chamam os que vivem das rendas de seu capital) desfrutavam de boa educação, conheciam a máquina estatal, dominavam profundamente todas as ramificações dos negócios mundiais e eram peritos em finanças

públicas. Apesar disso os postos governamentais eram reservados à aristocracia, não raro menos preparada. Ademais, os burgueses tinham de pagar impostos de que a aristocracia estava isenta e não podiam participar de certos negócios concedidos à classe favorecida como monopólios reais. E, o que era mais irritante, os aristocratas, em parte devido ao ciúme que tinham dos burgueses ricos, tratavam os operosos *rentiers* com arrogância, além de ignorá-los socialmente. Ansiosa por manter sua posição de domínio sobre a sociedade europeia, a aristocracia tudo fez para excluir a emergente burguesia dos postos de autoridade e poder. A burguesia, por sua vez, começou a pensar em revolução.

O liberalismo de Locke proporcionou à burguesia a base teórica para as mudanças políticas e econômicas. Na esfera econômica, o escocês Adam Smith (1723-1790), em sua *A Riqueza das Nações*, de 1776, fundamentou-se nas ideias de Locke sobre as vantagens da propriedade privada para propugnar o capitalismo como sistema econômico. Na Inglaterra, o próprio Locke se envolveu na Revolução Gloriosa de 1688 que limitou o poder dos monarcas; aliás, suas ideias serviram para justificar a mudança política ocorrida então no país, de monarquia absoluta para constitucional. Na Revolução Americana (1776-1783), na Revolução Francesa (1789-1799) e nas revoluções latino-americanas (1800-1825) os governos antigos sucumbiram porque as ideias de igualdade e de direito de os povos escolherem seus dirigentes políticos, incompatíveis com privilégios aristocráticos, tornaram-se uma bandeira.

Entre 1688 e 1825 a burguesia apoderou-se do poder, pacífica ou violentamente, na Inglaterra, na França e na maior parte dos países das Américas. Mas a burguesia não fez essas revoluções sozinha. Ocorre que os camponeses e a população urbana pobre também estavam descontentes com a arcaica estrutura social europeia. Apesar dos resmungos da burguesia, a carga maior de impostos recaía sobre os camponeses. E a superpopulação do campo, com a conseqüente exploração excessiva das terras, levava ao declínio da produtividade e ao empobrecimento rural generalizado. Os camponeses sempre alimentaram um sentimento de indignação para com a aristocracia, sentimento esse que, na Idade Média, frequentemente explodia em rebeliões. Além disso, em grande parte da Europa, o desagrado dos camponeses estendia-se também à burguesia. À medida que empobreciam, os camponeses às vezes tomavam dinheiro emprestado dos *rentiers*, para fazer frente à seca e às más colheitas. Muito dificilmente um camponês tinha condições de quitar esse tipo de dívida. E suas terras, que tinham servido de caução, acabavam sendo confiscadas pelo *rentier*. Ao camponês nada restava senão tornar-se arrendatário do próprio *rentier* que ficara com suas terras ou de algum aristocrata local. Assim, somente na América os proprietários agrícolas, cujas fazendas eram relativamente maiores e as dívidas menores, aliaram-se de fato à burguesia cidadina na revolução contra a velha ordem e, mesmo assim, não raro com suspeição. Para a burguesia, em sua luta contra a aristocracia, o aliado mais importante eram as populações urbanas pobres. Acossadas por altas crescentes e artificiais dos preços dos alimentos, decorrentes de monopólios governamentais e taxas agrícolas elevadas, as populações urbanas desempenharam um papel dinâmico na revolução, especialmente em Paris, Boston e

Caracas. Não obstante, exceto nos Estados Unidos, onde muitos líderes revolucionários eram fazendeiros ricos, o comando das revoluções do século XVIII contra a aristocracia esteve em grande escala nas mãos da burguesia urbana. Acompanhemos brevemente o curso dessas revoluções.

A turbulência política na Inglaterra vinha desde o ano de 1603, quando do falecimento de sua grande rainha, Elizabeth I (reinou no período 1558-1603). A sucessão coube à dinastia Stuart que desgostou grande parte dos ingleses por sua simpatia pelo catolicismo (a maioria da população inglesa era protestante), por ser estrangeira (os Stuart eram escoceses) e por defender a tese de que os reis tinham o direito de governar a seu bel prazer (o Direito Divino dos Reis). A tentativa dos reis Stuart de incrementar o seu poder acarretou um conflito com a burguesia londrina para a qual a interferência real nos negócios internos da cidade era motivo de ressentimento. Os londrinos, seus aliados econômicos, e os protestantes puritanos se uniram sob a liderança de Oliver Cromwell (1599-1658) e empreenderam a Guerra Civil Inglesa (1641-1649) que redundou na deposição do rei Stuart. Embora os Stuart tivessem retomado o poder em 1660, os antagonismos gerados pela Guerra Civil continuaram a arder latentemente. E quando, na década de 1680, um rei Stuart tentou reverter à força a Inglaterra ao catolicismo, o exército o derrubou num golpe sangrento conhecido como Revolução Gloriosa (1688). O parlamento colocou então no poder, como rei e rainha, Maria II (reinou no período 1689-1694) e seu marido William III (reinou no período 1689-1702), com a condição de aprovarem o famoso *Bill of Rights* (lei dos direitos dos cidadãos). Por esse instrumento legal (1689) abolia-se a monarquia absoluta, adotando-se em seu lugar uma monarquia constitucional em que a Câmara dos Comuns do Parlamento, controlada pela burguesia, detinha efetivamente o poder. A Inglaterra foi o primeiro país em que a burguesia assumiu o poder.

A Guerra Civil Inglesa e a Revolução Gloriosa tiveram repercussões nas colônias inglesas da América, onde a burguesia mercantil, os fazendeiros abastados e os investidores em terras desfrutavam de autoridade local considerável. Essa autonomia foi abalada na década de 1760 quando, depois de uma onerosa guerra com a França, o governo britânico impingiu às colônias uma série de medidas fiscais que contrariavam as assembleias locais e a população em geral. Disputas sobre tarifas, restrições ao comércio, liberdades civis e fechamento das fronteiras por uma proclamação imperial, esses foram os ingredientes que fizeram explodir a Revolução Americana da qual resultou a independência do país. Ao contrário de outras revoluções burguesas, na Revolução Americana verificou-se uma aliança entre burguesia urbana, plantadores ricos e pequenos proprietários agrícolas. Um número significativo de líderes revolucionários americanos, entre eles Thomas Jefferson e George Washington (1732-1799), eram oriundos do campo ao passo que outros, como o negociante John Hancock (1737-1793) e o advogado John Adams (1735-1826), ambos de Boston, o editor Benjamin Franklin (1705-1790), da Filadélfia, e o *bon vivant* Alexander Hamilton (1755-1804), de Nova York, pertenciam à burguesia urbana. As brigas pelo poder entre esses dois grupos alongaram-se até o século XIX.

Na França, em 1789, a burguesia aliou-se à população pobre de Paris para derubar o rei. O movimento foi desencadeado pelo elevado preço do pão, mas no fundo resultou de décadas de antagonismo entre a burguesia e a aristocracia. Nos anos 1790 a turba parisiense tomou as rédeas da revolução e executou muitos líderes burgueses. A resposta burguesa foi o apoio a Napoleão (1769-1821) que se asenhoreou do poder, como ditador (mais tarde imperador), em 1799. Napoleão encarnou as reformas econômicas advogadas pela burguesia, embora tivesse esmagado as liberdades civis.

Depois do golpe de 1799, Napoleão lançou-se a uma aventura expansionista que visava conquistar a maior parte da Europa e constituir um Império Francês. Ao anexar a Espanha em 1800, enfraqueceu o poder hispânico na América, e, em consequência, irromperam revoluções burguesas na cidade do México, em Caracas e Buenos Aires. Por volta de 1825, na maior parte da América Latina haviam-se instalados governos republicanos vinculados à burguesia. Napoleão, além disso, instalou governos títeres, republicanos na aparência mas não de fato, na Alemanha, Itália e Polônia, nações que conquistara. Criou-se assim, em boa parte da população desses lugares, a expectativa de que entre elas se estabelecessem repúblicas verdadeiras ou monarquias constitucionais, expectativa essa jamais abandonada completamente.

Entre 1688 e 1825, portanto, a Europa e a América assistiram a várias revoluções burguesas contra a velha ordem aristocrática. Na Inglaterra e nos Estados Unidos a burguesia assumiu o poder. Mesmo em lugares onde, como na França, se verificou um refluxo revolucionário, ampliou-se muito o espaço da burguesia nos negócios do Estado e nas finanças. Por todo o Ocidente, por volta de 1825, a burguesia seguia firme para superar de vez a velha ordem aristocrática feudal e se impor como nova classe dirigente.

A derrota de Napoleão em 1815, diante da coalizão Inglaterra/Prússia/Rússia/Áustria pôs fim ao Império Francês e restaurou o primado aristocrático na França, na Alemanha, na Itália e na Polônia. Esses novos governos aristocráticos eram, porém, débeis e no século XIX teriam de enfrentar a oposição de burgueses republicanos, nacionalistas e socialistas. A sociedade europeia teria ainda que se haver com outros fermentos políticos no século XIX, sendo de destacar a Revolução Industrial. Esse episódio, porém, será relatado no Panorama Cultural IX.

O século XVIII e a exploração do cálculo

12.1 Introdução e justificativa

A aritmética, a álgebra, a geometria e a trigonometria, que servem de base para a matemática que se ensina atualmente nas escolas de primeiro e segundo graus, bem como a álgebra clássica superior, a geometria analítica e o cálculo das séries básicas dos cursos superiores de matemática, constituem o que em geral se chama de “matemática elementar”. Neste ponto do livro, portanto, virtualmente já concluímos a abordagem histórica da matemática elementar na forma em que ela se apresenta hoje. É interessante notar, sem levar aos últimos extremos o paralelo, que a sequência dos tópicos no ensino da matemática reproduz a ordem em que eles se desenvolveram historicamente.

Afirma-se corretamente que não é possível estudar a valer a história de um dado assunto sem conhecer o próprio assunto. Segue-se, então, que todo aquele que pretender estudar com a atenção devida o que aconteceu em matemática nos séculos XVIII, XIX e XX, precisa de requisitos avançados bem além do cálculo. Para o leitor que possui essa bagagem recomendam-se os excelentes livros *The Development of Mathematics* de E. T. Bell, *História da matemática* de C. B. Boyer e *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times* de Morris Kline. Não obstante, parece oportuno acrescentar não só o presente capítulo, como também os três de encerramento, numa tentativa de realçar alguns dos pontos culminantes da matemática nos séculos XVIII, XIX e XX, dentro do alcance do leitor a que se destina este trabalho, até para mostrar as tendências mais recentes da matemática a partir de suas fontes elementares. O campo da matemática elementar ganhará, então, um outro contorno, mostrando-se como prelúdio para as realizações mais notáveis dos tempos modernos.

É difícil salientar suficientemente o quanto o material que se segue é resumido e incompleto. A grande história da matemática de Moritz Cantor, que termina com o fim do século XVIII, consiste em quatro alentados volumes de cerca de mil páginas, em média, cada um. Já se estimou, com bastante moderação, que uma história da matemática do século XIX, com a mesma riqueza de detalhes, requeria pelo menos quatorze volumes com essa média de páginas. Ninguém ainda, contudo, arriscou uma estimativa semelhante quanto à história da matemática do século XX que, de longe, é o mais produtivo de todos. E, como já se indicou, muito pouco desse material mais moderno poderia ser apreciado devidamente por um aluno médio de graduação; com efeito, a compreensão desse material pressupõe a formação profunda de um especialista.

Ilustra bem o crescimento quase explosivo da pesquisa matemática nos tempos modernos o fato de que antes de 1700 havia apenas, segundo uma contagem, 17 periódicos que publicavam artigos de matemática. Esse número pulou para 210 no século XVIII e para 950 no século XIX. E cresceu enormemente no século XX, alcançando, segundo uma estimativa, cerca de 2600. Além do mais, só no século XIX apareceram revistas dedicadas principalmente ou exclusivamente à matemática. Já se salientou, provavelmente com justeza, que a verdadeira história da matemática moderna está escrita nessas revistas de pesquisa. A bem da verdade, porém, deve-se confessar que poucos dos artigos atuais podem ser lidos senão por especialistas.

Outro dado estatístico que põe em relevo a intensa atividade matemática deste século dá conta de que mais da metade de toda a matemática conhecida foi criada durante os últimos 50 anos e que metade dos matemáticos de todos os tempos estão vivos hoje em dia.

O cálculo, apoiado pela geometria analítica, foi o maior instrumento matemático descoberto no século XVII. Ele se mostrou notavelmente poderoso e eficiente para atacar problemas inexpugnáveis em tempos anteriores. Foi sua ampla e surpreendente aplicabilidade que atraiu o grosso dos pesquisadores em matemática da época, resultando daí uma profusão de artigos pouco preocupados com o estado bastante insatisfatório dos fundamentos do assunto. Os processos empregados eram frequentemente justificados com o argumento de que eles funcionavam. E só perto do fim do século XVIII, quando muitos absurdos e contradições tinham-se insinuado na matemática, sentiu-se que era essencial examinar as bases da análise para dar-lhes uma fundamentação lógica rigorosa. O cuidadoso esforço que se seguiu, visando a essa fundamentação, foi uma reação ao emprego descontrolado da intuição e do formalismo no século anterior. A tarefa se mostrou difícil, ocupando, em suas várias ramificações, a maior parte dos 100 anos seguintes. Como consequência desse empreendimento, verificou-se um trabalho semelhante e igualmente cuidadoso com os fundamentos de todos os outros ramos da matemática, bem como o refinamento de muitos conceitos importantes. Assim, a própria ideia de função teve que ser esclarecida e noções como as de limite, continuidade, diferenciabilidade e integrabilidade tiveram de ser cuidadosa e claramente definidas. Essa tarefa de refinar conceitos básicos da matemática levou, por sua vez, a generalizações complexas. Conceitos como os de espaço, dimensão, convergência e integrabilidade, para citar alguns apenas, sofreram grandes generalizações e se tornaram muito abstratos. Uma boa parte da matemática do século XX voltou-se para esse trabalho, elevando a generalização e a abstração a duas de suas facetas atuais de maior realce. Mas alguns desses desenvolvimentos trouxeram consigo uma fornada nova de situações paradoxais. O conceito generalizado de número transfinito e o estudo abstrato dos conjuntos ampliaram e aprofundaram muitos ramos da matemática; ao mesmo tempo, porém, eles levaram a paradoxos muito inquietadores que parecem situar-se nos recônditos mais profundos da matemática. É nesse ponto que, parece, estamos hoje e é possível que os anos finais do século XX testemunhem a resolução de alguns desses problemas críticos.

Resumindo o último parágrafo, podemos dizer, com fidelidade razoável aos fatos, que o século XVIII foi gasto em grande parte na exploração dos novos e poderosos

métodos do cálculo, que o século XIX foi dedicado grandemente à tarefa de construir uma fundamentação lógica sólida para a enorme, porém débil, superestrutura construída no século precedente, que uma das maiores ênfases do século XX tem sido a de generalizar, tanto quanto possível, os progressos já alcançados, e que muitos matemáticos da atualidade estão envolvidos com problemas de fundamentos mais profundos ainda. Esse quadro geral complica-se quando se consideram os vários fatores sociológicos que afetam o desenvolvimento de qualquer ciência. Questões como a expansão dos seguros de vida e construção de grandes navios no século XVIII, os problemas econômicos e tecnológicos ocasionados no século XIX pela industrialização da Europa Ocidental e dos Estados Unidos, o clima de guerra mundial no século XX, o desenvolvimento da computação eletrônica e a luta pela conquista do espaço exterior levaram a muitos progressos no campo da matemática. Deu-se uma divisão da matemática em “pura” e “aplicada”, trabalhando na primeira dessas áreas os especialistas que se interessam pelo assunto em si mesmo e, na segunda, aqueles que priorizam suas aplicações práticas imediatas.

Nosso objetivo, doravante, é preencher alguns dos detalhes do esboço que acabamos de fazer.

12.2 *A família Bernoulli*

As principais contribuições à matemática no século XVIII foram dadas por membros da família Bernoulli, Abraham De Moivre, Brook Taylor, Colin Maclaurin, Leonhard Euler, Alexis Claude Clairaut, Jean-le-Rond d'Alembert, Johann Heinrich Lambert, Joseph Louis Lagrange, Pierre-Simon Laplace, Adrien-Marie Legendre, Gaspard Monge e Lazare Carnot. Deve-se observar que o veio principal da matemática desses homens teve como origem e como meta as aplicações do cálculo à mecânica e à astronomia. Foi só no século XIX que a pesquisa matemática se emancipou dessas balizas científicas. Nesta seção falaremos sobre a notável família Bernoulli.

Com um número surpreendente de matemáticos e cientistas de escol entre seus membros, a família Bernoulli, da Suíça, ocupa um lugar ímpar na história da ciência (em particular na da matemática). Pode-se dizer que tudo começou no final do século XVII com os dois irmãos Jakob Bernoulli (1654-1705) e Johann Bernoulli (1667-1748), dos quais, anteriormente, se mencionaram alguns trabalhos. Ambos os irmãos se bandearam para a matemática, deixando outros interesses e outras carreiras, quando começaram a aparecer na *Acta eruditorum* os artigos de Leibniz. Eles estavam entre os primeiros matemáticos que perceberam a potência espantosa do cálculo e que aplicaram esse instrumento a uma gama ampla de problemas. De 1687 até sua morte Jakob ocupou a cadeira de matemática da Universidade de Basileia. Johann tornou-se professor da Universidade de Gröningen em 1697 e, com a morte do irmão, em 1705, sucedeu-o na Universidade da Basileia, onde ficou pelo resto de seus dias. Os dois irmãos, que muitas vezes se atritaram seriamente por questões científicas, mantiveram um intercâmbio de ideias quase constante com Leibniz e também entre si.



Jakob Bernoulli
(Coleção David Smith)

Entre as contribuições de Jakob Bernoulli à matemática figuram o uso das coordenadas polares, quem sabe pela primeira vez (ver Seção 14-5), a dedução, em coordenadas retangulares e também em polares, da fórmula do raio de curvatura de uma curva plana, o estudo da catenária, com extensões para fios de densidade variável e fios sob a ação de uma força central, o estudo de muitas outras curvas planas superiores, a descoberta da chamada *isócrona* — ou curva ao longo da qual um corpo cairá com velocidade vertical uniforme (que resultou ser uma parábola semicúbica, com tangente vertical no ponto de cúspide), a determinação da forma assumida por uma haste elástica presa por uma das extremidades e suportando um peso na outra, a determinação da forma assumida por uma lâmina retangular flexível com duas bordas opostas mantidas presas horizontalmente e carregada de um líquido pesado e a forma de uma vela retangular enfunada pelo vento. Ele também propôs e discutiu o problema das *figuras isoperimétricas* (caminhos planos fechados de uma dada espécie e perímetro fixo que abarcam uma área máxima) e, com isso, foi um dos primeiros matemáticos a trabalhar no cálculo de variações. Foi também (como já salientamos na Seção 10-3) um dos primeiros a se ocupar da probabilidade matemática; seu livro sobre o assunto, *Ars conjectandi*, foi publicado postumamente em 1713. Várias coisas em matemática têm hoje o nome de Jakob Bernoulli. Entre elas estão a *distribuição de Bernoulli* e o *teorema de Bernoulli* da estatística e da teoria das probabilidades; a *equação de Bernoulli*, de um primeiro curso de equações diferenciais; os *números de Bernoulli* e os *polinômios de Bernoulli* de interesse da teoria dos números; e a *lemniscata de Bernoulli* dos cursos iniciais de cálculo. Na resolução de Jakob Bernoulli do problema da curva isócrona, publicada na *Acta eruditorum* em 1690, encontra-se pela primeira vez a palavra *integral* com um sentido ligado ao cálculo. Leibniz havia chamado o cálculo integral de *calculus summatorius*; em 1696 Leibniz e Johann Bernoulli acordaram

em chamá-lo de *calculus integralis*. Causava forte impressão em Jakob a maneira como a espiral equiangular (*spira mirabilis*) se reproduzia em si mesma quando submetida a várias transformações e pediu, imitando Arquimedes, que essa curva fosse gravada em seu túmulo com a inscrição “*Eadem mutata resurgo*” (“Embora transformada, reapareço igual”).

Johann Bernoulli contribuiu para a matemática mais ainda do que seu irmão Jakob. Embora ciumento e perverso, foi um dos professores mais inspirados de seu tempo. Enriqueceu grandemente o cálculo e desempenhou um papel muito destacado na tarefa de divulgar as potencialidades do novo campo de estudos na Europa. Como já vimos (na Seção 11-10), foi com material fornecido por ele, num acordo financeiro no mínimo curioso, que o marquês de l’Hôpital (1661-1704) compôs o primeiro texto de cálculo a ser publicado. Foi assim que o conhecido método de determinação da forma indeterminada $0/0$ tornou-se incorretamente conhecido, em textos posteriores de cálculo, como *regra de l’Hôpital*. Johann Bernoulli escreveu sobre múltiplos tópicos, como fenômenos ópticos relacionados com reflexão e refração, determinação das trajetórias ortogonais de uma família de curvas, retificação de curvas e quadratura de áreas por meio de séries, trigonometria analítica, o cálculo exponencial e muitos outros assuntos. De seus trabalhos, um dos que mais ganharam notoriedade é o que envolve sua contribuição ao problema da *braquistócrona*, isto é, a determinação da curva de descida mais rápida no seguinte sentido: dados dois pontos num plano vertical, a alturas diferentes, que trajetória do plano deve seguir uma partícula material para ir do ponto mais alto ao mais baixo no menor espaço de tempo possível? Mostrou-se (o próprio Johann foi um dos que o fizeram) que a curva é um arco conveniente de cicloide. Esse problema também foi discutido por Jakob Bernoulli. A cicloide também é a solução do problema da *tautócrona*, isto é, a determinação da curva plana ao longo da qual uma partícula material atinge um ponto dado da trajetória num espaço de tempo que não depende do ponto de onde ela saiu. Esse último problema, que foi discutido de uma maneira mais geral por Johann Bernoulli, Euler e Lagrange, já tinha sido resolvido antes por Huygens (1673) e Newton (1687); Huygens, inclusive, aplicara-o na construção de relógios de pêndulo [ver Exercício 10-7(c)].

Johann Bernoulli teve três filhos Nicolaus (1695-1726), Daniel (1700-1782) e Johann II (1710-1790) e todos se tornaram matemáticos e cientistas renomados no século XVIII. Nicolaus, que prometia muito em matemática, convidado para integrar a Academia de São Petersburgo, teve a infelicidade de morrer afogado apenas oito meses depois de chegar a essa cidade. Escreveu sobre curvas, equações diferenciais e probabilidade. Um problema proposto por ele em São Petersburgo, posteriormente tornou-se conhecido como *paradoxo de Petersburgo*. O enunciado do problema é o seguinte: Se A recebe uma moeda quando ocorre cara no primeiro lançamento de uma moeda, duas moedas quando ocorre cara pela primeira vez no segundo lançamento, quatro moedas quando ocorre cara pela primeira vez no terceiro lançamento e assim por diante, qual é a esperança matemática de A ? A teoria matemática mostra que essa esperança é infinita, mas isso parece paradoxal. O problema mereceu a atenção do sucessor de Nicolaus em São Petersburgo, seu irmão Daniel que, sete anos depois, retornou a Basileia. Daniel foi o mais famoso dos três filhos de Johann, tendo dedicado a maior parte de suas energias à probabili-

dade, à astronomia, à física e à hidrodinâmica. Em probabilidade ele criou o conceito de esperança *moral* e em sua *Hydrodynamica*, de 1738, aparece o princípio da hidrodinâmica hoje conhecido pelo seu nome nos textos de física elementar. Escreveu sobre marés, criou a teoria cinética dos gases, estudou as cordas vibrantes e foi um pioneiro no campo das equações diferenciais parciais. Johann II, o mais novo dos três, estudou direito mas passou seus últimos anos como professor de matemática da Universidade da Basileia. Ele se interessou particularmente pela teoria matemática do calor e da luz.



Johann Bernoulli
(Coleção David Smith)

Houve outro Nicolaus Bernoulli (1687-1759), no século XIX. Trata-se de um sobrinho de Jakob e Johann que ganhou alguma fama em matemática e que, por algum tempo, ocupou a cadeira de matemática da Universidade de Pádua que outrora tinha sido de Galileu. Escreveu extensamente sobre geometria e equações diferenciais. Posteriormente foi professor de lógica e direito.

Johann Bernoulli II teve um filho, Johann III (1744-1807), que, como o pai, estudou advocacia mas acabou se tornando matemático. Com apenas 19 anos de idade foi convidado a ser professor de matemática da Academia de Berlim. Escreveu sobre astronomia, probabilidade, decimais recorrentes e equações indeterminadas.

Vale mencionar, ainda, entre os Bernoulli, embora menos importantes, os nomes de Daniel II (1751-1834) e Jakob II (1759-1789), filhos de Johann II, Christoph (1782-1863), filho de Daniel II, e Johann Gustav (1811-1863), filho de Christoph.

A Figura 105 mostra a árvore genealógica da família Bernoulli.

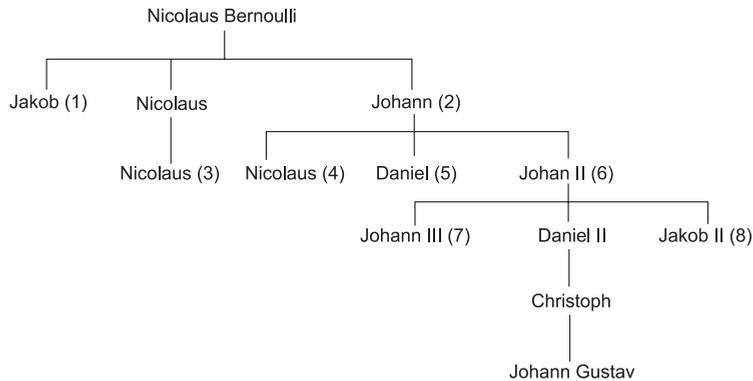


Figura 105

12.3 De Moivre e a probabilidade

As ideias pioneiras de Fermat, Pascal e Huygens em teoria das probabilidades foram trabalhadas consideravelmente no século XVIII e os progressos nesse novo campo se sucederam de maneira bastante rápida. A *Ars conjectandi* de Bernoulli foi seguida de importantes contribuições à teoria das probabilidades, figurando com destaque entre elas as de Abraham De Moivre (1667-1754), um huguenote francês que buscou abrigo no clima politicamente mais ameno de Londres, depois da revogação do Edito de Nantes em 1685. De Moivre ganhava a vida na Inglaterra como professor particular e tornou-se amigo íntimo de Isaac Newton.

De Moivre é conhecido principalmente por suas obras *Annuities upon Lives*, que teve um papel importante na história da matemática atuarial, *Doctrine of Chances*, que continha muito material sobre teoria das probabilidades e *Miscellanea analytica*, em que há contribuições a séries recorrentes, probabilidade e trigonometria analítica. Considera-se, ainda, que De Moivre foi o primeiro a trabalhar com a integral

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

em probabilidade, bem como com a curva de frequência normal

$$y = ce^{-hx^2}, \quad c \text{ e } h \text{ constantes,}$$

tão importante em estatística. O resultado conhecido por *fórmula de Stirling*, tão útil na aproximação de fatoriais de números grandes, ou seja,

$$n! \approx (2\pi n)^{1/2} e^{-n} n^n,$$

para n muito grande, na verdade é uma contribuição de De Moivre. A importante fórmula

$$(\cos x + i \operatorname{sen} x)^n = \cos nx + i \operatorname{sen} nx, \quad i = \sqrt{-1},$$

que se tornou a chave da trigonometria analítica, foi dada por De Moivre em 1707 para n inteiro positivo (embora não explicitamente), daí ser conhecida pelo seu nome.

Há uma lenda interessante envolvendo a morte de De Moivre. Segundo ela, De Moivre teria revelado, certa ocasião, que daí para a frente teria que dormir, em cada dia, 15 minutos mais do que no dia precedente. E quando essa progressão aritmética atingiu 24 horas ele de fato teria morrido.

Os negócios de seguros passaram por uma explosão de crescimento no século XVIII, o que atraiu muitos matemáticos para a teoria da probabilidade subjacente. Como consequência, desenvolveram-se esforços para aplicar a teoria das probabilidades a outros campos. Foi na esteira dessa preocupação que Georges Louis Leclerc, conde de Buffon (1707-1788), famoso por sua deliciosa história natural em 36 volumes, propôs a primeira questão de probabilidade geométrica, o conhecido “problema da agulha”, pelo qual pode-se obter experimentalmente uma aproximação de π (ver Seção 4-8 e Exercício 12.13). Também se tentou usar a teoria das probabilidades em situações que envolvem o julgamento humano, como, por exemplo, a determinação da chance de um tribunal chegar a um veredicto acertado, na hipótese de se poder atribuir a cada jurado um número que medisse sua chance de expressar ou compreender a verdade. Essa *probabilité des jugements*, com seus laivos da filosofia do Iluminismo, sobressaiu-se no trabalho de Antoine-Nicolas Caritat, marquês de Condorcet (1743-1794), que, embora fosse um defensor da Revolução Francesa, acabou, como outros intelectuais, sendo uma das vítimas de seus excessos. Uma das conclusões de Condorcet foi que a pena de morte deveria ser abolida porque, embora a probabilidade de acerto numa decisão unitária seja grande, no curso de uma série muito grande de decisões, a probabilidade de se condenarem pessoas inocentes é bastante alta.

12.4 Taylor e Maclaurin

Os nomes do inglês Brook Taylor (1685-1731) e do escocês Colin Maclaurin (1698-1746) são bastante familiares a todos os que já cursaram, ou cursam, o cálculo básico da graduação, através das bem conhecidas e úteis fórmulas de Taylor e fórmula de Maclaurin de expansão de funções em séries de potências. O teorema de expansão de Taylor foi publicado em 1715 e não fazia considerações sobre convergência. Sua expressão é a seguinte:

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \dots$$

Vejamos como Taylor aplicou essa série em 1717 na solução aproximada de equações: Seja a um valor aproximado de uma raiz de $f(x) = 0$; faça $f(a) = k, f'(a) = k', f''(a) = k''$ e $x = a + h$; faça a expansão de $0 = f(a + h)$ em série; despreze todas as potências de h de expoentes superiores a dois; introduza os valores k, k' e k'' depois resolva para h . Por aplicações sucessivas desse método, podem-se encontrar aproximações cada vez melhores. Alguns trabalhos feitos por Taylor na teoria da perspectiva vieram a encontrar aplicações modernas em aspectos matemáticos da fotogrametria, a ciência que utiliza o recurso das fotografias tiradas de aviões na agrimensura.

O reconhecimento pleno da importância da série de Taylor teve de esperar até 1755, quando Euler a aplicou ao seu cálculo diferencial e um pouco mais ainda, quando Lagrange usou a série com um resto como base de sua teoria das funções.

Taylor, que revelou desde muito cedo grande potencial matemático, graduou-se no St. John's College da Universidade de Cambridge. Foi membro da Royal Society, chegando a ser seu secretário, mas renunciou aos 34 anos de idade a fim de dedicar mais tempo para escrever.



Brook Taylor
(Coleção David Smith)

Maclaurin foi um dos matemáticos mais capazes do século XVIII. A chamada série de Maclaurin não é outra coisa senão a série de Taylor para $a = 0$ e, alguns anos antes de Maclaurin usá-la em seu *Treatise of Fluxions* (dois volumes, 1742), com os devidos agradecimentos, o próprio Taylor e James Stirling (1692-1770) já a haviam usado, efetiva e explicitamente. Maclaurin realizou um trabalho notável em geometria, particularmente no estudo das curvas planas superiores, e mostrou o grande alcance da aplicação da geometria clássica a problemas físicos. Entre seus muitos artigos sobre matemática aplicada

figura uma premiada memória sobre a teoria matemática das marés. Em seu *Treatise of Fluxions* desenvolveu pesquisas sobre a atração mútua de dois elipsoides de revolução.

É possível que em 1729 Maclaurin já conhecesse a regra de resolução de um sistema de equações lineares hoje conhecida por *Regra de Cramer*. A primeira aparição impressa da regra ocorreu em 1748, no *Treatise of Algebra* de Maclaurin, uma obra póstuma. O matemático suíço Gabriel Cramer (1704-1752) publicou-a, independentemente, em 1750, em sua *Introduction à l'Analyse des Lignes Courbes Algébriques*, com uma notação superior que, talvez, seja a responsável pela opção do mundo matemático pelo nome consagrado na regra.

Maclaurin foi um matemático prodígio. Matriculou-se na Universidade de Glasgow com a idade de 11 anos. Graduou-se aos 15 com uma defesa pública notável de uma tese sobre a gravidade. Aos 19 foi escolhido para a cadeira de matemática do Marischal College de Aberdeen; aos 21 publicou seu primeiro trabalho importante, *Geometria orgânica*. Aos 27 tornou-se assistente do professor de matemática da Universidade de Edimburgo. Como houvesse alguma dificuldade em obter recursos para sua remuneração, Newton se ofereceu para arcar pessoalmente com as despesas, a fim de que a universidade não perdesse um jovem de tanto valor. Com o tempo Maclaurin tornou-se o titular da cátedra. Seu trabalho sobre a teoria dos fluxos apareceu quando ele tinha 44 anos de idade, quatro anos apenas antes de seu falecimento; trata-se da primeira exposição lógica e sistemática do método dos fluxos de Newton e foi escrita por Maclaurin como uma réplica aos ataques feitos pelo bispo George Berkeley aos princípios do cálculo (ver Exercício 14.24).



Colin Maclaurin
(Coleção David Smith)

Tendo focalizado Taylor e Maclaurin, dois matemáticos cujos nomes são indefectíveis nos textos e cursos de cálculo, falaremos um pouco de outro nome numa situação semelhante. Estamos nos referindo a Michel Rolle, um francês de uma época um pouco anterior à de Taylor e Maclaurin. Nascido em Ambert, Auvergne, em 1652 e falecido em Paris em 1719, suas atividades se ligavam ao Ministério da Guerra da França. Escreveu sobre geometria e álgebra e é conhecido por todo estudante de cálculo pelo teorema designado por seu nome e que garante o seguinte: entre duas raízes reais sucessivas de $f(x) = 0$ sempre há pelo menos uma raiz de $f'(x) = 0$. É desse teorema que os atuais textos de cálculo deduzem comumente o importantíssimo “teorema do valor médio”. Poucos estudantes, porém, sabem que Rolle foi um dos críticos mais veementes do cálculo e que se empenhou em provar que ele se embasava em raciocínios inconsistentes e que levavam a resultados errados. Certa vez caracterizou o cálculo como “uma coleção de falácias engenhosas”. Tão violentos eram seus ataques ao cálculo, que certa vez a Academia de Ciências teve de intervir. Com os anos ele moderou sua atitude e passou a ver o cálculo como um instrumento muito útil.

12.5 Euler

Já nos referimos várias vezes neste livro a Leonhard Euler, um suíço que nasceu na Basileia em 1707. Depois de ensaiar uma carreira no campo da teologia, Euler encontrou sua verdadeira vocação na matemática. Foi nessa altura que seu pai, um pastor calvinista com pendores para a matemática, ajudou-o, ensinando-lhe os fundamentos da matéria. O pai, que havia estudado com Jakob Bernoulli, conseguiu que o filho fosse estudar com Johann Bernoulli.

Em 1727, quando Euler tinha apenas 20 anos de idade, os irmãos Daniel e Nicolaus Bernoulli, que pertenciam à Academia de São Petersburgo, recém-criada por Pedro, o Grande, conseguiram que ele fosse indicado membro da instituição. Com a volta de Daniel a seu país pouco tempo depois, para ocupar a cadeira de matemática da Universidade da Basileia, Euler tornou-se o cabeça da seção de matemática da Academia.

Após dignificar a Academia de São Petersburgo por 14 anos, Euler aceitou um convite de Frederico, o Grande, para chefiar a seção de matemática da Academia de Berlim. Euler se manteve durante 25 anos nessa nova atividade, mas sua simplicidade e modéstia não correspondiam à cintilância e sofisticação que Frederico admirava, daí resultando muitos dissabores para ele nessa sua estada na Prússia. Durante esse tempo continuou a receber uma pensão da Rússia, o que atesta o alto prestígio que alcançara nesse país.

O sentimento permanentemente caloroso dos russos para com ele, a par da frieza da corte de Frederico, levaram-no a aceitar, em 1766, um convite de Catarina, a Grande, para retornar à Academia de São Petersburgo, onde ficaria os 17 anos seguintes de sua vida. Morreu subitamente em 1783 com 76 anos de idade. É interessante que em toda a sua carreira, longa e variada, nunca ocupou um cargo de professor.



Leonhard Euler
(Biblioteca do Congresso)

Euler foi um escritor prolífico, sem dúvida insuperável quanto a isso na história da matemática; não há ramo da matemática em que seu nome não figure. É interessante que sua produtividade surpreendente não foi absolutamente prejudicada quando, pouco depois de seu retorno a São Petersburgo, teve a infelicidade de ficar completamente cego. Aliás, ele já era cego do olho direito desde 1735, o que explica as poses com que aparece em seus retratos. A cegueira poderia parecer um obstáculo intransponível para um matemático, mas, assim como a surdez de Beethoven não o impediu de compor, Euler conseguiu manter extraordinária atividade produtiva depois de sofrer essa perda. Ajudado por uma memória fenomenal e por um poder de concentração incomum e imperturbável, Euler continuou seu trabalho criativo com a ajuda de um secretário que anotava suas ideias, expressas verbalmente ou escritas com giz numa lousa grande. Entre livros e artigos, Euler publicou 530 trabalhos durante sua vida, deixando ainda, ao morrer, uma série de manuscritos que enriqueceram as publicações da Academia de São Petersburgo por mais 47 anos. A Sociedade Suíça de Ciências Naturais iniciou em 1909 uma edição completa da obra de Euler, compreendendo 886 trabalhos, entre livros e artigos, que deverá atingir cem grandes volumes *in quarto*.

As contribuições de Euler à matemática são demasiado numerosas para serem expostas aqui completamente, de modo que apontaremos apenas algumas no plano elementar. Para começar, registremos que se deve a Euler a implantação das seguintes notações:

$f(x)$	para funções,
e	para a base dos logaritmos naturais,
a, b, c	para os lados de um triângulo ABC ,
s	para o semiperímetro do triângulo ABC ,

r	para o inraio do triângulo ABC ,
R	para o circunraio do triângulo ABC ,
Σ	para somatórios,
i	para a unidade imaginária, $\sqrt{-1}$.

Também se deve a ele a notabilíssima fórmula

$$e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x,$$

que, para $x = \pi$, se transforma em

$$e^{i\pi} + 1 = 0,$$

uma igualdade que relaciona cinco dos mais importantes números da matemática. Por processos puramente formais, Euler chegou a um número enorme de relações curiosas, como

$$i^i = e^{-\pi/2},$$

por exemplo. Um fato importante que conseguiu estabelecer é que todo número real não nulo r tem uma infinidade de logaritmos (para uma dada base), todos imaginários se $r < 0$ e todos imaginários, exceto um, se $r > 0$. Na geometria plana aparece a *reta de Euler* (ver Exercício 14.1); nos cursos de teoria das equações encontra-se às vezes o *método de Euler* de resolução das quárticas; e nos cursos de teoria dos números, mesmo os mais elementares, são presenças certas o *teorema de Euler* e a *função ϕ de Euler* (ver Exercício 10.5). Atribuem-se a Euler as funções beta e gama do cálculo avançado, embora elas tenham sido pronunciadas por Wallis. Euler empregou a ideia de fator integrante na resolução de equações diferenciais, deu-nos o método sistemático usado hoje para resolver equações diferenciais lineares com coeficientes constantes e distinguiu entre equações diferenciais lineares homogêneas e não-homogêneas. A equação diferencial

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_n y^{(0)} = f(x),$$

onde os expoentes entre parênteses indicam a ordem da derivada, hoje é conhecida como *equação diferencial de Euler*. Euler mostrou que a substituição $x = e^t$ a transforma numa equação diferencial linear com coeficientes constantes. O teorema “Se $f(x, y)$ é homogênea de grau n , então $xf'_x + yf'_y = nf$ ” é conhecido hoje como *teorema de Euler das funções homogêneas*. Euler foi um dos primeiros matemáticos a desenvolver a teoria das frações contínuas. Contribuiu notavelmente para os campos da geometria diferencial, cálculo de diferenças finitas e cálculo de variações, além de enriquecer sobremodo a teoria dos números. Num de seus artigos figura a relação

$$v - a + f = 2$$

ligando os números v de vértices, a de arestas e f de faces de um poliedro fechado simples qualquer. Noutro artigo ele desenvolveu pesquisas sobre as *curvas orbiformes*, curvas que, como a circunferência, são ovais convexas de largura constante. Vários de seus artigos são dedicados às recreações matemáticas e envolvem assuntos como grafos unicursais e multicursais (inspirados nas sete pontes de Königsberg), caminhos reentrantes do cavalo no jogo de xadrez e quadrados greco-romanos. Mas, obviamente, o campo principal de suas publicações foi a matemática aplicada, colaborando em especial para a teoria lunar, a das marés, o problema dos três corpos da mecânica celeste, o problema da atração de elipsoides, a hidráulica, a construção de navios, questões de artilharia e teoria musical. O dispositivo conhecido por *diagramas de Euler*, usado como teste de validade de raciocínios dedutivos, foi dado por Euler numa de suas cartas à princesa Phillipine von Schwedt, sobrinha de Frederico, o Grande. Durante a Guerra dos Sete Anos (1756-1763), toda a corte berlinense transferiu-se temporariamente para Magdeburg e nesse período, Euler, de sua casa em Berlim, dava aulas por correspondência à princesa.

Euler foi um escritor magistral, caracterizando-se seus livros pela grande clareza, riqueza de detalhes e abrangência. Entre eles, figuram com destaque: *Introductio in analysin infinitorum* de 1748, em dois volumes, que alcançou grande prestígio; *Institutiones calculi differentialis* de 1755, uma obra extremamente rica e o aparentado *Institutiones calculi integralis*, em três volumes (1768-1774). Esses livros, mais outros de mecânica e álgebra, superando trabalhos da mesma natureza, serviram para modelar o estilo, a notação e o alcance de muitos dos livros dos cursos superiores atuais. Os livros de Euler alcançaram pronunciada e longa popularidade e ainda hoje são uma leitura muito agradável e proveitosa. A enorme fertilidade de ideias de Euler é deveras surpreendente, não sendo de admirar, portanto, que muitos dos grandes matemáticos posteriores a ele admitiram ter recebido sua influência.

Talvez convenha salientar que alguns dos trabalhos de Euler representam exemplos típicos relevantes do formalismo do século XVIII, ou seja, da manipulação, sem os cuidados devidos, da convergência e da existência matemática em questões envolvendo processos infinitos. Ele era descuidado no uso de séries infinitas, aplicando a elas, muitas vezes, leis válidas somente para somas finitas. Considerando as séries de potências como polinômios de grau infinito, ele imprudentemente estendia a elas propriedades bem conhecidas dos polinômios finitos. Frequentemente, em virtude dessas abordagens descuidadas, chegava, bafejado pela sorte, a resultados profundos e verdadeiros (ver Exercício 12.6, por exemplo).

O saber e o interesse de Euler não se limitavam apenas à matemática e à física. Era um erudito autêntico, estendendo-se seus conhecimentos à astronomia, medicina, botânica, química, teologia e às línguas orientais. Dedicava-se à leitura dos escritores romanos eminentes, conhecia bem a história civil e literária de todas as épocas e nações e era bastante versado em línguas e em vários ramos da literatura. Em tudo isso, sem dúvida, era grandemente auxiliado por sua excepcional memória.

Euler já recebeu muitas homenagens entusiasmadas, como as duas que se seguem, do físico e astrônomo François Arago (1786-1853): “Euler poderia muito bem ser chamado, quase sem metáfora, e certamente sem hipérbole, a encarnação da análise.”

“Euler calculava sem nenhum esforço aparente, assim como os homens respiram e as águias se mantêm suspensas no ar”.

Euler teve 13 filhos. O mais velho, Johann Albrecht Euler (1734-1800), alcançou alguma fama no campo da física.

12.6 Clairaut, d'Alembert e Lambert

Alexis Claude Clairaut nasceu em Paris em 1713 e faleceu na mesma cidade em 1765. Foi um dos matemáticos mais precoces de todos os tempos, haja vista o tratado sobre curvas de terceira ordem que escreveu aos 11 anos de idade. Esse trabalho e um outro posterior e singularmente elegante sobre a geometria diferencial de curvas reversas do espaço valeram-lhe um lugar na Academia de Ciências da França com apenas 18 anos de idade, o que não era permitido pelas normas da instituição. Em 1736 acompanhou Pierre Louis Moreau de Maupertuis (1698-1759) numa excursão à Lapônia que objetivava determinar a medida de um grau de um meridiano terrestre. A finalidade dessa excursão era dirimir uma pendência a respeito da forma da Terra. Newton e Huygens haviam concluído matematicamente que a Terra é achatada nos polos. Mas, por volta de 1712, o astrônomo e matemático italiano Giovanni Domenico Cassini (1625-1712) e seu filho francês Jacques Cassini (1677-1756) mediram um arco de longitude entre Dunkerque e Perpignan e obtiveram um resultado que parecia apoiar o ponto de vista cartesiano de que a Terra seria alongada nos polos. A medição efetuada na Lapônia confirmou de maneira inquestionável as conclusões de Newton e Huygens e conferiram a Maupertuis o título de “achatador da Terra”. Em 1743, depois de seu retorno à França, Clairaut publicou sua obra definitiva, *Théorie de la Figure de la Terre*. Em 1752 ganhou um prêmio da Academia de São Petersburgo com seu artigo “Théorie de la Lune”, um estudo matemático do movimento lunar que esclarecia algumas questões em aberto. Aplicou o processo de diferenciação à equação diferencial

$$y = px + f(p), \quad p = \frac{dx}{dy},$$

conhecida nos textos elementares de equações diferenciais como *equação de Clairaut*, e achou a solução singular, mas esse processo já tinha sido usado antes por Brook Taylor. Em 1759 calculou, com erro de cerca de um mês, o retorno do cometa Halley.

Clairaut teve um irmão, três anos mais novo, conhecido na história da matemática apenas como “le cadet Clairaut” (1716-1732), que faleceu tragicamente de varíola aos 16 anos de idade, mas que aos 14 já havia lido um trabalho sobre geometria à Academia de Ciências e que aos 15 publicara uma obra sobre o mesmo assunto. O pai dos Clairaut, Jean Baptiste Clairaut (falecido pouco depois de 1765), era professor de matemática, membro correspondente da Academia de Berlim e escreveu sobre geometria; teve 20 filhos dos quais só um sobreviveu a ele.

Esta talvez seja a ocasião de mencionar outra equação diferencial que normalmente figura nos cursos iniciais de equações diferenciais e, ao mesmo tempo, outra família de matemáticos célebres. Trata-se da chamada *equação de Riccati*

$$y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x),$$

assim chamada em referência a Giacomo Riccati (1676-1754), um homem financeiramente independente que estudou em Pádua quando Nicolaus Bernoulli (o sobrinho de Jakob e Johann) lá esteve ensinando. Além de um estudo exaustivo da equação citada, Giacomo Riccati escreveu sobre física, mensuração e filosofia e contribuiu bastante para que o trabalho de Newton se tornasse conhecido na Itália. Jakob Bernoulli e outros estudaram casos particulares da equação de Riccati, mas foi Euler quem primeiro observou que, conhecida uma solução particular $v = f(x)$ da equação, a substituição $y = v + 1/z$ a transforma numa equação diferencial linear em z . O segundo filho de Giacomo Riccati, Vincenzo Riccati (1707-1775), um jesuíta, foi professor de matemática e trabalhou em equações diferenciais, séries infinitas, quadraturas e funções hiperbólicas. O terceiro filho de Giacomo, Giordano Riccati (1709-1790), escreveu sobre o trabalho de Newton, geometria, equações cúbicas e problemas físicos. O quinto filho, Francesco Riccati (1718-1791), escreveu sobre aplicações da geometria à arquitetura.



Alexis Claude Clairaut
(Coleção David Smith)

Jean-le-Rond d'Alembert (1717-1790), como Alexis Clairaut, nasceu e morreu em Paris. Foi abandonado recém-nascido perto da igreja de Saint Jean-le-Rond, onde um gendarme o recolheu e logo o batizou com o nome do local. Mais tarde, por razões desconhecidas, adotou o d'Alembert.

Entre D'Alembert e Clairaut havia uma rivalidade científica que muitas vezes raia-va a inimizade. D'Alembert foi admitido na Academia de Ciências com 24 anos de idade. Em 1743 publicou seu *Traité de Dynamique*, baseado no grande princípio da cinética hoje conhecido pelo seu nome. Diz esse princípio que as ações e reações internas de um sistema de corpos rígidos em movimento estão em equilíbrio. Em 1714 aplicou esse princípio num tratado sobre o equilíbrio e o movimento dos fluidos e, em 1746, num tratado sobre as causas dos ventos. Em todos esses trabalhos, bem como num outro de 1747 dedicado às cordas vibrantes, recaiu em equações diferenciais parciais, tornando-se assim um dos pioneiros do estudo dessas equações. O problema das cordas vibrantes levou-o à equação diferencial parcial

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

para a qual, em 1747, deu a solução

$$u = f(x+t) + g(x-t),$$

onde f e g são funções arbitrárias. Com a ajuda de seu princípio foi capaz de obter uma solução completa do desconcertante problema da precessão dos equinócios. Em 1754 fez a importante recomendação de que, para colocar em bases firmes os fundamentos da análise, era preciso desenvolver uma teoria dos limites bem estruturada, mas seus contemporâneos quase não lhe deram ouvidos. D'Alembert empenhou-se tanto em provar o teorema fundamental da álgebra (que uma equação polinomial complexa $f(x) = 0$ de grau $n \geq 1$ tem pelo menos uma raiz complexa) que o teorema é conhecido hoje na França como *teorema de d'Alembert*. Foi d'Alembert quem deu o nome *equação de Riccati* à equação diferencial considerada há pouco.

D'Alembert, como Euler, tinha uma cultura muito vasta, prevalentemente em direito, medicina, matemática e ciência. Com muitos interesses comuns, d'Alembert e Euler trocaram correspondência sobre vários assuntos. Uma questão que embaraçava muito d'Alembert, como a outros matemáticos da época, era a natureza dos logaritmos de números negativos — não deveria valer $\log(-x) = \log(x)$, pois $(-x)^2 = (x)^2$ implica $\log(-x)^2 = \log(x)^2$ e daí $2\log(-x) = 2\log(x)$, donde $\log(-x) = \log(x)$? Mas, numa carta de 1747, Euler esclareceu de vez a questão dos logaritmos negativos para d'Alembert. E quando, perto do final da estada de Euler em Berlim, Frederico, o Grande, convidou d'Alembert para presidir a Academia Prussiana, ele declinou, sob a alegação de que nenhum contemporâneo teria bagagem científica para ocupar um posto acadêmico superior ao do grande Euler. D'Alembert também foi convidado por Catarina, a Grande, para emprestar seu talento à Rússia mas, a despeito dos generosos estipêndios, não aceitou. Em 1754 tornou-se secretário permanente da Academia de Ciências. Durante os últimos tempos de sua vida, trabalhou na grande *Encyclopédie* francesa, uma iniciativa sua e de Denis Diderot. D'Alembert faleceu em 1783, mesmo ano da morte de Euler.



Jean-le-Rond D'alembert
(Biblioteca do Congresso)

Um comentário famoso e muito citado feito por d'Alembert (e que vale a pena colocar, no momento azado, num curso de álgebra elementar), é: “A álgebra é generosa; ela muitas vezes nos dá mais do que lhe é solicitado”. Também observou, com propriedade: “As verdades geométricas guardam uma relação assintótica com as verdades físicas; isto é, estas últimas se aproximam indefinidamente das primeiras sem, contudo, jamais alcançá-las”. Mas, talvez, o mais perspicaz dos pensamentos de d'Alembert sobre a matemática seja: “Não tenho dúvidas de que se os homens vivessem separados uns dos outros e, nessa situação, pudessem se ocupar tão somente da autopreservação, então eles prefeririam estudar as ciências exatas em vez de cultivar as artes. É principalmente por causa dos outros que o homem aspira a excelência nestas últimas; e é por si próprio que ele se dedica às primeiras. Assim, penso eu, numa ilha deserta um poeta mal teria como ser vaidoso, ao passo que o matemático poderia ainda desfrutar do orgulho da descoberta”.

Nascido em Mulhouse (Alsácia), então parte do território suíço, e um pouco mais novo do que Clairaut e d'Alembert, Johann Heinrich Lambert (1728-1777) foi um matemático de alto quilate. Filho de um alfaiate pobre, foi em grande parte um autodidata. Era dotado de imaginação extraordinária e esmerava-se no aspecto do rigor ao estabelecer seus resultados. Lambert foi o primeiro a provar rigorosamente que o número π é irracional. Ele mostrou que se x é racional, $x \neq 0$, então $\text{tg } x$ não pode ser racional; e como $\text{tg } \pi/4 = 1$, segue-se que $\pi/4$ não pode ser racional; logo, o mesmo acontece também com π . Devemos a Lambert o primeiro desenvolvimento sistemático da teoria das funções hiperbólicas, inclusive a notação atual para essas funções. Bastante eclético, Lambert contribuiu notavelmente para numerosos outros tópicos da matemática, como geometria descritiva, determinação de órbitas de cometas e a teoria das projeções usada na confecção de mapas (um dos tipos dessas projeções, muito usado hoje, é conhecido por seu nome). Em certa ocasião ele chegou a cogitar planos para uma lógica matemática nos moldes daquela esboçada anteriormente

por Leibniz. Lambert encontra-se entre os precursores da descoberta da geometria não euclidiana (ver Seção 13-7), graças às pesquisas que desenvolveu sobre o postulado das paralelas de Euclides, assunto de seu livro de 1766, mas publicado postumamente, *Die Theorie der Parallellinien*.



Johann Heinrich Lambert
(Coleção David Smith)

Por um curto período de tempo Lambert foi colega de Euler na Academia de Berlim. Conta-se que ao ser inquirido certa vez por Frederico, o Grande, sobre qual a ciência em que era mais competente, Lambert teria respondido sumariamente, “Todas”. Lambert morreu em 1777, ano do nascimento de Carl Friedrich Gauss.

12.7 Agnesi e du Châtelet

Nascida em Milão, em 1718, primeira dos 21 filhos dos três casamentos de seu pai, a talentosa e erudita Maria Gaetana Agnesi se notabilizou em muitas áreas, além da matemática. Bastante criança ela já dominava o latim, o grego, o hebreu, o francês, o espanhol, o alemão e várias outras línguas. Com apenas nove anos de idade teve publicado um discurso seu em latim em que defendia a educação superior para as mulheres. Durante sua infância, o pai, um professor de matemática da Universidade de Bolonha, comprazia-se em receber a intelectualidade local para ver Maria conversar com doutos professores, sobre os assuntos que preferissem e em suas línguas. Posteriormente, quando tinha 20 anos, publicou *Propositiones philosophicae*, uma coletânea de 190 ensaios que, além da matemática, se ocupavam de lógica, mecânica, hidromecânica, elástici-

dade, gravitação, mecânica celeste, química, botânica, zoologia e mineralogia. Esses ensaios resultaram das discussões nas tertúlias em casa de seu pai.

Em 1748, com a idade de 30 anos, Agnesi publicou um trabalho em dois volumes, intitulado *Instituzioni Analitiche*, escrito inicialmente com a finalidade de servir na formação de um de seus irmãos mais novos que revelava interesse e aptidão para a matemática. O trabalho constitui um curso de matemática elementar e avançada estruturado especialmente para espíritos jovens. O primeiro volume se ocupa de aritmética, álgebra, trigonometria, geometria analítica e, principalmente, cálculo, tratando-se do primeiro texto de cálculo escrito primariamente para jovens. O segundo volume trata de séries infinitas e equações diferenciais. As 1070 páginas da obra representam uma contribuição notável à educação matemática. A fim de que os jovens pudessem ler o trabalho, ela evitou o latim habitual e escreveu-o em italiano. Posteriormente, em 1801, apareceu uma tradução inglesa, derivada de uma tradução anterior não publicada feita por John Colson que, numa certa época, ocupou a cátedra lucasiana de Cambridge. O título da tradução inglesa é *Analytical Institutions*.



Maria Gaetana Agnesi
(Coleção David Smith)

Em 1749 Agnesi foi designada, pelo papa Benedito XIV, membro honorário da Universidade de Bolonha mas jamais foi professora dessa instituição, ao contrário do que contam certas narrações imprecisas.

Agnesi se desagradava muito da notoriedade e por várias vezes tentou entregar-se a uma vida de reclusão. Conseguiu-o finalmente em 1752 com a morte de seu pai, dedicando o resto de sua vida a obras de caridade e ao estudo religioso. Em 1771 foi designada diretora de uma instituição beneficente em Milão, onde ficou até sua morte em 1799. Ela tinha uma irmã mais nova, Maria Teresa Agnesi (1724-1780), que se tornou uma intérprete musical e compositora de grandes méritos.

Durante sua vida, Maria Gaetana Agnesi ganhou fama não só como matemática, linguista e filósofa, mas também como sonâmbula. Houve várias ocasiões em que ela, em estado de sonambulismo, acendia uma lâmpada, prosseguia com seus estudos e resolvia problemas que deixara incompletos antes de se deitar. Ao se levantar, de manhã, surpreendia-se ao encontrar a solução acabada e completa no papel sobre sua escrivaninha.

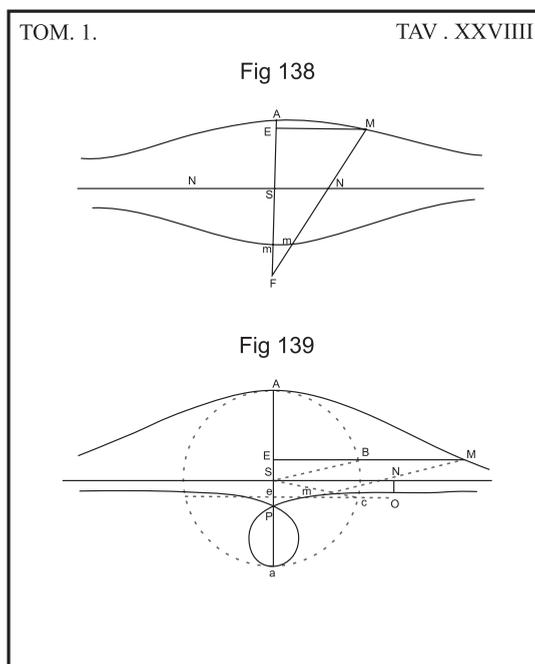


Página de rosto (reduzida) do volume 1 de *Istituzioni Analitiche* (1748) de Maria Gaetana Agnesi (Cortesia da Curadoria da Biblioteca Pública de Boston)

Pierre de Fermat certa vez se interessou por uma curva cúbica que, com a notação atual, se expressaria pela equação cartesiana

$$y(x^2 + a^2) = a^3.$$

Fermat não deu nome a ela, mas Guido Grandi (1672-1742), que estudou essa curva posteriormente, chamou-a de *versoria*. Essa palavra latina designa uma corda de manobrar vela de embarcação. Não se sabe por que Grandi optou por esse nome. Há uma palavra semelhante e obsoleta latina, *versorio*, que significa “livre para se mover em qualquer direção”, e a natureza duplamente assintótica da cúbica pode ter sugerido a Grandi associar essa palavra à curva. De qualquer maneira, quando Agnesi escreveu sua *Instituzioni Analitiche*, confundiu a palavra *versoria* (ou *versorio*) de Grandi com *versiera* que, em latim, significa “avó do diabo” ou “duende fêmea”. Posteriormente, quando John Colson traduziu o texto de Agnesi para o inglês, ele verteu *versiera* como “*witch*” (feiticeira). Essa é a razão pela qual a curva em inglês passou a ser conhecida como “*witch of Agnesi*” (feiticeira de Agnesi), embora em outras línguas a designação mais comum seja “*curva de Agnesi*”. A curva de Agnesi possui muitas e belas propriedades, algumas das quais se encontram no Exercício 12.11.



Amostra de uma página (reduzida em tamanho) do volume 1 de *Instituzioni Analitiche* (1748) de Maria Gaetana Agnesi, mostrando gráficos de algumas curvas estudadas pela autora (Cortesia da Curadoria da Biblioteca Pública de Boston)

Embora mais uma divulgadora do que uma criadora de matemática, outra mulher que se sobressaiu na matemática foi a marquesa du Châtelet (Gabrielle Émilie Tonnelier de Breteuil). Contemporânea de Agnesi, ela nasceu em 1706 na cidade de Paris

onde morreu jovem em 1749, aos 43 anos de idade. Além de matemática era física, linguista e uma exímia cravista. Tornou-se popular por sua longa *entente cordiale* com Voltaire. Em 1740 escreveu *Institutions de Physique*, obra em que difundiu os pontos de vista de Leibniz. Sua contribuição matemática mais importante foi a primeira tradução francesa dos *Principia* de Newton, publicada postumamente em 1756 com um prefácio de Voltaire e sob a direção de A. C. Clairaut. Escreveu também vários tratados de filosofia e religião (publicados também postumamente) e fez muito para libertar o pensamento francês da dependência do cartesianismo.



Madame Du Châtelet
(Coleção David Smith)

12.8 Lagrange

Os dois maiores matemáticos do século XVIII foram Euler e Joseph Louis Lagrange (1736-1813); dizer qual dos dois foi o maior é uma questão de opinião e, portanto, um reflexo da sensibilidade matemática de quem emitir o juízo. Lagrange nasceu em Turim, Itália, numa família outrora abastada, de estirpe franco-italiana; foi o único a atingir a idade adulta, de uma prole de 11 filhos. Estudou em Turim e, muito jovem, tornou-se professor de matemática da academia militar local. Em 1766, quando Euler deixou Berlim, Frederico, o Grande, escreveu a Lagrange dizendo que “o maior dos reis da Europa” desejava ter em sua corte “o maior matemático da Europa”. Lagrange aceitou o convite e por 20 anos ocupou o lugar deixado vago por Euler. Poucos anos depois de deixar Berlim, a despeito da caótica situação política da França, aceitou uma cátedra na recém-criada Escola Normal e, posteriormente, na Escola politécnica de Paris. A primeira

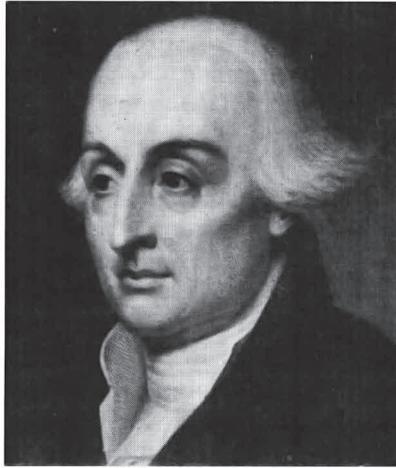
dessas escolas teve vida curta, mas a segunda tornou-se famosa na história da matemática, visto que muitos dos grandes matemáticos da França moderna estudaram ou exerceram o magistério nela. E, sem dúvida, deve-se muito a Lagrange pelo desenvolvimento de uma tradição de cultura matemática elevada na Escola Politécnica.

Lagrange se revoltou com as crueldades do Regime de Terror que se seguiu à Revolução Francesa. Quando o grande químico Lavoisier foi executado na guilhotina, ele expressou sua indignação nos seguintes termos: “Bastou à turba um momento apenas para decepar-lhe a cabeça; um século não será suficiente para que surja outra igual”.

Com a idade, foi acometido de grandes acessos de solidão e melancolia. Tirou-o desse estado, quando estava com 56 anos de idade, uma jovem quase 40 anos mais nova que ele, filha do astrônomo Lemonnier, seu amigo. Tocou-a tanto a infelicidade de Lagrange, que insistiu no casamento com ele. Lagrange aceitou e a união mostrou-se ideal. Ela se revelou uma companheira devotada e prestativa, conseguindo tirar o esposo da prostração e reacender nele o desejo de viver. De todos os prêmios de sua vida, proclamava Lagrange com honestidade e franqueza, aquele a que dava mais valor era sua meiga e devotada esposa.

O trabalho de Lagrange teve profunda influência nas pesquisas matemáticas subsequentes, pois ele foi o primeiro matemático de primeiro time a reconhecer o estado insatisfatório dos fundamentos da análise e, em vista disso, a se empenhar pela rigorização necessária. Sua tentativa, que esteve muito longe de ser um sucesso, consubstanciou-se na grande obra *Théorie des Fonctions Analytiques Contenant les Principes du Calcul Différentiel*. A ideia basilar consistia em representar uma função $f(x)$ por uma série de Taylor. Definiam-se, então, as derivadas $f'(x), f''(x), \dots$ como os coeficientes de $h, h^2/2!, \dots$ da expansão de Taylor de $f(x+h)$ em termos de h . A notação $f'(x), f''(x), \dots$ muito comum atualmente, foi introduzida por Lagrange. Lagrange entendia que sua abordagem tinha evitado o uso de limites, mas, como ele não deu a devida atenção à questão da convergência e da divergência, que se baseiam na ideia de limite, não conseguiu atingir os objetivos que tinha em vista. Não obstante, produziu assim a primeira “teoria das funções de variável real”. Duas outras grandes obras de Lagrange são o *Traité de Résolution des Équations Numériques de Tous Degrés* (1767) e sua monumental *Mécanique Analytique* (1788); a primeira inclui um método de aproximação das raízes reais de uma equação por meio de frações contínuas e a última (descrita por Sir William Rowan Hamilton como um “poema científico”) contém as equações gerais de movimento de um sistema dinâmico, conhecidas hoje como *equações de Lagrange*. Seu trabalho em equações diferenciais (por exemplo, o método de variação de parâmetros), particularmente em equações diferenciais parciais, é extraordinário, e suas contribuições ao cálculo de variações impulsionaram muito o desenvolvimento desse campo. Lagrange tinha uma certa predileção pela teoria dos números, tendo escrito muitos artigos importantes sobre o assunto, como a primeira demonstração do fato de que todo inteiro positivo pode ser expresso como soma de no máximo quatro quadrados. Alguns de seus primeiros trabalhos em teoria das equações serviram de subsídio a Galois para a teoria dos grupos. De fato, o importante teorema da teoria dos grupos que garante que a ordem de um subgrupo de um grupo finito divide a ordem do grupo

é conhecido por *teorema de Lagrange*. Várias vezes já se mencionou o nome de Lagrange em seções anteriores deste livro.



Joseph Louis Lagrange
(Irmãos Brown)

Enquanto Euler escrevia com profusão de detalhes e liberdade de intuição, Lagrange era conciso e preocupado com o rigor. Quem manipula formalmente a matemática, muitas vezes experimenta a sensação desagradável de ver sua caneta superar sua inteligência; Euler confessou que muitas vezes não conseguia se livrar dessa sensação. Lagrange parecia ter uma consciência matemática maior; ele tinha um estilo “moderno” e pode ser considerado o primeiro analista autêntico. Os grandes músicos podem ser divididos em intérpretes ou compositores brilhantes e poucos são ambas as coisas. Analogamente, os grandes matemáticos podem ser divididos em operadores formais ou criadores de teorias brilhantes, e poucos são ambas as coisas. Euler foi antes de tudo um grande operador formal, Lagrange foi um grande teórico e Gauss, com grande cintilância, foi ambas as coisas. Assim, Euler seria um Heifetz, Lagrange um Beethoven e Gauss um Johann Sebastian Bach.

Lagrange uma vez comentou que um matemático só pode dizer que entendeu completamente uma parte de seu trabalho no momento em que ele tiver condições de explicá-la ao primeiro homem que encontrar na rua. Embora esse ideal muitas vezes pareça impossível, o tempo frequentemente o torna exequível. A lei da gravitação universal de Newton, que de início parecia incompreensível mesmo às pessoas de cultura mais elevada, transformou-se hoje em conhecimento corriqueiro. A teoria da gravitação relativista de Einstein passa atualmente por uma transmutação semelhante.

Napoleão Bonaparte, que era íntimo de muitos dos grandes matemáticos franceses, sintetizou sua admiração por Lagrange com a frase: “Lagrange é a pirâmide mais alta das ciências matemáticas”.

12.9 Laplace e Legendre

Embora tivessem publicados seus principais trabalhos no século XIX, Laplace e Legendre foram contemporâneos de Lagrange. De origem humilde — seus pais eram agricultores pobres —, Pierre-Simon Laplace nasceu em 1749. Seu talento matemático, porém, logo lhe abriu as portas de boas posições no ensino. Oportunista em matéria de política, sempre conseguiu trânsito nas diversas facções que ocuparam o poder durante os tumultuados dias da Revolução Francesa. Produziu seus melhores trabalhos nas áreas de mecânica celeste, probabilidade, equações diferenciais e geodésia. Publicou duas obras magistrais, *Traité de Mécanique Céleste* (cinco volumes, 1799-1825) e *Théorie Analytique des Probabilités* (1812), cada uma delas precedida por uma longa exposição não técnica. Ganhou o cognome de “Newton da França” com os cinco volumes do *Traité de Mécanique Céleste*. Essa obra, aliás, compreende toda a mecânica celeste da época, inclusive muitas contribuições do próprio Laplace que, assim, alçou-se à condição de autoridade máxima no assunto entre seus contemporâneos. Talvez seja interessante contar um par de anedotas envolvendo essa obra. À observação provocante de Napoleão de que Deus não havia sido mencionado em seu tratado, Laplace respondeu, “Senhor, eu não necessitei dessa hipótese”. Quando o astrônomo americano Nathaniel Bowditch estava traduzindo para o inglês o tratado de Laplace, certa vez observou, “Toda vez que me deparo com um ‘como é fácil ver’ de Laplace, eu tenho a certeza de que terei horas de trabalho duro para preencher a lacuna e explicar o que é fácil ver”. O nome de Laplace está ligado à *hipótese nebular* da cosmogonia, à chamada *equação de Laplace* da teoria do Potencial (embora Laplace não fosse o pioneiro nesses dois assuntos), à chamada *transformada de Laplace*, que posteriormente se tornaria a chave do cálculo operacional de Heaviside, e ao *teorema de Laplace* da teoria dos determinantes. Laplace morreu em 1827, exatamente um século depois do falecimento de Isaac Newton. Segundo um relato, suas últimas palavras foram: “O que sabemos é insignificante; o que não sabemos é imenso”. A história seguinte sobre Laplace é interessante e pode servir de sugestão a um professor à procura de emprego. Quando Laplace, ainda bastante jovem, chegou a Paris à procura de um lugar no magistério, submeteu as cartas de recomendação que levava, escritas por pessoas importantes, a d’Alembert. Como esse expediente não surtisse nenhum efeito, ele próprio escreveu uma carta a d’Alembert, onde expôs brilhantemente os princípios gerais da mecânica. Foi o quanto bastou e d’Alembert lhe respondeu: “Senhor, como percebeu, quase não dei atenção às suas cartas de recomendação. Elas porém não eram necessárias; o senhor soube se apresentar muito melhor”. Poucos dias depois Laplace era designado professor de matemática da Escola Militar de Paris.

Os contrastes entre Lagrange e Laplace eram muitos e acentuados. Começando pelos estilos, bastante diversos, como resumiu bem W. W. Rouse Ball: “Lagrange é perfeito tanto na forma como no conteúdo; explica seus procedimentos cuidadosamente e, embora seus argumentos sejam gerais, são fáceis de acompanhar. Laplace, por outro lado, não explica nada, não liga para o estilo; se satisfeito com a correção dos resultados, não se importa em deixá-los sem demonstração ou com alguma deficiência”. Também quanto aos pontos de vista sobre a matemática diferiam muito. Para Laplace a matemática não passava de uma

caixa de ferramentas a serem usadas na explicação da natureza. Para Lagrange a matemática era uma arte sublime e justificava-se por si mesma.

Laplace era muito generoso com os principiantes em pesquisa matemática. Ele os chamava de enteados e por várias vezes absteve-se de publicar uma descoberta para permitir que um principiante o fizesse primeiro. Infelizmente, essa forma de generosidade é rara em matemática.



Pierre-Simon Laplace
(Irmãos Brown)

Fecharemos nosso breve relato sobre Laplace com duas citações devidas a ele. “Todos os efeitos da natureza são apenas consequências matemáticas de um pequeno número de leis imutáveis.” “Em última instância, a teoria das probabilidades é apenas o senso comum expresso em números.”

Adrien-Marie Legendre (1752-1833) é conhecido na história da matemática elementar principalmente devido aos seus *Éléments de Géométrie*, uma obra cuja proposta era aprimorar pedagogicamente os *Elementos* de Euclides. E Legendre foi feliz nesse intento pois, entre outras coisas, graças a uma reordenação e a uma simplificação das proposições de Euclides, seus *Éléments* alcançaram muito sucesso. Nos Estados Unidos a receptividade a esse trabalho foi tão grande, que ele se tornou o protótipo do livro-texto de geometria no país. A primeira tradução para o inglês da geometria de Legendre foi feita em 1819 por John Farrar da Universidade de Harvard. Três anos depois o famoso escritor escocês Thomas Carlyle, que no começo de sua vida fora professor de matemática, fez outra tradução para o inglês. A tradução de Carlyle, posteriormente revista por Charles Davies e posteriormente ainda por J. H. Van Amringe, alcançou 33 edições. Em edições posteriores de sua geometria, Legendre tentou provar o postulado das paralelas (ver Seção 13-7). Os principais trabalhos de Legendre em matemática superior concentram-se em teoria dos números, funções elípticas, o método dos mínimos quadrados

e integrais; sua obra é muito avançada para ser discutida aqui. Ele foi também um devotado calculador de tábuas matemáticas. Seu nome aparece ligado à equação diferencial

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n + 1)y = 0.$$

de importância considerável em matemática aplicada. As soluções dessa equação são chamadas *funções de Legendre* (de ordem n). Quando $n \geq 0$ a equação tem soluções polinomiais de interesse especial chamadas *polinômios de Legendre*. O nome de Legendre aparece ainda na teoria dos números associado ao símbolo $(c|p)$, ou *símbolo de Legendre*, definido por $(c|p) = \pm 1$, conforme o inteiro c , que é primo com p , seja ou não um resto quadrático do primo ímpar p . [Por exemplo, $(6|19) = 1$ pois a congruência $x^2 \equiv 6 \pmod{19}$ tem uma solução e $(39|47) = -1$ porque a congruência $x^2 \equiv 39 \pmod{47}$ não tem nenhuma solução.]



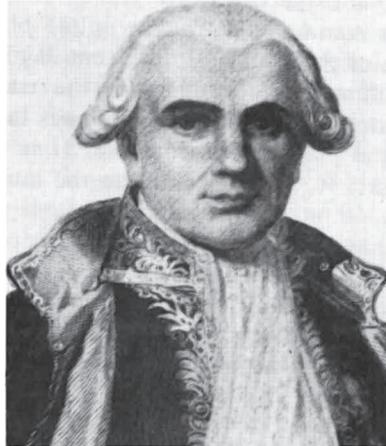
Adrien-Marie Legendre
(Coleção David Smith)

Além dos *Éléments de Géométrie*, que apareceram em 1794, Legendre publicou também um trabalho em dois volumes e 859 páginas, *Essai sur la Théorie des Nombres* (1797-1798), que constitui a primeira abordagem exclusiva da teoria dos números. Posteriormente escreveu um tratado em três volumes, *Exercices du Calcul Integral* (1811-1819), que, por sua abrangência e categoria, rivaliza com o trabalho similar de Euler. Mais tarde Legendre ampliou partes desse trabalho num outro tratado em três volumes, *Traité des Fonctions Elliptiques et des Intégrals Eulériennes* (1825-1832). Nessa oportunidade ele introduziu o termo *integrais eulerianas* para as funções beta e gama. Legendre adquiriu considerável fama em geodésia por sua triangulação da França.

12.10 Monge e Carnot

Os dois últimos matemáticos eminentes a serem considerados neste capítulo são dois geômetras, Gaspard Monge (1746-1818) e Lazare Carnot (1753-1823). Ao contrário de Lagrange, Laplace e Legendre, que não se envolveram na Revolução Francesa, Monge e Carnot apoiaram-na e participaram ativamente de seus acontecimentos.

Monge fez seus estudos básicos em escolas oratorianas, primeiro em Beaunne, sua cidade natal, depois em Lyon, onde, aos 16 anos de idade, tornou-se instrutor de física. Uma planta de sua cidade natal, em escala apreciavelmente grande, elaborada com notável perícia, abriu-lhe as portas da escola militar de Mézières como desenhista. Tendo de desenhar a planta de um forte com os canhões em lugares a serem determinados por certos dados experimentais, Monge contornou o tedioso procedimento aritmético da época substituindo-o por um outro, geométrico, mais rápido. Seu método, que consistia em inteligentemente representar objetos tridimensionais por meio de projeções convenientes sobre um plano bidimensional, foi adotado pelos militares e considerado segredo absoluto. Posteriormente veio a se tornar matéria amplamente ensinada com o nome de *geometria descritiva*. Em 1768 Monge chegava a professor de matemática e em 1771 a professor de física da mesma escola militar. Em 1780 foi designado para a cátedra de hidráulica do Liceu de Paris.



Gaspard Monge
(Coleção da Biblioteca Pública de Nova York)

Monge foi ministro da Marinha e como tal se engajou na tarefa de produzir armas e munições para a armada. Foi o maior responsável, junto ao Diretório, pela criação da Escola Politécnica, da qual se tornou professor. Ganhou o afeto e a admiração calorosos, de Napoleão, a quem acompanhou, juntamente com o matemático Joseph Fourier (1768-1830),

à malfadada expedição de 1798 ao Egito. No retorno à França reassumiu suas funções na Escola Politécnica, onde sempre se mostrou um professor singularmente brilhante. Suas aulas serviram de inspiração a uma série de grandes geômetras, entre eles Charles Dupin (1784-1873) e Jean Victor Poncelet (1788-1867), o primeiro responsável por contribuições de vulto ao campo da geometria diferencial e o segundo ao da geometria projetiva.

Considera-se que Monge, além de criador da geometria descritiva, seja também o pai da geometria diferencial. Seu livro *Application de l'Analyse à la Géométrie*, que alcançou cinco edições, foi um dos mais importantes entre os primeiros tratamentos da geometria diferencial de superfícies. Foi nele que Monge introduziu, entre outras coisas, o conceito de linhas de curvatura de uma superfície do espaço tridimensional. As contribuições de Monge à geometria diferencial se voltaram principalmente para a *geometria extrínseca* das superfícies (ver Seção 14-7).

Foi das preleções de Monge na Escola Politécnica que a geometria analítica espacial começou a brotar. O material dessas preleções foi recolhido por Monge e Jean-Nicolas-Pierre Hachette (1769-1834) e transformado numa longa memória, "Application d'algèbre à la géométrie", publicada em 1802 no *Journal de l'École Polytechnique*. O teorema de abertura do trabalho é uma bem conhecida generalização do século XVIII do teorema de Pitágoras: *A soma dos quadrados das projeções ortogonais de uma figura plana sobre três planos mutuamente perpendiculares é igual ao quadrado da área da figura*. Mais adiante, encontramos no trabalho grande parte do material que constitui os livros-texto atuais de geometria analítica no espaço, como as fórmulas de translação e rotação de eixos, a abordagem usual de retas e planos no espaço e a determinação dos planos principais de uma quádrlica. Mostra-se que o plano pelo ponto (x', y', z') é ortogonal à intersecção de dois planos dados

$$ax + by + cz + d = 0 \quad \text{e} \quad ex + fy + gz + h = 0$$

é dado por

$$A(x - x') + B(y - y') + C(z - z') = 0,$$

onde

$$A = bg - fc, \quad B = ce - ga, \quad C = af - eb.$$

Há ainda a fórmula da distância de um ponto a uma reta no espaço e da distância entre duas retas reversas. Entre os novos resultados, contribuições de Monge, encontram-se:

1. *Os seis planos pelos pontos médios das arestas de um tetraedro e perpendiculares às respectivas arestas opostas concorrem no ponto simétrico do circuncentro em relação ao centroide do tetraedro.* (Esse ponto é chamado agora de *ponto de Monge* do tetraedro.)
2. *O lugar dos vértices do ângulo trirretângulo cujas faces são tangentes a uma quádrlica central dada é uma esfera concêntrica com a quádrlica.* (Essa esfera é chamada agora de *esfera de Monge* ou *esfera diretora* da quádrlica. O

equivalente bidimensional desse lugar recebe o nome de *círculo de Monge* da cônica central associada, embora tenha sido descoberto um século antes por La Hire através de métodos sintéticos.)

Posteriormente, em 1809, Monge deu várias demonstrações do fato de que os segmentos que unem os pontos médios dos lados opostos de um tetraedro concorrem no centroide do tetraedro.

Monge teve dois irmãos que também foram professores de matemática.

Lazare Nicolas Marguerite Carnot (1753-1823), como era comum na França com muitos filhos de famílias abastadas, preparou-se para a carreira das armas; estudou na escola militar de Mézières, onde foi aluno de Monge, tornando-se capitão de engenharia em 1783. Em 1784 escreveu seu primeiro trabalho matemático, sobre mecânica, em que se encontra a mais antiga demonstração de que há perda de energia cinética no choque de corpos imperfeitamente elásticos.

Com o estouro da Revolução Francesa, à qual aderiu com entusiasmo e dedicação, lançou-se decididamente na política. Ocupou com sucesso muitos cargos políticos e, em 1793, votou pela execução de Luis XVI como traidor. Ainda em 1793, quando a Europa unida reuniu um milhão de homens para invadir a França, Carnot empreendeu a tarefa aparentemente impossível de reunir 14 exércitos para se opor vitoriosamente aos inimigos, ganhando então o título de “o Organizador da Vitória”. Em 1796 opôs-se ao golpe de estado de Napoleão e teve de fugir para Genebra, onde escreveu um trabalho semifilosófico sobre a metafísica do cálculo. Suas duas contribuições importantes à geometria, *Géométrie de Position* e *Essai sur la Théorie des Transversals*, foram publicadas em 1803 e 1806. Como “inimigo irreconciliável dos reis” ele se ofereceu, em 1814, após a campanha da Rússia, a lutar pela França, mas não pelo império. Com a Restauração, foi exilado, vindo a falecer em Madgeburg, cercado por dificuldades financeiras, em 1823.

É na *Géométrie de Position* de Carnot que se encontra pela primeira vez o emprego sistemático de grandezas orientadas na geometria sintética. Por meio desse recurso, vários enunciados e relações isolados podem ser fundidos num único enunciado ou numa só relação, de maneira a permitir uma única demonstração em vez de uma abordagem caso por caso (ver Exercício 12.17). A ideia de grandezas orientadas foi posteriormente explorada por Augustus Ferdinand Möbius (1790-1868) em *Der barycentrische Calcul* de 1827.

O teorema de Menelau (ver Seção 6-5) é fundamental no *Essai sur la Théorie des Transversals* de Carnot. Nesse trabalho Carnot estende o teorema ao caso em que a transversal que nele figura é substituída por uma curva algébrica arbitrária de grau n . Como ilustração, temos, para $n = 2$ (ver Figura 106): *Se os lados BC, CA, AB de um triângulo ABC cortam uma cônica nos pontos (reais ou imaginários) A_1 e A_2 , B_1 e B_2 , C_1 e C_2 , respectivamente, então*

$$(AC_1)(AC_2)(BA_1)(BA_2)(CB_1)(CB_2) = (AB_1)(AB_2)(BC_1)(BC_2)(CA_1)(CA_2),$$

onde todos os segmentos envolvidos são orientados. Pode-se generalizar mais ainda o teorema, substituindo o triângulo por um polígono arbitrário.

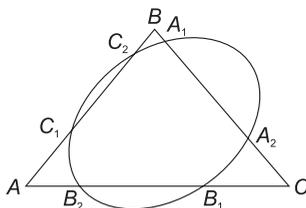


Figura 106

Carnot achou também o volume do tetraedro em função das seis arestas e obteve a fórmula (constituída de 130 termos) que expressa cada um dos dez segmentos determinados por cinco pontos tomados ao acaso em função dos outros nove.

Carnot teve um filho, Hippolyte, que se tornou ministro da educação em 1848; outro filho, Sadi, foi um físico ilustre; um neto, também chamado Sadi e filho de Hippolyte, que chegou a presidente (o quarto) da Terceira República Francesa; e um segundo neto, Adolphe, também filho de Hippolyte, que foi um químico eminente.



Lazare Carnot
(Coleção David Smith)

Monge e Carnot foram dois revolucionários ardentes, mas, sem dúvida, o mais honesto e coerente deles, intelectualmente falando, foi Carnot. Ambos votaram a favor da execução de Luis XVI, mas Carnot, embora aceitasse servir sob Napoleão como soldado e administrador, foi o único membro do Tribunato a votar com coragem e

convicção contra a nomeação de Napoleão como imperador, o que lhe valeu o exílio. Monge, por outro lado, apoiou seu ídolo o tempo todo, desde quando era um militar idealista e revolucionário até se transformar no imperador egoísta e despótico, dispondo-se ainda à execução da detestável tarefa de selecionar na Itália os tesouros artísticos que deveriam ser levados para Paris como butim de guerra.

12.11 O sistema métrico

A medição de comprimentos, áreas, volumes e pesos desempenha um papel importante nas aplicações da matemática. A unidade básica, entre todas, é a de comprimento, pois a partir dela podem-se estabelecer facilmente unidades para as demais grandezas. Uma das realizações importantes do século XVIII foi a criação do sistema métrico decimal, planejado para substituir uma miscelânea caótica de sistemas de pesos e medidas não científicos por um apenas, sistemático, científico, preciso e simples.

Mas, antes da implantação do sistema métrico presente, várias outras tentativas visando a um sistema de medidas científico foram empreendidas. Em 1670 o matemático e pároco da igreja de São Paulo, em Lyon, o abade Gabriel Mouton, sugeriu para unidade de comprimento um minuto de circunferência da Terra; além disso, ele multiplicava e dividia decimalmente a unidade assim definida, além de dar nomes latinos convenientes aos seus vários múltiplos e submúltiplos. Pela mesma época, Sir Christopher Wren, na Inglaterra, propôs tomar-se o comprimento de um pêndulo que marcasse metades de segundos como unidade de comprimento; isso corresponderia aproximadamente à metade do comprimento comumente atribuído ao cúbito antigo (distância do ombro de um homem à ponta de seu dedo médio esticado). O astrônomo francês Jean Picard, em 1671, e o físico holandês Christiaan Huygens, em 1673, propuseram como unidade o comprimento de um pêndulo que marcasse segundos ao nível do mar e a 45° de latitude; essa unidade teria aproximadamente 6 milímetros menos que o nosso metro. Em 1747 La Condamine sugeriu o pêndulo de segundos no Equador. Em 1775 Messier determinou com bastante precisão o comprimento de um pêndulo de segundos a 45° de latitude e se empenhou sem sucesso para que fosse adotado como unidade-padrão.

Considerando as discussões amplas que a questão vinha provocando, a Academia de Ciências da França resolveu criar em 1789 uma comissão para elaborar um projeto de sistema aceitável. No ano seguinte, Sir John Miller propôs, na Câmara dos Comuns, um sistema uniforme para toda a Grã-Bretanha. Por volta da mesma época, Thomas Jefferson propôs um sistema uniforme para os Estados Unidos, sugerindo como unidade básica o comprimento de um pêndulo de segundos a 38° de latitude (latitude média dos Estados Unidos na época).

Em seus trabalhos, a comissão da Academia de Ciências concordou em que o sistema deveria ser decimal e deteve-se no exame de duas alternativas para a unidade de comprimento do sistema. Uma consistia em tomar o comprimento de um pêndulo de segundos. Como a equação do pêndulo é $T = 2\pi\sqrt{L/g}$, isso faria com que o comprimento-padrão, ou metro, fosse g/π^2 . Levando em conta que g varia tanto com a

latitude como com a altitude e em vista da exatidão com que Legendre e outros haviam medido o comprimento do meridiano terrestre, a comissão acabou optando por tomar como metro a décima milionésima parte da distância entre o Equador e o Polo Norte. Em 1793, por razões políticas, a Academia de Ciências foi fechada, mas a Comissão de Pesos e Medidas, apesar de sofrer perdas como a de Lavoisier, que caíra em desgraça, continuou suas atividades; outros nomes passaram a integrá-la com o tempo, como Lagrange, Laplace e Monge. O encerramento dos trabalhos se deu em 1799, tornando-se o sistema métrico decimal uma realidade.

A adoção oficial na França do sistema métrico decimal de pesos e medidas ocorreu em junho de 1799; a partir de 1837 seu uso se tornou obrigatório. Hoje o sistema é adotado em todas as nações civilizadas do mundo, exceto os Estados Unidos que, não obstante, vêm se preparando para fazê-lo. Como é claro, porém, nos Estados Unidos o sistema métrico decimal vem sendo usado paralelamente há muito tempo, por exemplo, para fins científicos.

Em Sèvres, França, nas proximidades de Paris, em pequena área internacional, localiza-se o Bureau Internacional de Pesos e Medidas. Instituído com a presença de delegados de todo o mundo, é em suas dependências que se preservam o metro-padrão e o quilograma-padrão. O quilograma-padrão se constitui de uma liga de platina e irídio, possuindo cada nação membro do Bureau uma duplicata perfeita desse padrão. A dos Estados Unidos foi recebida pelo presidente Benjamin Harrison em 2 de janeiro de 1890 e se encontra no Bureau of Standards, em Washington, D.C. Antes de 1960 o padrão para o metro era uma barra de platina e irídio, mas hoje se define o metro-padrão de uma maneira mais precisa como 1 650 763,73 comprimentos de onda da luz alaranjada emitida por um isótopo do criptônio-86, por uma descarga elétrica no vácuo.

12.12 Resumo

Concluiremos nosso breve apanhado da matemática do século XVIII observando que, embora esse período testemunhasse desenvolvimentos adicionais consideráveis em áreas como a trigonometria, a geometria analítica, o cálculo, a teoria dos números, a teoria das equações, a probabilidade, equações diferenciais e mecânica analítica, testemunhou também a criação de muitos campos novos como a ciência atuarial, o cálculo de variações, funções especiais, equações diferenciais parciais, geometria descritiva e geometria diferencial. Grande parte da pesquisa matemática do século teve como fonte de inspiração a mecânica e a astronomia. Mas, na preocupação de d'Alembert com as bases frágeis da análise, no trabalho de Lambert com o postulado das paralelas, no esforço de Lagrange para tornar rigoroso o cálculo e nas elucubrações filosóficas de Carnot, temos sinais da libertação da geometria e da álgebra e das futuras preocupações com os fundamentos da matemática do século XIX. Além disso, começa a surgir a figura do especialista, como Monge em geometria. Há que acrescentar ainda a adoção do sistema métrico decimal na França, em 22 de junho de 1799.

Outro acontecimento digno de registro no século XVIII foi a entrada das mulheres no campo da matemática e no das ciências exatas, de uma maneira mais geral. Essas atividades eram socialmente reprovadas, no que se refere às mulheres, e praticamente não ofereciam oportunidades para elas. A primeira rachadura significativa nesse quadro foi provocada pela marquesa du Châtelet (1706-1749) e por Maria Gaetana Agnesi (1718-1799), que tiveram passagens marcantes pela matemática. No próximo capítulo falaremos mais sobre essa libertação que prosseguiu no século XIX no trabalho de matemáticas como Sophie Germain (1776-1831) e Mary Fairfax Somerville (1780-1872).

Exercícios

12.1 Números de Bernoulli

As fórmulas

$$1 + 2 + 3 + \dots + (k-1) = \frac{k^2}{2} - \frac{k}{2},$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (k-1)^2 = \frac{k^3}{3} - \frac{k^2}{2} + \frac{k}{6},$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + (k-1)^3 = \frac{k^4}{4} - \frac{k^3}{2} + \frac{k^2}{4},$$

que expressam as somas

$$S_n(k) \equiv 1^n + 2^n + 3^n + \dots + (k-1)^n,$$

para $n = 1, 2, 3$ como polinômios em k , são conhecidas desde tempos remotos. Jakob Bernoulli se interessou pelos coeficientes B_1, B_2, B_3, \dots da expressão de $S_n(k)$ como polinômio em k na forma

$$S_n(k) = \frac{k^{n+1}}{n+1} - \frac{k^n}{2} + B_1 C(n, 1) \frac{k^{n-1}}{2} - B_2 C(n, 3) \frac{k^{n-3}}{4} + \dots,$$

onde $C(n, r) = n(n-1) \dots (n-r+1)/r!$. Esses coeficientes, que hoje são conhecidos como números de Bernoulli, têm um papel importante na análise e são dotados de propriedades aritméticas notáveis.

(a) Se $n = 2r + 1$, pode-se mostrar que

$$B_1 C(n, 2) - B_2 C(n, 4) + B_3 C(n, 6) - \dots + (-1)^{r-1} B_r C(n, 2r) = r - 1/2.$$

Usando essa fórmula, determine B_1, B_2, B_3, B_4 e B_5 .

(b) Um primo p se diz *regular* se não divide nenhum dos numeradores de $B_1, B_2, \dots, B_{(p-3)/2}$, quando se escrevem esses números com seus menores termos. Caso contrário, p se diz *irregular*. Levando em conta que

$$B_{16} = \frac{7709321041217}{510},$$

mostre que 37 é irregular.

Em 1850 E. Kummer provou que o último “teorema” de Fermat é verdadeiro para todos os expoentes que são primos regulares e que os únicos primos irregulares menores que 100 são 37, 59 e 67.

(c) K.C.G. von Staudt estabeleceu o notável teorema:

$$B_r = G + (-1)^r (1/a + 1/b + 1/c + \dots),$$

onde G é um inteiro e a, b, c, \dots são todos os primos p tais que $2r/(p-1)$ é um inteiro. Verifique o teorema de Staudt para $B_4 = 1/30$ e $B_8 = 3617/510$.

12.2 A fórmula de De Moivre

(a) Prove a fórmula de De Moivre:

$$(\cos x + i \operatorname{sen} x)^n = \cos nx + i \operatorname{sen} nx,$$

onde $i = \sqrt{-1}$ e n é um inteiro positivo.

(b) Usando a fórmula de (a), expresse $\cos 4x$ e $\operatorname{sen} 4x$ em termos de $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$.

(c) Usando a fórmula de De Moivre, mostre que $(-1 - i)^{15} = -128 + 128i$.

(d) Prove que $i^n = \cos(n\pi/2) + i \operatorname{sen}(n\pi/2)$.

(e) Ache as oito raízes oitavas de 1, mediante a fórmula de De Moivre.

12.3 Distribuições

(a) Seis moedas são lançadas simultaneamente 1000 vezes. Dos 1000 lançamentos há 9 em que não aparece nenhuma cara, 99 em que aparece uma cara, 241 em que aparecem 2 caras, 313 em que aparecem 3 caras, 233 em que aparecem 4 caras, 95 em

que aparecem 5 caras e 10 em que aparecem 6 caras. Exiba essa distribuição de frequência, traçando uma curva de frequência.

(b) Trace o gráfico da curva de frequência normal $y = 10e^{-x^2}$.

(c) Calcule a média aritmética de caras por lançamento no que se refere ao experimento de (a).

(d) A *mediana* de uma coleção de valores numéricos é o termo médio (ou a média aritmética dos termos médios) da coleção, após colocá-la em ordem crescente ou decrescente de grandeza. Qual a mediana da coleção de caras por lançamento em (a)?

(e) Se, numa coleção de valores numéricos, um número aparece mais vezes que qualquer outro, ele se diz a *moda* da coleção. Qual é a moda da coleção de caras por lançamento em (a)?

(f) Admita que um milionário passe a fazer parte da população de uma pequena comunidade de pessoas de baixa renda. Qual o efeito disso sobre a renda média? E sobre a mediana e a moda da coleção de rendas da comunidade?

(g) Um comerciante do ramo de calçados deve ficar mais atento à média aritmética, à mediana ou à moda da coleção dos números dos sapatos das pessoas de sua comunidade?

(h) O que se pode dizer sobre a média aritmética, a mediana e a moda de uma distribuição de frequência normal?

(i) Aproxime $1000!$ pela fórmula de Stirling.

12.4 Manipulação formal de séries

(a) Determine a expansão de Maclaurin das funções $\sin z$, $\cos z$ e e^z .

(b) Mostre que a expansão de Maclaurin da função $\cos z$ pode ser obtida derivando termo a termo a expansão de Maclaurin de $\sin z$.

(c) Mostre formalmente, usando as expansões de (a), que

$$\cos x + i \sin x = e^{ix}.$$

(d) Usando a expansão de Maclaurin de $\sin z$, mostre que

$$\lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{\sin z}{z} \right) = 1.$$

(e) Usando a expansão de Taylor em torno de $x = a$ das funções $f(x)$ e $g(x)$, mostre que, quando $f(a) = f'(a) = \dots = f^{(k)}(a) = 0$, $g(a) = g'(a) = \dots = g^{(k)}(a) = 0$, $g^{(k+1)}(a) \neq 0$, vale a igualdade

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(k+1)}(a)}{g^{(k+1)}(a)}.$$

12.5 Uma conjectura e um paradoxo

(a) Euler conjecturou que, para $n > 2$, precisa-se de pelo menos n potências enésimas a fim de formar uma soma que seja também uma potência enésima. L. J. Lander e T. R. Parkin descobriram, porém, em 1966, usando computadores de alta velocidade, que

$$27^5 + 84^5 + 110^5 + 133^5 = 144^5.$$

Verifique a veracidade desse contraexemplo.

(b) Explique o paradoxo seguinte, que tanto perturbou os matemáticos do tempo de Euler: Como $(-x)^2 = x^2$, então $\log(-x)^2 = \log(x)^2$ e daí $2\log(-x) = 2\log(x)$, donde $\log(-x) = \log(x)$.

12.6 Euler e uma série infinita

(a) Em carta de 1673, Oldenburg consultou Leibniz sobre a soma da série

$$1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 + 1/4^2 + \dots$$

Leibniz não soube responder e, em 1689, Jakob Bernoulli confessou que também não sabia a resposta. Complete com os detalhes o procedimento formal usado por Euler para resolver o problema.

Comece com a série de Maclaurin

$$\sin z = z - z^3/3! + z^5/5! - z^7/7! + \dots$$

Pode-se considerar então $\sin z = 0$ (após a divisão por z) como o polinômio infinito

$$1 - z^2/3! + z^4/5! - z^6/7! + \dots = 0,$$

ou, substituindo-se z^2 por w , como a equação

$$1 - w/3! + w^2/5! - w^3/7! + \dots = 0.$$

Pela teoria das equações, a soma dos inversos das raízes dessa equação é o oposto do coeficiente do termo de primeiro grau, a saber, $1/6$. Como as raízes do polinômio em z são $\pi, 2\pi, 3\pi, \dots$, segue-se que as raízes do polinômio em w são $\pi^2, (2\pi)^2, (3\pi)^2, \dots$. Portanto

$$1/6 = 1/\pi^2 + 1/(2\pi)^2 + 1/(3\pi)^2 + \dots,$$

ou

$$\pi^2/6 = 1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 + \dots.$$

(b) Aplique o procedimento de Euler visto em (a) à expansão de Maclaurin de $\cos z$ a fim de obter

$$\pi^2/8 = 1/1^2 + 1/3^2 + 1/5^2 + \dots.$$

(c) Usando (a) e (b), mostre formalmente que

$$\pi^2/12 = 1/1^2 - 1/2^2 + 1/3^2 - 1/4^2 + \dots.$$

Em sua *Introductio*, de 1748, Euler deu a soma de

$$1/1^n + 1/2^n + 1/3^n + \dots$$

para valores pares de n , de $n = 2$ a $n = 26$. Os casos em que n é ímpar ainda hoje permanecem inabordáveis, não se sabendo mesmo se a soma dos inversos dos cubos dos inteiros positivos é um múltiplo racional de π^3 . Aplicando livremente a polinômios infinitos (séries de potências) propriedades válidas para polinômios finitos, Euler chegou a muitos resultados que hoje se sabe serem verdadeiros.

12.7 Curvas orbiformes

Uma *curva orbiforme* ou *curva de largura constante* é uma oval convexa plana caracterizada pela propriedade de que a distância entre duas paralelas tangentes a ela é constante.

(a) Mostre que o triângulo de Reuleaux, definido por 3 arcos de circunferência com centros nos vértices de um triângulo equilátero e de raios iguais aos lados do triângulo, é uma curva orbiforme. (Já se projetaram brocas com a forma de um triângulo de Reuleaux para furar orifícios *quadrados*.)

(b) Mostre como, partindo de um triângulo qualquer, pode-se construir uma curva orbiforme composta de 6 arcos de circunferência.

(c) Partindo de um pentágono cujas diagonais sejam todas iguais, construa uma curva orbiforme composta de 5 arcos de circunferência.

(d) Mostre como, partindo de um pentágono convexo qualquer, pode-se construir uma curva orbiforme composta de 10 arcos de circunferência.

(e) Construa uma curva orbiforme que não contenha nenhum arco de circunferência.

(f) Um ponto P de uma curva orbiforme se diz um *ponto ordinário* se a curva tem nesse ponto uma tangente suscetível de girar continuamente em torno dele. Chamam-se *pontos opostos* de uma curva orbiforme os extremos de uma corda máxima da curva. Tente provar os seguintes teoremas sobre curvas orbiformes:

1. Nenhuma parte de uma curva orbiforme pode ser uma linha reta.

2. Se P_1 e P_2 são pontos ordinários opostos de uma curva orbiforme, então P_1P_2 é normal à curva em P_1 e P_2 .

3. Se r_1 e r_2 são os raios de curvatura de um par de pontos ordinários opostos P_1 e P_2 de uma curva orbiforme de largura constante d , então $r_1 + r_2 = d$.

4. *Teorema de Barbier*: O perímetro de uma curva orbiforme de largura constante d é πd .

(g) Mostre que, girando-se um triângulo de Reuleaux em torno de um eixo de simetria, obtém-se um sólido de largura constante. (Conhece-se muito menos sobre sólidos de largura constante do que sobre curvas de largura constante. Embora não haja nenhum análogo direto do teorema de Barbier para o espaço, Minkowski salientou que as sombras, por projeção ortogonal, de um sólido de largura constante têm perímetro constante.)

12.8 Grafos unicursais e multicursais

Em 1736 Euler resolveu uma questão que vinha provocando muitas discussões: seria possível fazer um passeio pela cidade de Königsberg de maneira a cruzar todas as pontes da cidade, uma, e uma só, vez, e voltar ao ponto de partida? A cidade, localizada perto da foz do rio Pregel, era famosa por suas sete pontes, cinco delas dando acesso a uma ilha, como mostra a Figura 107. Euler reduziu o problema ao de percorrer o grafo da Figura 108 de maneira tal que cada uma de suas linhas fosse percorrida uma, e uma só, vez, terminando o percurso no ponto de partida.

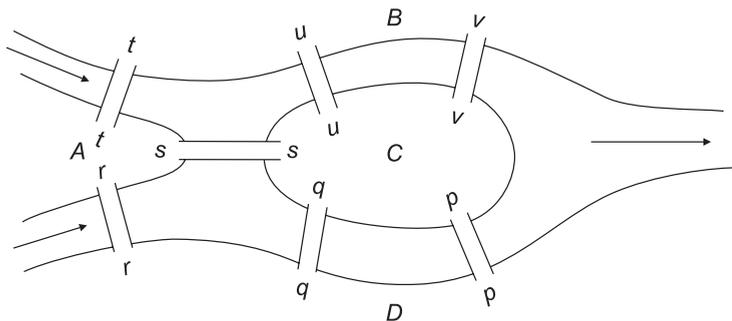


Figura 107

Para abordar o problema geral são úteis as definições que se seguem. Os *vértices* de um grafo são os pontos de onde saem suas linhas. Uma linha unindo dois vértices consecutivos chama-se *arco*. O *grau* de um vértice é o número de arcos que sai dele. Um vértice se diz *par* ou *ímpar* conforme seu grau seja par ou ímpar. Uma *cadeia simples* consiste em certo número de arcos que podem ser percorridos consecutivamente sem passar mais de uma vez por nenhum deles. Todo grafo que puder ser percorrido totalmente, segundo uma cadeia simples, chama-se *unicursal*, caso contrário, *multicursal*. Em torno desses conceitos Euler conseguiu estabelecer os seguintes teoremas:

1. O número de vértices ímpares de qualquer grafo é um número par.
2. Se um grafo não possui nenhum vértice ímpar, então ele pode ser percorrido unicursalmente segundo uma cadeia simples que termina no ponto de partida.
3. Um grafo que possui exatamente 2 vértices ímpares pode ser percorrido unicursalmente, começando num dos vértices ímpares e terminando no outro.
4. Todo grafo com mais de 2 vértices ímpares é multicursal.

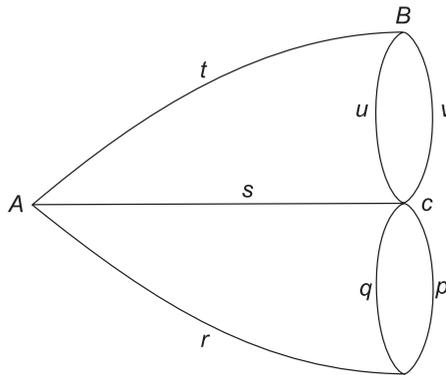


Figura 108

(a) Usando os teoremas de Euler, prove que a resposta à questão das pontes de Königsberg é negativa.

(b) Mostre que o grafo da Figura 109 é unicursal, enquanto que o da Figura 110 é multicursal.

(c) A Figura 111 representa uma casa com cômodos e portas conforme a planta. É possível fazer um percurso de modo a passar sucessivamente por cada porta uma, e uma só, vez?

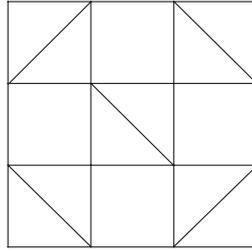


Figura 109

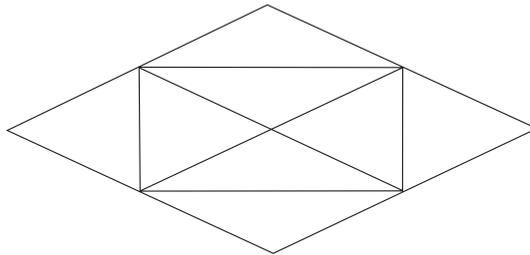


Figura 110

(d) Tente provar os teoremas de Euler enunciados anteriormente.

(e) Tente provar o teorema de Listing que se segue, corolário do quarto teorema de Euler: *Um grafo que tem exatamente $2n$ vértices ímpares pode ser percorrido completamente em n cadeias simples distintas* (no sentido de que cada aresta do grafo pertence a uma, e uma só, das n cadeias). Verifique esse corolário para o grafo da Figura 110.

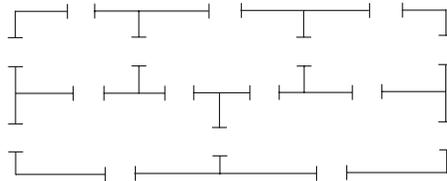


Figura 111

12.9 Algumas equações diferenciais

(a) A equação diferencial

$$y^{n-1} (dy/dx) + a(x)y^n = f(x)$$

é conhecida como *equação de Bernoulli*. Mostre que a transformação $v = y^n$ converte a equação de Bernoulli numa equação diferencial linear.

(b) A equação diferencial

$$y = px + f(p),$$

onde $p = dy/dx$, é conhecida como *equação de Clairaut*. Mostre que a solução da equação de Clairaut é

$$y = cx + f(c).$$

(c) A equação diferencial

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_n y^{(0)} = f(x),$$

onde os expoentes entre parênteses indicam a ordem da derivada é conhecida como *equação de Euler*. Mostre que a substituição $x = e^t$ reduz a equação de Euler a uma equação diferencial linear com coeficientes constantes.

(d) A equação diferencial

$$dy/dx = p(x)y^2 + q(x)y + r(x)$$

é conhecida como *equação de Riccati*. Mostre que se $v = f(x)$ é uma solução particular da equação, então a substituição $y = v + 1/z$ a converte numa equação diferencial linear em z .

12.10 Funções hiperbólicas

(a) As funções *seno hiperbólico* e *coseno hiperbólico* podem ser definidas por

$$\sinh u = \frac{e^u - e^{-u}}{2} \quad \text{e} \quad \cosh u = \frac{e^u + e^{-u}}{2} \quad .$$

e então a *tangente hiperbólica*, *cotangente hiperbólica*, *secante hiperbólica* e *cossecante hiperbólica* por $\operatorname{tgh} u = \sinh u / \cosh u$, $\operatorname{cotgh} u = 1 / \operatorname{tgh} u$, $\operatorname{sech} u = 1 / \cosh u$ e $\operatorname{cosech} u = 1 / \sinh u$. Mostre que

1. $\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$.
2. $\operatorname{tgh} u = (e^u - e^{-u}) / (e^u + e^{-u})$.
3. $\operatorname{cotgh}^2 u - \operatorname{cosech}^2 u = 1$.
4. $\operatorname{tgh}^2 u + \operatorname{sech}^2 u = 1$.
5. $\operatorname{cosech}^2 u - \operatorname{sech}^2 u = (\operatorname{cosech}^2 u)(\operatorname{sech}^2 u)$.

6. $\sinh(u + v) = (\sinh u)(\cosh v) \pm (\cosh u)(\sinh v)$.
7. $\cosh(u + v) = (\cosh u)(\cosh v) \pm (\sinh u)(\sinh v)$.
8. $d(\cosh u)/du = \sinh u$, $d(\sinh u)/du = \cosh u$.

(b) Considere a circunferência unitária $x^2 + y^2 = 1$ e a hipérbole equilátera $x^2 - y^2 = 1$ da Figura 112. Represente a área do setor $OPAP'$ por u . Mostre que, para a circunferência, $x = \cos u$, $y = \sin u$ e para hipérbole $x = \cosh u$, $y = \sinh u$, onde (x, y) são as coordenadas de P .

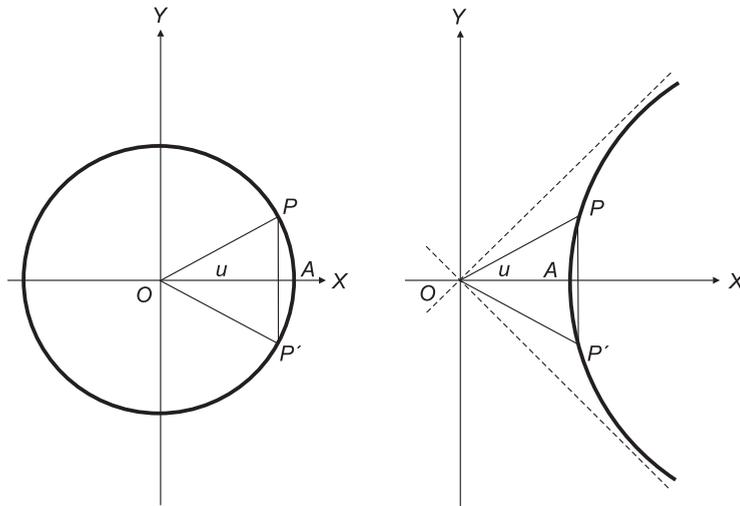


Figura 112

12.11 A feiticeira de Agnesi

A *feiticeira de Agnesi* pode ser definida elegantemente como se segue. Considere uma circunferência de raio a e diâmetro OK sobre o eixo y , onde O é a origem do sistema de coordenadas. Seja OA uma secante variável por O , sendo A sua intersecção com a tangente à circunferência por K . Se Q é a segunda intersecção de OA com a circunferência, então a curva de Agnesi é o lugar dos pontos P de intersecção das retas QP e AP , paralelas e perpendiculares, respectivamente, ao eixo x .

(a) Mostre que a equação da curva de Agnesi é $y(x^2 + a^2) = a^3$.

(b) Mostre que a feiticeira de Agnesi acima é simétrica em relação ao eixo y e que o eixo x é uma assíntota da curva.

(c) Mostre que a área entre a curva e a assíntota é πa^2 , isto é, exatamente o quádruplo da área do círculo associado.

(d) Mostre que o centroide da área de (c) situa-se no ponto $(0, a/4)$, isto é, a um quarto da distância de O a K .

(e) Mostre que o volume do sólido gerado pela rotação da curva em torno da assíntota é $\pi^2 a^3/2$.

(f) Mostre que os pontos de inflexão da curva correspondem aos pontos em que OQ faz ângulos de 60° com a assíntota.

Obtém-se uma curva associada, de nome *pseudofeiticeira*, dobrando as ordenadas da curva de Agnesi. A pseudofeiticeira foi estudada por James Gregory em 1658 e usada por Leibniz em 1674 para deduzir a famosa igualdade

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

12.12 Lagrange e a geometria analítica

Devem-se (essencialmente) a Lagrange as fórmulas

$$A = (1/2) \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad V = (1/6) \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}$$

para a área A de um triângulo cujos vértices são os pontos (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) e o volume V de um tetraedro cujos vértices são os pontos (x_1, y_1, z_1) , (x_2, y_2, z_2) , (x_3, y_3, z_3) , (x_4, y_4, z_4) . Também é dele a fórmula

$$D = \frac{ap + bq + cr - d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

da distância do ponto (p, q, r) ao plano de equação $ax + by + cz = d$.

(a) Deduza a fórmula da área do triângulo.

(b) Deduza a fórmula da distância de um ponto a um plano.

12.13 O problema da agulha de Buffon

O seguinte problema foi proposto e resolvido pelo conde de Buffon em 1777: Suponhamos que uma agulha de comprimento l , homogênea e uniforme, seja lançada

ao acaso sobre um plano riscado de retas paralelas e equidistantes. Se a distância entre duas dessas retas vizinhas é a e $a > l$, qual é a probabilidade de que a agulha caia cortando uma das retas?

Assumamos que “ao acaso” aqui signifique que todas as posições do centro da agulha e todas as orientações da agulha são igualmente prováveis e que essas duas variáveis são independentes. Seja x a distância do centro da agulha à mais próxima das retas paralelas e seja ϕ a orientação da agulha referida à direção das retas paralelas.

(a) Mostre, atentando para a Figura 113(1), que a agulha cortará uma reta se, e somente se, $x < (1/2)l \operatorname{sen} \phi$.

(b) Num plano com um sistema de coordenadas cartesianas (ϕ, x) , considere [ver Figura 113(2)] o retângulo OA cujos pontos interiores satisfazem as relações

$$0 < x < a/2, \quad 0 < \phi < \pi.$$

A cada ponto desse retângulo corresponde uma, e uma só, posição (x) e orientação (ϕ) da agulha; a cada ponto da área sombreada da Figura 113(2) corresponde uma, e uma só, posição (x) e orientação (ϕ) para as quais a agulha corta uma das linhas paralelas. Mostre que a probabilidade que procuramos é a razão entre a área sombreada e a área total do retângulo OA .

(c) Mostre que a probabilidade que procuramos é dada por

$$p = \frac{\frac{l}{2} \int_0^\pi \operatorname{sen} \phi \, d\phi}{\frac{\pi a}{2}} = \frac{2l}{\pi a}.$$

(d) Laplace, em sua *Théorie Analytique des Probabilités*, de 1812, estendeu o resultado de Buffon para o caso de dois feixes de retas paralelas e equidistantes, feixes esses ortogonais entre si. Se as distâncias entre retas vizinhas de um feixe e do outro são a e b e $l < a, b$, então a probabilidade de que a agulha, lançada ao acaso sobre o plano, corte uma das retas é

$$p = \frac{2l(a+b) - l^2}{\pi ab}.$$

Obtenha o resultado de Buffon fazendo $b \rightarrow \infty$ no resultado de Laplace.

Na cronologia de π da Seção 4-8, com a data de 1777, destacamos como se obtiveram experimentalmente aproximações de π através do resultado de Buffon.

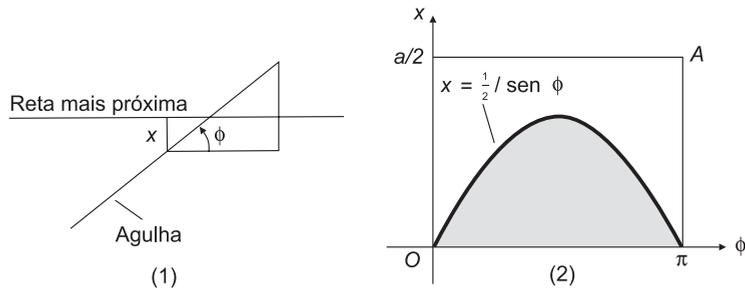


Figura 113

12.14 Corda aleatória de um círculo

Este problema ilustra a dificuldade frequentemente encontrada para decidir, num problema de probabilidade geométrica, qual conjunto de casos igualmente prováveis é mais desejável. Considere o seguinte problema: Qual a probabilidade de que uma corda traçada ao acaso num círculo dado seja maior do que o lado do triângulo equilátero inscrito nesse círculo?

(a) Escolha um ponto *qualquer* A da circunferência do círculo e trace ao acaso uma corda por A . Admitindo que todas as cordas por A são igualmente prováveis, mostre que a probabilidade procurada é $1/3$.

(b) Escolha uma direção *qualquer* d e trace a corda aleatória paralela a d . Admitindo que todas as cordas paralelas a d são igualmente prováveis, mostre que a probabilidade procurada é $1/2$.

(c) Escolha um ponto *qualquer* no interior do círculo dado para ponto médio da corda aleatória e trace a corda. Admitindo que todos os pontos interiores ao círculo dado têm probabilidade igual de serem pontos médios de cordas, mostre que a probabilidade procurada é $1/4$.

12.15 O método dos mínimos quadrados

Vejam um caso simples de um problema básico ligado ao método dos mínimos quadrados. Suponha que por meio de observações tenha se chegado às $n > 2$ equações lineares aproximadas

$$a_i x + b_i y + c_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

satisfeitas pelas duas variáveis x e y . Então, por argumentos baseados na teoria das probabilidades, conclui-se, que os “melhores” valores que se podem adotar para x e y são aqueles que correspondem à solução do sistema

$$(\Sigma a_i^2)x + (\Sigma a_i b_i)y + \Sigma a_i c_i = 0$$

$$(\Sigma b_i a_i)x + (\Sigma b_i^2)y + \Sigma b_i c_i = 0.$$

(a) Usando o método dos quadrados mínimos, ache os “melhores” valores de x e y que satisfazem o sistema

$$x - y + 1 = 0$$

$$3x - 2y - 2 = 0$$

$$2x + 3y - 2 = 0$$

$$2x - y = 0.$$

(b) Para a determinação do coeficiente de dilatação linear c de uma certa barra de metal, mediu-se o comprimento da barra a diferentes temperaturas, obtendo-se a seguinte tabela:

Temperatura (graus centígrados)	Comprimento Observado (milímetros)
20	1000,22
40	1000,65
50	1000,90
60	1001,05

Indicado por L_0 o comprimento da barra a 0°C e por L o comprimento a uma temperatura T genérica, temos

$$L_0 + Tc = L.$$

Ache, pelo método dos mínimos quadrados, o “melhor” valor de c fornecido pelos dados obtidos experimentalmente.

(c) Mostre que, se nas fórmulas introduzidas no início deste Exercício tivéssemos tomado $n = 2$, então os “melhores” valores de x e y seriam dados pela solução do sistema formado pelas duas equações

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0, \quad a_2x + b_2y + c_2 = 0.$$

12.16 Um pouco de geometria mongeana

Convidamos o aluno interessado a tentar provar, sintética ou analiticamente, os seguintes teoremas:

(a) A soma dos quadrados das projeções ortogonais de uma área plana sobre três planos mutuamente perpendiculares é igual ao quadrado da área plana.

(b) O teorema de Monge sobre o tetraedro, enunciado na Seção 12-10.

(c) *Teorema de Mannheim*: Os quatro planos determinados pelas quatro alturas de um tetraedro e os ortocentros das faces correspondentes concorrem no ponto de Monge do tetraedro.

(d) O ponto de Monge de um tetraedro é equidistante de qualquer altura do tetraedro e da perpendicular à face correspondente pelo seu ortocentro.

(e) O centro da esfera determinada pelos pontos médios das medianas de um tetraedro pertence à reta de Euler do tetraedro. (A reta que contém o circuncentro, o centroide e o ponto de Monge tornou-se conhecida como *reta de Euler* do tetraedro.)

(f) O ponto de Monge e o centroide de um tetraedro coincidem se, e somente se, o tetraedro é isósceles. (Um tetraedro se diz *isósceles* quando, e somente quando, cada uma de suas arestas é igual à aresta que lhe é oposta.)

(g) As cinco retas que ligam cada um de cinco pontos dados sobre uma mesma superfície esférica com o ponto de Monge do tetraedro determinado pelos outros quatro pontos são concorrentes.

12.17 Grandezas orientadas

Em sua *Géométrie de Position*, de 1803, Carnot iniciou o uso sistemático de grandezas orientadas. No caso de uma reta, por exemplo, escolhe-se um sentido como positivo e o outro como negativo. Então, um segmento AB dessa reta será considerado positivo ou negativo conforme seu sentido de A para B coincida ou não com o sentido positivo da reta. Nessas condições se tem $AB = -BA$ e $AB + BA = 0$. Demonstre os seguintes teoremas envolvendo segmentos orientados:

(a) Para 3 pontos colineares quaisquer A, B, C , $AB + BC + CA = 0$.

(b) Se O é um ponto qualquer do segmento de reta AB , então $AB = OB - OA$.

(c) *Teorema de Euler* (1747): Se A, B, C, D são pontos colineares, então $(AD)(BC) + (BD)(CA) + (CD)(AB) = 0$.

(d) Se A, B, P são pontos colineares e M é o ponto médio de AB , então $PM = (PA + PB)/2$.

(e) Se O, A, B, C são colineares e $OA + OB + OC = 0$ e se, ainda, P é um ponto qualquer de reta AB , então $PA + PB + PC = 3PO$.

(f) Se sobre a mesma reta se tem $OA + OB + OC = 0$ e $O'A' + O'B' + O'C' = 0$, então $AA' + BB' + CC' = 3 OO'$.

(g) Se A, B, C são colineares e P, Q, R são os pontos médios de BC, CA, AB , respectivamente, então os pontos médios de CR e PQ coincidem.

(h) Se duas retas por um ponto P cortam uma circunferência em A e B e em C e D , respectivamente, então $(PA)(PB) = (PC)(PD)$.

12.18 O teorema de Carnot

(a) Enuncie o teorema de Carnot (ver Seção 12-10) para um triângulo cortado por uma curva algébrica de grau n .

(b) Enuncie a generalização do teorema de Carnot em que se substitui o triângulo por um polígono arbitrário.

(c) Por um ponto O qualquer, não pertencente a uma curva algébrica de grau n , traçam-se duas retas em direções fixas. Sejam P_1, P_2, \dots, P_n e Q_1, Q_2, \dots, Q_n , respectivamente, as intersecções das retas com a curva. Mostre, usando um sistema oblíquo de coordenadas cartesianas, com eixos paralelos às duas direções dadas, que

$$(OP_1)(OP_2) \dots (OP_n) / (OQ_1)(OQ_2) \dots (OQ_n)$$

independe da posição de O .

(d) Use (c) para provar a generalização do teorema de Carnot dada em (b).

Temas

- 12/1 Famílias de matemáticos famosos.
- 12/2 Inscrições encontradas em túmulos de matemáticos.
- 12/3 L'Hospital e sua regra.
- 12/4 Como a espiral logarítmica (ou equiangular) se reproduz em si mesma.
- 12/5 O bispo George Berkeley (1685-1753).
- 12/6 Colin Maclaurin (1698-1746).
- 12/7 O pouco conhecido William Whiston (1667-1752).
- 12/8 James Stirling (1692-1770) e sua fórmula.
- 12/9 A anedota Euler-Diderot.
- 12/10 Diagramas de Euler *versus* diagramas de Venn.
- 12/11 Euler como escritor de grandes livros-texto.

- 12/12 Quem foi o maior matemático do século XVIII?
- 12/13 Napoleão Bonaparte e a matemática.
- 12/14 A história do batismo de d'Alembert.
- 12/15 As Academias de São Petersburgo e Berlim.
- 12/16 A influência de Legendre no ensino da geometria nos Estados Unidos.
- 12/17 Thomas Carlyle e a matemática.
- 12/18 Guido Grandi (1671-1742) e suas curvas *rosaces*.
- 12/19 Nicholas Saunderson (1682-1739), o matemático cego de Cambridge.
- 12/20 Pierre Louis Moreaux de Maupertuis (1698-1759), o “achatador da Terra”.
- 12/21 Gabriel Cramer (1704-1752).
- 12/22 Thomas Simpson (1716-1761), o matemático tecelão.
- 12/23 John Wilson (1741-1793) e sua singular realização matemática.
- 12/24 Jean Étienne Montucla. (1725-1799), um dos primeiros historiadores da matemática.
- 12/25 Alexandre Theophile Vandermonde (1735-1796).
- 12/26 Jean-Baptiste Joseph Delambre (1749-1822).
- 12/27 Sylvestre François Lacroix (1765-1845).
- 12/28 Três matemáticos franceses eminentes que colaboraram com a Revolução Francesa.
- 12/29 Pesos e medidas antes do sistema métrico decimal.
- 12/30 Definições de *are*, *estéreo*, *litro*, *grama* e *quilate*.
- 12/31 O erro trágico de Pierre Méchain.

Bibliografia

- BALL, W. W. R. e COXETER, H. S. M. *Mathematical Recreations and Essays*. 12^a ed. Toronto, University of Toronto Press, 1974. Reimpresso por Dover, Nova York.
- BELL, E. T. *Men of Mathematics*. Nova York, Simon e Schuster, 1937.
- BOYER, C. B. *The History of the Calculus and Its Conceptual Development*. Nova York, Dover, 1959.
- BURLINGAME, A. E. *Condorcet, the Torch Bearer of the French Revolution*. Boston, Stratford, 1930.
- CADWELL, J. N. *Topics in Recreational Mathematics*. Nova York, Cambridge University Press, 1966.

- COOLIDGE, J. L. *The Mathematics of Great Amateurs*. Nova York, Oxford University Press, 1949.
- DICKSON, L. E. *History of the Theory of Numbers*. Nova York, Chelsea, 1952, 3 vols.
- DUGAS, René. *A History of Mechanics*. Nova York, Central Books, 1955.
- EULER, Leonhard. *Elements of Algebra*. Trad. para o inglês por John Hewlett. Nova York, Springer-Verlag, 1984.
- EVES, Howard. *A Survey of Geometry*, vol. 2. Boston, Allyn and Bacon, 1965.
- GILLESPIE, C. C. *Lazare Carnot, Savant*. Princeton (N. J.), Princeton University Press, 1971.
- GRIMSLEY, Ronald. *Jean d'Alembert (1717-1783)*. Oxford, Clarendon Press, 1963.
- HOFFMAN, J. E. *Classical Mathematics*. Nova York, Philosophical Library, 1959.
- LAGRANGE, J. L. *Lectures on Elementary Mathematics*. Trad. para o inglês por T. J. McCormack. 2^a ed. Chicago, Open Court, 1901.
- LAPLACE, P. S. *The System of World*. Trad. para o inglês por H. H. Harte. Londres, Longmans, Green, 1830, 2 vols.
- . *A Philosophical Essay on Probabilities*. Trad. para o inglês por F. Truscot e F. Emory. Nova York, Dover, 1951.
- LEGENDRE, A. M. *Elements of Geometry and Trigonometry*. Trad. para o inglês por Davis Brewster. Revisão de Charles Davies. Nova York, A. S. Barnes, 1851.
- MACLAURIN, Colin. *A Treatise of Fluxions*. Edimburgo, 1742, 2 vols.
- MAISTROV, L. E. *Probability Theory, A Historical Sketch*. Trad. para o inglês por Samuel Kotz. Nova York, Academic Press, 1974.
- MUIR, Jane. *Of Men and Numbers, the Story of the Great Mathematicians*. Nova York, Dodd, 1961.
- NORTHROP, E. P. *Riddles in Mathematics, a Book of Paradoxes*. Nova York, Van Nostrand Reinhold, 1944.
- ORE, Oystein. *Number Theory and Its History*. Nova York, McGraw-Hill, 1948.
- ROEVER, W. H. *The Mongean Method of Descriptive Geometry*. Nova York, Macmillan, 1933.
- TAYLOR, E. G. R. *The Mathematical Practitioners of Tudor and Stuart England*. Nova York, Cambridge University Press, 1954.
- . *The Mathematical Practitioners of Hanoverian England*. Nova York, Cambridge University Press, 1966.
- TODHUNTER, Isaac. *A History of the Progress of the Calculus of Variations during the Nineteenth Century*. Londres, 1861.
- . *History of the Mathematical Theory of Attraction and the Figure of the Earth*. Londres, 1873.
- . *A History of the Mathematical Theory of Probability from the Time of Pascal to that of Laplace*. Nova York, Chelsea, 1949.

TURNBULL, H. W. *Bi-centenary of the Death of Colin Maclaurin*. Aberdeen, Aberdeen University Press, 1951.

———. *The Great Mathematicians*. Nova York, New York University Press, 1961.

TWEEDIE, Charles. *James Stirling. Sketch of His Life and Works*. Oxford, The Clarendon Press, 1922.

WATSON, S. J. *Carnot*. Londres, Bodley Head, 1954.

WEIL, Andre. *Number Theory: An Approach through History from Hammurabi to Legendre*. Boston, Birkhauser, 1984.

Panorama Cultural IX

A Revolução Industrial

O século XIX
(para acompanhar os Capítulos 13 e 14)

Houve duas grandes revoluções globais na história do mundo (globais no sentido de que alteraram profundamente a cultura e a sociedade humanas em todo o mundo) — a Revolução Agrícola no terceiro milênio a.C. e a Revolução Industrial no século XIX d.C.

No Panorama Cultural II focalizamos a Revolução Agrícola, que começou por volta do ano 3000 a.C. no Egito, China e Oriente Médio. Antes disso os povos viviam como caçadores e colhedores, dispersos em pequenos bandos através de vastas e ervosas savanas, deslocando-se constantemente de um lugar para outro à procura de alimento. Os povos da fase pré-agrícola não sabiam ler nem escrever e seus conhecimentos científicos eram mínimos. Depois do ano 3000 a.C. os homens começaram a se tornar agricultores sedentários. Inventaram a escrita, máquinas e complexos sistemas políticos. A civilização humana tinha mudado de maneira irrevogável e, por quase 5000 anos, os membros de nossa espécie viveram primariamente como agricultores. Para sermos mais precisos, nem todos eram agricultores; havia também soldados, artesãos, poetas, reis, mercadores, cientistas e filósofos. Contudo, a maioria do povo cultivava o solo para viver, e a agricultura manteve-se como foco principal dos esforços humanos.

A Revolução Industrial do século XIX mudou o mundo. Ela marca uma reorganização radical da civilização humana. Os agricultores deixaram de constituir a maioria da população; a agricultura deixou de ser a mola mestra da economia. A época das plantas, dos animais de tração e dos campos foi suplantada pela época das máquinas. Os operários industriais tornaram-se o segmento maior da força de trabalho, e a indústria assumiu o *status* de baluarte econômico.

A Revolução Industrial trouxe mudanças de grande alcance em sua esteira — entre elas o capitalismo industrial; urbanização crescente; o sistema manufatureiro; corporações gigantescas; a emergência de uma nova classe social, o proletariado; o imperialismo global em escala sem precedentes; avanços tecnológicos impressionantes; uma visão do mundo mais mecanicista; e, numa tentativa de resgatar alguns dos valores antigos, pré-industriais, o romantismo. Examinaremos brevemente a

Revolução Industrial quanto a suas causas, o processo através do qual se verificou e seus efeitos sobre a civilização humana.

AS CAUSAS DA REVOLUÇÃO INDUSTRIAL

De acordo com historiadores econômicos, para que a industrialização ocorra naturalmente, diversos fatores devem estar presentes: uma tecnologia adequada, capitais acumulados para investimentos, mercados para os produtos industriais, um contingente grande de trabalhadores, meios eficientes para transportar matérias-primas e produtos acabados a granel e um clima social que favoreça as atividades empreendedoras. Algumas dessas condições já existiam na Europa há vários séculos. O historiador Jean Gimpel, em seu livro *The Medieval Machine* (1976), observa que já em 1300 a tecnologia europeia estava pronta para a industrialização. O desenvolvimento na Europa de nações-Estado centralizadas, depois do ano 1400, proporcionou o surgimento de mercados nacionais potenciais, embora em certos países, como a França, uma sucessão desconcertante de direitos aduaneiros e taxas internas sobre mercadorias transportadas impedisse sua formação. Depois de 1500 as ricas elites urbanas acumularam capitais para investimentos. Desde a Idade Média havia na Europa canais que podiam funcionar como meio de transporte eficiente e barato. Faltavam duas coisas: uma força de trabalho disponível grande e o controle das economias nacionais europeias por parte da burguesia.

O rápido crescimento das cidades europeias depois de 1500, devido à concentração urbana de populações pobres, forneceu uma força de trabalho potencial de dimensões substanciais depois de 1750. As pequenas manufaturas que existiam nessas cidades desde a Idade Média tinham agora mão de obra barata em abundância, do que se aproveitaram os proprietários de muitas delas para expandir seus negócios. Embora a jornada de trabalho dos operários atingisse 80 horas semanais, os salários eram muito baixos. Empregavam-se mulheres e crianças porque elas podiam fazer o mesmo trabalho que os homens, mas recebiam salário muito menor. As condições de trabalho eram horríveis e acidentes sérios eram comuns. Os trabalhadores viviam em guetos imundos, insalubres, muitas vezes em famílias grandes que se comprimiam em habitações minúsculas e sem aquecimento. O filósofo alemão Friedrich Engels (1820-1895) ficou chocado depois de uma visita que fez a casas de trabalhadores na cidade inglesa de Manchester. Ele descreveu uma cena de pobreza abjecta — ratos infestando edifícios, esgoto a céu aberto, locais de trabalho úmidos em vielas distantes, longe dos olhos da classe média da cidade.

Além de uma força de trabalho disponível, a industrialização requeria uma classe empreendedora com acesso a capitais e investida de autoridade. A burguesia (palavra de origem francesa que significa, grosso-modo, classe média urbana) emergiu para esse papel no fim do século XVIII. A velha aristocracia feudal fora hostil aos empreendimentos comerciais. Não era fácil converter seu patrimônio fundiário em capitais e ela se beneficiava de altas taxas, direitos aduaneiros internos e mono-

pólios governamentais que desestimulavam a industrialização. Após a derrubada da aristocracia no século XVIII (discutida na Conexão Cultural VIII) a burguesia europeia e americana assumiu o controle político-financeiro das instituições em seus países. Uma vez no poder, a burguesia instalou um clima político e econômico favorável ao capitalismo industrial.

O CURSO DA REVOLUÇÃO INDUSTRIAL

Tal como a Revolução Agrícola, a Revolução Industrial foi um processo histórico que se desenrolou no curso de muitos anos e que, ademais, não ocorreu em todos os cantos do globo. Não é de surpreender que a Revolução Industrial tivesse começado na Inglaterra por volta de 1750. O motivo não foi uma “superioridade” cultural ou tecnológica da Inglaterra em relação aos demais países. Ao contrário, é que nesse reino insular, por um acidente histórico, a burguesia assumiu o poder antes de em qualquer outro lugar, na chamada Revolução Gloriosa. A partir de suas origens na Inglaterra, a Revolução Industrial se difundiu por outras partes da Europa e pela América. Por volta de 1900, um “núcleo regional” industrializado compreendia partes da Inglaterra, Escócia, França, Bélgica, Holanda e Alemanha. Além disso, partes da Itália, Estados Unidos e Japão começavam a se industrializar.

OS EFEITOS DA REVOLUÇÃO INDUSTRIAL

Já mencionamos acima alguns dos efeitos da Revolução Industrial: o sistema manufatureiro, as gigantescas corporações industriais, novas classes socioeconômicas, a criação de novas fortunas e a pulverização de outras, uma urbanização mais rápida e uma visão do mundo mais mecanicista. Houve muito mais — de fato, poderíamos gastar muitas páginas apenas listando as repercussões da industrialização. Algumas são óbvias, como as novas tecnologias; outras menos, como o imperialismo global e o romantismo. Discutamos alguns dos efeitos mais importantes da Revolução Industrial.

Imperialismo global. As nações industriais do século XIX rápida e imediatamente passaram a sentir falta de matérias-primas para suas manufaturas. As indústrias têxteis da Bélgica e Inglaterra tiveram de importar algodão dos Estados Unidos e da Índia. Fundições de ferro e aço buscaram minério e carvão no exterior. Estanho, borracha e outras matérias-primas vitais ou eram raras ou não existiam na Europa. Como consequência dessa escassez, os proprietários de manufaturas de países industrializados pressionaram seus governos para estabelecer colônias em outras partes do mundo mais ricas em recursos naturais. Os holandeses demandaram as Índias Orientais para plantação de borracha. A Inglaterra extraía minérios de várias colônias que estabeleceu na África e fez da Índia sua colônia do algodão. As nações industrializadas se interessavam também em abrir novos mercados no exterior para absor-

ver os excedentes de bens de consumo. Quando países como a China resistiam ao comércio, os exércitos europeus, americanos e japoneses intervinham para forçá-los, sendo o exemplo mais hediondo desse fato a Guerra do Ópio. Além do mais, o comércio internacional necessitava de que os países industrializados mantivessem postos de abastecimento ao redor do mundo para suprir seus navios mercantes de, por exemplo, combustível. Durante o século XIX, Inglaterra, França, Bélgica, Holanda, Itália, Alemanha, Estados Unidos e Japão, todos, ou expandiram impérios já existentes ou estabeleceram novos impérios, principalmente na África, Ásia e ilhas do Pacífico. Na África, apenas a Etiópia permaneceu independente; no leste asiático, apenas a China, a Tailândia e o Japão que se industrializava. Todas as ilhas do Pacífico foram colonizadas.

Crescimento da produção industrial. A produção industrial cresceu astronômica-mente durante o século XIX. Por exemplo, a produção de ferro na Inglaterra passou de 30 000 toneladas em 1770 para 2 milhões de toneladas em 1850. A Inglaterra, que extraía 10 milhões de toneladas de carvão em 1800, em 1850 produziu 50 milhões de toneladas. Crescimento rápido semelhante na produção industrial verificou-se também em outros países industrializados.

O sistema manufatureiro e as mudanças sociais. O sistema manufatureiro tornou-se o método mais comum de produzir bens de consumo. Era eficiente e despejava produtos no mercado em grande quantidade. Ao mesmo tempo, porém, empobrecia muitos trabalhadores e levava a um descontentamento esparso que se manifestava em movimentos pelo direito de voto aos trabalhadores da indústria, à formação de sindicatos e ao socialismo. Em 1848, Engels e Karl Marx (1818-1883), no Manifesto comunista, advogaram a eliminação final do capitalismo industrial, acreditando que um sistema responsável por tamanha miséria era imoral.

Progresso tecnológico. A Revolução Industrial criou a necessidade de novas tecnologias, uma demanda atendida pelos inventores do século XIX. A indústria têxtil, por exemplo, assistiu à invenção da lançadeira móvel (1733), da máquina de fiar (1764), do bastidor hidráulico (1771), do tear a vapor (1789) e do descaroçador de algodão (1793), todas antes de 1800. Durante o século XIX, o tear a vapor foi aperfeiçoado e o motor a gasolina inventado, desenvolveu-se o transporte ferroviário, a produção de aço foi aperfeiçoada e os navios a vapor tornaram-se comuns. O avião foi inventado em 1903, logo depois do fim do século. Havia pouco, porém, que ligava a tecnologia à ciência pura. A maioria das conquistas tecnológicas eram realizadas não por cientistas, mas por artesãos e funileiros. Somente no século XX a ciência pura e a tecnologia se fundiram.

O Romantismo. A era das máquinas não agradou a todo mundo. O Movimento Romântico, incluindo poetas, artistas e outros letrados que idealizavam o passado coincidiu com o início da Revolução Industrial na metade do século XVIII. Os românticos consideravam a Idade Média como uma época de cavaleiros arrojados e donzelas formosas e de histórias mirabolantes sobre Robin Hood e o rei Artur. Entre os românticos mais influentes estavam o escocês Sir Walter Scott (1771-1823), os escritores franceses René de Châteaubriand (1768-1848) e Victor Hugo (1802-1885),

o autor alemão Johann Wolfgang von Goethe (1749-1832) e os poetas ingleses John Keats (1795-1821), Percy Bysshe Shelly (1792-1822) e William Wordsworth (1770-1850). Ao contrário da frieza das máquinas, a literatura romântica era gloriosamente sentimental, e sua melodia, melancólica, evocativa e densa.

RESUMO

A Revolução Industrial que deu nascimento à sociedade moderna começou no século XVIII na Inglaterra. Durante o século XIX espalhou-se pelo continente europeu e pela América. Conforme proliferavam as grandes manufaturas e se esparavam as cidades, a estrutura da sociedade mudava radicalmente. Entre essas mudanças, o progresso tecnológico rápido desencadeou uma era de investigações científicas sem precedentes, especialmente na mecânica e na química. Embora de início a maioria das invenções fosse feita por artesãos e funileiros, as necessidades da indústria no século XX exigiram a participação de matemáticos e cientistas com grau universitário. Nem todos apreciaram a Revolução Industrial. Os socialistas, embora não se opusessem a ela, malsinaram a má distribuição de riqueza que caracterizou o século XIX. Os românticos, por sua vez, advogaram o retorno a ideais de épocas passadas.

As primeiras décadas do século XIX e a libertação da geometria e da álgebra

13.1 O príncipe dos matemáticos

Homem de estofo e talento matemáticos impressionantes, Carl Friedrich Gauss sobressai-se nos séculos XVIII e XIX como um Colosso de Rodas da matemática. Ele é universalmente considerado como o maior matemático do século XIX e, ao lado de Arquimedes e Isaac Newton, como um dos maiores de todos os tempos.

Carl nasceu em Brunswick, Alemanha, em 1777. Seu pai era um trabalhador braçal que tinha uma opinião teimosamente pouco favorável a respeito da educação. Sua mãe, porém, ainda que inculta, encorajava-o nos estudos e manteve por toda a vida grande orgulho pelas realizações do filho.

Carl foi uma das mais notáveis crianças-prodígio, dessas que aparecem de raro em raro. Diz-se que com a idade de três anos detectou um erro aritmético no borrador de seu pai. Há uma história segundo a qual o professor de Carl na escola pública, quando ele tinha dez anos de idade, teria passado à classe, para mantê-la ocupada, a tarefa de somar os números de 1 a 100. Quase que imediatamente Carl colocou sua lousa sobre a escrivaninha do irritado professor. Quando as lousas foram finalmente viradas, o professor surpreso verificou que Carl tinha sido o único a acertar a resposta correta, 5050, mas sem fazê-la acompanhar de nenhum cálculo. Carl havia mentalmente calculado a soma da progressão aritmética $1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99 + 100$ observando que $100 + 1 = 101$, $99 + 2 = 101$, $98 + 3 = 101$ e assim por diante com os 50 pares possíveis dessa maneira, sendo a soma portanto $50 \times 101 = 5050$. Mais tarde, quando adulto, Gauss costumava jactar-se de ter aprendido a contar antes de aprender a falar.

A precocidade de Gauss chamou a atenção do duque de Brunswick, que, como um gentil e compreensivo patrono, acompanhou sua entrada no colégio em Brunswick com a idade de 15 anos e na Universidade de Göttingen com 18 anos de idade. Indeciso entre tornar-se um filólogo ou tornar-se um matemático (embora já tivesse descoberto o método dos mínimos quadrados que uma década antes fora publicado independentemente por Legendre), seu espírito dramaticamente pendeu para a matemática a 30 de março de 1796, quando lhe faltava um mês para completar 19 anos de idade. O acontecimento foi sua surpreendente contribuição à teoria das construções euclidianas de polígonos regulares e, em particular, a descoberta de que um polígono regular de 17 lados é construtível nesses moldes. Já contamos essa história na Seção 5-6.

No mesmo dia dessa descoberta Gauss começou seu famoso diário matemático, ao qual confiou, de maneira críptica, muitas de suas grandes realizações matemáticas. Como Gauss, da mesma maneira que Newton, era lento e relutante para publicar, seu diário, que só foi encontrado em 1898, levantou numerosas questões de prioridade. O diário contém 146 breves registros, o último datado de 9 de julho de 1814. Como ilustração do caráter críptico dos registros do diário, consideremos o de 10 de julho de 1796, onde se lê

$$\text{EYPHKA!} \quad \text{num} = \Delta + \Delta + \Delta,$$

o que traduz a descoberta, por parte de Gauss, de uma demonstração de que todo inteiro positivo é soma de três números triangulares. Todos os registros do diário, exceto dois, foram, em sua maior parte, decifrados. O registro de 19 de março de 1797 mostra que Gauss já havia descoberto nessa ocasião a periodicidade dupla de certas funções elípticas (ele não tinha ainda 20 anos de idade) e um registro posterior mostra que ele tinha reconhecido a periodicidade dupla para o caso geral. Apenas essa descoberta, se Gauss a tivesse publicado, bastaria para lhe trazer fama. Mas Gauss nunca a publicou!

Em sua tese de doutorado, na Universidade de Helmstädt, escrita aos 20 anos de idade, Gauss deu a primeira demonstração plenamente satisfatória do *teorema fundamental da álgebra* (que uma equação polinomial, com coeficientes complexos e de grau $n > 0$, tem pelo menos uma raiz complexa). Newton, Euler, d'Alembert e Lagrange haviam feito tentativas frustradas de provar esse teorema. A ideia por trás da demonstração de Gauss é a substituição de z na equação polinomial geral $f(z) = 0$ por $x + iy$. A separação a seguir das partes real e imaginária na equação resultante fornece duas equações reais $g(x, y) = 0$ e $h(x, y) = 0$ nas variáveis reais x e y . Gauss mostrou que os gráficos cartesianos de $g(x, y) = 0$ e $h(x, y) = 0$ sempre têm um ponto real comum (a, b) . Segue-se que $a + bi$ é uma raiz complexa de $f(z) = 0$. A demonstração envolvia considerações geométricas. Quase 20 anos depois, em 1816, Gauss publicou duas novas demonstrações, e mais tarde ainda, em 1850, uma quarta demonstração, num esforço para encontrar uma demonstração inteiramente algébrica¹.

A publicação unitária mais importante de Gauss é sua *Disquisitiones arithmeticae*, um trabalho de importância fundamental na moderna teoria dos números. As descobertas de Gauss sobre construções de polígonos regulares aparecem nesse trabalho, assim como sua fácil notação para congruência (Ver Exercício 13.2) e uma demonstração da bela lei da reciprocidade quadrada que afirma, usando-se o símbolo de Legendre definido perto do final da Seção 12-9, que se $p = 2P + 1$ e $q = 2Q + 1$ são primos ímpares diferentes, então

$$(p|q)(q|p) = (-1)^{pQ}.$$

¹ Para uma tradução inglesa da segunda demonstração, ver David Eugene Smith, *A Source Book in Mathematics*, 1958, pp. 292-306. Hoje acredita-se que uma prova qualquer do teorema fundamental da álgebra deve envolver considerações topológicas.



Carl Friedrich Gauss
(Biblioteca do Congresso)

Gauss deu contribuições notáveis à astronomia, à geodésia e à eletricidade. Em 1801 ele calculou, mediante um novo procedimento e com poucos dados, a órbita do planetóide Ceres, recentemente descoberto, e no ano seguinte a do planetóide Palas. Em 1807 ele se tornou professor de matemática e diretor do observatório astronômico de Göttingen, posto que ocupou até sua morte. Em 1821 ele realizou uma triangulação de Hanover, calculou a medida de um arco meridiano e inventou o heliógrafo. Em 1831 começou a colaborar com seu colega Wilhelm Weber (1804-1891) em pesquisas básicas em eletricidade e magnetismo; em 1833 os dois descobriram o telégrafo eletromagnético.

Em 1812, num artigo sobre séries hipergeométricas, Gauss fez a primeira investigação sistemática sobre convergência de séries. A obra-prima de Gauss sobre a teoria das superfícies, *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, surgiu em 1827, e inaugurou o estudo da geometria intrínseca das superfícies do espaço (ver Seção 14-7). Sua antecipação da geometria não euclidiana será discutida na Seção 13-7.

É famosa a afirmação de Gauss de que “a matemática é a rainha das ciências, e a teoria dos números é a rainha da matemática”. Já se descreveu Gauss como o “gigante matemático que do alto de sua magnitude abarca num relance as estrelas e os abismos”. Gauss era um perfeccionista quanto a seus escritos matemáticos. Asseverando que uma catedral não é uma catedral até que se retire o último de seus andaimes, ele se empenhava para que cada uma de suas obras fosse completa, concisa, acabada e convincente, com a remoção de cada traço da análise com a qual alcançava seus resultados. De conformidade com isso adotou como selo uma árvore com uns poucos frutos apenas e o lema: *Pauca sed matura* (Poucos, porém maduros). Como segundo lema Gauss adotou as seguintes linhas de *Rei Lear*:

Vós, natureza, arte minha deusa; a vossas leis
Estão meus serviços destinados.

Gauss acreditava que a matemática, por inspiração, deveria atingir o mundo real. Conforme colocou Wordsworth: “A sabedoria muitas vezes está mais perto quando nos abaixamos do que quando nos levantamos”.

Gauss morreu em sua casa no Observatório de Göttingen em 23 de fevereiro de 1855, e logo depois, o rei de Hanover ordenou que se preparasse uma medalha comemorativa em sua homenagem. Essa medalha, de 70setenta milímetros, afinal foi feita (1877), sendo completada pelo conhecido escultor e medalhista Friedrich Brehmer, de Hanover. Nela figura a inscrição

Georgius V. rex Hannoverge
Mathematicorum principi
(Jorge V rei de Hanover
ao Príncipe dos Matemáticos)

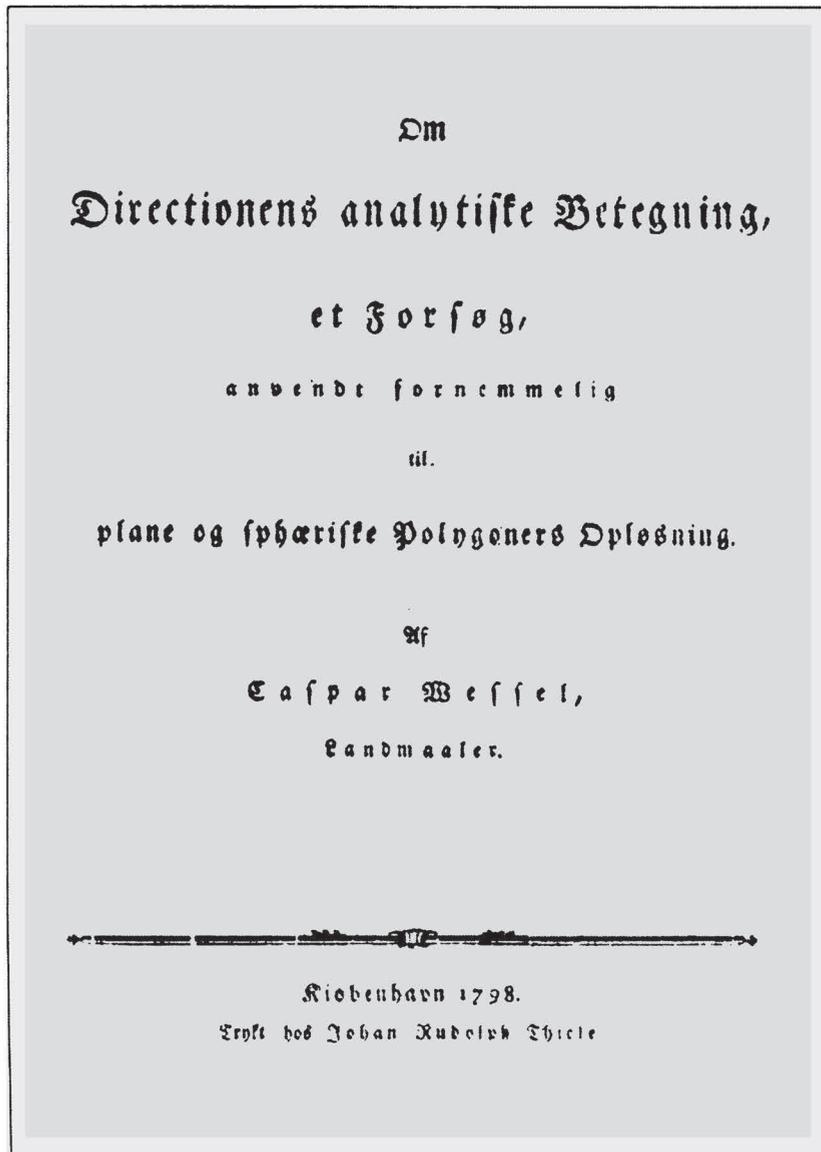
Desde então Gauss é conhecido como “o Príncipe dos Matemáticos”.

Caspar Wessel (1745-1818), Jean Robert Argand (1768-1822) e Gauss foram os primeiros autores a notar a associação, agora familiar, entre números complexos e pontos reais do plano². Wessel e Argand não eram professores de matemática; Wessel era um agrimensor, nascido em Jorsrud, Noruega, e Argand um guarda-livros, nascido em Genebra, Suíça.

Parece não haver dúvida de que a prioridade da ideia cabe a Wessel, com um artigo apresentado à Real Academia Dinamarquesa de Ciências em 1797 e publicado nas *Atas* dessa Academia em 1799. A contribuição de Argand figura num artigo publicado em 1806 e mais tarde, em 1814, apresentado nos *Annales de Mathématiques* de Gergonne. Mas o artigo de Wessel permaneceu excluído do mundo matemático em geral até que foi descoberto por um antiquário cerca de 98 anos depois de ter sido escrito. Foi então republicado na oportunidade do centenário de seu primeiro aparecimento. Esse atraso no reconhecimento geral da realização de Wessel explica por que o plano complexo veio a ser chamado *plano de Argand* em vez de *plano de Wessel*.

A contribuição de Gauss se encontra numa memória apresentada à Sociedade Real de Göttingen em 1831, posteriormente reproduzida nas suas *Obras Reunidas*. Gauss assinalou que a ideia básica da representação pode ser encontrada em sua tese de doutorado de 1799. A afirmação parece procedente e explica por que o plano complexo é frequentemente conhecido como *plano de Gauss*.

² A ideia, porém, está latente na sugestão feita por John Wallis (1616-1703) já em 1673, de que os números imaginários puros eram suscetíveis de ser representados numa reta perpendicular ao eixo real. Ver F. Cajori, “Historical notes on the graphic representation of imaginaries before the time of Wessel”, *The American Mathematical Monthly*, nº 19, 1912, p. 167.



Página de rosto do artigo de Caspar Wessel “*Om Directionens analytiske Betegning*” (“Sobre a representação analítica de vetores”) apresentado à Academia Real Dinamarquesa de Ciências em 1797 e publicado nas Atas da Academia em 1799. O artigo mostrava pela primeira vez a associação de números complexos com pontos reais do plano (Cortesia do Departamento de Livros Raros e Coleções Especiais, Biblioteca da Universidade de Michigan)

A simples ideia de considerar as partes real e imaginária de um número complexo $a + bi$ como as coordenadas retangulares de um ponto do plano fez com que os matemáticos se sentissem muito mais à vontade com os números imaginários, pois esses números podiam agora ser efetivamente visualizados, no sentido de que a cada número complexo corresponde um único ponto do plano e vice-versa. Ver é crer, e ideias anteriores sobre a não existência e o caráter fictício dos números imaginários foram geralmente abandonadas.

13.2 *Germain e Somerville*

Consideraremos agora brevemente duas matemáticas que, como Gauss, nasceram no último quartel do século XVIII, mas cujo trabalho importante foi realizado no começo do século XIX. Cada uma dessas matemáticas, Sophie Germain e Mary Fairfax Somerville, à sua maneira, contribuiu para a posterior emancipação das mulheres em matemática.



Sophie Germain

(Coleção David Eugene Smith, Biblioteca de Livros Raros e Manuscritos, Universidade de Colúmbia)

Sophie Germain nasceu em Paris em 1776 e desenvolveu profundo interesse pela matemática. Como mulher, estava impedida de matricular-se na Escola Politécnica. Não obstante, ela conseguiu as notas de aula de vários professores e, com trabalhos escritos, submetidos sob o pseudônimo masculino de M. Leblanc, ganhou rasgados elogios de Lagrange. Em 1816 foi agraciada com um prêmio pela Academia de Ciências da França por um artigo sobre a matemática da elasticidade. Na metade dos anos 1820 provou que para todo primo ímpar $p < 100$ a equação de Fermat $x^p + y^p = z^p$ não tem soluções no conjunto dos inteiros não divisíveis por p . Em 1831 introduziu em geometria diferencial a útil noção de curvatura média de uma superfície num ponto da superfície (ver Seção 14-7).

Embora tenha sido muito superior como matemática, é com frequência chamada de Hipátia do século XIX.

Com seu pseudônimo de M. Leblanc trocou correspondência com Gauss por quem foi fartamente elogiada e cumprimentada. Somente algum tempo mais tarde Gauss ficou sabendo que M. Leblanc era uma mulher. É lamentável que Gauss e Germain jamais tenham se encontrado e igualmente lamentável que Germain tivesse morrido (em 1831) antes de a Universidade de Göttingen conferir-lhe o título honorário de doutor recomendado por Gauss.

Diz-se que Sophie Germain resolveu estudar matemática depois de ler, fascinada, durante os dias violentos que se seguiram à queda da Bastilha, a vida e a morte de Arquimedes durante dias igualmente violentos após o cerco de Siracusa. Em sua memória sobre a elasticidade observou: “A álgebra não é senão a geometria escrita e a geometria não é senão a álgebra figurada”.

Mary Fairfax Somerville (1780-1872) foi uma notável autodidata escocesa que, por si própria, estudou o *Traité de Mécanique Céleste* e foi convencida pela Sociedade para a Difusão do Conhecimento Útil a escrever uma exposição popular dessa grande obra. Embora já tivesse quase 50 anos de idade e carecesse de preparação formal, sua exposição (concluída em 1830 e intitulada *The Mechanisms of the Heavens*) foi tão brilhante que alcançou várias edições e tornou-se leitura obrigatória para estudantes de matemática das universidades britânicas por quase um século. O trabalho contém explanações matemáticas e diagramas que tornam compreensível a difícil obra de Laplace. O embasamento matemático necessário foi posteriormente (1832) publicado à parte sob o título de *A Preliminary Dissertation on the Mechanisms of the Heavens*.



Mary Fairfax Somerville
(Coleção David Eugene Smith, Biblioteca de Livros Raros e Manuscritos, Universidade de Colúmbia)

Põe em evidência as absurdas dificuldades enfrentadas por uma mulher no século XIX, a história segundo a qual a jovem Mary Somerville, para ter um exemplar dos

Elementos de Euclides que tanto desejava, teve de pedir a um irmão para comprá-lo numa livraria, uma vez que Euclides era considerado uma leitura imprópria para jovens do sexo feminino. Aos 24 anos de idade casou-se com um homem pouco interessado nos anseios intelectuais de uma mulher. Felizmente para a matemática, seu marido faleceu depois de três anos de casamento, deixando uma substancial importância em dinheiro, o que propiciou a ela a oportunidade de comprar livros de matemática. Mary se casou outra vez, mas desta feita com um homem que via com bons olhos as atividades intelectuais.

Somerville acabou sendo recompensada com uma pensão governamental, e a Royal Society of London homenageou-a com um busto em seu Grande Saguão. O astrônomo John Couch Adams afirmou que a razão que o levou a procurar um novo planeta (Netuno), para explicar as observadas perturbações de Urano, foi uma referência no *The Mechanisms of the Heavens* de Somerville. Até sua morte, aos 92 anos de idade, Somerville não parou de trabalhar. O Somerville College, um dos cinco *colleges* para mulheres de Oxford, tem esse nome em homenagem a ela.

13.3 Fourier e Poisson

Conforme se entra no século XIX, o número de matemáticos competentes e produtivos torna-se tão grande que somos obrigados a selecionar apenas umas poucas das estrelas de maior brilho no deslumbrante firmamento matemático. Duas dessas estrelas, se não de primeira grandeza, pelo menos de segunda, foram Jean Baptiste Joseph Fourier e Siméon Denis Poisson. Praticamente contemporâneos, os dois eram franceses, trabalharam em matemática aplicada e foram professores da Escola Politécnica.

Fourier nasceu em Auxerre em 1768 e faleceu em Paris em 1830. Filho de um alfaiate, ficou órfão aos oito anos de idade e foi educado numa escola militar dirigida por beneditinos, onde veio a ocupar uma cadeira de matemática. Tendo ajudado a promover a Revolução Francesa foi recompensado com uma cátedra na Escola Politécnica. Renunciou a essa posição para, juntamente com Monge, poder acompanhar Napoleão na expedição ao Egito. Em 1798 foi indicado governador do Baixo Egito. Após as vitórias britânicas e a capitulação da França em 1801, Fourier retornou à França, tornando-se prefeito de Grenoble. Foi quando de sua estada em Grenoble que começou suas experiências com o calor.

Em 1807 Fourier apresentou um artigo à Academia de Ciências da França que deu início a um novo e extremamente frutífero capítulo da história da matemática. O artigo trata do problema prático da propagação do calor em barras, chapas e sólidos metálicos. No desenvolvimento do artigo Fourier fez a surpreendente afirmação de que *toda* função definida num intervalo finito por um gráfico descrito arbitrariamente pode ser decomposta numa soma de funções seno e cosseno. Para ser mais explícito, ele afirmou que uma função qualquer, não importa quão caprichosamente seja definida no intervalo $(-\pi, \pi)$, pode ser representada nesse intervalo por

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx),$$

onde os coeficientes a e b são números reais convenientes. Essa série é conhecida como *série trigonométrica* e não era uma novidade para os matemáticos daquela época. De fato, já se provara que muitas das funções mais ou menos “bem comportadas” podiam ser representadas por meio dessas séries. Mas Fourier afirmou que *toda* função definida em $(-\pi, \pi)$ pode ser representada dessa maneira. Os sábios da Academia encararam com muito ceticismo a afirmação de Fourier e o artigo, julgado por Lagrange, Laplace e Legendre, foi rejeitado. Todavia, para encorajar Fourier a desenvolver suas ideias mais cuidadosamente, a Academia instituiu um grande prêmio, tendo como tema a propagação do calor, a ser outorgado em 1812. Fourier submeteu um artigo revisado à Academia em 1811, artigo esse que, julgado por uma comissão que incluía, entre Outros, os mesmos juízes da oportunidade anterior, acabou ganhando o prêmio mas, devido às críticas recebidas pela falta de rigor, não foi recomendado para publicação nas *Mémoires* da Academia.



Joseph Fourier
(Coleção David Smith)

Ressentido, Fourier continuou suas pesquisas sobre o calor e em 1822, posteriormente a sua mudança para Paris (em 1816), publicou um dos grandes clássicos da matemática, a *Théorie Analytique de la Chaleur* (Teoria Analítica do Calor). Dois anos depois da publicação dessa grande obra, Fourier tornou-se secretário da Academia e, nessa condição, pôde fazer com que seu artigo de 1811 fosse publicado na forma original nas *Mémoires* da Academia.

Embora se tivesse provado que a afirmação de Fourier de que *toda* função pode ser expressa por uma série trigonométrica (hoje chamada *série de Fourier*) é exagerada, na

verdade a classe das funções para as quais vale essa representação é muito extensa. As séries de Fourier provaram ser da mais alta utilidade em campos de estudo como a acústica, a óptica, a eletrodinâmica, a termodinâmica e vários outros, e têm um papel fundamental na análise harmônica, problemas sobre vigas e pontes e na solução de equações diferenciais. De fato, foram as séries de Fourier que motivaram os métodos modernos de física-matemática que envolvem a integração de equações diferenciais parciais sujeitas a condições de contorno. Na Seção 15-3 veremos um importante papel desempenhado pelas séries de Fourier na evolução do conceito de função.

Num trabalho publicado postumamente em 1831 encontramos, entre outras questões originais, a contribuição de Fourier ao tópico da separação de raízes de equações polinomiais (nos textos modernos considerado da teoria das equações). Esse assunto despertou-lhe interesse, intermitentemente, desde 1789. Sadi Carnot (1796-1832), contemporâneo de Fourier e filho do eminente geômetra focalizado na Seção 12-10, também se interessou pela teoria matemática do calor e inaugurou a moderna teoria da termodinâmica.

Lord Kelvin (William Thomson, 1824-1907) afirmou que toda a sua carreira na física-matemática foi influenciada pelo trabalho de Fourier sobre o calor e Clerk Maxwell (1831-1879) manifestou que o tratado de Fourier é “um grande poema matemático”.

Conta-se uma história engraçada sobre o interesse de Fourier pelo calor. Talvez em consequência de sua experiência no Egito e de seu trabalho envolvendo o calor, Fourier acabou se convencendo de que o deserto oferecia as condições ideais para uma boa saúde. Por isso vestia-se com várias camadas de roupa e aquecia a temperaturas insuportavelmente altas as dependências que habitava. Dizem alguns que essa sua obsessão pelo calor apressou sua morte, por doença cardíaca, aos 63 anos, cozido de fato.

Talvez a mais citada frase (figura em seu primeiro trabalho sobre a teoria matemática do calor) de Fourier seja: “O estudo profundo da natureza é a fonte mais rica de descobertas matemáticas”.

Poisson nasceu em Pithiviers em 1781 e faleceu em Paris em 1840. Foi educado por seu pai, um soldado raso que ao se reformar recebeu um pequeno posto administrativo naquela aldeia e, quando a Revolução Francesa estourou, assumiu o governo do lugar. Alguns parentes desejavam induzir o jovem Poisson, contra sua vontade, a seguir a carreira da medicina. A iniciação foi dada por um tio que o ensinou a picar com uma lanceta os veios de folhas de couve. Depois de se aperfeiçoar bem nisso qualificou-se para lancetar pústulas. Mas, praticamente no primeiro caso com que se houve, o paciente morreu em poucas horas. Embora os médicos garantissem que era “um acontecimento normal”, Poisson jurou abandonar de vez a profissão.

Um forte interesse pela matemática levou Poisson a ingressar na Escola Politécnica em 1798, onde seus talentos impressionaram Lagrange e Laplace. Depois de graduar-se tornou-se palestrante da Escola Politécnica. Gastou o resto de sua vida em vários postos governamentais e no magistério. Um tanto quanto socialista, manteve-se um republicano determinado até 1815, quando aderiu aos legitimistas.

Foram numerosas as publicações matemáticas de Poisson, alcançando entre 300 e 400. Suas principais obras são *Traité de Mécanique*, em dois volumes, publicados em 1811 e 1833, *Théorie Nouvelle de l'Action Capillaire* de 1831, *Théorie Mathématique de la Chaleur* de 1835 e *Recherches sur la Probabilité des Jugements* de 1837. Em seus artigos abordou assuntos como a teoria matemática da eletricidade e do magnetismo, astronomia física, a atração de elipsoides, integrais definidas, séries e teoria da elasticidade. O estudante encontra os *colchetes de Poisson* (em equações diferenciais), a *constante de Poisson* (em eletricidade), a *razão de Poisson* (em elasticidade) a *integral de Poisson* e a *equação de Poisson* (na teoria do potencial) e a *lei de Poisson* (na teoria da probabilidade)

Poisson está ligado a um de seus interesses profissionais por uma história engraçada. Quando criança, ele foi posto sob os cuidados de uma ama. Um dia, quando seu pai foi vê-lo, a ama saíra deixando o garoto suspenso por sua cinta a um cravo na parede para protegê-lo, disse a ama, de alguma doença e da sujeira do soalho. Poisson relatou que seus esforços físicos quando estava suspenso faziam-no balançar de um lado para outro, e foi dessa maneira que, tão cedo, o pêndulo, em cujo estudo ocupou grande parte de seus esforços científicos, entrou em sua vida.

Poisson uma vez frisou: “A vida é boa por duas coisas, descobrir matemática e ensinar matemática”. Em ambas ele se sobressaiu.



Siméon Poisson
(Coleção David Smith)

13.4 Bolzano

Bernhard Bolzano nasceu em 1781, em Praga, República Tcheca, onde faleceu em 1848. Tornou-se padre, mas foi secularizado por heresia e destituído das funções de professor de religião da Universidade de Praga. Bolzano tinha inclinação para a lógica e a matemática, especialmente a análise, e pode ser considerado um precursor

da “aritmética da análise” (ver Seção 14-9). De fato, perto de 1817 ele já estava plenamente cômico da necessidade de rigor em análise; Felix Klein posteriormente referiu-se a ele como “O Pai da Aritmetização”.

Infelizmente o trabalho matemático de Bolzano foi grandemente ignorado por seus contemporâneos, e muitos de seus resultados aguardaram ulterior redescoberta. Em 1843, por exemplo, ele construiu uma função contínua num intervalo que, surpreendentemente, não tinha derivada em nenhum ponto do intervalo. Essa função não se tornou conhecida e credita-se a Weierstrass, cerca de 40 anos mais tarde, o primeiro exemplo dessa espécie. Há um teorema famoso, conhecido pelo nome desses dois matemáticos, o *teorema de Bolzano-Weierstrass*, cujo enunciado afirma que todo conjunto de pontos, infinito e limitado, tem um ponto de acumulação. Coube a Weierstrass, em palestras dadas em Berlim, na década de 1860, o mérito da demonstração desse teorema tão importante para os fundamentos da teoria dos conjuntos. O *teorema do valor intermediário* do cálculo, de tanta utilidade, muitas vezes é conhecido como *teorema de Bolzano*. O teorema diz que se $f(x)$ é uma função real contínua definida num intervalo aberto R e toma os valores α e β nos pontos a e b de R , então f toma qualquer valor γ situado entre α e β em pelo menos um ponto c de R entre a e b .

Bolzano discutiu muitos exemplos análogos ao paradoxo de Galileu referente à correspondência biunívoca entre os inteiros positivos e seus quadrados [ver Exercício 9.7(c)] e parece ter percebido que o infinito do conjunto dos números reais é de um tipo diferente do infinito do conjunto dos inteiros. Num trabalho póstumo, de 1850, *Paradoxien des Unendlichen (Paradoxos do Infinito)*, Bolzano mostrou muitas propriedades importantes dos conjuntos infinitos.

Conta-se uma história espirituosa sobre Bolzano. Certa ocasião, foi acometido de uma doença cujos sintomas eram dores no corpo e calafrios. Para afastar seu espírito dos males que o acometiam, apanhou os *Elementos* de Euclides e pela primeira vez leu a magistral exposição da teoria das proporções de Eudoxo exposta no Livro V. E eis que seus males se vão. Diz-se que depois disso, às pessoas que se sentiam igualmente molestadas, Bolzano recomendava a leitura do Livro V de Euclides.

13.5 Cauchy

O movimento visando imprimir rigor à análise teve início no século XIX com Lagrange e Gauss. Esse trabalho foi consideravelmente ampliado e aprofundado pelo grande matemático francês Augustin-Louis Cauchy, o mais importante analista da primeira metade do século XIX.

Cauchy nasceu em Paris em 1789 e recebeu a primeira educação de seu pai. Posteriormente, na École Centrale du Panthéon, ele se sobressaiu em estudos clássicos. Em 1805 entrou na Escola Politécnica e ganhou a admiração de Lagrange e Laplace. Dois anos mais tarde matriculou-se na École des Ponts e Chaussées visando preparar-se para ser engenheiro civil. Persuadido por Lagrange e Laplace decidiu abandonar a engenharia civil em favor da ciência pura e aceitou um cargo de professor na Escola Politécnica.



Augustin-louis Cauchy
(Coleção David Smith)

Cauchy escreveu extensiva e profundamente tanto sobre matemática pura como sobre matemática aplicada, e provavelmente se ombreia com Euler em volume de produção. Suas obras reunidas contêm, além de vários livros, 789 artigos, alguns dos quais são trabalhos longos, preenchendo 34 alentados volumes. A qualidade desse trabalho é irregular; por isso Cauchy (muito ao contrário de Gauss) tem sido criticado por sua produção excessiva e por sua redação apressada. Conta-se uma história a propósito da prodigiosa produtividade de Cauchy. Em 1835 a Academia de Ciências começou a publicar seus *Comptes Rendus*. Tão rapidamente Cauchy abastecia esse jornal de artigos que a Academia ficou alarmada com as crescentes despesas de impressão e instituiu uma norma, hoje ainda em vigor, limitando a no máximo quatro páginas os artigos publicados. Cauchy teve de procurar outros escoadouros para seus longos artigos, alguns excedendo 100 páginas.

As numerosas contribuições de Cauchy à matemática avançada incluem pesquisas em convergência e divergência de séries infinitas, teoria das funções reais e complexas, equações diferenciais, determinantes, probabilidade e física-matemática. O aluno de cálculo encontra seu nome no *teste da raiz de Cauchy* e no *teste da razão de Cauchy* para verificação da convergência ou divergência de uma série de termos positivos e no *produto de Cauchy* de duas séries dadas. Mesmo num primeiro curso de teoria das funções complexas, encontram-se a *desigualdade de Cauchy*, a *fórmula integral de Cauchy*, o *teorema integral de Cauchy* e as básicas *equações diferenciais de Cauchy-Riemann*.

Deve-se a Cauchy grande parte da abordagem do cálculo apresentado nos atuais textos universitários, como os conceitos básicos de limite e continuidade. Cauchy definiu a derivada de $y = f(x)$ em relação a x como o limite, quando $\Delta x \rightarrow 0$, da razão

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Embora tivesse ciência da facilidade operacional das diferenciais, Cauchy relegou-as a segundo plano. Se dx é uma quantidade finita, ele definiu dy , de $y = f(x)$, simplesmente como $f'(x)dx$. Embora durante o século XVIII a integração fosse geralmente focalizada como a inversa da diferenciação, Cauchy preferiu definir a integral definida como o limite da soma de um conjunto infinitamente crescente de partes pequenas tendendo a zero, de modo muito parecido com o que fazemos hoje. A relação entre uma integral e uma antiderivada se estabelecia então através do teorema do valor médio.

As contribuições de Cauchy à teoria dos determinantes, começando em 1812 com uma extensa memória de 84 páginas, colocam-no como o matemático que mais contribuiu para o assunto. Foi num artigo de Cauchy de 1812 que apareceu a primeira demonstração do importante e útil teorema que garante que se A e B são matrizes $n \times n$, então $|AB| = |A| |B|$. Incidentalmente foi Cauchy quem, em 1840, introduziu a palavra “característica”, na teoria das matrizes, chamando a equação $|A - \lambda I| = 0$ de *equação característica* da matriz A .

O trabalho de Cauchy mostra grande preocupação com o rigor e, como tal, serviu para inspirar grandemente outros matemáticos a eliminar da análise a manipulação formal cega e as demonstrações intuitivas.

Cauchy era um partidário ardente dos Bourbons e, após a Revolução de 1830, foi forçado a abandonar seu cargo de professor na Escola Politécnica, além de ser excluído do serviço público por 18 anos. Parte desse tempo ele passou no exílio em Turim e Praga e parte em Paris lecionando em algumas escolas religiosas. Em 1848 foi-lhe permitido retornar à Escola Politécnica sem ter de fazer voto de fidelidade ao novo governo. Em religião ele era fanático; gastava boa parte de seu tempo tentando converter outras pessoas para sua fé particular. Durante toda a sua vida foi um trabalhador infatigável, e é lamentável que tivesse um espírito tão estreito e muitas vezes ignorasse os esforços meritórios dos jovens. Não obstante, há o outro lado da moeda: deve-se assinalar que em 1843 Cauchy publicou, em forma de carta aberta, uma defesa da liberdade de consciência e pensamento. Essa carta ajudou a convencer o governo da estupidez da repressão acadêmica e, quando Luis Filipe foi forçado a abdicar, um dos primeiros atos do governo provisório foi abolir o voto de lealdade.

Cauchy morreu subitamente em 23 de maio de 1857 aos 68 anos de idade. Tinha ido para o campo para descansar e curar-se de problemas nos brônquios e foi surpreendido por uma febre fatal. Pouco tempo antes conversara com o Arcebispo de Paris. Suas últimas palavras dirigidas ao Arcebispo, foram: “Os homens passam, mas suas realizações perduram”.

13.6 Abel e Galois

É natural, por uma razão ou outra, associar certos personagens da história da matemática aos pares. Esse é o caso de Harriot e Oughtred (dois algebristas ingleses contemporâneos), Wallis e Barrow (dois antecessores imediatos de Isaac Newton no campo do cálculo), Taylor e Maclaurin (dois matemáticos ingleses contemporâneos, conheci-

dos especialmente por suas contribuições às séries infinitas), Monge e Carnot (dois geômetras franceses contemporâneos) e Fourier e Poisson (dois pesquisadores contemporâneos no campo da física-matemática). Niels Henrik Abel e Évariste Galois constituem outro exemplo dessa dualidade. Os dois, embora contemporâneos, não se relacionam pela nacionalidade ou por interesse matemático semelhante; cada um, como um meteoro, riscou o firmamento matemático com brilho intenso e matinal, para depois, súbita e pateticamente, extinguir-se em morte prematura, deixando material de valor extraordinário para ser trabalhado pelos matemáticos das gerações futuras. Abel morreu de tuberculose e subnutrição aos 26 anos de idade e Galois num duelo tolo aos 21 anos de idade; nenhum deles teve sua genialidade devidamente avaliada em vida.

Abel nasceu em Findö na Noruega, onde seu pai era pastor religioso, em 1802. Quando estudante na atual cidade de Oslo, pensou ter encontrado a solução algébrica geral das equações quinticas, mas logo se corrigiu num famoso artigo de 1824. Nesse artigo Abel demonstrou a impossibilidade de estabelecer a solução da equação quintica geral por meio de radicais, sepultando assim um problema que havia desconcertado os matemáticos desde Bombelli até Viète (ver Seção 8-8). Como consequência desse trabalho Abel obteve uma bolsa que lhe permitiu viajar para a Alemanha, a Itália e a França. Durante esse período escreveu vários artigos em áreas diversas da matemática como a da convergência de séries infinitas, a das *integrais abelianas* e a das funções elípticas.



Niels Henrik Abel
(Coleção David Smith)

As pesquisas de Abel no campo das funções elípticas se deram em excitante e amigável competição com Jacobi. Legendre, que era mais velho e que desenvolvera trabalho pioneiro sobre funções elípticas, ficou profundamente impressionado com as descobertas de Abel sobre o assunto. Felizmente Abel conseguiu um canal de divulgação para seus artigos no recém-fundado *Journal für die reine und angewandte Mathematik* (mais conhecida como *Journal de Crelle*); de fato, o primeiro volume da

revista (1826) continha nada menos que cinco artigos de Abel e o segundo volume (1827) continha o trabalho de Abel que marcou o nascimento da teoria das funções duplamente periódicas.

Todo aluno de análise encontra a *equação integral de Abel* e o *teorema de Abel* sobre a soma das integrais das funções algébricas que leva às *funções abelianas*. No capítulo das séries infinitas, há o *teste de convergência de Abel* e o *teorema de Abel* sobre séries de potências. Os grupos comutativos da álgebra abstrata são chamados hoje *grupos abelianos*.

A atormentado a vida toda pela pobreza e sofrendo dos pulmões, Abel jamais conseguiu cargo de professor numa universidade. Dois dias depois de morrer tragicamente em Froland, na Noruega, em 1829, uma tardia carta lhe era enviada com um convite para trabalhar na Universidade de Berlim.

Embora Abel tivesse merecido pouco reconhecimento, em vida, do governo de seu país, sua figura agora aparece em alguns selos postais da Noruega³. Mas os matemáticos, à sua maneira característica, erigiram monumentos muito mais duradouros a Abel, pois seu nome está perpetuado em abundantes teoremas e teorias. Sobre Abel, certa feita assim se pronunciou Hermite: “Ele deixou material para que os matemáticos se ocupem por 500 anos”. Mathias Keilhau, amigo íntimo de Abel, concebeu a ideia de erigir em sua homenagem um monumento mais convencional no local de seu repouso derradeiro. O turista de hoje que fizer uma peregrinação à igreja de Froland encontrará o monumento de Kielhau a seu amigo.

Quando indagado sobre a fórmula para avançar tão rapidamente para os primeiros escalões de sua matéria, Abel respondeu, “Estudando os mestres e não seus discípulos”.

A vida de Évariste Galois foi ainda mais curta e mais trágica do que a de Abel. Nascido perto de Paris em 1811, filho do prefeito de uma pequena cidade, o talento matemático extraordinário de Galois começou a se mostrar pouco depois de completar 15 anos de idade. Por duas vezes tentou ingressar na Escola Politécnica mas em ambas foi reprovado devido ao seu despreparo para cumprir as exigências formais dos examinadores que, por sua vez, falharam ao não perceber seu gênio. Outro golpe se seguiu: seu pai, sentindo-se perseguido pelos clérigos, suicidou-se. Sem esmorecer, Galois por fim entrou na Escola Normal, em 1829, onde deveria se habilitar para o ensino. Mas, movido por simpatias democráticas, envolveu-se nas agitações da Revolução de 1830 o que lhe valeu, além da expulsão da escola, vários meses de prisão. Pouco depois da sua libertação, em 1832, com 22 anos incompletos, uma manobra envolvendo um caso amoroso arrastou-o a um duelo a pistola em que foi morto.

³ Entre outros matemáticos homenageados com sua estampa em selos postais figuram: Arquimedes, Aristóteles, Farkas e János Bolyai, Boscovich, Brahe, Buffon, L. N. M. Carnot, N. L. S. Carnot, Ch'ang Hong, Ch'unh Chih, Chaplygin, Copernico, Cristescu, Cusanus, d'Alembert, da Vinci, Descartes, de Witt, Dürer, Einstein, Euler, Galileu, Gauss, Gerbert, Hamilton, Helmholtz, Hiparco, Huygens, Kepler, Kovalevsky, Krylov, Lagrange, Laplace, Leibniz, Liapunov, Lobachevsky, Lorentz, Mercator, Monge, Nasir-eddin, Newton, Ostrogradsky, Pascal, Poincaré, Popov, Pitágoras, Ramanujan, Riese, Stevin, Teixeira, Titeica e Torricelli. Os países mais generosos quanto a isso com seus matemáticos têm sido a Rússia e a França; a Inglaterra apenas recentemente prestou esse tipo de homenagem; nos Estados Unidos essa iniciativa aconteceu apenas duas vezes. Da Vinci, Galileu, Copernico e Einstein foram lembrados por quatro ou mais países diferentes.

Galois dominou os grandes textos de matemática de seu tempo com a facilidade de quem lê uma novela, percorreu os artigos de Legendre, Jacobi e Abel para depois dedicar-se à sua própria criação. Com 17 anos de idade alcançou resultados de grande importância, mas duas memórias que enviou à Academia de Ciências se extraviaram, aumentando sua frustração. Em 1830 foi publicado um artigo de sua autoria sobre equações, com resultados visivelmente baseados numa teoria geral. Na noite que precedeu o duelo, percebendo plenamente que com toda a certeza seria morto, escreveu um testamento científico na forma de uma carta a um amigo. Esse testamento diz respeito a algumas de suas descobertas não publicadas que, para serem esmiuçadas posteriormente, exigiram o talento de grandes matemáticos: elas revelaram conter a teoria dos grupos e a teoria de Galois (como é chamada agora). Essa teoria, baseada em conceitos da teoria dos grupos, fornece critérios para a possibilidade das construções com régua e compasso e para a resolubilidade de equações por radicais.



Évariste Galois
(Coleção David Smith)

Várias das memórias e manuscritos de Galois, encontrados entre seus papéis após sua morte, foram publicados por Joseph Liouville (1809-1882) em 1846 em seu *Journal de Mathématique*. Porém, uma avaliação completa das realizações de Galois só aconteceria em 1870, quando Camille Jordan (1838-1902) as expôs em seu livro *Traité des Substitutions* e mais tarde ainda, quando Felix Klein (1849-1925) e Saphus Lie (1842-1899) brilhantemente fizeram uso delas na geometria⁴.

⁴ Para uma discussão dos mitos em torno de Galois e sua obra ver o artigo de Tony Rothman, "Genius and biographers: the fictionalization of Évariste Galois", *The American Mathematical Monthly*, n° 89, 1982, pp. 84-106.

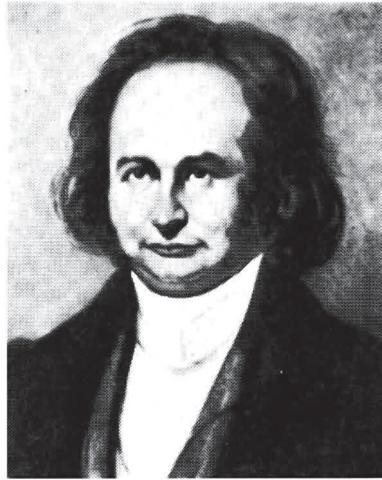
O estudo dos grupos começou essencialmente com Galois; foi ele o pioneiro no uso (1830) da palavra “grupo” em seu sentido técnico. As pesquisas em teoria dos grupos foram então levadas adiante por Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) e outros que se sucederam, para o caso particular dos grupos de substituições. Com o subsequente notável trabalho de Arthur Cayley (1821-1895), Ludwig Sylow (1832-1918), Sophus Lie, Georg Frobenius (1848-1917), Felix Klein, Henri Poincaré (1854-1912), Otto Holder (1859-1937) e outros, o estudo dos grupos assumiu sua forma abstrata independente e se desenvolveu rapidamente. A noção de grupo veio a alcançar um grande papel codificador em geometria (ver Seção 14-8) e em álgebra serviu como uma estrutura atômica de coesão, fator de grande importância para a ascensão da álgebra abstrata no século XX. A teoria dos grupos ainda é, nesta segunda metade do século XX, um campo de pesquisas muito produtivo em matemática.

13.7 *Jacobi e Dirichlet*

A Revolução Francesa, com sua ruptura ideológica com o passado e suas muitas mudanças violentas, criou condições altamente favoráveis para o desenvolvimento da matemática. Assim, no século XIX, a matemática recebeu grande impulso, primeiro na França e depois, à medida que as forças responsáveis por esse avanço se espalharam pelo norte da Europa, na Alemanha e, ainda mais tarde, na Grã-Bretanha. A nova matemática começou a se libertar dos laços que a ligavam à mecânica e à astronomia e uma nova perspectiva se anunciou. Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851) e Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) foram dois eminentes matemáticos alemães que participaram da fase inicial de deslocamento do centro de atividades matemáticas da França para a Alemanha.

Descendente de judeus, Jacobi nasceu em Potsdam em 1804. Estudou na Universidade de Berlim, onde se doutorou em 1825. Dois anos mais tarde era indicado professor extraordinário em Königsberg; mais dois anos e era guindado à condição de professor permanente. Em 1842, com uma pensão do governo da Prússia, renuncia à sua cadeira em Königsberg e transfere-se para Berlim, onde viveu até sua morte prematura em 1851.

Difícilmente um grande pesquisador em matemática é também um grande professor de matemática. Jacobi foi uma das exceções, tendo sido, inquestionavelmente, o maior professor de matemática de sua geração, estimulando e influenciando um número sem precedentes de alunos talentosos. Suas pesquisas mais celebradas em matemática são aquelas concernentes às funções elípticas. Ele e Abel, independente e simultaneamente, lançaram as bases da teoria dessas funções, tendo Jacobi introduzido o que hoje constitui essencialmente a notação para elas. Jacobi, ao lado de Cauchy, foi talvez o matemático que mais contribuiu para a teoria dos determinantes. Foi com ele que a palavra *determinante* recebeu aceitação final. Desde logo usou o determinante funcional que posteriormente Sylvester iria chamar de *Jacobiano* e que os alunos encontram no estudo da teoria das funções. Jacobi também contribuiu para a teoria dos números, para a teoria das equações diferenciais, tanto ordinárias como parciais, para o cálculo de variações, o problema dos três corpos e outros problemas de dinâmica.



Carl Gustav Jacobi
(Coleção David Smith)

A maioria dos estudantes pensa que antes de fazer pesquisa é preciso dominar tudo que já foi realizado. Para contrabalançar esse conceito e estimular um interesse adiantado pelo trabalho independente, Jacobi contava a parábola: “Seu pai nunca teria se casado, e você nunca teria nascido, se ele insistisse em conhecer *todas* as garotas do mundo antes de se casar com *uma*”. Na defesa da pesquisa pura contra a pesquisa aplicada, frisava: “A verdadeira finalidade da ciência é a honra do espírito humano”. Imitando Platão, que dizia “Deus geometriza eternamente”, Jacobi dizia “Deus aritmetiza eternamente”.

Jacobi foi sempre generoso na apreciação de seus grandes contemporâneos no campo da matemática. De uma das obras-primas de Abel disse, “Está acima de meus louvores e acima de meu próprio trabalho”.

Dirichlet nasceu em Düren no ano de 1805 e sucessivamente exerceu o magistério em Breslau e Berlim. Com a morte de Gauss foi indicado para sucedê-lo em Göttingen, uma homenagem justa a um matemático tão talentoso, ex-aluno de Gauss e um eterno admirador de seu mestre. Em Göttingen esperava poder terminar os trabalhos incompletos de Gauss, mas a morte prematura em 1859 obstou-lhe esse projeto.

Proficiente em alemão e francês, Dirichlet serviu admiravelmente como um elo entre a matemática e os matemáticos das duas nações. Talvez sua realização mais celebrada tenha sido a análise penetrante que fez da convergência das séries de Fourier, uma empreitada que o levou a generalizar o conceito de função (ver Seção 15-3). Dirichlet contribuiu muito para facilitar a compreensão de alguns dos mais abstrusos métodos de Gauss, mas também deu colaborações próprias notáveis à teoria dos números; sua bela *Vorlesungen über Zahlentheorie* ainda constitui uma das mais lúcidas introduções às pesquisas sobre a teoria dos números de Gauss. Uma das dívidas que temos para com ele é a aplicação de métodos infinitesimais à teoria dos números. Dirichlet era

amigo íntimo, expositor e admirador de Jacobi. Seu nome aparece nos cursos superiores de matemática ligado com a *série de Dirichlet*, a *função de Dirichlet* e o *princípio de Dirichlet*.



Lejeune Dirichlet
(Coleção David Smith)

Conta-se uma história tocante envolvendo Dirichlet e seu grande mestre Gauss. Em 16 de julho de 1849, decorridos exatamente 50 anos do doutorado de Gauss, houve uma celebração em Göttingen. Como parte da festa, a certa altura, Gauss deveria acender seu cachimbo com uma parte dos originais das *Disquisitiones arithmeticae*. Dirichlet, que estava presente, se horrorizou com o que lhe parecia um sacrilégio. No último momento, ele corajosamente salvou o trabalho das mãos de Gauss e guardou aquela relíquia pelo resto da vida; seus editores acharam-na entre seus papéis depois de sua morte.

A descrição que se faz de Dirichlet é a de um homem nobre, sincero, humano e modesto mas que, ao contrário de Jacobi, não parecia hábil para lidar com os espíritos jovens. Quando um colega de seu filho manifestou a este um certo ciúme por não ter um pai tão talentoso para ajudá-lo, o filho deu a resposta, lamentável mas memorável, seguinte: “Oh! Meu pai não sabe as mínimas coisas”. O engraçado sobrinho de Dirichlet, Sebastian Hensel, registrou em suas memórias que a instrução matemática que recebeu de seu tio na sexta e na sétima séries do ginásio foi a experiência mais terrível de sua vida.

Dirichlet era muito desleixado no que se refere à correspondência familiar. Quando nasceu seu primeiro filho ele não escreveu para o sogro, morando então em Londres, para comunicar o evento. O sogro, quando o encontrou finalmente, comentou ter imaginado que Dirichlet “se disporia pelo menos a escrever que $2 + 1 = 3$ ”. Esse espirituoso sogro não era outro senão Abraham Mendelssohn, um dos filhos do filósofo Moses Mendelssohn e pai do compositor Felix Mendelssohn.

O cérebro de Dirichlet, como o de Gauss, encontra-se preservado no departamento de fisiologia da Universidade de Göttingen.

13.8 Geometria não euclidiana

Dois desenvolvimentos matemáticos notáveis e revolucionários ocorreram na primeira metade do século XIX. O primeiro foi a descoberta, perto de 1829, de uma geometria autoconsistente, diferente da geometria usual de Euclides; o segundo foi a descoberta, em 1843, de uma álgebra diferente da álgebra familiar dos números reais. Voltaremos nossa atenção agora para esses dois desenvolvimentos, discutindo primeiro o que se refere à geometria.

Há evidências de que desenvolver logicamente a teoria das paralelas acarretou consideráveis dificuldades aos gregos antigos. Euclides enfrentou essas dificuldades definindo retas paralelas como retas coplanares que não se interceptam por mais que sejam prolongadas em ambas as direções e adotando como suposição seu agora famoso postulado das paralelas. Esse postulado (ver Seção 5-7 para seu enunciado) carece da concisão e da compreensibilidade simples dos demais, além de, em hipótese alguma, possuir a característica de ser “autoevidente”. Na verdade ele é o recíproco da Proposição I 17 e para os gregos antigos parecia mais uma proposição do que um postulado. Ademais, Euclides não fez nenhum uso desse postulado até alcançar a Proposição I 29. Assim, era natural ter a curiosidade de saber se esse postulado era realmente necessário e cogitar que talvez ele pudesse ser deduzido, como teorema, dos outros nove “axiomas” e “postulados” ou, pelo menos, ser substituído por um equivalente mais aceitável.

Dos muitos substitutivos encontrados para o postulado das paralelas de Euclides, o mais comumente usado é aquele que se tornou conhecido nos tempos modernos devido ao matemático e físico escocês John Playfair (1748-1819), embora essa particular alternativa tivesse sido usada por outros e tivesse mesmo sido enunciada já no século V por Proclo. É o substitutivo mais comum nos atuais textos elementares de geometria: *Por um ponto fora de uma reta dada não há mais do que uma paralela a essa reta*⁵. Outras alternativas para o postulado das paralelas são (1) *Há pelos menos um triângulo cuja soma dos ângulos internos é igual a um ângulo raso.* (2) *Existe um par de triângulos semelhantes e não congruentes.* (3) *Existe um par de retas igualmente distantes uma da outra em todos os pontos* (4) *Por três pontos não colineares pode-se traçar uma circunferência.* (5) *Por qualquer ponto no interior de um ângulo menor que 60° pode-se sempre traçar uma reta que intercepta ambos os lados do ângulo.*

As tentativas de provar o postulado das paralelas como um teorema a partir dos restantes nove “axiomas” e “postulados” ocuparam os geômetras por mais de 2000 anos e culminaram em alguns dos desenvolvimentos de maior alcance da matemática

⁵ A Proposição I 27 garante a existência de pelo menos uma paralela.

moderna. Foram dadas muitas “demonstrações” do postulado mas, cedo ou tarde, mostrou-se que cada uma baseava-se numa suposição tácita equivalente a ele.

A primeira investigação realmente científica do postulado das paralelas só foi publicada em 1773 e seu autor é o jesuíta italiano Girolamo Saccheri (1667-1733).

Pouco se conhece sobre a vida de Saccheri. Nasceu em São Remo, mostrou acentuada precocidade quando jovem, concluiu seu noviciado na Ordem Jesuíta com 23 anos de idade e passou o resto de sua vida ocupando cargos de professor universitário. Enquanto ensinava retórica, filosofia e teologia no Colégio Jesuíta de Milão, Saccheri leu os *Elementos* de Euclides e se encantou com o poderoso método de *reductio ad absurdum*. Mais tarde, quando ensinava filosofia em Turim, publicou sua *Lógica demonstrativa* na qual a novidade principal era a aplicação do método de *reductio ad absurdum* ao tratamento da lógica formal. Alguns anos mais tarde, quando era professor da Universidade de Pávia, teve a ideia de aplicar seu método favorito de *reductio ad absurdum* ao estudo do postulado das paralelas de Euclides e recebeu permissão para imprimir um pequeno livro intitulado *Euclides ab omni naevo vindicatus* (Euclides Livre de Toda Imperfeição), que veio à luz em Milão, em 1733, apenas uns poucos meses depois de sua morte.

Nesse trabalho sobre o postulado das paralelas, Saccheri aceita as 28 proposições iniciais dos *Elementos* de Euclides que, como já observamos antes, não necessitam do postulado das paralelas para sua demonstração. Com a ajuda desses teoremas, ele empreendeu o estudo do quadrilátero $ABCD$ (Ver Figura 114) no qual os ângulos A e B são retos e os lados AD e BC são iguais. Traçando as diagonais AC e BD e usando então teoremas simples de congruência (que se encontram entre as 28 proposições iniciais de Euclides), Saccheri mostrou facilmente, como poderia fazê-lo um aluno do primeiro grau, que os ângulos D e C são iguais. Há então três possibilidades: os ângulos D e C são ângulos agudos, retos ou obtusos iguais. Saccheri referiu-se a essas três possibilidades como *hipótese do ângulo agudo*, *hipótese do ângulo reto* e *hipótese do ângulo obtuso*. O plano de trabalho consistia em mostrar que a suposição da hipótese do ângulo agudo ou a suposição da hipótese do ângulo obtuso levam a uma contradição; então, por *reductio ad absurdum*, deve valer a hipótese do ângulo reto, a qual, Saccheri mostrou, implica o postulado das paralelas. Assumindo tacitamente a infinitude da reta, Saccheri prontamente eliminou a hipótese do ângulo obtuso, mas o caso referente à hipótese do ângulo agudo mostrou-se muito mais difícil. Após obter muitos dos teoremas agora clássicos da chamada geometria não euclidiana, Saccheri, de maneira insatisfatória e inconvincente, forçou uma contradição no desenvolvimento de suas ideias através de noções nebulosas sobre elementos infinitos. Não tivesse ele se mostrado tão ávido de exhibir uma contradição e, em vez disso, tivesse admitido sua incapacidade de alcançá-la e, sem dúvida, os méritos da descoberta da geometria não euclidiana caberiam a ele. Seu trabalho recebeu pouca consideração de seus contemporâneos e logo foi esquecido⁶, e somente em 1889 foi ressuscitado por seu conterrâneo Eugênio Beltrami.

⁶ Há uma explicação alternativa, envolvendo uma insinuação desagradável de impedimento de circulação, oferecida para responder pelo longo descaso para com a obra-prima de Saccheri. Ver, por exemplo, E. T. Bell, *The Magic of Numbers*, cap.25.

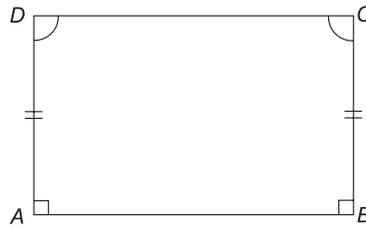


Figura 114

33 anos após a publicação da obra de Saccheri, o suíço Johann Heinrich Lambert escreveu uma investigação semelhante intitulada *Die Theorie der Parallellinien* que, porém, só foi publicada depois de sua morte. Lambert tomou um quadrilátero contendo três ângulos retos (metade de um quadrilátero de Saccheri) como figura fundamental e considerou três hipóteses conforme o quarto ângulo fosse agudo, reto ou obtuso. E foi consideravelmente além de Saccheri na dedução de proposições com as hipóteses do ângulo agudo ou do ângulo obtuso. Assim, como Saccheri, ele mostrou que para as três hipóteses a soma dos ângulos de um triângulo é menor que, igual a ou maior que dois ângulos retos, respectivamente, e então, indo além, que a deficiência abaixo de dois ângulos retos, na hipótese do ângulo agudo, ou o excesso de dois ângulos retos, na hipótese do ângulo obtuso, é proporcional à área do triângulo. Observou a semelhança entre a geometria decorrente da hipótese do ângulo obtuso e a geometria esférica, na qual a área de um triângulo é proporcional a seu excesso esférico e conjecturou que a geometria decorrente da hipótese do ângulo agudo poderia talvez se verificar numa esfera de raio imaginário. A hipótese do ângulo obtuso foi eliminada, fazendo a mesma suposição tácita de Saccheri, mas suas conclusões com respeito à hipótese do ângulo agudo foram imprecisas e insatisfatórias.

Adrien-Marie Legendre (1752-1833), o eminente analista francês do século XVIII, começou diferente, considerando as hipóteses de a soma dos ângulos internos de um triângulo ser menor que, igual a ou maior que dois ângulos retos. Assumindo tacitamente a infinitude da reta, foi capaz de eliminar a terceira hipótese, mas, apesar de várias tentativas, não conseguiu descartar-se da primeira. Esses vários esforços apareceram nas sucessivas edições de seus *Éléments de Géométrie*, um texto largamente adotado, e dessa forma Legendre contribuiu muito para popularizar o problema do postulado das paralelas.

Não é de se surpreender que não se tenha encontrado nenhuma contradição sob a hipótese do ângulo agudo, pois hoje se sabe que a geometria desenvolvida a partir de uma coleção de axiomas compreendendo um conjunto básico acrescido da hipótese do ângulo agudo é tão consistente quanto a geometria euclidiana desenvolvida a partir do mesmo conjunto básico acrescido da hipótese do ângulo reto, isto é, o postulado das paralelas é independente dos demais postulados e devido a isso não pode ser deduzido dos demais. Os primeiros a suspeitarem desse fato foram o alemão Gauss, o húngaro Janos Bolyai (1802-1860) e o russo Nicolai Ivanovitch Lobachevsky (1793-1856). Esses homens abordaram a questão através do postulado das paralelas na forma de Playfair, considerando as três possibilidades seguintes: Por um ponto dado pode-se traçar *mais*

do que uma, exatamente uma ou nenhuma paralela a uma reta dada. Essas situações equivalem, respectivamente, às hipóteses do ângulo agudo, reto e obtuso. Novamente, assumindo a infinitude da reta, elimina-se o terceiro caso facilmente. Suspeitando, a tempo, que sob a primeira hipótese abrigava-se uma geometria consistente, cada um deles independentemente levou a termo desenvolvimentos geométricos e trigonométricos amplos a partir dessa hipótese (ângulo agudo).

É provável que Gauss tenha sido o primeiro a alcançar conclusões penetrantes relativas à hipótese do ângulo agudo, mas, como nunca publicou nada sobre essa matéria em toda a sua vida, a honra da descoberta dessa particular geometria não euclidiana deve ser dividida entre Bolyai e Lobachevsky. Bolyai publicou suas primeiras descobertas em 1832 num apêndice de um livro de matemática de seu pai. Mais tarde ficou-se sabendo que Lobachevsky havia publicado descobertas semelhantes já em 1829-1830, mas, devido às barreiras da língua e à lentidão com que as informações de novas descobertas se propagavam naqueles dias, seu trabalho permaneceu ignorado na Europa Ocidental por vários anos. Parece uma questão de somenos discutir aqui as teorias complicadas, e talvez infundadas, explicando como cada um desses homens poderia ter obtido e se apropriado de informações sobre as descobertas de algum dos outros. À época eram consideráveis a suspeição e as acusações de plágio.

Janos (ou Johann) Bolyai era um oficial húngaro do exército austríaco, filho de Farkas (ou Wolfgang) Bolyai, um professor provinciano de matemática, de longa data amigo pessoal de Gauss. O jovem Bolyai sem dúvida recebeu estímulo considerável para estudar o postulado das paralelas da parte de seu pai que, em tempos anteriores, havia demonstrado interesse pelo problema. Já em 1823 Janos Bolyai começou a entender a verdadeira natureza do problema que enfrentava e, numa carta escrita a seu pai naquele ano, mostrou o entusiasmo que tinha por seu trabalho. Nessa carta ele revelou a disposição de publicar um ensaio sobre a teoria das paralelas tão logo encontrasse tempo e oportunidade para pôr o material em ordem, e exclamou, “Do nada eu criei um universo novo e estranho”. O pai insistiu para que o tratado proposto fosse publicado como um apêndice de um alentado trabalho semifilosófico seu, em dois volumes, sobre matemática elementar. O desenvolvimento e arranjo das ideias transcorreram mais lentamente do que Janos previra, mas finalmente, em 1829, ele submeteu o manuscrito concluído a seu pai e três anos mais tarde, em 1832, o ensaio aparecia como um apêndice de 26 páginas do primeiro volume do trabalho de seu pai⁷. Janos Bolyai jamais publicou nada depois disso, embora tivesse deixado uma pilha de manuscritos. Seu interesse principal era com o que ele chamava “a ciência absoluta do espaço” referindo-se com isso à coleção das proposições que independem do postulado das paralelas e que, por consequência, valem tanto na geometria euclidiana como na nova geometria.

Nicolai Ivanovitch Lobachevsky passou a maior parte de sua vida na Universidade de Kazan, primeiro como aluno, depois como professor de matemática e finalmente

⁷ Para uma tradução inglesa desse apêndice, ver R. Bonola, *Non-Euclidian Geometry*, ou D. E. Smith, *A Source Book in Mathematics*, pp. 375-88. Ambos os textos figuram na bibliografia ao fim do capítulo.

como reitor. Seu primeiro artigo sobre geometria não euclidiana foi publicado em 1829 e 1830 no *Kasan Bulletin*, dois ou três anos antes de o trabalho de Bolyai aparecer impresso. Essa memória mereceu muito pouca atenção na Rússia e, por ter sido escrita em russo, praticamente nenhuma em outros lugares. Lobachevsky deu continuidade a seus esforços iniciais com outras exposições. Por exemplo, na expectativa de alcançar um grupo mais amplo de leitores, ele publicou, em 1840, um pequeno livro escrito em alemão intitulado *Geometrische Untersuchungen Zur Theorie der Parallellinien* (Investigações Geométricas sobre a Teoria das Paralelas)⁸, e mais tarde, em 1855, um ano antes de sua morte e algum tempo depois de ficar cego, uma abordagem final, mais condensada, em francês, com o título de *Pangéométrie* (Pangeometria)⁹. As informações sobre novas descobertas disseminavam-se tão lentamente naqueles tempos que Gauss com certeza jamais ouvira falar do trabalho de Lobachevsky antes do aparecimento do texto em alemão citado; e não teve conhecimento de Janos Bolyai antes de 1848. Embora Lobachevsky não tivesse vivido para ver concedido a seu trabalho um reconhecimento amplo, hoje a geometria não euclidiana desenvolvida por ele costuma ser chamada de *geometria de Lobachevsky*.



Nicolai Lobachevsky
(Coleção da Biblioteca Pública de Nova York)

A real independência do postulado das paralelas dos outros postulados da geometria euclidiana só foi estabelecida inquestionavelmente quando se forneceram demonstrações da consistência da hipótese do ângulo agudo. Estas não demoraram a vir e foram produzidas por Beltrami, Arthur Cayley, Felix Klein, Henri Poincaré e outros.

⁸ Para uma tradução inglesa, ver R. Bonola, *Non-Euclidean Geometry*, que figura na bibliografia ao fim do capítulo.

⁹ Para uma tradução inglesa, ver D. E. Smith, *A Source Book in Mathematics*, pp. 360-74, que figura na bibliografia ao fim do capítulo.

O método consistia em construir um modelo na geometria euclidiana, de modo que o desenvolvimento abstrato da hipótese do ângulo agudo pudesse dar uma interpretação concreta numa parte do espaço euclidiano. Então, qualquer inconsistência na geometria não euclidiana implicaria uma inconsistência correspondente na geometria euclidiana (ver Exercício 13.11).

Em 1854, Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) mostrou que, descartando-se a infinitude da reta, e admitindo-se simplesmente que a reta seja ilimitada, então, com alguns outros ajustamentos pequenos nos demais postulados, pode-se desenvolver uma outra geometria não euclidiana consistente a partir da hipótese do ângulo obtuso. As três geometrias, a de Bolyai e Lobachevsky, a de Euclides e a de Riemann foram batizadas por Klein em 1871 de *geometria hiperbólica*, *geometria parabólica* e *geometria elíptica*, respectivamente.

13.9 A libertação da geometria¹⁰

A consequência imediata da descoberta de geometrias não euclidianas consistentes internamente foi, é claro, a solução final do secular problema do postulado das paralelas. O postulado das paralelas mostrou-se independente das outras suposições da geometria euclidiana e, portanto, não podia ser deduzido dessas outras suposições como um teorema.

Uma consequência de alcance muito maior foi a libertação da geometria de seus moldes tradicionais. Despedaçou-se uma convicção secular e profundamente arraigada de que apenas uma geometria era possível e abriu-se caminho para a criação de muitos outros sistemas geométricos. Os postulados da geometria tornaram-se, para os matemáticos, meras hipóteses cuja veracidade ou falsidade físicas não lhes diziam respeito; o matemático pode tomar seus postulados para satisfazer seu gosto, desde que eles sejam consistentes entre si. As características de “autoevidência” e “veracidade” atribuídas aos postulados desde os tempos dos gregos deixaram de ser consideradas pelos matemáticos. Com a possibilidade de inventar geometrias puramente “artificiais”, tornou-se evidente que o espaço físico devia ser visto como um conceito empírico derivado de nossas experiências exteriores e que os postulados da geometria, formulados para descrever o espaço físico, são simplesmente expressões dessas experiências, como as leis de uma ciência física. O postulado de Euclides, por exemplo, na medida em que tenta interpretar o espaço real, revela ter o mesmo tipo de validade da lei de queda livre dos corpos de Galileu; isto é, ambos são leis que decorrem da observação e ambos são suscetíveis de verificação dentro dos limites do erro experimental.

¹⁰ O material desta Seção foi adaptado do tratamento mais completo dado no Capítulo 3 de *An Introduction to the Foundations and Fundamental Concepts of Mathematics*, de Howard Eves e C. V. Newsom, edição revista, Nova York, Holt, Rinehart and Winston, 1965.

Esse ponto de vista, de que a geometria, quando aplicada ao espaço, é uma ciência experimental, choca-se fortemente com a teoria do espaço de Emmanuel Kant (1724-1804), que dominava o pensamento filosófico à época da descoberta da geometria de Lobachevsky. A teoria kantiana sustentava que o espaço é uma estrutura já existente no espírito humano, e que os postulados da geometria euclidiana são juízos *a priori* impostos ao espírito humano, e que sem esses postulados não é possível nenhum raciocínio consistente sobre o espaço. Que este ponto de vista não é sustentável prova-o a criação da geometria de Lobachevsky. A teoria kantiana predominava tão amplamente naquele tempo que quem defendesse um ponto de vista contrário corria o risco de ser considerado meio maluco. Foi o desejo de evitar os protestos dos “beócios” que impediu Gauss de publicar seus pontos de vista sobre a geometria não euclidiana.

A criação da geometria de Lobachevsky não só libertou a geometria como também teve um efeito semelhante com a matemática como um todo. A matemática despontou como uma criação arbitrária do espírito humano e não como algo necessariamente ditado a nós pelo mundo em que vivemos. A questão foi colocada elegantemente por E. T. Bell nas seguintes palavras:

Da mesma maneira que um romancista cria personagens, diálogos e situações dos quais ele é, ao mesmo tempo, autor e senhor, o matemático inventa à vontade os postulados sobre os quais baseia seus sistemas matemáticos. Tanto o romancista como o matemático podem ser influenciados pelo meio ambiente na escolha e tratamento de seu material; mas nenhum deles é compelido por uma necessidade extra-humana, eterna, a necessariamente criar certos personagens ou a inventar certos sistemas¹¹.

A criação das geometrias não euclidianas, puncionando uma crença tradicional e rompendo com um hábito de pensamento secular, desferiu um golpe duro no ponto de vista da verdade absoluta em matemática. Nas palavras de Georg Cantor: “A essência da matemática está em sua liberdade”.

13.10 A emergência de estruturas algébricas

As operações usuais de adição e multiplicação efetuadas no conjunto dos inteiros positivos são operações binárias: a cada par de inteiros positivos a e b associam-se univocamente inteiros c e d , chamados, respectivamente, soma de a e b e produto de a por b , e denotados pelos símbolos

$$c = a + b \quad \text{e} \quad d = a \times b.$$

¹¹ E. T. Bell, *The Development of Mathematics*, p. 330.

Essas operações no conjunto dos inteiros positivos têm algumas propriedades ou leis básicas. Por exemplo, se a , b e c indicam inteiros positivos arbitrários, temos

1. $a + b = b + a$ (propriedade comutativa da adição).
2. $a \times b = b \times a$ (propriedade comutativa da multiplicação).
3. $(a + b) + c = a + (b + c)$ (propriedade associativa da adição).
4. $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ (propriedade associativa da multiplicação).
5. $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$ (propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição).

No início do século XIX a álgebra era considerada simplesmente como a aritmética simbólica¹². Em outras palavras, em vez de trabalhar com números específicos, como fazemos em aritmética, em álgebra empregamos letras que representam esses números. As cinco propriedades acima são, portanto, afirmações sempre válidas na álgebra dos inteiros positivos. Mas, como se trata de afirmações simbólicas, é imaginável que elas possam se aplicar a outros conjuntos de elementos que não os inteiros positivos, desde que forneçamos definições adequadas para as duas operações envolvidas. De fato, é isso o que ocorre (ver, por exemplo, os casos focalizados no Exercício 13.13).

Segue-se que as cinco propriedades básicas dos inteiros positivos há pouco listadas podem também ser consideradas como propriedades de outros sistemas de elementos, inteiramente diferentes. As consequências das cinco propriedades precedentes constituem uma álgebra aplicável aos inteiros positivos, bem como a outros sistemas, isto é, existe uma *estrutura algébrica* (as cinco propriedades básicas e suas consequências) comum ligada a muitos sistemas diferentes. As cinco propriedades básicas podem ser consideradas como os postulados de um tipo particular de estrutura algébrica, e qualquer teorema que decorra formalmente desses postulados será aplicável a qualquer interpretação que se ajuste às cinco propriedades básicas. Vistas as coisas assim, cortam-se então os laços da álgebra com a aritmética, tornando-se aquela um campo de estudos puramente hipotético-dedutivo formal.

Os primeiros vislumbres dessa visão moderna da álgebra surgiram por volta de 1830 na Inglaterra, com o trabalho de Georg Peacock (1791-1858), um ex-aluno e professor da Universidade de Cambridge que mais tarde se tornou deão de Ely. Peacock foi um dos primeiros a estudar seriamente os princípios fundamentais da álgebra, e em 1830 publicou seu *Treatise on Algebra* no qual procurou dar à álgebra um tratamento lógico equiparável ao dos *Elementos* de Euclides, com o que ganhou o epíteto de “o Euclides da Álgebra”. Peacock distinguia entre o que chamava “álgebra aritmética” e “álgebra simbólica”. A primeira era considerada por ele como o estudo resultante do uso de símbolos para denotar os números decimais positivos usuais, juntamente com os símbolos operatórios,

¹² Esta é ainda a visão da álgebra na escola secundária e, com frequência, no início do curso superior.

como o de adição e o de multiplicação, aos quais podem-se sujeitar esses números. Assim, na “álgebra aritmética”, certas operações são limitadas por sua aplicabilidade. Numa subtração, $a - b$, por exemplo, devemos ter $a > b$. A “álgebra simbólica” de Peacock, por outro lado, adota as operações da “álgebra aritmética” mas ignora suas restrições. Por exemplo, a subtração na “álgebra simbólica” difere da mesma operação na “álgebra aritmética” pelo fato de que na primeira ela sempre tem sentido. A justificativa dessas regras de extensão da “álgebra aritmética” para a “álgebra simbólica” era chamada por Peacock de *princípio da permanência das formas equivalentes*. A “álgebra simbólica” de Peacock é uma “álgebra aritmética” universal cujas operações são determinadas pelas da “álgebra aritmética”, enquanto as duas álgebras caminham juntas, e pelo princípio da permanência das formas em todos os outros casos.

O princípio da permanência das formas equivalentes foi considerado um conceito de grande alcance em matemática, e teve um papel histórico significativo em questões como o desenvolvimento inicial da aritmética do sistema de números complexos e a extensão das leis da potenciação, do caso de expoentes inteiros positivos para outros mais gerais. Na teoria dos expoentes, por exemplo, se a é um número racional positivo e n é um inteiro positivo, então a^n é, por definição, o produto de n fatores iguais a a . Dessa definição decorre facilmente que, para quaisquer inteiros positivos m e n , $a^m a^n = a^{m+n}$. Pelo princípio da permanência das formas equivalentes, afirmava Peacock que na “álgebra simbólica” se tem então $a^m a^n = a^{m+n}$, não importa de que natureza possam ser a base a e os expoentes m e n . O nebuloso princípio da permanência das formas equivalentes hoje está na lata do lixo da matemática, mas muitas vezes, quando tentamos estender uma definição, orientamo-nos de maneira que a definição mais geral preserve algumas das propriedades daquela que pretendemos generalizar.

Alguns contemporâneos britânicos de Peacock levaram avante seus estudos e empurraram a noção de álgebra para mais perto da maneira como modernamente se entende essa matéria. Assim, num artigo de Duncan Farquharson Gregory (1813-1844), publicado em 1840, as leis comutativa e distributiva da álgebra foram nitidamente trazidas à luz. Augustus De Morgan (1806-1871), outro membro da escola britânica de algebristas, deu algumas contribuições adicionais ao esclarecimento dos fundamentos da álgebra. No trabalho algo tateante da escola britânica, pode-se divisar a emergência da ideia de estrutura algébrica e a preparação para o programa postulacional no desenvolvimento da álgebra. Logo as ideias da escola britânica se espalharam pelo continente europeu, onde, em 1867, mereceram cuidadosa atenção de Hermann Hankel (1839-1873), um historiador da matemática alemão. Porém, antes ainda de surgir o tratamento de Hankel, o matemático irlandês William Rowan Hamilton (1805-1865) e o matemático alemão Hermann Günther Grassmann (1809-1877) tinham publicado resultados de grande alcance, resultados esses que levaram à libertação da álgebra, da mesma maneira que as descobertas de Lobachevsky e Bolyai levaram à libertação da geometria, e que abriram as comportas da álgebra abstrata. O trabalho notável de Hamilton e Grassmann será considerado na próxima seção.

13.11 A libertação da álgebra

A geometria, como vimos, permaneceu acorrentada à sua versão euclidiana até que Lobachevsky e Bolyai, em 1829 e 1832, libertaram-na de suas amarras, criando uma geometria igualmente consistente em que abriram mão de um dos postulados de Euclides. Com esse trabalho destruiu-se a antiga convicção de que só poderia haver uma única geometria, abrindo-se o caminho para a criação de muitas outras.

Para a álgebra pode-se contar uma história semelhante. Parecia inconcebível, no início do século XIX, que pudesse haver uma álgebra diferente da álgebra comum da aritmética. Tentar, por exemplo, a construção de uma álgebra consistente na qual não se verificasse a lei comutativa da multiplicação não só provavelmente não ocorria a ninguém na época, como também, se ocorresse, certamente seria descartada por parecer uma ideia ridícula; afinal de contas, como seria possível uma álgebra lógica na qual $a \times b$ fosse diferente de $b \times a$? Era essa a impressão sobre a álgebra quando, em 1843, William Rowan Hamilton foi forçado, por considerações físicas, a inventar uma álgebra em que a lei comutativa da multiplicação não valia. O passo decisivo, por parte de Hamilton, de abandonar a lei comutativa não foi fácil de dar; só foi dado depois de vários anos de cogitações em torno de um mesmo problema particular.

Entrar na motivação física subjacente à criação de Hamilton nos levaria muito longe. Talvez a melhor abordagem, para nossos propósitos, seja através do elegante tratamento dos números complexos, como pares de números reais, dado por Hamilton¹³. Os matemáticos da época, como muitos calouros de cursos de matemática hoje, consideravam um número complexo como um híbrido estranho da forma $a + bi$, onde a e b são números reais e i é algum tipo de número tal que $i^2 = -1$ e admitiam ainda que se efetuassem a adição e a multiplicação de dois desses números como se cada um deles fosse um polinômio linear em i , substituindo i^2 , sempre que aparecesse, por -1 . Dessa maneira, encontra-se para a adição

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

e, para a multiplicação

$$(a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Se se tomam esses resultados como definições para a adição e a multiplicação de pares de números complexos, não é difícil mostrar que a adição e a multiplicação são comutativas e associativas, e que a multiplicação é distributiva em relação à adição.

Ora, como um número complexo $a + bi$ fica completamente determinado pelos dois números reais a e b , ocorreu a Hamilton dar sua representação de maneira desmistificada e simples pelo par ordenado de números reais (a, b) . Definiu então a igualdade

¹³ Comunicado por Hamilton à Academia Real Irlandesa em 1833.

de dois pares (a, b) e (c, d) pelas condições $a = c$ e $b = d$. A adição e a multiplicação de tais pares foram definidas por ele (de acordo com os resultados acima) por

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \quad \text{e} \quad (a, b) (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Com essas definições, é fácil mostrar que a adição e a multiplicação de pares ordenados de números reais são comutativas e associativas e que a multiplicação é distributiva em relação à adição, assumindo-se, obviamente, que essas leis valham para a adição e a multiplicação usuais de números reais.

Deve-se notar que assim o sistema dos números reais está *imerso* no sistema dos números complexos. Isso significa que, identificando-se cada número real r com o par correspondente $(r, 0)$, essa correspondência preserva a adição e a multiplicação, pois temos

$$(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0) \quad \text{e} \quad (a, 0) (b, 0) = (ab, 0).$$

Na prática, um número complexo da forma $(r, 0)$ pode ser substituído pelo número real r associado a ele.

Para obter a forma antiga de um número complexo, a partir da forma de Hamilton, notemos que todo número complexo (a, b) pode ser escrito como

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0) (0, 1) = a + bi,$$

onde se representa $(0, 1)$ pelo símbolo i e se identificam $(a, 0)$ e $(b, 0)$ com os números reais a e b . Finalmente, observemos que

$$i^2 = (0, 1) (0, 1) = (-1, 0) = -1.$$

Dessa forma eliminou-se a aura mística que cercava os números complexos, pois não há nada místico num par ordenado de números reais. Esse foi um grande feito matemático de Hamilton.

O sistema dos números complexos é extremamente conveniente para o estudo dos vetores e das rotações do plano¹⁴. Hamilton tentou vislumbrar um sistema de números análogo para o estudo dos vetores e das rotações do espaço tridimensional. Em suas pesquisas foi levado a considerar, não os pares ordenados (a, b) de números reais, tendo imersos neles os números reais, mas os quádruplos ordenados (a, b, c, d) de números reais, tendo imersos neles tanto os números reais como os números complexos. Em outras palavras, pondo por definição que dois quádruplos (a, b, c, d) e (e, f, g, h) são iguais se, e somente se, $a = e, b = f, c = g$ e $d = h$, Hamilton notou que era necessá-

¹⁴ Essa conveniência resulta do fato de que quando se representa um ponto Z de coordenadas (a, b) pelo número complexo $z = a + bi$, então o vetor OZ , onde O é a origem, também é representado por z .

rio definir uma adição e uma multiplicação de quádruplos ordenados de números reais de maneira que, entre outras restrições, se verificassem

$$(a, 0, 0, 0) + (b, 0, 0, 0) = (a + b, 0, 0, 0),$$

$$(a, 0, 0, 0)(b, 0, 0, 0) = (ab, 0, 0, 0),$$

$$(a, b, 0, 0) + (c, d, 0, 0) = (a + c, b + d, 0, 0),$$

$$(a, b, 0, 0)(c, d, 0, 0) = (ac - bd, ad + bc, 0, 0).$$

Chamando esses quádruplos ordenados de números reais de *quatérnios* (reais), Hamilton chegou à conclusão de que, para seus vários propósitos, tinha que definir a adição e a multiplicação de quatérnios assim:

$$\begin{aligned} (a, b, c, d) + (e, f, g, h) &= (a + e, b + f, c + g, d + h), \\ (a, b, c, d)(e, f, g, h) &= (ae - bf - cg - dh, af + be + ch - dg, \\ &\quad ag + ce + df - bh, ah + bg + de - cf). \end{aligned}$$

A partir dessas definições pode-se mostrar que o sistema dos números reais e o dos números complexos estão imersos no dos quatérnios e que, identificando-se o quatérnio $(m, 0, 0, 0)$ com o número real m , então

$$m(a, b, c, d) = (a, b, c, d)m = (ma, mb, mc, md).$$

Pode-se mostrar também que a adição de quatérnios é comutativa e associativa e que a multiplicação de quatérnios é associativa e distributiva em relação à adição. Mas não vale a lei comutativa da multiplicação. Para ver isso, considere os dois quatérnios particulares $(0, 1, 0, 0)$ e $(0, 0, 1, 0)$. Obtém-se

$$(0, 1, 0, 0)(0, 0, 1, 0) = (0, 0, 0, 1),$$

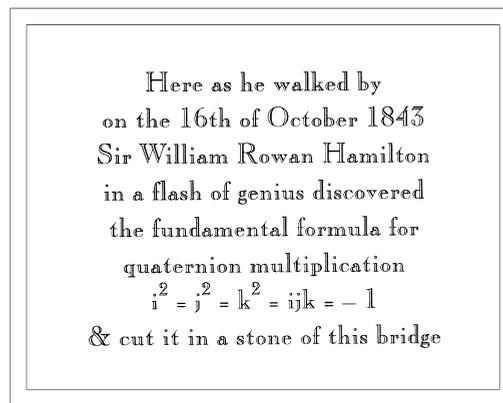
enquanto

$$(0, 0, 1, 0)(0, 1, 0, 0) = (0, 0, 0, -1) = -(0, 0, 0, 1);$$

isso “quebra” a lei comutativa. De fato, indicando-se por $1, i, j, k$, respectivamente, os *quatérnios unitários* $(1, 0, 0, 0)$, $(0, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 0)$ e $(0, 0, 0, 1)$, pode-se verificar que vale a seguinte tábua de multiplicação (encontra-se o produto desejado no quadro comum à linha que começa com o primeiro fator e à coluna que começa com o segundo fator):

x	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

Hamilton contava a história de que a ideia de abandonar a lei comutativa da multiplicação ocorreu-lhe num átimo, após 15 anos de cogitações infrutíferas, enquanto caminhava com a esposa ao longo do Royal Canal perto de Dublin, pouco antes do escurecer. Essa ideia tão pouco ortodoxa impressionou-o tanto que pegou de seu canivete e com ele gravou a parte fundamental da tábua de multiplicação dos quatérnios numa das pedras da Ponte Broughm. Hoje uma placa engastada na pedra da ponte conta-nos a história (ver figura a seguir). Dessa forma perpetua-se um dos grandes momentos da matemática.



Podemos escrever o quatérnio (a, b, c, d) na forma $a + bi + cj + dk$. Quando se representam dois quatérnios dessa maneira, eles podem ser multiplicados como polinômios em i, j e k e o produto resultante pode ser colocado na mesma forma por meio da tábua de multiplicação acima.

No ano de 1844, Hermann Günther Grassmann publicou a primeira edição de seu notável *Ausdehnungslehre* em que desenvolveu classes de álgebra de muito maior generalidade do que a álgebra dos quatérnios de Hamilton. Em vez de considerar apenas quádruplos ordenados de números reais, Grassmann considerou conjuntos ordenados de n números reais. A cada conjunto (x_1, x_2, \dots, x_n) considerado Grassmann associou um número hipercomplexo da forma $x_1e_1 + x_2e_2 + \dots + x_n e_n$, onde e_1, e_2, \dots, e_n são as unidades fundamentais de sua álgebra. Para somar ou multiplicar dois desses números hipercom-

plexos procede-se como para polinômios em e_1, e_2, \dots, e_n . A soma de dois desses números é então também um número da mesma espécie. Para fazer com que o produto de dois hipercomplexos seja também um hipercomplexo é preciso construir a tábua da multiplicação para as unidades e_1, e_2, \dots, e_n de maneira semelhante à tábua de multiplicação de Hamilton para suas unidades $1, i, j, k$. Nesse caso o grau de liberdade é considerável e podem-se criar álgebras diferentes construindo-se tábuas de multiplicação diferentes. A tábua de multiplicação é governada pela aplicação a ser feita da álgebra e pelas leis da álgebra que se desejam preservar.

Antes de encerrar esta seção, consideremos mais uma álgebra não comutativa — a álgebra das matrizes, descoberta pelo matemático inglês Arthur Cayley (1821-1895) em 1857. As matrizes surgiram para Cayley ligadas a transformações lineares do tipo

$$\begin{aligned}x' &= ax + by, \\y' &= cx + dy,\end{aligned}$$

onde a, b, c, d são números reais, e que podem ser imaginadas como aplicações que levam o ponto (x, y) no ponto (x', y') . Obviamente a transformação precedente fica completamente determinada pelos quatro coeficientes a, b, c, d , de modo que ela pode ser simbolizada pelo quadro

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

ao qual chamamos *matriz* (*quadrada, de ordem 2*). Como duas transformações da espécie considerada são iguais se, e somente se, elas possuem os mesmos coeficientes, dizemos que duas matrizes

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$$

são iguais (definição) se, e somente se, $a = e, b = f, c = g$ e $d = h$. Se a transformação dada for seguida da transformação

$$\begin{aligned}x'' &= ex' + fy', \\y'' &= gx' + hy',\end{aligned}$$

pode-se mostrar, por meio da álgebra elementar, que o resultado é a transformação

$$\begin{aligned}x'' &= (ea + fc)x + (eb + fd)y, \\y'' &= (ga + hc)x + (gb + hd)y.\end{aligned}$$

Isso leva à seguinte definição de produto de duas matrizes:

$$\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ea + fc & eb + fd \\ ga + hc & gb + hd \end{bmatrix}.$$

A adição de matrizes é definida por

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix},$$

e, se m é um número real, definimos

$$m \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} m = \begin{bmatrix} ma & mb \\ mc & md \end{bmatrix}.$$

Pode-se mostrar que na resultante álgebra das matrizes, a adição é comutativa e associativa e que a multiplicação é associativa e distributiva em relação à adição. Mas a multiplicação não é comutativa, como o exemplo a seguir mostra:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Desenvolvendo álgebras que satisfazem leis estruturais diferentes daquelas obedecidas pela álgebra usual, Hamilton, Grassmann e Cayley abriram as comportas da álgebra abstrata. De fato, enfraquecendo ou suprimindo vários postulados da álgebra usual, ou substituindo um ou mais postulados por outros, consistentes com os demais, pode-se estudar uma enorme variedade de sistemas. Esses sistemas incluem grupoides, quase-grupos, semigrupos, monoides, grupos, anéis, domínios de integridade, reticulados, anéis de divisão, anéis booleanos, álgebras booleanas, corpos, espaços vetoriais, álgebras de Jordan e álgebras de Lie, sendo os dois últimos exemplos de álgebras não associativas. Provavelmente é correto dizer que os matemáticos estudaram, até hoje, muito mais do que 200 dessas estruturas algébricas. A maior parte desse trabalho se deu no século XX e reflete o espírito de generalização e abstração que prevalece atualmente na matemática. A álgebra tornou-se o vocabulário da matemática dos dias de hoje e foi apelidada “a chave-mestra da matemática”.

13.12 Hamilton, Grassmann, Boole e De Morgan

William Rowan Hamilton, sem dúvida o maior dos irlandeses a merecer a fama em matemática, nasceu em Dublin em 1805, onde, salvo para curtas visitas aqui e ali,

passou toda a vida. Cedo ficou órfão, mas mesmo antes disso, sua criação fora confiada a um tio. A educação dada por este ao sobrinho foi penosa e eclética, mas com forte ênfase em línguas. Hamilton logo se revelou uma criança prodígio, e ao alcançar a idade de 13 anos, mais línguas estrangeiras ia dominando com o passar dos anos. Desenvolveu uma predileção especial pelos clássicos e, embora sem sucesso artístico, comprazia-se no que se tornou um anseio de toda a vida: escrever poesias. Tornou-se amigo íntimo do poeta William Wordsworth, numa relação de admiração mútua.

Foi só aos 15 anos de idade que os interesses de Hamilton mudaram, tomando-se ele de excitação pela matemática. A mudança foi consequência de seu encontro com Zerah Colburn, o calculador instantâneo americano, que, embora ainda muito jovem, dera uma exibição de seus dotes em Dublin. Pouco depois, Hamilton deu com um exemplar da *Arithmetica universalis* de Newton. Depois de ler esse texto avidamente ele então dominou a geometria analítica e o cálculo. A seguir leu os quatro volumes dos *Principia* e voltou-se para os grandes trabalhos matemáticos do continente. Ao ler a *Mécanique Céleste* de Laplace descobriu um erro matemático e em 1823 escreveu a respeito um artigo que mereceu atenção considerável. No ano seguinte entrou no Trinity College, Dublin.



William Rowan Hamilton
(Coleção Granger)

A carreira de Hamilton na universidade foi ímpar. De fato, em 1828, quando tinha apenas 22 anos de idade e ainda era aluno de graduação, foi indicado por unanimidade astrônomo real da Irlanda, diretor do Observatório de Dunsink e professor de astronomia da universidade. Pouco depois, baseado apenas na teoria matemática, prognosticou a refração cônica em cristais biaxiais, o que veio a ser confirmado experimentalmente, de maneira dramática, pelos físicos. Em 1833 comunicou à Academia Irlandesa significativo artigo em que a álgebra dos números complexos era

enfocada como uma álgebra de pares ordenados de números reais (ver Seção 13-10). Em 1835 recebeu o título de “Sir”.

Em continuidade a seu artigo de 1833, Hamilton intermitentemente, por um longo período, meditou sobre as álgebras de ternos e quádruplos de números reais, mas sempre encontrou obstáculos quanto à maneira de definir a multiplicação de maneira a preservar as leis usuais dessa operação, fazendo ao mesmo tempo com que elas se ajustassem a suas pesquisas físicas. Finalmente, num momento de intuição em 1843 (como se descreveu na Seção 13-10), ocorreu-lhe que estava pretendendo demais e que deveria sacrificar a lei comutativa; e a álgebra dos quatérnios, a primeira álgebra não comutativa, subitamente nasceu.

Durante os vinte e poucos anos restantes de sua vida, Hamilton gastou a maior parte de seu tempo e de suas energias no desenvolvimento dos quatérnios, nos quais sentia um significado revolucionário para a física-matemática. Seu grande trabalho, *Treatise on Quaternions*, veio a público em 1853, após o que se dedicou a preparar um texto ampliado, *Elements of Quaternions*, mas faleceu em Dublin em 1865, basicamente em decorrência do alcoolismo, ele que vivia em geral deprimido por um casamento infeliz, e esse trabalho não se completou. Os quatérnios ganharam defensores incondicionais, como Peter Guthrie Tait (1831-1901) da Universidade de Edimburgo, Alexander Macfarlane (1851-1913), também da Universidade de Edimburgo mas mais tarde da Universidade do Texas e da Universidade Lehigh e Charles Jaspes Joly (1864-1906), sucessor de Hamilton no Observatório de Dunsink. Com o tempo, porém, a mais flexível análise vetorial do físico e matemático americano Josiah Willard Gibbs (1839-1903) da Universidade de Yale e o tratamento mais geral de Hermann Günther Grassmann aos n -uplos, acabaram relegando os quatérnios a pouco mais do que uma interessante peça de museu. É verdade que os quatérnios foram em parte revividos em 1927 com as “variáveis spin” na teoria quântica de Wolfgang Pauli (1900-1958) e pode ser que o futuro reserve uma nova função para eles. De qualquer maneira, a grande importância dos quatérnios na história da matemática reside no fato de que sua criação por Hamilton em 1843 libertou a álgebra de suas amarras com a aritmética dos números reais, abrindo assim as comportas da álgebra abstrata.

Além de seu trabalho sobre os quatérnios, Hamilton escreveu sobre óptica, dinâmica, a solução das equações de quinto grau, o hodógrafo de uma partícula em movimento¹⁵ e soluções numéricas de equações diferenciais.

Os estudantes de física encontram o nome de Hamilton nas *funções hamiltonianas*, e nas *equações diferenciais de Hamilton-Jacobi* da dinâmica. Na teoria das matrizes há o *teorema*, a *equação* e o *polinômio* de Cayley-Hamilton; na parte de recreações matemáticas, encontra-se o *jogo hamiltoniano* com um dodecaedro regular (ver Exercício 13.24).

Talvez agrade aos americanos lembrar que nos tristes anos finais da doença e das desavenças conjugais de Hamilton, a então recém-fundada Academia Nacional de

¹⁵ Chama-se *hodógrafo* de um ponto em movimento a curva descrita pela extremidade do vetor traçado a partir de um ponto fixo e igual ao vetor velocidade do ponto móvel.

Ciências dos Estados Unidos elegeu-o como seu primeiro membro estrangeiro. Outra honra obsequiosamente concedida a Hamilton ocorreu em 1845, quando ele participou do segundo encontro da Associação Britânica em Cambridge; por uma semana ele se alojou nas dependências sagradas do Trinity College, onde, segundo a tradição, Newton escrevera seus *Principia*.

Não se deve confundir William Rowan Hamilton com seu contemporâneo Sir William Hamilton (1788-1856), o conhecido filósofo de Edimburgo. O último herdou seu título de nobreza; o primeiro conquistou-o.

Grassmann nasceu em Stettin, Alemanha, em 1809, falecendo na mesma cidade em 1877. Foi um homem de preocupações intelectuais muito amplas. Foi não só professor de matemática, mas também de religião, física, química, alemão, história e geografia. Escreveu sobre física e compôs textos escolares de alemão, latim e matemática. Nos tumultuados anos de 1848 e 1849 participou da publicação de um semanário político. Interessava-se por música, e na década de 1860 foi crítico de ópera de um jornal diário. Preparou um tratado filológico sobre plantas alemãs, editou um jornal missionário, investigou leis fonéticas, escreveu um glossário para o Rig-Veda e traduziu o Rig-Veda em versos, harmonizou canções folclóricas para três vozes, compôs seu grande tratado *Ausdehnungslehre* e criou nove de seus onze filhos.



Hermann Günther Grassmann
(Coleção David Eugene Smith, Biblioteca de Livros Raros e
Manuscritos, Universidade de Colúmbia)

Foi no ano de 1844 que Grassmann publicou a primeira edição de seu notável *Ausdehnungslehre* (Cálculo de Extensões). Infelizmente, a exposição insatisfatória e obscura de suas ideias fez com que o trabalho permanecesse praticamente desconhe-

cido por seus contemporâneos. Uma segunda formulação, editada em 1862, não obteve êxito maior. Decepcionado com a recepção dada a seu trabalho, Grassmann abandonou a matemática pelo estudo da língua e literatura sânscritas, contribuindo nesse campo com muitos artigos brilhantes.

Grassmann passou toda a sua vida em sua cidade natal, Stettin, exceto entre 1834 e 1836, anos em que lecionou matemática numa escola industrial de Berlim, tendo sucedido a Jacob Steiner nesse cargo. Embora aspirasse a um lugar numa universidade, sempre lecionou para os níveis intermediários. Seu pai foi professor de matemática e física do ginásio de Stettin e seu filho Hermann Grassmann (nascido em 1859) tornou-se também um matemático. O pai escreveu dois livros de matemática e o filho escreveu um tratado de geometria projetiva.

O *Ausdehnungslehre* tem aplicações muito amplas, não envolvendo (como foi discutido na Seção 13-10) nenhum limite para o número de dimensões. Mais recentemente a riqueza e a generalidade magníficas do trabalho de Grassmann ganharam reconhecimento e os seus métodos têm sido seguidos, especialmente na Europa Continental e nos Estados Unidos, de preferência aos de Hamilton.

Faremos agora uma breve referência a dois matemáticos britânicos, George Boole e Augustus De Morgan, que, entre outras coisas, deram continuidade ao tratamento científico dos princípios fundamentais da álgebra iniciado por Hamilton e Grassmann.

George Boole nasceu em Lincoln, Inglaterra, em 1815. Seu pai era um pequeno comerciante sempre em dificuldades, de modo que Boole recebeu uma educação escolar comum; mas empenhou-se para aprender por conta própria grego e latim. Mais tarde, quando era professor da escola primária, aprendeu matemática lendo os trabalhos de Laplace e Lagrange, estudou línguas estrangeiras, e, por intermédio de seu amigo De Morgan, interessou-se por lógica formal. Em 1847 Boole publicou um pequeno livro intitulado *The Mathematical Analysis of Logic*, louvado por De Morgan como uma obra para marcar época. Nesse trabalho Boole defendia que o caráter essencial da matemática reside em sua forma e não em seu conteúdo; a matemática não é (como alguns dicionários ainda hoje afirmam) simplesmente “a ciência das medidas e dos números”, porém, mais amplamente, qualquer estudo consistindo em símbolos juntamente com regras precisas para operar com esses símbolos, regras essas sujeitas apenas à exigência de consistência interna. Dois anos mais tarde Boole foi indicado professor de matemática do recém-fundado Queen’s College, em Cork, Irlanda. Em 1854, Boole ampliou e aclarou seu trabalho de 1847 num livro intitulado *Investigations of the Laws of Thought*, no qual lançou os fundamentos da lógica formal e de uma nova álgebra, hoje conhecida como *álgebra booleana*. Mais recentemente a álgebra booleana encontrou numerosas aplicações, como na teoria dos circuitos elétricos de chaveamento. Em 1859 Boole publicou *Treatise on Differential Equations* e depois, em 1860, *Treatise on the Calculus of Finite Differences*. Este último mantém-se ainda como um trabalho-modelo sobre o assunto. Boole faleceu em Cork em 1864.

Augustus De Morgan, cujo nome aparece aqui e ali várias vezes neste livro, nasceu (cego de um olho) em 1806, em Madras, onde seu pai tinha ligações com a Companhia das Índias Orientais. Estudou no Trinity College, Cambridge, graduando-se como

quarto wrangler*, e em 1828 tornou-se professor da recém-criada Universidade de Londres, onde, através de seus trabalhos e seus alunos, exerceu larga influência na matemática inglesa. Era bastante versado em filosofia e história da matemática, e escreveu trabalhos sobre os fundamentos da álgebra, cálculo diferencial, lógica e teoria das probabilidades. De Morgan foi um expositor muito lúcido. Seu *A Budget of Paradoxes*, um livro espirituoso e engraçado, ainda se constitui numa leitura agradável. Deu continuidade ao trabalho de Boole na álgebra dos conjuntos, enunciando o princípio da dualidade da teoria dos conjuntos, do qual as chamadas *leis de De Morgan* representam uma ilustração: Se A e B são subconjuntos de um dado conjunto universo, então o complemento da união de A com B é a intersecção dos complementos de A e de B , e o complemento da intersecção de A e B é a união dos complementos de A e B (em símbolos: $(A \cup B)' = A' \cap B'$ e $(A \cap B)' = A' \cup B'$ onde X' indica o complemento de X). Como para Boole, a matemática era para De Morgan um estudo abstrato de símbolos sujeitos a conjuntos de operações simbólicas. De Morgan foi um campeão sincero da liberdade acadêmica e da tolerância religiosa. Tocava flauta primorosamente, era sempre uma companhia agradável e um amante declarado da vida nas grandes cidades. Tinha forte inclinação por quebra-cabeças e adivinhações, e quando lhe perguntavam sua idade ou o ano de seu nascimento respondia: “Eu tinha x anos de idade no ano x^2 ”. De Morgan faleceu em Londres em 1871.



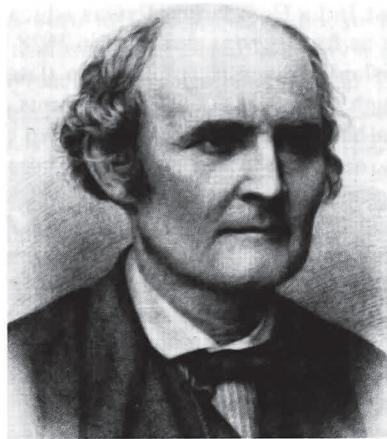
Augustus De Morgan
(Coleção David Eugene Smith, Biblioteca de Livros Raros e Manuscritos, Universidade de Colúmbia)

* Wrangler (contendor), distinção máxima em matemática oferecida por Cambridge. (N. T.)

13.13 Cayley, Sylvester e Hermite

A maior parte desta seção é dedicada a dois brilhantes matemáticos ingleses, Arthur Cayley e James Joseph Sylvester, que se estimularam mutuamente em grande escala, frequentemente desenvolveram pesquisas sobre os mesmos problemas matemáticos, criaram muita coisa em matemática e, não obstante, tinham temperamentos, estilos e pontos de vista opostos.

Arthur Cayley nasceu em 1821 na cidade de Richmond, Surrey, e estudou no Trinity College, Cambridge, graduando-se em 1842 como primeiro wrangler nos tripos* de matemática; no mesmo ano obteve o primeiro lugar no exame ainda mais difícil para o prêmio Smith. Por um período de sete anos dedicou-se ao estudo e à prática do direito, sempre tomando cuidado para que essas atividades não o impedissem de estudar matemática. Como estudante de direito esteve em Dublin para assistir a palestras de Hamilton sobre os quatérnios. Quando se criou em Cambridge, em 1863, a cátedra sadleriana, esta lhe foi oferecida e ele aceitou regê-la, abandonando assim um futuro rendoso na carreira da lei em favor de uma vida acadêmica de modestos proventos. Mas assim ele podia dedicar *todo* o seu tempo à matemática.



Arthur Cayley
(Biblioteca do Congresso)

Cayley ocupa o terceiro lugar entre os escritores de matemática mais prolíficos em toda a história dessa ciência, sendo superado apenas por Euler e Cauchy. Começou a publicar ainda como aluno de graduação em Cambridge, publicou entre 200 e 300 artigos durante seus anos de prática jurídica e continuou prolífico nessa atividade pelo resto

* Exame que determinava a classificação em Cambridge. (N. T.)

da vida. O massivo *Collected Mathematical Papers* de Cayley contém 966 artigos num total de 13 volumes *in quarto* com cerca de 600 páginas cada um. Dificilmente se encontrará uma área da matemática que não tenha sido abordada e enriquecida por Cayley. Na Seção 13-10 já consideramos seu trabalho na álgebra das matrizes. Cayley deu contribuições pioneiras à geometria analítica, à teoria das transformações, teoria dos determinantes, geometrias de dimensões superiores, teoria da partição, teoria das curvas e superfícies, o estudo de formas binárias e ternárias e a teoria das funções abelianas, teta e elípticas. Mas talvez seu trabalho mais importante tenha sido a criação e desenvolvimento da teoria dos invariantes. Pode-se encontrar o germe dessa teoria nos escritos de Lagrange, Gauss e, em particular, Boole. O problema central da teoria dos invariantes consiste em achar as funções dos coeficientes de uma dada equação algébrica que, quando as variáveis dessa equação são submetidas a uma transformação linear geral, permanecem inalteradas a menos de um fator envolvendo apenas os coeficientes da transformação. Sylvester interessou-se pelo mesmo campo de estudos e os dois, ambos residindo em Londres à época, produziram novas descobertas em rápida sucessão e em grande intensidade.

O estilo matemático de Cayley reflete sua formação jurídica, pois seus artigos são rigorosos, diretos, metódicos e claros. Tinha uma memória excepcional e parecia não esquecer nunca o que tinha visto ou lido. Era dotado, também, de um temperamento singularmente sereno, equilibrado e gentil. Cayley foi chamado “o matemático dos matemáticos”.

Cayley desenvolveu um gosto tão ardente pela leitura de romances que lia enquanto viajava, enquanto esperava por alguma reunião, enfim em qualquer momento livre que se lhe apresentasse. Durante toda sua vida leu milhares de romances, não só em inglês como também em grego, francês, alemão e italiano. Adquiriu também grande prazer pela pintura, especialmente aquarelas, para as quais revelou um talento acentuado. Foi um estudante entusiasta de botânica e da natureza de um modo geral.

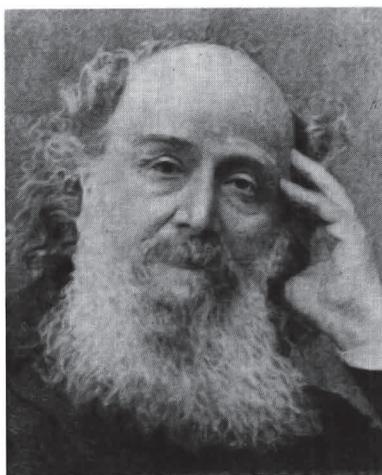
Cayley era, segundo a tradição britânica genuína, um alpinista, tendo feito frequentes viagens ao Continente para longas caminhadas e para escalar montanhas. Conta-se uma história segundo a qual ele declarava que a razão que o levava a escalar montanhas era que, embora achasse a subida árdua e cansativa, a sensação de entusiasmo que advinha de chegar ao cume era a mesma experimentada ao resolver um problema de matemática difícil ou ao completar uma teoria matemática intrincada, e era mais fácil para ele obter essa sensação escalando uma montanha.

Cayley morreu em 1895. Pouco depois, Charles Hermite registrou as seguintes palavras nos *Comptes Rendus*: “O talento matemático de Cayley se caracterizou pela clareza e extrema elegância da forma analítica; reforçado por uma capacidade incomparável de trabalho, fez com que o eminente erudito se ombreasse a Cauchy”.

James Joseph Sylvester nasceu em Londres em 1814, sendo o mais novo de uma prole numerosa. O nome da família era originalmente Joseph, mas o filho primogênito imigrou para os Estados Unidos onde, por alguma razão desconhecida, adotou o novo nome de Sylvester que passou a ser usado pelo resto da família. O irmão americano, que era atuário, sugeriu aos diretores das Lotteries Contractors dos Estados Unidos que submetessem um problema difícil de combinatória que os preocupava ao irmão James,

então com apenas 16 anos de idade. James deu uma solução satisfatória e completa o que valeu ao jovem matemático um prêmio de US\$ 500.

Em 1831 James entrou para o St. John's College, Cambridge, de onde saiu seis anos mais tarde com a láurea de segundo wrangler. De 1838 a 1840 foi professor de filosofia natural da Universidade de Londres, e então, em 1840, aceitou um convite para lecionar matemática na Universidade de Virgínia, onde ficou apenas uns poucos meses, renunciando por causa de atritos com dois alunos. Retornando à Inglaterra, trabalhou como atuário e em 1850 ganhou condição de advogado. Foi em 1846 que Sylvester se ligou a Cayley.



James Joseph Sylvester
(Coleção David Eugene Smith, Biblioteca de Livros Raros e
Manuscritos, Universidade de Colúmbia)

De 1855 a 1870 Sylvester foi professor de matemática da Real Academia Militar de Woolwich. Em 1876 retornou aos Estados Unidos como professor de matemática da Universidade Johns Hopkins em Baltimore, onde passou sete anos muito felizes e de grande produtividade, tornando-se o editor fundador da *American Journal of Mathematics* em 1878. Durante esse período em Johns Hopkins, convidou Cayley para dar na universidade uma série de palestras sobre funções abelianas, às quais ele próprio assistiu. Em 1884 aceitou a cátedra saviliana de geometria da Universidade de Oxford. Sylvester faleceu em Londres, em 1897, com 83 anos de idade.

Os primeiros artigos matemáticos de Sylvester envolviam a teoria óptica de Fresnel e o teorema de Sturm. A seguir, estimulado por Cayley, começou a dar importantes contribuições à álgebra. Escreveu artigos sobre teoria da eliminação, teoria das transformações, formas canônicas, determinantes, cálculo de formas, teoria das partições, teoria dos invariantes, método de Tchebycheff sobre número de primos dentro de certos limites, raízes latentes de matrizes, teoria das equações, teoria dos números, sistemas articu-

lados, álgebras de várias variáveis e teoria das probabilidades. Contribuiu extensamente para a terminologia matemática, cunhando tantos nomes que acabou sendo conhecido como “o Adão da matemática”.

Como já salientamos antes, Cayley e Sylvester eram pessoas diametralmente opostas quanto ao temperamento, ao estilo e aos pontos de vista. Cayley era calmo e sereno, ao passo que Sylvester irascível e explosivo. As aulas de Cayley eram preparadas e metódicas; as de Sylvester eram vagas e improvisadas. Cayley escrevia com rigor e precisão; Sylvester escrevia discursivamente com acessos ocasionais de arrebatamento. As preleções de Cayley eram peças acabadas; Sylvester muitas vezes criava matemática na sala de aula. Cayley tinha uma memória extraordinária; Sylvester muitas vezes esquecia-se de suas próprias descobertas. Cayley lia as obras matemáticas de outros; Sylvester achava maçante a leitura de trabalhos feitos por outrem. Cayley admirava os *Elementos* de Euclides; Sylvester desprezava essa obra. Cayley, apesar de resistente, era de constituição frágil; Sylvester era entroncado, musculoso e espadaúdo.

Sylvester interessou-se a vida inteira por poesia e comprazia-se escrevendo versos. Uma tarde, no Instituto Peabody, em Baltimore, ele leu seu poema *Rosalind*, que consiste em 400 versos, todos rimando com o nome da heroína “*Rosalind*”. Para não interromper o poema, ele gastou uma hora e meia lendo antes suas notas de rodapé explanatórias, muitas das quais levavam a outras considerações extemporâneas. A seguir, para o que havia restado da plateia, finalmente declamou o próprio poema. Em 1870 publicou um opúsculo intitulado *The Laws of Verse*, ao qual tinha em alto conceito.

Sylvester também se interessava por música e dedicava-se ao canto como amador. Tinha uma voz muito boa e chegou a tomar lições de canto com o famoso compositor francês Charles François Gounod. Certa feita, quando entretinha uma assembleia de operários com seu canto, comentou-se que ele tinha mais orgulho de seu C em canto do que de sua contribuição à teoria matemática dos invariantes. Numa nota de rodapé ao seu artigo “*On Newton’s rule for the discovery of imaginary roots*” ele exclamou: “Não pode a música ser descrita como a matemática dos sentidos e a matemática como a música da razão? o espírito é o mesmo! Assim, o músico *sente* a matemática e o matemático *pensa* a música”.

Talvez seja interessante assinalar que dentre os alunos particulares de matemática que Sylvester teve nos dias difíceis do começo de sua vida, o que mais veio a se destacar foi uma jovem chamada Florence Nightingale, que posteriormente tornou-se mundialmente famosa como reformadora da enfermagem hospitalar.

Muitas das primorosas descobertas de Cayley e Sylvester aparecem nos admiráveis tratados de George Salmon (1819-1904), diretor do Trinity College, Dublin, e um dos mais refinados escritores de textos de matemática avançada de seu tempo.

Grande parte do trabalho de Cayley e Sylvester foi continuada e desenvolvida pelo talentoso matemático francês Charles Hermite, que deu contribuições de monta, tanto à álgebra como à análise. Hermite nasceu em Dieuze, Lorena, em 1822, e após uma educação irregular, primeiro no Liceu Louis-le-Grand e então, por curto período, na Escola Politécnica, obteve, em 1848, o lugar de examinador de admissão desta últi-

ma. Posteriormente tornou-se professor da própria Politécnica e da Sorbonne e nesta permaneceu até sua aposentadoria em 1897. Hermite faleceu em Paris em 1901.

Embora não fosse um escritor prolífico, a maioria dos artigos de Hermite lida com questões de grande importância e seus métodos revelam alta originalidade e vasta aplicabilidade. Já quando aluno do Louis-le-Grand dois artigos de Hermite, um de qualidade excepcional, foram aceitos pela *Nouvelles Annales de Mathématiques*, revista fundada em 1842 e dedicada aos interesses dos alunos de faculdades. Seu orientador, o professor Louis Paul Émile Richard, sentiu-se impelido a confidenciar ao pai de Hermite que Charles era um “novo Lagrange”. As pesquisas de Hermite confinam-se à álgebra e à análise. Escreveu sobre teoria dos números, matrizes, frações contínuas algébricas, invariantes e covariantes, quânticos, evectantes, integrais definidas, teoria das equações, funções elípticas, funções abelianas e teoria das funções. Neste último assunto ele foi o pioneiro entre os escritores franceses de sua época. A obra reunida de Hermite, editada por Émile Picard, ocupa quatro volumes.

Os dois resultados matemáticos fundamentais devidos a Hermite, e que envolvem interesse mais amplo, são a resolução da equação geral quártica, em 1858, por meio de funções elípticas e a demonstração da transcendência do número e em 1873. O êxito de Hermite com a equação quártica levou mais tarde à constatação de que uma raiz da equação geral de grau n pode ser representada em termos dos coeficientes da equação por meio de funções de Fuchs, e o método empregado para provar a transcendência de e foi utilizado por Lindemann em 1882 para provar que π é transcendente.

Hermite nasceu com uma deformidade em sua perna esquerda e claudicou a vida inteira, necessitando de uma bengala para movimentar-se. Um dos benefícios decorrentes desse mal foi que Hermite não precisou prestar qualquer tipo de serviço militar. Uma desvantagem foi que, após um ano de Escola Politécnica, ele foi excluído, pois as autoridades sustentavam que sua manqueira tornava-o inapto para as carreiras abertas aos alunos bem sucedidos na escola. Apesar desse defeito e das dificuldades iniciais para conseguir se firmar profissionalmente, Hermite manteve sempre inalterado o mais agradável humor, sendo por isso uma pessoa muito querida por todos que o conheciam. Muitos matemáticos mostraram-se generosos para com os jovens que lutavam por reconhecimento; quanto a essa faceta, Hermite é considerado, inquestionavelmente, o caráter mais nobre em toda a história da matemática. Em 1856, depois de uma séria enfermidade, ele que era um agnóstico tolerante, foi convertido por Cauchy ao catolicismo.

A questão da existência em matemática é altamente polêmica. Por exemplo, os entes matemáticos e suas propriedades têm uma existência própria, numa espécie de mundo sombrio e eterno, e nós, perambulando por esse mundo, acidentalmente os descobrimos? Nesse mundo sombrio, as medianas dos triângulos concorrem, como sempre o fizeram, num ponto que trissecciona cada uma delas, e alguém, provavelmente em tempos longínquos, vagando em espírito por esse mundo sombrio, deu com essa já existente propriedade. Nesse mundo sombrio, muitas outras propriedades notáveis das figuras geométricas sempre existiram, mas ninguém jamais topou com elas, nem topará provavelmente por muitos anos. Nesse mundo sombrio, os números naturais e sua legião de belas propriedades já existem, mas essas propriedades somente se tornarão existentes para

o mundo real do homem quando alguém que vá perambular nesse mundo sombrio topar com elas.



Charles Hermite
(Coleção David Eugene Smith, Biblioteca de Livros Raros e Manuscritos, Universidade de Colúmbia)

Essa ideia de existência matemática foi defendida por Pitágoras, e muitos outros matemáticos depois dele. Hermite era um crente declarado na existência desse mundo sombrio da matemática. Para ele os números e suas bonitas propriedades sempre tiveram existência própria, e vez por outra algum Colombo da matemática depara-se com algumas dessas propriedades já existentes e anuncia sua *descoberta* ao mundo.

13.14 Academias, sociedades e periódicos

O grande aumento verificado na atividade científica e matemática numa época em que não existiam periódicos especializados levou à criação de muitos círculos de discussão com encontros a intervalos de tempo regulares. Alguns desses grupos cristalizaram-se em academias, a primeira delas em Nápoles em 1560, seguida da Accademia dei Lincei em Roma em 1603. Então, seguindo a tendência da atividade matemática rumo ao norte no século XVII, fundaram-se a Royal Society em Londres em 1662 e a Académie Royale des Sciences em Paris no ano de 1666. Essas academias eram centros onde se podiam apresentar e discutir artigos eruditos.

A necessidade de periódicos para a divulgação imediata de novas descobertas científicas e matemáticas foi sendo sentida crescentemente, alcançando hoje essa forma de literatura de proporções enormes. Segundo uma estimativa, antes de 1700 havia

apenas 17 periódicos que estampavam artigos matemáticos, o primeiro deles surgido em 1665. No século XVIII apareceram 210 desses periódicos, e no século XIX o número de novas revistas dessa natureza alcançou 950. Muitas delas, porém, não raro tinham pouca relação com a matemática pura. Talvez o mais antigo dos periódicos correntes, dedicados principalmente ou inteiramente à matemática avançada, seja o francês *Journal de l'École Polytechnique*, lançado em 1794. Muitas revistas de matemática mais elementar surgiram antes, mas um número grande delas objetivava mais entreter o assinante com quebra-cabeças e problemas do que promover o conhecimento matemático. Alguns dos atuais periódicos matemáticos com nível de excelência começaram a circular na primeira metade do século XIX. Entre estes os pioneiros são a revista alemã *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, surgida em 1826, cujo fundador e primeiro editor foi A. L. Crelle e a revista francesa *Journal de Mathématiques Pures e Appliquées*, nascida em 1836 sob a editoria de J. Liouville. Essas revistas são comumente chamadas *Journal de Crelle* e *Journal de Liouville* em referência a seus fundadores. Na Inglaterra, a *Cambridge Mathematical Journal*, fundada em 1839, passou a se chamar *Cambridge and Dublin Mathematical Journal* de 1846 a 1854 e em 1855 ganhou o título de *Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics*. A *American Journal of Mathematics*, cujo primeiro editor foi J. J. Sylvester, remonta ao ano 1878. Os periódicos mais antigos dedicados aos interesses dos professores de matemática, mais que aos interesses da pesquisa matemática, são *Archiv der Mathematik und Physik*, de 1841, e *Nouvelles Annales de Mathématiques*, fundado um ano depois.

Na segunda metade do século XIX ocorreu um progresso que fez com que o número de revistas de matemática com nível de excelência crescesse. Trata-se da criação de muitas e grandes sociedades de matemática que passaram a publicar regularmente periódicos como órgãos oficiais. A mais antiga dessas sociedades é a London Mathematical Society, organizada em 1865, e que imediatamente passou a publicar nos *Proceedings*. Essa entidade veio a tornar-se a sociedade nacional de matemática da Inglaterra. Sete anos mais tarde criou-se em Paris a Société Mathématique de France, cuja revista oficial tem o nome de *Bulletin*. Na Itália, em 1884, organizou-se a sociedade Circolo Matematico di Palermo que, três anos mais tarde, passou a publicar o *Rendiconti*. Por volta dessa época foi fundada na Escócia a Edinburgh Mathematical Society que desde então mantém seu *Proceedings*. A American Mathematical Society surgiu em 1888, mas com outro nome, e começou a publicar o *Bulletin*; a partir de 1900 começou a publicar *Transactions* e, desde 1950, *Proceedings*. A Alemanha foi o último dos países líderes em matemática a organizar uma sociedade nacional de matemática: a Deutsche Mathematiker-Vereinigung só se organizou em 1890, começando a publicar seu órgão oficial, de nome *Jahresbericht*, em 1892. Essa última revista publicou muitas matérias extensas sobre avanços modernos em diferentes campos da matemática, algumas atingindo centenas de páginas. Essas matérias podem ser consideradas precursoras das alentadas enciclopédias de matemática posteriores. As excelentes revistas de matemática da ex-União Soviética*, embora de origem mais recente, não podem ser ignoradas.

* No original, de 1990, União Soviética. (N. T.)

Hoje quase todos os países têm a sua sociedade de matemática, sendo que muitos têm outras associações dedicadas a vários níveis de instrução. Essas sociedades e associações tornaram-se fatores importantes na organização e no desenvolvimento da atividade de pesquisa em matemática e no aperfeiçoamento dos métodos de ensino do assunto. Em geral, cada uma dessas sociedades e associações patrocina a publicação de pelo menos um periódico.

Com o aprofundamento da especialização em matemática no século XX, apareceu um grande número de revistas especializadas que se destinam a áreas extremamente restritas da pesquisa. De grande valia para os pesquisadores é a revista *Mathematical Reviews*, organizada por vários grupos de matemáticos dos Estados Unidos e de outros países. Essa revista surgiu em 1940 e contém resumos e críticas da literatura matemática corrente no mundo.

Exercícios

13.1 O teorema fundamental da álgebra

Empregando o procedimento usado por Gauss em sua primeira demonstração do teorema fundamental da álgebra, mostre que

- (a) $z^2 - 4i = 0$ tem uma raiz complexa.
- (b) $z^2 + 2iz + i = 0$ tem uma raiz complexa.

13.2 Propriedades básicas da congruência

No primeiro capítulo de *Disquisitiones arithmeticae*, Gauss introduziu a definição (aqui um tanto condensada) e a notação seguintes: Dois inteiros a e b se dizem *côngruos módulo n* (onde n é um inteiro positivo), o que se simboliza por

$$a \equiv b \pmod{n},$$

se, e somente se, n divide a diferença $a - b$. A seguir Gauss desenvolveu a álgebra da relação de congruência, a qual tem muito em comum com a álgebra da relação de igualdade usual, mas também muitas diferenças importantes. Se n é um inteiro positivo fixo e a, b, c e d são inteiros arbitrários, mostre que:

- (a) $a \equiv a \pmod{n}$ (propriedade reflexiva).
- (b) Se $a \equiv b \pmod{n}$, então $b \equiv a \pmod{n}$ (propriedade simétrica).
- (c) Se $a \equiv b \pmod{n}$ e $b \equiv c \pmod{n}$, então $a \equiv c \pmod{n}$ (propriedade transitiva).

- (d) Se $a \equiv b \pmod{n}$ e $c \equiv d \pmod{n}$, então $a + c \equiv b + d \pmod{n}$ e $ac \equiv bd \pmod{n}$.
- (e) Se $a \equiv b \pmod{n}$, então $a + c \equiv b + c \pmod{n}$ e $ac \equiv bc \pmod{n}$.
- (f) Se $a \equiv b \pmod{n}$, então $a^k \equiv b^k \pmod{n}$, para todo inteiro positivo k .
- (g) Se $ca \equiv cb \pmod{n}$, então $a \equiv b \pmod{n/d}$, onde d é o máximo divisor comum de c e n .
- (h) Se $ca \equiv cb \pmod{n}$ e c e n são primos entre si, então $a \equiv b \pmod{n}$.
- (i) Se $ca \equiv cb \pmod{p}$, onde p é um número primo que não divide c , então $a \equiv b \pmod{p}$.
- (j) Se $ab \equiv 0 \pmod{n}$, e se a e b são primos entre si, então ou $a \equiv 0 \pmod{n}$ ou $b \equiv 0 \pmod{n}$.
- (k) Se a é primo com n , então a congruência linear $ax \equiv b \pmod{n}$ tem apenas uma solução positiva x que não excede n .

13.3 Gauss e os números

- (a) Usando essencialmente o método do aluno Gauss, encontre a soma dos n termos de uma progressão aritmética de termo inicial a e termo final l .
- (b) Considerando 0 como o primeiro número triangular, expresse cada número natural de 1 a 100 como soma de três números triangulares.
- (c) Mostre, utilizando a lei da reciprocidade quadrada, que se p e q são números primos ímpares distintos e se $p \equiv q \equiv 3 \pmod{4}$, então $(q|p) = -(p|q)$.

13.4 Séries de Fourier

Pode-se mostrar, admitindo que a série trigonométrica da Seção 13-2 pode ser integrada termo a termo de $-\pi$ a π , que se uma função $f(x)$ admite uma representação por meio dessa série, então os coeficientes na série são dados por

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx,$$

$$(n \geq 0)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx \, dx.$$

- (a) Mostre que $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, dx$, quando $n \neq 0$.

(b) Mostre que a série de Fourier da função $f(x)$ definida por

$$\begin{aligned} f(x) &= 2, & -\pi < x < 0, \\ f(x) &= 1, & 0 < x < \pi, \end{aligned}$$

é

$$f(x) = \frac{3}{2} - \frac{2}{\pi} \left(\text{sen } x + \frac{1}{3} \text{sen } 3x + \frac{1}{5} \text{sen } 5x + \dots \right).$$

(c) Fazendo $x = \pi/2$ na série de Fourier de (b), obtenha a relação

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots.$$

(d) Mostre que a função de (b) pode ser expressa sobre o domínio dado, por

$$f(x) = \frac{3}{2} - \frac{x}{2|x|}.$$

13.5 Cauchy e as séries infinitas

(a) Estabeleça a convergência ou divergência das seguintes séries, usando o teste da razão de Cauchy.

1. $1 + 1/2! + 1/3! + \dots$
2. $1/5 - 2/5^2 + 3/5^3 - \dots$
3. $1 + 2^2/2! + 3^3/3! + \dots$

(b) Estabeleça a convergência ou divergência das séries seguintes, usando o teste da raiz de Cauchy.

1. $|\text{sen } \alpha|/2 + |\text{sen } 2\alpha|/2^2 + |\text{sen } 3\alpha|/2^3 + \dots$
2. $2 |\text{sen } \alpha| + 2^2 |\text{sen } 2\alpha| + 2^3 |\text{sen } 3\alpha| + \dots$

(c) Estabeleça a convergência ou divergência das seguintes séries, usando o teste da integral de Cauchy.

1. $1/e + 2/e^2 + 3/e^3 + \dots$
2. $1/(2 \ln 2) + 1/(3 \ln 3) + 1/(4 \ln 4) + \dots$

13.6 Teoria dos grupos

Um *grupo* é um conjunto de elementos não vazio G sobre o qual está definida uma operação binária $*$ satisfazendo as seguintes condições:

$G1$: Para quaisquer a, b e c em G , $(a * b) * c = a * (b * c)$.

$G2$: Existe um elemento i em G tal que, para todo a em G , $a * i = a$. (O elemento i é chamado *elemento neutro* do grupo.)

$G3$: Para cada elemento a de G existe um elemento a^{-1} de G tal que $a * a^{-1} = i$. (O elemento a^{-1} é chamado *elemento inverso* de a .)

Demonstre os seguintes teoremas para um grupo.

- Se a, b e c estão em G e $a * c = b * c$, então $a = b$.
- Para todo a em G , $i * a = a * i$.
- O elemento neutro de um grupo é único.
- Para cada a de G , $a^{-1} * a = a * a^{-1}$.
- Se a, b e c estão em G e $c * a = c * b$, então $a = b$.
- Cada elemento de um grupo tem apenas um único inverso.
- Se a está em G , então $(a^{-1})^{-1} = a$.
- Se a e b estão em G , então existem elementos x e y em G tais que $a * x = b$ e $y * a = b$.

13.7 Exemplos de grupos

Mostre que cada um dos sistemas seguintes é um grupo.

- O conjunto dos inteiros para a adição usual.
- O conjunto dos números racionais não nulos para a multiplicação usual.
- O conjunto das translações do plano cartesiano

$$\begin{aligned}x' &= x + h, \\T: y' &= y + k,\end{aligned}$$

onde h e k são números reais, e $T_2 * T_1$ indica o resultado de se aplicar primeiro a translação T_1 e depois a translação T_2 .

- Os quatro números $1, -1, i, -i$ (onde $i^2 = -1$) para a multiplicação usual.
- Os 4 inteiros $1, 2, 3$ e 4 para a multiplicação módulo 5.
- As 6 expressões

$$r, 1/r, 1 - r, 1/(1 - r), (r - 1)/r, r/(r - 1),$$

indicando por $a * b$ o resultado de substituir a expressão b em lugar de r na expressão a . (Este grupo é conhecido como *grupo da razão dupla*.)

13.8 Grupos abelianos

Um grupo que satisfaça o postulado adicional

G4: Se a e b pertencem a G , então $a * b = b * a$ é chamado *comutativo* ou *grupo abeliano*. Quais dos grupos em 13.7 são abelianos?

13.9 Quadrilátero de Saccheri

Um quadrilátero $ABCD$ em que os lados AD e BC são iguais e os ângulos em A e em B são retos chama-se *quadrilátero de Saccheri*. O lado AB é chamado *base*, o lado oposto, DC , *cume* e os ângulos em D e C , *ângulos do cume* do quadrilátero. Prove, usando teoremas elementares de congruência de triângulos (que não dependem do postulado das paralelas), as seguintes relações:

- (a) Os ângulos do cume de um quadrilátero de Saccheri são iguais.
- (b) O segmento que une os pontos médios da base e do cume é perpendicular a ambos.
- (c) Traçando-se pelas extremidades da base de um triângulo as perpendiculares à reta pelos pontos médios dos outros dois lados, forma-se um quadrilátero de Saccheri.
- (d) O segmento que une os pontos médios dos lados iguais de um quadrilátero de Saccheri é perpendicular ao segmento que une os pontos médios da base e do cume.

13.10 A hipótese do ângulo agudo

Na *hipótese do ângulo agudo* admite-se que os ângulos iguais do cume de um quadrilátero de Saccheri sejam agudos, ou que o quarto ângulo do quadrilátero de Lambert seja agudo. No que se segue admitiremos a hipótese do ângulo agudo.

(a) Seja ABC um triângulo retângulo e seja M o ponto médio da hipotenusa AB . Em A construa ângulo $BAD = \text{ângulo } ABC$. A partir de M trace MP perpendicular a CB . Sobre AD marque $AQ = PB$ e trace MQ . Prove que os triângulos AQM e BPM são congruentes, mostrando assim que o ângulo AQM é reto e que os pontos Q , M e P são colineares. Então $ACPQ$ é um quadrilátero de Lambert com ângulo agudo em A . Isso posto, prove que, *com a hipótese do ângulo agudo, a soma dos ângulos de um triângulo retângulo qualquer é menor do que dois ângulos retos*.

(b) Admitamos que o ângulo A de um triângulo ABC seja não menor do que o ângulo B ou do que o ângulo C . Trace a altura relativa a A e mostre, usando (a), que,

com a hipótese do ângulo agudo, a soma dos ângulos de qualquer triângulo é menor do que dois ângulos retos. A diferença entre dois ângulos retos e a soma dos ângulos de um triângulo chama-se *deficiência* do triângulo.

(c) Considere dois triângulos, ABC e $A'B'C'$, em que os ângulos correspondentes são iguais. Se $A'B' = AB$, então esses triângulos são congruentes. Suponha $A'B' < AB$. Sobre AB marque $AD = A'B'$, e sobre AC marque $AE = A'C'$. Então os triângulos ADE e $A'B'C'$ são congruentes. Mostre que E não pode coincidir com C , visto que então o ângulo BCA seria maior do que o ângulo DEA . Mostre também que E não pode estar no prolongamento de AC , porque neste caso DE cortaria BC num ponto F e a soma dos ângulos do triângulo FCE excederia 2 ângulos retos. Portanto E está entre A e C e $BCED$ é um quadrilátero convexo. Mostre que a soma dos ângulos desse quadrilátero é igual a 4 ângulos retos. Mas isso é impossível com a hipótese do ângulo agudo. Segue-se então que não podemos ter $A'B' < AB$ e que, com a hipótese do ângulo agudo, dois triângulos são congruentes se os três ângulos de um são respectivamente iguais aos três ângulos do outro. Em outras palavras, na geometria hiperbólica não existem figuras semelhantes de tamanhos diferentes.

(d) Um segmento que une um vértice de um triângulo a um ponto do lado oposto chama-se *transversal*. Uma transversal divide um triângulo em dois subtriângulos; cada um destes, por sua vez, pode ser subdividido de maneira análoga, e assim por diante. Mostre que, efetuando-se a partição de um triângulo em um número finito de subtriângulos, a deficiência do triângulo original é igual à soma das deficiências dos triângulos da partição.

13.11 Um modelo euclidiano de geometria hiperbólica

Considere um círculo fixo, Σ , no plano euclidiano e interprete como plano hiperbólico o interior de Σ , um “ponto” do plano hiperbólico como um ponto euclidiano interno a Σ , e uma “reta” do plano hiperbólico como a parte de uma reta euclidiana contida no interior de Σ . Verifique que, para esse modelo, valem as seguintes proposições:

- (a) Dois “pontos” determinam uma, e uma só, “reta”.
- (b) Duas “retas” distintas têm no máximo um “ponto” em comum.
- (c) Dados um “ponto” P e uma “reta” l , por P há infinitas “retas” que não cortam l .

(d) Suponhamos que a reta euclidiana determinada pelos 2 “pontos” P e Q corte a circunferência de Σ em S e T na ordem S, P, Q, T . Interpretemos então a “distância” hiperbólica de P a Q como $\log [(QS)(PT)/(PS)(QT)]$. Se P, Q e R são 3 “pontos” de uma “reta”, mostre que “distância” PQ + “distância” QR = “distância” PR .

(e) Fixemos o “ponto” P e façamos o “ponto” Q mover-se ao longo de uma “reta” fixa no sentido de P para T . Mostre que “distância” $PQ \rightarrow \infty$.

Esse modelo foi idealizado por Felix Klein. Com as interpretações acima, mais uma interpretação conveniente de “ângulo” entre duas “retas”, pode-se mostrar que todos os postulados da geometria de Euclides, exceto o postulado das paralelas, são proposições

verdadeiras na geometria do modelo. Vimos, em (c), que para esse modelo verifica-se o postulado das paralelas de Lobachevsky e não o de Euclides. Com isso fica provado que o postulado das paralelas de Euclides não pode ser deduzido dos demais da geometria euclidiana, pois se fosse consequência dos outros postulados, ele teria que ser uma proposição verdadeira na geometria do modelo.

13.12 Geometrias não-euclidianas e o espaço físico

Devido ao entrelaçamento aparentemente inextrincável entre espaço e matéria, pode ser impossível determinar por métodos astronômicos se o espaço físico é euclidiano ou não euclidiano. Uma vez que toda mensuração envolve suposições físicas e geométricas, pode-se explicar um resultado observado de muitas maneiras diferentes, simplesmente fazendo mudanças compensatórias nas características que assumimos para o espaço e a matéria. Por exemplo, é bem possível que a discrepância observada na soma dos ângulos de um triângulo possa ser explicada mantendo-se as suposições da geometria euclidiana mas, ao mesmo tempo, modificando certas leis físicas, como algumas leis da óptica. Bem assim, a ausência de qualquer discrepância como essa poderia ser compatível com as hipóteses de uma geometria não euclidiana, juntamente com certas adaptações convenientes em nossas hipóteses sobre a matéria. Diante desses fundamentos, Henri Poincaré atreveu-se a perguntar qual a geometria verdadeira. Para tornar claro seu ponto de vista, Poincaré idealizou um universo imaginário Σ , ocupando o interior de uma esfera de raio R , para o qual admitiu as seguintes leis físicas:

1. Em cada ponto P de Σ , a temperatura absoluta T é dada por $T = k(R^2 - r^2)$, onde r é a distância de P ao centro de Σ e k é uma constante.

2. As dimensões lineares de um corpo material variam diretamente com a temperatura absoluta da posição do corpo.

3. Todos os corpos materiais de Σ assumem imediatamente as temperaturas de suas posições.

(a) Mostre que pode ocorrer de um habitante de Σ ignorar completamente as três leis físicas de seu universo.

(b) Mostre que um habitante de Σ perceberia que seu universo é infinito em extensão levando em conta que ele nunca alcançaria a fronteira dando um número finito N de passos, não importa quão grande possa ser N .

(c) Mostre que as geodésicas de Σ são curvas vergadas para o centro de Σ . Aliás, pode-se mostrar que a geodésica por dois pontos A e B de Σ é o arco de um círculo pelos pontos A e B que corta ortogonalmente o contorno da esfera.

(d) Admitamos mais uma lei física para o universo Σ : que a luz se propague através das geodésicas de Σ . Essa condição pode ser cumprida fisicamente preenchendo Σ com um gás com índice de refração adequado em cada ponto de Σ . Mostre então que as geodésicas de Σ “se afiguram retas” para um habitante de Σ .

(e) Mostre que o postulado das paralelas de Lobachevsky se verifica na geometria das geodésicas de Σ , de maneira que um habitante de Σ acreditaria viver num mundo não euclidiano. Temos aí um exemplo de um espaço comum, supostamente euclidiano, mas que devido às leis físicas diferentes parece ser não euclidiano.

13.13 Sistemas com uma estrutura algébrica comum

Mostre que cada um dos conjuntos seguintes, acompanhados das definições de $+$ e \times , satisfazem as 5 propriedades básicas dadas ao início da Seção 13-9.

(a) O conjunto dos inteiros positivos pares, com $+$ e \times indicando a adição e a multiplicação usuais.

(b) O conjunto dos números racionais, com $+$ e \times indicando a adição e a multiplicação usuais.

(c) O conjunto dos números reais, com $+$ e \times indicando a adição e a multiplicação usuais.

(d) O conjunto dos números reais da forma $m + n\sqrt{2}$, onde m e n são inteiros, com $+$ e \times indicando a adição e a multiplicação usuais.

(e) O conjunto dos *inteiros de Gauss* (números complexos $m + ni$, onde m e n são inteiros racionais e $i = \sqrt{-1}$), com $+$ e \times indicando a adição e a multiplicação usuais.

(f) O conjunto de todos os pares ordenados de números inteiros, definindo-se: $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ e $(a, b) \times (c, d) = (ac, bd)$.

(g) O conjunto de todos os pares ordenados de inteiros, definindo-se: $(a, b) + (c, d) = (ad + bc, bd)$ e $(a, b) \times (c, d) = (ac, bd)$,

(h) O conjunto de todos os pares ordenados de inteiros, definindo-se: $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ e $(a, b) \times (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$.

(i) O conjunto de todos os polinômios reais na variável x , com $+$ e \times indicando a adição e a multiplicação usuais de polinômios.

(j) O conjunto de todas as funções reais contínuas na variável x , definidas no intervalo fechado $0 \leq x \leq 1$, com $+$ e \times indicando a adição e a multiplicação usuais de funções.

(k) O conjunto consistindo em 2 elementos apenas, m e n , definindo-se

$$m + m = m,$$

$$m + n = n + m = n,$$

$$n + n = m,$$

$$m \times m = m,$$

$$m \times n = n \times m = m,$$

$$n \times n = n.$$

(1) O conjunto de todos os conjuntos de pontos do plano, inclusive o *conjunto vazio* (conjunto ideal, sem nenhum ponto), com $a + b$ indicando a união dos conjuntos a e b e $a \times b$ indicando a intersecção de a e b .

13.14 Leis algébricas

Transforme o primeiro membro de cada uma das seguintes igualdades no segundo membro, usando sucessivamente uma lei associativa, comutativa ou distributiva. Como é praxe, a multiplicação às vezes é indicada por um ponto (\cdot) e às vezes por simples justaposição dos fatores.

- (a) $5(6 + 3) = 3 \cdot 5 + 5 \cdot 6$.
- (b) $5(6 \cdot 3) = (3 \cdot 5)6$.
- (c) $4 \cdot 6 + 5 \cdot 4 = 4(5 + 6)$.
- (d) $a [b + (c + d)] = (ab + ac) + ad$.
- (e) $a [b(cd)] = (bc)(ad)$.
- (f) $a [b(cd)] = (cd)(ab)$.
- (g) $(ad + ca) + ab = a[(b + c) + d]$.
- (h) $a + [b + (c + d)] = [(a + b) + c] + d$.

13.15 Mais sobre leis algébricas

Determine se as seguintes operações binárias $*$ e $|$, definidas para os inteiros positivos, satisfazem as leis comutativa e associativa e se a operação $|$ é distributiva em relação à operação $*$.

- (a) $a * b = a + 2b, a|b = 2ab$.
- (b) $a * b = a + b^2, a|b = ab^2$.
- (c) $a * b = a^2 + b^2, a|b = a^2b^2$.
- (d) $a * b = a^b, a|b = b$.

13.16 Números complexos como pares ordenados de números reais

Considerando o tratamento de Hamilton aos números complexos como pares ordenados de números reais, mostre que

- (a) A adição é comutativa e associativa.
- (b) A multiplicação é comutativa e associativa.
- (c) A multiplicação é distributiva em relação à adição.
- (d) $(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0)$.
- (e) $(a, 0)(b, 0) = (ab, 0)$.
- (f) $(0, b) = (b, 0)(0, 1)$.
- (g) $(0, 1)(0, 1) = (-1, 0)$.

13.17 Quatérnios

- (a) Some os quatérnios $(1, 0, -2, 3)$ e $(1, 1, 2, -2)$.
- (b) Multiplique, nas duas ordens possíveis, os quatérnios $(1, 0, -2, 3)$ e $(1, 1, 2, -2)$.
- (c) Mostre que a adição de quatérnios é comutativa e associativa.
- (d) Mostre que a multiplicação de quatérnios é associativa e distributiva em relação à adição.
- (e) Mostre que o sistema dos números reais está imerso no dos quatérnios.
- (f) Mostre que o sistema dos números complexos está imerso no dos quatérnios.
- (g) Multiplique os 2 quatérnios $a + bi + cj + dk$ e $e + fi + gi + hk$ como polinômios em i, j e k e, por meio da tabela de multiplicação das unidades quaterniônicas, confira com a definição de produto de dois quatérnios.

13.18 Matrizes

- (a) Se

$$x' = ax + by, \quad x'' = ex' + fy',$$

$$y' = cs + dy, \quad y'' = gx' + hy',$$

mostre que

$$x'' = (ea + fc)x + (eb + fd)y.$$

$$y'' = (ga + hc)x + (gb + hd)y.$$

- (b) Dadas as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix},$$

calcule $A + B$, AB , BA e A^2 .

- (c) Mostre que a adição de matrizes é comutativa e associativa.
- (d) Mostre que a multiplicação de matrizes é associativa e distributiva em relação à adição.

(e) Mostre que na álgebra das matrizes a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ tem o papel de unidade e a matriz $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ tem o papel de zero.

(f) Mostre que $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

e que

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Quais as duas leis da álgebra usual violadas por essas igualdades?

(g) Mostre que a matriz $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ não tem raiz quadrada.

(h) Mostre que, para qualquer número real k ,

$$\begin{bmatrix} k & 1+k \\ 1-k & -k \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

e que, portanto, a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ tem uma infinidade de raízes quadradas.

(i) Mostre que se podem definir os números complexos como as matrizes da forma

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix},$$

onde a e b são reais, sujeitas à adição e à multiplicação usuais de matrizes.

(j) Mostre que podemos definir os quatérnios reais como matrizes da forma

$$\begin{bmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{bmatrix},$$

onde a, b, c e d são reais e $i^2 = -1$, sujeitas à adição e à multiplicação usuais de matrizes.

13.19 Álgebra de Lie e de Jordan

Uma *álgebra de Jordan* (particular), usada em mecânica quântica, tem como elementos matrizes quadradas, com a igualdade e a adição definidas como na álgebra

matricial de Cayley, mas com o produto de duas matrizes definido por $A * B = (AB + BA)/2$, onde AB representa o produto segundo Cayley das duas matrizes A e B . Embora obviamente comutativa, a multiplicação $*$ não é associativa. Uma *álgebra de Lie* difere da álgebra de Jordan acima quanto ao produto de duas matrizes A e B que é definido por $A \circ B = AB - BA$, onde de novo AB indica o produto segundo Cayley de A por B . Nesta álgebra a multiplicação não é associativa nem comutativa.

(a) Tomando

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

como elementos de uma álgebra de Jordan, calcule $A + B$, $A * B$, $B * A$, $A * (B * C)$ e $(A * B) * C$.

(b) Tomando as matrizes A , B e C de (a) como elementos de uma álgebra de Lie, calcule $A + B$, $A \circ B$, $B \circ A$, $A \circ (B \circ C)$ e $(A \circ B) \circ C$.

(c) Mostre que se verificam as seguintes relações numa álgebra de Jordan.

$$J1: A * B = B * A,$$

$$J2: (kA) * B = A * (kB) = k(A * B), \text{ sendo } k \text{ um número arbitrário.}$$

$$J3: A * (B + C) = (A * B) + (A * C),$$

$$J4: (B + C) * A = (B * A) + (C * A),$$

$$J5: A * (B * A^2) = (A * B) * A^2, \text{ onde } A^2 = A * A = AA.$$

O nome *álgebra de Jordan* foi introduzido por A. A. Albert em 1946, considerando que o estudo dessas álgebras iniciou-se em 1933 com o físico Pascual Jordan, um dos fundadores da mecânica quântica. A relação J5 é uma lei associativa especial das álgebras de Jordan.

(d) Mostre que as seguintes relações se verificam numa álgebra de Lie.

$$L1: A \circ B = -(B \circ A),$$

$$L2: (kA) \circ B = B \circ (kA) = k(A \circ B), \text{ sendo } k \text{ um número arbitrário,}$$

$$L3: A \circ (B + C) = (A \circ B) + (A \circ C),$$

$$L4: (B + C) \circ A = (B \circ A) + (C \circ A),$$

$$L5: A \circ (B \circ C) + B \circ (C \circ A) + C \circ (A \circ B) = 0.$$

As álgebras de Lie são assim chamadas em referência ao matemático norueguês Marius Sophus Lie (1842-1899) que deu início ao trabalho de estudo dos grupos contínuos. A relação L5 é conhecida como *identidade de Jacobi* das álgebras de Lie.

(e) Mostre que

$$A \circ (B * B) = 2[(A \circ B) * B],$$

$$A \circ (B \circ C) = 4[(A * B) * C - (A * C) * B],$$

$$AB = (A * B) + (A \circ B)/2.$$

(f) A *transposta* A' de uma matriz quadrada A é a matriz cujas linhas sucessivas são as colunas sucessivas de A . Uma matriz A se denomina *antissimétrica* se $A = -A'$. Mostre que

L6: Se A e B são antissimétricas, então $A \circ B$ é antissimétrica.

Um bonito teorema sobre matrizes antissimétricas foi demonstrado por Jacobi em 1827. Ele provou que o determinante de uma matriz antissimétrica de ordem ímpar é igual a zero.

13.20 Vetores

Os quatérnios de Hamilton e, até certo ponto, o cálculo de extensões de Grassmann foram idealizados por seus criadores como instrumentos matemáticos para exploração do espaço físico. Esses instrumentos revelaram-se difíceis de dominar com rapidez e de aplicar com facilidade, mas deles emergiu a análise vetorial, muito mais fácil de aprender e de aplicar. Deve-se esse trabalho especialmente ao físico americano Josiah Willard Gibbs (1839-1903). Um estudante de física elementar utiliza necessariamente o conceito gráfico de vetor como um segmento de reta orientado, ou uma flecha, obedecendo as seguintes definições de igualdade, adição e multiplicação:

1. Dois vetores a e b se dizem iguais se, e somente se, têm mesma direção, mesmo sentido e mesmo comprimento.

2. Sejam a e b dois vetores. Por um ponto do espaço, trace os vetores a' e b' iguais, respectivamente, aos vetores a e b , e complete o paralelogramo determinado por a' e b' . Então, a *soma* $a + b$ dos vetores a e b é o vetor que tem mesma direção, mesmo sentido e mesmo comprimento da diagonal da origem comum a a' e b' ao quarto vértice do paralelogramo.

3. Sejam a e b dois vetores. Por *produto vetorial*, $a \times b$, desses 2 vetores entende-se o vetor cujo comprimento é numericamente igual à área do paralelogramo definido em (2), e cujo sentido é aquele em que avança um saca-rolhas que se faz girar perpendicularmente a a' e b' no sentido do ângulo menor que 180° que levará a' em b' .

(a) Mostre que a adição de vetores é comutativa e associativa.

(b) Mostre que a multiplicação vetorial não é comutativa nem associativa.

(c) Mostre que a multiplicação vetorial é distributiva em relação à adição.

Natural de New Haven, Gibbs estudou matemática e física na Universidade de Yale, obtendo o doutorado em física em 1863. A seguir complementou seus estudos de matemática e física em Paris, Berlim e Heidelberg. Em 1871 foi indicado professor de física de Yale. Gibbs foi um físico de extrema originalidade que contribuiu notavelmente para a física-matemática. Sua *Vector Analysis* é de 1881, tendo sido lançada em 1884. Em 1902 publicou *Elementary Principles of Statistical Mechanics*. Todo estudante de análise harmônica depara-se com o curioso *fenômeno de Gibbs* das séries de Fourier.

13.21 Uma álgebra interessante

Considere o conjunto de todos os pares ordenados de números reais e as seguintes definições:

1. $(a, b) = (c, d)$, se e somente se, $a = c$ e $b = d$.
2. $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$.
3. $(a, b)(c, d) = (0, ac)$.
4. $k(a, b) = (ka, kb)$.

(a) Mostre que a multiplicação é comutativa, associativa e distributiva em relação à adição.

(b) Mostre que o produto de 3 ou mais fatores é sempre igual a $(0, 0)$.

(c) Construa uma tábua de multiplicação para as unidades $u = (1, 0)$ e $v = (0, 1)$.

13.22 Uma álgebra de pontos

Denotemos por P, Q, R, \dots os pontos de um plano. Definamos a *adição* de dois pontos P e Q por $P + Q = R$, onde o PQR é um triângulo equilátero com sentido contrário ao dos ponteiros de um relógio.

(a) Mostre que a adição de pontos assim definida não é comutativa nem associativa.

(b) Mostre que se $P + Q = R$, então $Q + R = P$.

(c) Estabeleça as identidades:

1. $(P + (P + (P + (P + (P + (P + Q)))))) = Q$.
2. $P + (P + (P + Q)) = (Q + P) + (P + Q)$.
3. $(P + Q) + R = (P + (Q + R)) + Q$.

13.23 Um grupo não abeliano infinito

(a) Mostre que o conjunto de todas as matrizes 2×2

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

onde, a, b, c e d são números racionais e $ad - bc \neq 0$, constitui um grupo em relação à multiplicação matricial de Cayley.

(b) Calcule a inversa A^{-1} da matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$, e mostre que AA^{-1} é a matriz identidade.

13.24 O jogo hamiltoniano

O Jogo Hamiltoniano consiste em determinar um caminho ao longo das arestas de um dodecaedro regular passando uma, e uma só, vez em cada um dos vértices do poliedro. O jogo foi inventado por Sir William Rowan Hamilton que designou os vértices do dodecaedro por letras representando várias cidades. Hamilton propôs vários problemas ligados a esse jogo.

1. O primeiro problema consiste em “percorrer o mundo todo”; isto é, começando numa dada cidade, visitar toda outra cidade uma, e uma só, vez e retornar à cidade inicial, podendo-se prescrever a ordem a percorrer as $n \leq 5$ primeiras cidades. Hamilton apresentou uma solução desse problema na reunião de 1857 da British Association em Dublin.

2. Outro problema sugerido por Hamilton consiste em sair de uma dada primeira cidade, visitar certas cidades especificadas numa determinada ordem, continuar de modo a percorrer todas as demais cidades uma, e uma só, vez, terminando a jornada numa segunda cidade dada.

Convidamos o leitor a ler mais detalhes sobre o jogo de Hamilton em, por exemplo, *Mathematical Recreation and Essays*, de W. W. Rouse Ball, revisto por H. S. M. Coxeter.

Temas

- 13/1 Os grandes matemáticos do século XIX.
- 13/2 Histórias e anedotas sobre Gauss.
- 13/3 O plano de Wessel-Argand-Gauss.
- 13/4 A influência de Cauchy nos cursos atuais de graduação em matemática.
- 13/5 Funções elípticas — o que são e por que são assim chamadas.
- 13/6 Exemplos de descobertas independentes e quase simultâneas na primeira metade do século XIX.
- 13/7 Os dois Sir William Hamilton.
- 13/8 De Morgan como um dos matemáticos mais citados.
- 13/9 O princípio da permanência das formas equivalentes.
- 13/10 A Analytical Society.

- 13/11 Sylvester na América.
- 13/12 Música e matemática.
- 13/13 Alguns prodígios matemáticos do século XIX.
- 13/14 Alguns matemáticos do século XIX que morreram cedo.
- 13/15 Alguns matemáticos do século XIX frequentemente associados em pares e a razão disso.
- 13/16 Os calculadores-prodígio Colburn, Bidder e Dase.
- 13/17 A álgebra no século XIX e a opinião muitas vezes expressa de que a maior parte das grandes descobertas matemáticas é feita por jovens.
- 13/18 Matemáticos de Cambridge do século XIX.
- 13/19 Sophie Germain (1776-1831).
- 13/20 Niels Abel (1802-1829).
- 13/21 Anedotas sobre Lobachevsky e Janos Bolyai.
- 13/22 George Green (1793-1841), o matemático moleiro.
- 13/23 Adolphe Quetelet (1796-1874).
- 13/24 Florence Nightingale (1820-1910) e a matemática.
- 13/25 A história de Galois.

Bibliografia

- ALTSHILLER-COURT, Nathan. *Modern Pure Solid Geometry*. 2ª ed. Nova York, Chelsea, 1964.
- BALL, W. W. R. e COXETER, H. S. M. *Mathematical Recreations and Essays*. 12ª ed. Toronto, University of Toronto Press, 1974. Reimpresso por Dover Publications, Nova York.
- BELL, E. T. *Men of Mathematics*. Nova York, Simon and Schuster, 1937. Reimpresso pela Mathematical Association of America.
- BOLYAI, John. "The science of absolute space". Trad. para o inglês por G. B. Halsted, 1895. Em *Non-Euclidean Geometry*. Nova York, Dover Publications, 1955.
- BOLZANO, Bernhard. *Paradoxes of the Infinite*. Trad. para o inglês por D. A. Steele. Londres, Routledge and Kegan Paul, 1950.
- BONOLA, Roberto. *Non-Euclidean Geometry*. Trad. para o inglês por H. S. Carslaw. Nova York, Dover Publications, 1955.
- BOYER, C. B. *The History of the Calculus and Its Conceptual Development*. Nova York, Dover Publications, 1949.
- BUCCIARRELLI, Louis e DWORSKY, Nancy. *Sophie Germain: An Essay in the History of the Theory of Elasticity*. Dordrecht, Holanda, D. Reidel, 1980.

- BÜHLER, W. K. *Gauss, A Biographic Study*. Nova York, Springer-Verlag, 1981.
- BURTON, D. M. *Elementary Number Theory*. Edição revista. Boston, Allyn and Bacon, 1980.
- CAYLEY, Arthur. *Collected Mathematical Papers*. Cambridge, 1889-1898, 14 vols.
- CROWE, M. J. *A History of Vector Analysis: The Evolution of the Idea of a Vectorial System*. Notre Dame (Ind.), University of Notre Dame Press, 1967.
- DE MORGAN, Augustus. *A Budget of Paradoxes*. Nova York, Dover Publications, 1954, 2 vols.
- DE MORGAN, Sophia Elizabeth. *Memoir of A. D. M. by His Wife Sophie Elizabeth De Morgan, with Selections from His Letters*. Londres, 1882.
- DUNNINGTON, G. W. *Carl Friedrich Gauss, Titan of Science: A Study of His Life and Work*. Nova York, Hafner, 1955.
- EVES, Howard. *A Survey of Geometry*, vol. 2. Boston, Allyn an Bacon, 1965.
- . *Elementary Matrix Theory*. Nova York, Dover Publications, 1980.
- . *Foundations and Fundamental Concepts of Mathematics*. 3ª ed. Boston, PWS-KENT Publishing Company, 1990.
- FORDER, H. G. *The Calculus of Extension*. Nova York, Cambridge University Press, 1941.
- FOURIER, J. B. J. *The Analytical Theory of Heat*. Nova York, Dover Publications, 1955.
- GALOS, E. B. *Foundations of Euclidean and Non-Euclidean Geometry*. Nova York, Holt, Rinehart and Winston, 1968.
- GANS, David. *An Introduction to Non-Euclidean Geometry*. Nova York, Academic Press, 1973.
- GAUSS, C. F. *Inaugural Lecture on Astronomy and Papers on the Foundations of Mathematics*. Trad. para o inglês por G. W. Dunnington. Baton Rouge (La.), Louisiana State University, 1937.
- . *Theory of the Motion of Heavenly Bodies*. Nova York, Dover Publications, 1963.
- . *Disquisitiones arithmeticae*. Trad. para o inglês por A. A. Clarke. New Haven (Conn.), Yale University Press, 1965.
- . *General Investigations of Curved Surfaces*. Trad. para o inglês por Adam Hiltebeitel e James Morehead. Nova York, Raven Press, 1965.
- GIBBS, J. W. e WILSON, E. B. *Vector Analysis*. New Haven (Conn.), Yale University Press, 1901.
- GRABINER, J. V. *The Origins of Cauchy's Rigorous Calculus*. Cambridge (Mass.), M. I. T. Press, 1981.
- GRATTAN-GUINNESS, I. (em colaboração com J. R. Ravetz.) *Joseph Fourier, 1768-1830*. Cambridge (Mass.), M. I. T. Press, 1972.
- GRAVES, R. P. *Life of Sir William Rowan Hamilton*. Dublin, Hodges, Figgis, 1882, 3 vols.
- GRAY, Jeremy. *Ideas of Space: Euclidean, Non-Euclidean, and Relativistic*. Oxford, Clarendon Press, 1979.
- GREENBERG, Marvin. *Euclidean and Non-Euclidean Geometry. Development and History*. São Francisco, W. H. Freeman, 1974.

- HALL, Tord. *Carl Friedrich Gauss*. Trad. para o inglês por A. Froderberg. Cambridge (Mass.), M. I. T. Press, 1970.
- HALSTED, G. B. (ed.) *Girolamo Saccheri's Euclides Vindicatus*. Nova York, Chelsea, 1986.
- HERIVEL, J. *Joseph Fourier, The Man and the Physicist*. Oxford, Clarendon Press, 1975.
- HOYLE, Fred. *Ten Faces of the Universe* (cap. 1). São Francisco, W. H. Freeman, 1977.
- INFELD, Leopold. *Whom the Gods Love: The Story of Evariste Galois*. Nova York, McGraw-Hill, 1948.
- KAGAN, V. N. *Lobachevsky and His Contribution to Science*. Moscou, Foreign Languages Publishing House, 1957.
- KLEIN, Felix. *Development of Mathematics in the 19th Century*. Trad. para o inglês por M. Ackerman. Brookline (Mass.), Mathematical Science Press, 1979.
- LANGER, R. E. *Fourier Series, the Genesis and Evolution of a Theory*. Oberlin (Ohio), The Mathematical Association of America, 1947.
- LOBACHEVSKY, Nicholas. "Geometrical researches on the theory of parallels". Trad. para o inglês por G. G. Halsted, 1891. Em R. Bonola, *Non-Euclidean Geometry*. Nova York, Dover Publications, 1955.
- MACFARLANE, Alexander. *Lectures on Ten British Mathematicians of the Nineteenth Century*. Nova York, John Wiley, 1916.
- MACHALE, Desmond. *George Boole: His Life and Work*. Boole Press, 1985.
- MARTIN, George. *The Foundations of Geometry and the Non-Euclidean Plane*. Nova York, Intext Educational Publishers, 1975.
- MERZ, J. T. *A History of European Thought in the Nineteenth Century*. Nova York, Dover Publications, 1965.
- MESCHKOWSKI, Herbert. *Ways of Thought of Great Mathematicians*. São Francisco, Holden-Day, 1964.
- . *Evolution of Mathematical Thought*. São Francisco, Holden-Day, 1965.
- MIDONICK, Henrietta O. *The Treasury of Mathematics: A Collection of Source Material in Mathematics Edited and Presented with Introductory Biographical and Historical Sketches*. Nova York, Philosophical Library, 1965.
- MUIR, Jane. *Of Men and Numbers: The Story of the Great Mathematicians*. Nova York, Dodd, Mead, 1961.
- MUIR, Thomas. *The Theory of Determinants in the Historical Order of Development*. Nova York, Dover Publications, 1960, 4 vols.
- NAVY, Lubos. *Origins of Modern Algebra*. Gröningen, Noordhoff, 1973.
- ODONNELL, Sean. *William Rowan Hamilton: Portrait of a Prodigy*. Boole Press, 1983.
- ORE, Oystein. *Niels Henrik Abel, Mathematician Extraordinary*. Minneapolis (Minn.), University of Minnesota Press, 1957.

- PEACOCK, George. *Treatise on Algebra*. 1840-1845. Nova York, Scripta Mathematica, 1940, 2 vols.
- PRASAD, Ganesh. *Some Great Mathematicians of the Nineteenth Century, Their Lives and Their Works*. Benares, Benares Mathematical Society, 1933-1934, 2 vols.
- . *Quaternion Centenary Celebration*. Dublin, Proceedings of the Royal Irish Academy, vol. 50, 1945. (Entre os artigos figura “The Dublin Mathematical School in the first half of the nineteenth century” de A. J. MacConnell.)
- SARTON, George. *The Study of the History of Mathematics*. Nova York, Dover Publications, 1957.
- SCHAAF, W. L. *Carl Friedrich Gauss*. Nova York, Watts, 1964.
- SIMONS, L. G. *Bibliography of Early American Textbooks on Algebra*. Nova York, Scripta Mathematica, 1936.
- SMITH, D. E. *Source Book in Mathematics*. Nova York, Dover Publications, 1958.
- SMITH, D. E. e GINSBURG, Jekuthiel. *A History of Mathematics in America Before 1900*. Chicago, Open Court, 1934.
- SOMMERVILLE, D. M. *Bibliography of Non-Euclidean Geometry*. Londres, Harrison, 1911.
- STIGLER, S. M. *The History of Statistics: The Measurement of Uncertainty Before 1900*. Cambridge (Mass.), Belknap Press, 1986.
- TAYLOR, E. G. R. *The Mathematical Practitioners of Hanoverian England*. Nova York, Cambridge University Press, 1966.
- TURNBULL, H. W. *The Great Mathematicians*. Nova York, New York University Press, 1961.
- VAN DER WAERDEN, B. L. *A History of Algebra from al-Khowarizmi to Emmy Noether*. Nova York, Springer-Verlag, 1985.
- WHEELER, L. P. *Josiah Willard Gibbs: The History of a Great Mind*. New Haven (Conn.), Yale University Press, 1962.
- WOLFE, H. E. *Introduction to Non-Euclidean Geometry*. Nova York, Holt, Rinehart and Winston, 1945.
- WUSSING, Hans. *The Genesis of the Abstract Group Concept*. Cambridge (Mass.), M. I. T. Press, 1984.
- YOUNG, J. W. A. (ed.) *Monographs on Topics of Modern Mathematics Relevant to the Elementary Field*. Nova York, Dover Publications, 1955.

As décadas posteriores do século XIX e a aritmetização da análise

14.1 Sequência de Euclides

Até os tempos modernos pensava-se que os gregos haviam esgotado, bastante satisfatoriamente, a geometria sintética do triângulo e do círculo. Longe disso, pois o século XIX testemunhou uma reabertura surpreendente do estudo dessa matéria. A impressão que se tem hoje é que esse campo de investigações deve ser ilimitado, dado o número enorme de artigos que apareceram e continuam aparecendo, destinados ao exame sintético do triângulo e pontos, retas e círculos associados. Grande parte desse material tem sido estendido ao tetraedro e pontos, planos, retas e esferas associados. Entrar aqui em qualquer espécie de história detalhada desse rico e extenso assunto seria uma tarefa demasiado grande. Muitos desses pontos, retas, círculos, planos e esferas especiais receberam nomes alusivos aos pesquisadores, originais ou subsequentes, que os investigaram. Entre eles figuram Gergonne, Nagel, Feuerbach, Hart, Casey, Brocard, Lemoine, Tucker, Neuberg, Simson, McCay, Euler, Gauss, Bodenmiller, Fuhrmann, Schoute, Spieker, Taylor, Droz-Farny, Morley, Miquel, Hagge, Peaucellier, Steiner, Tarry e muitos outros.

Afora algumas descobertas anteriores isoladas, como o teorema de Commandino de 1565 (ver Exercício 14.2) e o teorema de Ceva de 1678 (ver Exercício 9.10), poucas contribuições novas e significativas foram dadas à geometria sintética do triângulo e do tetraedro antes do século XIX. É verdade que Euler descobriu a reta de Euler de um triângulo (ver Exercício 14.1) em 1765, mas sua demonstração era analítica; a primeira demonstração sintética foi dada por L. N. M. Carnot em sua *Géométrie de Position* de 1803. Muitos dos importantes elementos associados a um triângulo, como o círculo de nove pontos e os pontos atribuídos impropriamente a Brocard, foram descobertos na primeira metade do século XIX, mas foi na segunda metade desse século que o assunto floresceu e se multiplicou de maneira prodigiosa. A maioria dessas descobertas se deram na França, na Alemanha e na Inglaterra. As contribuições a esse campo ainda continuam hoje, mas agora vindas de quase todas as partes do mundo.

Partes consideráveis do material acima têm sido resumidas e organizadas em numerosos textos recentes muitas vezes com o título de *Geometria Moderna*. Não é demais dizer que um curso baseado nesse material é bastante desejável na formação de professores de matemática. O material é de fato elementar, mas não é fácil e é extremamente fascinante.

14.2 Impossibilidade da resolução dos três problemas famosos com instrumentos euclidianos

Foi só no século XIX que finalmente se provou a impossibilidade da resolução dos três famosos problemas da Antiguidade com os instrumentos euclidianos. Podem-se encontrar demonstrações desse fato em muitos dos textos atuais sobre teoria das equações, onde se mostra que as condições de construtibilidade são de natureza essencialmente algébrica. Em particular, estabeleceram-se os dois teoremas seguintes¹:

1. *O número que expressa o comprimento de um segmento construtível em relação a uma dada unidade é necessariamente algébrico.*
2. *A partir de uma dada unidade de comprimento é impossível construir com os instrumentos euclidianos um segmento cuja medida é a raiz de uma equação cúbica de coeficientes racionais mas sem raízes racionais.*

O primeiro desses teoremas elimina o problema da quadratura. De fato, tomando-se como unidade de comprimento o raio de um círculo dado, o lado do quadrado equivalente procurado é $\sqrt{\pi}$. Logo, se o problema fosse resolúvel com os instrumentos euclidianos, seria possível construir um segmento de comprimento $\sqrt{\pi}$, a partir do segmento unitário. Mas isso é impossível pois π , e consequentemente $\sqrt{\pi}$, não são algébricos como mostrou Lindemann em 1882.

O segundo teorema elimina os dois outros problemas. Para o problema da duplicação tome como unidade de comprimento a aresta do cubo dado e denote por x a aresta do cubo procurado. Devemos ter então $x^3 = 2$. Se o problema fosse resolúvel com os instrumentos euclidianos, seria possível construir um segmento de comprimento x a partir do segmento unitário. Mas isso é impossível, visto que $x^3 = 2$ é uma equação cúbica de coeficientes racionais que não tem nenhuma raiz racional².

Pode-se provar que um ângulo *genérico* não pode ser trisseccionado com os instrumentos euclidianos, mostrando que um ângulo *particular* não pode ser trisseccionado. Consideremos a identidade trigonométrica

$$\cos \theta = 4 \cos^3 \left(\frac{\theta}{3} \right) - 3 \cos \left(\frac{\theta}{3} \right).$$

¹ Ver, por exemplo, Howard Eves, *A Survey of Geometry*, vol. 2, pp. 30-8.

² Lembre-se de que se o número racional irredutível a/b é raiz da equação polinomial

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0,$$

onde a_0, a_1, \dots, a_n são números inteiros, então a é fator de a_n e b é fator de a_0 . Assim, as eventuais raízes racionais de $x^3 - 2 = 0$ estariam entre os números 1, -1, 2, -2. Como uma verificação direta mostra que nenhum desses números satisfaz a equação, esta não tem raízes racionais.

Quando $\theta = 60^\circ$, fazendo $x = \cos(\theta/3)$, obtém-se

$$8x^3 - 6x - 1 = 0.$$

Seja OA um segmento unitário dado. Trace uma circunferência de centro O e raio OA , e com centro em A e raio AO trace um arco cuja intersecção com a circunferência se indica por B (ver Figura 115). Então ângulo $BOA = 60^\circ$. Seja OC , com C na circunferência, o segmento de reta tal que ângulo $COA = 20^\circ$ e seja D o pé da perpendicular por C a OA . Então $OD = \cos 20^\circ = x$. Segue-se então que se um ângulo de 60° pudesse ser trisseccionado com os instrumentos euclidianos ou, em outras palavras, se OC pudesse ser construído com esses instrumentos, também seria possível construir um segmento de comprimento x a partir de um segmento unitário OA . Mas isso é impossível devido ao segundo teorema, uma vez que a equação cúbica acima tem coeficientes racionais mas não tem raízes racionais.

Convém notar que nós não provamos que *nenhum* ângulo pode ser trisseccionado com os instrumentos euclidianos, mas apenas que *nem todos* os ângulos podem ser trisseccionados. A verdade é que um ângulo de 90° e uma infinidade de outros ângulos podem ser trisseccionados com os instrumentos euclidianos.

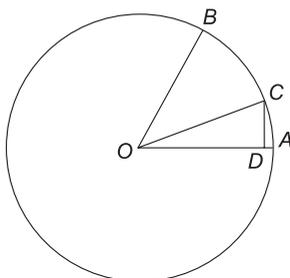


Figura 115

14.3 Compasso ou régua apenas³

O geômetra e poeta italiano do século XVIII, Lorenzo Mascheroni (1750-1800), fez a surpreendente descoberta de que todas as construções euclidianas, na medida em que os elementos dados e procurados são pontos, podem ser feitas apenas com o compasso, sendo a régua portanto um instrumento supérfluo. Obviamente não se pode traçar uma reta com o compasso, mas qualquer reta a que se chegue numa construção euclidiana

³ Para um tratamento mais completo do material desta seção, juntamente com provas, ver, por exemplo, Howard Eves, *A Survey of Geometry*, vol. 1, cap. 4.

pode ser determinada com o compasso apenas encontrando-se dois de seus pontos. Essa descoberta foi revelada em 1797 na *Geometria del Compasso* de Mascheroni.

Como numa construção euclidiana encontram-se novos pontos, a partir de pontos antigos, (1) pela intersecção de duas circunferências, (2) pela intersecção de uma reta e uma circunferência ou (3) pela intersecção de duas retas, tudo que Mascheroni tinha de fazer era mostrar como, apenas com o compasso, se podiam resolver os problemas (2) e (3), entendendo-se por reta dois de seus pontos dados.

Pouco antes de 1928, um aluno do matemático dinamarquês J. Hjelmslev (1873-1950), ao perflustar as prateleiras de uma livraria em Copenhague, deparou com um velho livro, *Euclides danicus*, publicado em 1672 por um escritor obscuro chamado Georg Mohr (1640-1679). Depois de examinar o livro, Hjelmslev se surpreendeu ao verificar que ele continha a descoberta de Mascheroni, com uma demonstração que antecedia a publicação de Mascheroni em 125 anos. Em 1890, o geômetra vienense August Adler (1863-1923) publicou uma nova demonstração dos resultados de Mascheroni fazendo uso da transformação de inversão.

Inspirando-se na descoberta de Mascheroni, o matemático francês Jean Victor Poncelet (1788-1867) considerou as construções com régua apenas. Nesse caso nem todas as construções euclidianas podem ser levadas a efeito mas, curiosamente, contando-se com uma circunferência e seu centro traçados no plano de construção, a régua se torna suficiente para essas construções. Esse teorema foi concebido por Poncelet em 1822 e mais tarde, em 1833, desenvolvido plenamente pelo gênio do geômetra suíço-alemão Jacob Steiner (1796-1863). O que se precisa mostrar agora é que, contando-se com a circunferência e seu centro, as construções (1) e (2) podem ser efetuadas com a régua apenas, entendendo-se que uma circunferência fica dada pelo seu centro e um de seus pontos.

Por volta do ano 980 o matemático árabe Abû'l-Wefâ (940-998) propusera o uso da régua junto com um *compasso enferrujado*, isto é, um compasso de abertura fixa. Em vista do teorema de Poncelet-Steiner precisamos, na verdade, usar o compasso apenas uma vez, depois do que podemos abandoná-lo. Em 1904 o italiano Francesco Severi foi ainda além e mostrou que tudo de que se precisa é um arco, por menor que seja, de uma circunferência e seu centro, a fim de levar a termo todas as construções euclidianas com régua apenas. Também foi demonstrado, por Adler e outros, que se pode realizar qualquer construção euclidiana com uma régua de duas bordas, não importa se estas sejam ou não paralelas. Há muitos teoremas de construção intrigantes como estes cujas demonstrações requerem engenhosidade considerável.

Recentemente⁴, mostrou-se que o supramencionado Georg Mohr era o autor de um opúsculo publicado anonimamente em 1673 com o título de *Compendium Euclidis curiosi*, no qual se prova efetivamente que todas as construções dos *Elementos* de Euclides são possíveis com régua e compasso enferrujado.

⁴ Ver A. E. Hallerberg, "The geometry of the fixed-compass", *The Mathematics Teacher*, abr., 1959, pp. 230-44 e A. E. Hallerberg, "Georg Mohr and *Euclidis curiosi*", *The Mathematics Teacher*, fev., 1960, pp. 127-32.

Lorenzo Mascheroni nasceu em Castagneta, Itália, em 1750. Começou a estudar matemática tarde, tendo se interessado antes por humanidades. Ensinou grego e poesia na escola de sua cidade natal e depois em Pávia. Ordenou-se sacerdote e tornou-se abade. Depois de ensinar humanidades, Mascheroni interessou-se por geometria e foi indicado professor de matemática em Pávia. Escreveu sobre física, cálculo, propôs o sistema métrico e publicou anotações acerca do *Cálculo integral* de Euler. Amigo de Napoleão, que admirava a matemática e julgava-se um geômetra amador, fez com que o general se interessasse por construções geométricas (ver Exercício 14.8(d)). Mascheroni morreu em Paris em 1800.



Lorenzo Mascheroni
(Coleção David Smith)

Na Seção 14-4 há dados biográficos sobre Poncelet e Steiner.

A questão de determinar a “melhor” solução euclidiana para uma construção pedida também foi objeto de consideração; Émile Lemoine (1840-1912) desenvolveu a ciência da *geometrografia* com o objetivo de comparar quantitativamente duas construções quaisquer. Para tanto Lemoine considerou as seguintes cinco operações:

S_1 : Fazer a régua passar por um ponto dado.

S_2 : Traçar uma reta com uma régua.

C_1 : Fazer um braço do compasso coincidir com um ponto dado.

C_2 : Fazer um braço do compasso coincidir com um ponto qualquer de um lugar dado.

C_3 : Descrever uma circunferência.

Efetuando-se as operações precedentes m_1, m_2, n_1, n_2, n_3 vezes numa construção, então considera-se $m_1S_1 + m_2S_2 + n_1C_1 + n_2C_2 + n_3C_3$ como o *símbolo* da construção. O

número total $m_1 + m_2 + n_1 + n_2 + n_3$ de operações chama-se *simplicidade* da construção e o número total $m_1 + n_1 + n_2$ de coincidências recebe o nome de *precisão* da construção. O número total de lugares traçados é $m_2 + n_3$, diferença entre a simplicidade e a precisão da construção. O símbolo correspondente ao traçado de uma reta pelos pontos A e B é $2S_1 + S_2$ e aquele associado ao traçado da circunferência de centro C e raio AB é $3C_1 + C_3$.

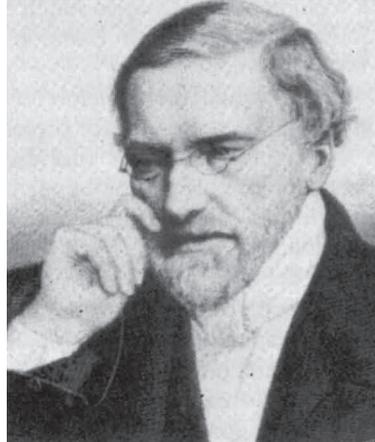
Émile Lemoine atuou como editor do *l'Intermédiaire des Mathématiciens*. Apresentou suas propostas geométricas (1888-1889, 1892, 1893) no Congresso Internacional de Matemática que se verificou a par das atividades da Feira Mundial de Chicago de 1893. Seu nome aparece também em geometria associado aos entes conhecidos como *ponto de Lemoine* de um triângulo (ver Exercício 14.5) e a *reta de Lemoine*, o *círculo de Lemoine* e o *segundo círculo de Lemoine* de um triângulo. No espaço há o *tetraedro de Lemoine* e o *ponto de Lemoine* e o *plano de Lemoine* de um tetraedro.

14.4 Geometria projetiva

À parte e independentemente da descoberta da geometria não euclidiana, o campo da geometria fez enormes progressos no século XIX. Houve, como já salientamos, um desenvolvimento extenso do surpreendentemente rico material constituindo a sequência de Euclides. Nesta seção veremos que a geometria projetiva também teve ganhos muito impressionantes e altamente produtivos. A Seção 14-5 destina-se a mostrar o crescimento notável dos métodos da geometria analítica no século XIX e a Seção 14-7 a examinar o desenvolvimento extraordinário da geometria diferencial nesse período.

Embora Desargues, Monge e Carnot tivessem iniciado o estudo da geometria projetiva, seu desenvolvimento verdadeiramente independente se iniciou no século XIX com Jean Victor Poncelet. Poncelet nasceu em Metz em 1788, estudou no liceu local e, de 1807 a 1810 foi aluno da Escola Politécnica e, em particular, de Monge. Em 1812, como estudante da academia militar de Metz, foi convocado para o exército, indo servir como tenente de engenharia na campanha fatal de Napoleão na Rússia. Tido como morto, foi abandonado no campo de batalha de Krasnoi, durante a retirada francesa de Moscou. Feito prisioneiro de guerra foi forçado a marchar por quase cinco meses até Saratoff, no Volga, onde ficou confinado. Lá, sem nenhum livro em mãos, planejou seu grande *Traité des Propriétés Projectives des Figures* no qual, subsequentemente à sua libertação e retorno a Metz, perto do fim de 1814, pôs-se a trabalhar, vindo a publicá-lo em Paris em 1822. Poncelet dedicou o resto de sua vida aos deveres militares, entre os quais escrevia sobre mecânica, hidráulica, séries infinitas e geometria. Em 1826 publicou um tratado de mecânica aplicada e uma interessante memória sobre moinhos de água; publicou também um relato sobre os instrumentos e a maquinaria ingleses exibidos na Exposição Internacional de Londres do ano de 1851, uma edição ampliada de seu trabalho inicial de 1822 (1862, 1865) e numerosos artigos de geometria no *Journal de Crelle*. Desfrutando por toda a sua longa vida de grande vigor físico, Poncelet foi sempre consciencioso, eficiente, seguro em suas missões militares e manteve sua capacidade criativa em

matemática até quase perto de sua morte que ocorreu em Paris, em 1867, quando tinha 79 anos de idade.



Jean Victor Poncelet
(Culver Service)

O *Traité des Propriétés Projectives des Figures* é um marco da geometria. Deu grande impulso ao estudo da geometria projetiva e inaugurou o chamado “grande período” da história do assunto. Uma legião de matemáticos veio a abraçar esse campo, entre eles Gergonne, Brianchon, Chasles, Plücker, Steiner, Staudt, Reye e Cremona — grandes nomes da história da geometria, em particular da história da geometria projetiva.

Aqui nos restringiremos a considerar apenas dois dos instrumentos matemáticos utilizados por Poncelet em seu desenvolvimento da geometria projetiva — o *princípio de dualidade* e o *princípio de continuidade*.

Em geometria projetiva, quando se utilizam elementos ideais no infinito, há uma simetria notável entre pontos e retas, de tal sorte que se numa proposição verdadeira sobre “pontos” e “retas” se permutarem os papéis desempenhados por essas palavras, e talvez com um ajustamento de linguagem, obter-se-á uma outra proposição verdadeira sobre “retas” e “pontos”. Como exemplo simples, considere as duas proposições seguintes, assim relacionadas:

Dois pontos distintos quaisquer determinam uma, e uma só, reta à qual ambos pertencem.
Duas retas distintas quaisquer determinam um, e um só, ponto que pertence a ambas.

Essa simetria, que resulta na disposição em pares dos teoremas da geometria projetiva, é um princípio de grande alcance, conhecido como *princípio de dualidade*. Uma vez estabelecido o princípio de dualidade, então a demonstração de uma das proposições

de um par dual traz em si a demonstração da outra. Dualizemos o teorema de Pascal. Primeiro reformulemos o teorema de Pascal numa forma talvez mais fácil de dualizar.

Os seis vértices de um hexágono pertencem a uma cônica se, e somente se, os pontos de intersecção dos três pares de lados opostos pertencem a uma reta.

Dualizando, obtemos:

Os seis lados de um hexágono são tangentes a uma cônica se, e somente se, as retas que unem os três pares de vértices opostos concorrem num ponto.

O primeiro a publicar esse teorema foi Charles Julien Brianchon (1785-1864), em 1806, quando aluno da Escola Politécnica de Paris, quase 200 anos depois de Pascal tê-lo enunciado.

Há várias maneiras de se estabelecer o princípio de dualidade. É possível dar um conjunto de postulados para a geometria projetiva arranjados em pares duais. Segue-se que o dual de qualquer teorema deduzido de um conjunto de postulados assim organizados pode ser autenticado pela simples dualização dos passos da demonstração do teorema original. Esse princípio também pode ser estabelecido analiticamente, uma vez formulados os conceitos de “coordenadas” de uma reta e “equação” de um ponto (ver Seção 14-5). Finalmente, o leitor, familiarizado com a noção elementar de polos e polares com relação a uma certa cônica básica, perceberá que, na correspondência entre polos e polares assim estabelecida, a cada figura consistindo em retas e pontos está associada uma figura dual consistindo em pontos e retas. O princípio de dualidade, quando de sua elaboração inicial, por Gergonne e Poncelet, surgiu desta última maneira. O termo *polo* foi introduzido em 1810 pelo matemático francês F. J. Servois (1767-1847) e o termo *polare* correspondente, por Gergonne (1771-1859) três anos mais tarde.

É interessante ressaltar que o princípio de dualidade foi estabelecido em vários outros ramos da matemática, como geometria projetiva sólida, álgebra booleana, teoria das identidades trigonométricas, geometria esférica, conjuntos parcialmente ordenados e cálculo proposicional.

O outro instrumento matemático de Poncelet, o *princípio de continuidade*, pode ser explicado pelo seguinte exemplo. Considere o caso de duas circunferências que se seccionam nos pontos reais A e B . Um aluno de geometria elementar pode provar facilmente que o lugar dos pontos P com potências iguais em relação às duas circunferências é a reta AB . Tendo essa propriedade sido estabelecida, então ela deve ser suscetível de demonstração pelo método da geometria analítica. Mas esse método ignora se os pontos A e B de intersecção das duas circunferências são reais ou imaginários. Donde, a cadeia de equações que prova a proposição no caso em que A e B são reais simultaneamente prova a proposição quando A e B são imaginários. Como decorrência, quando as duas circunferências não se seccionam, o lugar dos pontos P com potências iguais com relação às duas circunferências é ainda uma reta. Esse método de raciocínio em que, da demonstração de um teorema para uma situação real, se obtém o teorema para uma situação imaginária, foi chamado por Poncelet de *princípio de continuidade da geometria*. Na geometria projetiva, há muitos exemplos em que uma proposição que pode ser estabelecida para o

caso de uma projeção real pode ser estendida ao caso de uma projeção imaginária pelo princípio de continuidade.

O princípio de continuidade de Poncelet encontrou resistência da parte de vários geômetras, e muitos dos artigos de Poncelet no *Journal de Crelle* se dedicaram a defender e ilustrar o princípio.

Muitas das ideias de Poncelet referentes à geometria projetiva foram posteriormente desenvolvidas pelo geômetra suíço Jacob Steiner, um dos maiores talentos da geometria sintética que o mundo já conheceu. Steiner nasceu em Utzensdorf em 1796 e só aprendeu a escrever aos 14 anos de idade. Aos 17 tornou-se aluno de Johann Heinrich Pestalozzi (1746-1827), o famoso educador suíço, que incutiu no jovem o amor pela matemática. Mais tarde, em 1818, Steiner matriculou-se em Heidelberg, onde rapidamente mostrou toda a sua capacidade matemática. Em 1821 começou a dar aulas particulares de matemática em Berlim, e logo foi indicado professor da Gewerbeakademi. Graças aos artigos que publicou no recém-fundado *Journal de Crelle*, começou a se tornar bem conhecido; ele e Abel lideraram as contribuições em artigos para a revista nos primeiros tempos. Em 1834, através da influência de Jacobi, Crelle e von Humbolt, criou-se para ele uma cadeira na Universidade de Berlim, onde permaneceu até o fim de sua carreira docente. Passou seus últimos anos, com a saúde debilitada, na Suíça, vindo a falecer em Berna no ano de 1863.



Jacob Steiner
(Coleção David Smith)

Qualificado como “o maior dos geômetras desde Apolônio”, Steiner possuía um poder incrível para o tratamento sintético da geometria. Assim é que contribuiu prolificamente para esse campo e escreveu tratados do mais alto padrão. Diz-se que ele detestava o método analítico, que considerava uma muleta para os espíritos menos dotados. Ele produzia geometria nova com uma rapidez tão grande que às vezes não

tinha tempo de anotar suas demonstrações, resultando daí que muitas de suas descobertas permanecessem por anos como quebra-cabeças para aqueles que procuravam demonstrações. Seu *Systematische Entwicklungen*, publicado em 1832, imediatamente lhe trouxe reputação. Esse trabalho contém uma discussão completa da reciprocação, do princípio de dualidade, fileiras e feixes homotéticos, divisão harmônica e a geometria projetiva das secções cônicas baseada na definição altamente frutífera de uma cônica como o lugar dos pontos de intersecção das retas correspondentes de dois feixes homográficos com vértices distintos. Contribuiu para o estudo dos n -ângulos espaciais, para a teoria das curvas e superfícies, podárias, roulettes e as 27 retas de uma superfície de terceira ordem. Por meio da geometria sintética ele abordou problemas de máximo e mínimo que, nas mãos de outros, exigiriam uma parafernália do cálculo de variações. Seu nome se encontra em muitos lugares da geometria como a solução e generalização de Steiner do problema de Malfatti, as cadeias de Steiner, o porisma de Steiner e os pontos de Steiner da configuração do hexagrama místico.

Muitos conceitos projetivos, no tratamento dado à geometria projetiva por Poncelet e Steiner, baseavam-se em propriedades métricas. A geometria projetiva somente se livrou completamente de toda e qualquer base métrica com Karl Georg Christian von Staudt em sua *Geometrie der Lage* de 1847. Staudt nasceu em Rhothenburg em 1798 e ocupou a cadeira de matemática da Universidade de Erlangen. Faleceu em Erlangen em 1867.

O lado analítico da geometria projetiva teve progressos extraordinários nos trabalhos de Augustus Ferdinand Möbius (1790-1868), Michel Chasles (1793-1880) e, particularmente, Julius Plücker (1801-1868). Plücker ganhou fama de grande campeão da geometria analítica tanto quanto Steiner da geometria sintética. Seu trabalho será considerado mais detalhadamente na Seção 14-5. Michel Chasles foi também um especialista de primeira linha em geometria sintética e seu trabalho *Aperçu Historique sur l'Origine et le Développement des Méthodes en Géométrie* (1837) é ainda um padrão na história da geometria. Chasles tornou-se professor de geometria e matemática da Escola Politécnica em 1841 e professor de geometria da Faculdade de Ciências em 1846. Recebeu a medalha Copley da Royal Society por seu *Traité des Sections Coniques*, que foi publicado em Paris em 1865.

Posteriormente será mostrado como, pela adoção de uma definição projetiva conveniente de métrica, podemos estudar a geometria métrica no contexto da geometria projetiva e como, pela adjunção de uma cônica invariante a uma geometria projetiva no plano, podemos obter as geometrias não euclidianas clássicas. No fim do século XIX e começo do século XX a geometria projetiva recebeu muitos tratamentos postulacionais e se descobriram geometrias projetivas finitas. E se mostrou que, com graduais acréscimos e alterações de postulados, pode-se passar da geometria projetiva à geometria euclidiana, encontrando-se muitas outras geometrias importantes no caminho.

14.5 Geometria analítica

Há outros sistemas de coordenadas além dos sistemas cartesianos retangulares e oblíquos. Aliás, podem-se inventar sistemas de coordenadas bastante facilmente. Tudo de que se

precisa é um referencial apropriado juntamente com algumas regras que nos ensinem como localizar um ponto do plano, com relação ao referencial, por meio de um conjunto ordenado de números. Assim, para o sistema cartesiano retangular o sistema consiste em dois eixos perpendiculares, cada um com uma escala, sendo bem familiares as regras que nos ensinam como localizar um ponto, com relação a esse referencial, pelo par ordenado de números reais que representam as distâncias (com os sinais pertinentes) do ponto aos eixos. O sistema cartesiano é, de longe, o mais comum de todos e tem sido explorado enormemente. Grande parte da terminologia, como nossa classificação das curvas em lineares, quadráticas, cúbicas e assim por diante, provém do uso desse sistema. Algumas curvas, porém, como muitas espirais, apresentam equações impraticáveis quando referidas a um sistema cartesiano, ao passo que, quando referidas a sistemas mais apropriados, passam a ter equações relativamente simples. No caso das espirais é particularmente útil o sistema de coordenadas polares cujo referencial, lembre-se, é uma semirreta e a localização de um ponto se faz por um par de números reais, um deles representando uma distância e o outro um ângulo. Segundo parece, a ideia do sistema polar foi introduzida em 1691 por Jakob Bernoulli (1654-1705)⁵. Até perto do final do século XVIII pouco se investigaram outros sistemas de coordenadas; mas então, para fazer frente a situações cujas peculiaridades indicavam um referencial mais conveniente, os geômetras tiveram de romper com os sistemas cartesianos. Afinal, as coordenadas foram feitas para a geometria e não a geometria para as coordenadas.

Um desenvolvimento interessante quando a sistema de coordenadas foi inaugurado pelo geômetra prussiano Julius Plücker em 1829, ao notar que nosso elemento fundamental não precisa ser um ponto, podendo ser qualquer ente geométrico. Assim, escolhendo-se a reta como elemento fundamental, pode-se localizar qualquer reta que não passa pela origem de um sistema de referência cartesiano marcando, digamos, as intersecções da reta dada com os eixos x e y . Plücker efetivamente escolheu os opostos dos inversos dessas intersecções como números de localização da reta e explorou consideravelmente a geometria analítica das chamadas *coordenadas lineares*. Um ponto agora, em vez de ter coordenadas, tem uma equação linear, a saber, a equação verificada pelas coordenadas de todas as retas que passam pelo ponto (ver Exercício 14-15). A interpretação dupla de um par de coordenadas ou como coordenadas pontuais ou como coordenadas lineares e de uma equação linear ou como equação de uma reta ou como equação de um ponto fornece a base da demonstração analítica de Plücker do princípio de dualidade da geometria projetiva. Uma curva pode ser considerada ou como o lugar de seus pontos ou como a envoltória de suas tangentes (ver Figura 116). Se, em vez de pontos ou retas, escolhêssemos circunferências como elementos fundamentais, então precisaríamos de um terno ordenado de números para determinar completamente um de nossos elementos. Num sistema de referência cartesiano retangular, por exemplo, poderíamos tomar as duas coordenadas do centro da circunferência junto com seu raio. Ideias como essa levaram a uma generalização considerável e

⁵ Ver, porém, C. B. Boyer, "Newton as an originator of polar coordinates", *The American Mathematical Monthly*, fev., 1949, pp. 73-8.

ao desenvolvimento da teoria da dimensão. Considerou-se como *dimensionalidade* de uma variedade de elementos fundamentais o número de coordenadas independentes necessárias para localizar cada elemento fundamental. De acordo com esse conceito, o plano é bidimensional quanto a pontos e também quanto a retas, mas tridimensional quanto a circunferências. Pode-se mostrar que o plano é pentadimensional quando se escolhe como variedade de elementos fundamentais a totalidade das secções cônicas do plano. Obviamente, a teoria da dimensão se desenvolveu muito além desses conceitos elementares e é hoje uma matéria de extensão e profundidade consideráveis.

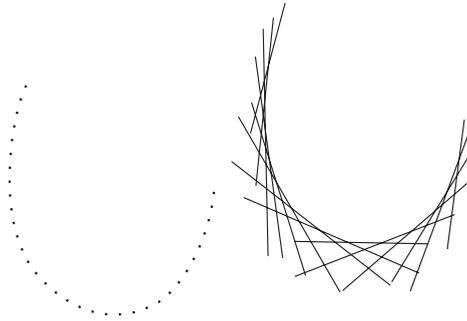


Figura 116

Embora Descartes tenha mencionado a geometria analítica sólida, ele não a elaborou. Outros depois dele como Frans van Schooten, o filho, La Hire e Johann Bernoulli, sugeriram nossa geometria analítica sólida, mas só em 1700 o assunto foi desenvolvido sistematicamente por Antoine Parent (1666-1716) num artigo apresentado à Academia Francesa. A. C. Clairaut, em 1731, foi o primeiro a escrever analiticamente sobre curvas não planas do espaço. Euler, mais tarde, prosseguiu com o assunto globalmente, bem além de seus estágios elementares. Esses primeiros matemáticos a trabalhar no assunto escolheram o ponto como elemento fundamental. Embora o espaço seja tridimensional quanto a pontos, pode-se demonstrar que ele é quadridimensional quanto a retas e também quanto a esferas. É, porém, tridimensional quanto a planos (ver Exercício 14.16).

Enquanto a geometria sintética fazia avanços de grande monta com facilidade, a geometria analítica atolava-se num pantanal de cálculos algébricos. Para a geometria analítica competir em pé de igualdade com a geometria sintética, tinha que desenvolver procedimentos novos e aperfeiçoados. Com grande zelo, alguns dos protagonistas dos métodos coordenados alistaram-se em defesa da geometria analítica, e o assunto entrou no seu período áureo. Dentre os pioneiros que contribuíram com procedimentos aprimorados para a geometria analítica figura Julius Plücker que, numa sequência de artigos e textos, diviso métodos que mostraram que a geometria analítica, quando usada adequadamente, não perde para a geometria sintética em elegância e simplicidade.

Plücker nasceu em Elberfeld em 1801 e estudou em Bonn, Berlim e Heidelberg, e ainda por um período pequeno em Paris, onde assistiu a aulas de Monge e seus discípulos. Entre 1826 e 1836 ocupou o magistério sucessivamente em Bonn, Berlim e Halle. Em 1836 retornou à Universidade de Bonn como professor de matemática, uma posição que em 1847 trocou por uma cadeira de física na mesma instituição. Faleceu em Bonn em 1868.

Sua obra *Analytisch-geometrische Entwicklungen*, em dois volumes, foi publicada em 1828 e 1831. No primeiro volume aparece o primeiro tratamento extenso do *método da notação abreviada*, embora este já tivesse sido empregado antes por Gabriel Lamé e Étienne Bobillier. A ideia da notação abreviada reside na representação de expressões longas por letras únicas e o princípio fundamental: Se $\alpha(x, y) = 0$ e $\beta(x, y) = 0$ são duas curvas, então $u\alpha + v\beta = 0$, onde u e v são constantes ou funções quaisquer de x e y , é uma curva pelos pontos de intersecção das curvas $\alpha = 0$ e $\beta = 0$. Teoremas aparentemente complexos, do ponto de vista algébrico, como o teorema dos dois triângulos de Desargues e o teorema do hexagrama místico de Pascal, podem ser demonstrados de maneira muito mais breve e clara com o auxílio da notação abreviada. Considere, por exemplo, o teorema do hexagrama místico de Pascal: *Se os seis pontos 1, 2, 3, 4, 5, 6 estão numa cônica, então os três pontos, P, Q, R de intersecção dos três pares de retas 56 e 23, 16 e 34, 12 e 45 são colineares.*

Sejam $\alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 0, \alpha' = 0, \beta' = 0, \gamma' = 0$ as equações (ver Figura 117) das retas 12, 34, 56, 45, 61, 23. Considere a curva cúbica

$$\alpha\beta\gamma + k \alpha'\beta'\gamma' = 0.$$

Independentemente do valor de k , essa cúbica passa pelos nove pontos 1, 2, 3, 4, 5, 6, P, Q, R. Tome outro ponto, 7, na cônica e determine k de modo que a cúbica também passe pelo ponto 7. Mas uma cúbica e uma cônica podem se interceptar em no máximo $(3)(2) = 6$ pontos, a menos que a cônica seja parte da cúbica, o resto da qual sendo alguma reta. Este, então, deve ser o caso, e os três pontos restantes P, Q, R devem estar numa reta.

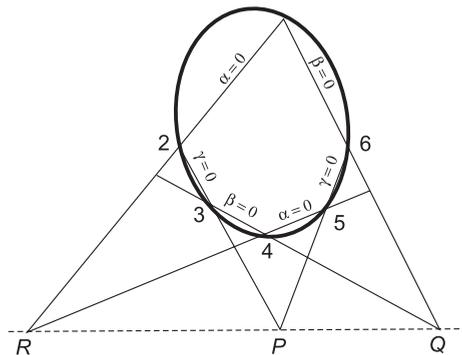


Figura 117

No segundo volume da obra em consideração, figura uma apresentação das coordenadas homogêneas dos pontos de um plano. As coordenadas homogêneas (cartesianas) de um ponto P de coordenadas cartesianas (X, Y) são definidas como qualquer *terno* ordenado (x, y, t) tal que $X = x/t$ e $Y = y/t$. Segue-se que os ternos (x, y, t) e (kx, ky, kt) representam o mesmo ponto. O nome *homogêneas* provém do fato de que, quando se converte a equação $f(X, Y) = 0$ de uma curva algébrica em coordenadas cartesianas à forma $f(x/t, y/t) = 0$, todos os termos da nova equação têm o mesmo grau em relação às novas variáveis. Mais importante porém é que em coordenadas homogêneas um terno $(x, y, 0)$, que não tem um correspondente em coordenadas cartesianas, representa um “ponto no infinito”, de maneira que os pontos ideais no infinito de Kepler, Desargues e Poncelet passam a ter uma representação num sistema de coordenadas. A equação $t = 0$ é então a equação de uma reta ideal no infinito. Segue-se que as coordenadas homogêneas fornecem um instrumento perfeito para a exploração da geometria projetiva, a qual requer tanto os pontos finitos quanto os pontos infinitos do plano.



Julius Plücker

(Coleção David Eugene Smith, Biblioteca de Livros Raros e Manuscritos da Universidade de Colúmbia)

O livro de Plücker *System der analytischen Geometrie*, de 1835, contém uma classificação completa das curvas cúbicas baseada na natureza de seus pontos no infinito e sua *Theorie der algebraischen Curven*, de 1839, dá uma enumeração das curvas de quarta ordem e suas famosas quatro equações relacionando as singularidades de uma curva algébrica. Essas equações são

$$\begin{aligned} m &= n(n-1) - 2\delta - 3\kappa, & n &= m(m-1) - 2\tau - 3\iota, \\ \iota &= 3n(n-2) - 6\delta - 8\kappa, & \kappa &= 3m(m-2) - 6\tau - 8\iota \end{aligned}$$

onde m é a classe da curva (o grau da equação da curva quando expressa em coordenadas lineares), n é a ordem da curva (o grau da equação da curva quando expresso em coordenadas pontuais), δ é o número de nós, κ é o número de cúspides, ι é o número de pontos de inflexão e τ é o número de bitangentes.

Por quase 20 anos, seguindo-se à sua indicação como professor de física, Plücker dedicou-se amplamente a pesquisas em análise espectral, magnetismo e superfícies de ondas de Fresnel. Mais tarde voltou a seu primeiro amor, a matemática, e desenvolveu a geometria quadridimensional das retas do espaço simultaneamente com sua teoria dos “complexos” e “congruências” de retas do espaço.

Num tratamento mais detalhado do extraordinário desenvolvimento da geometria analítica no século XIX seria preciso bem mais do que apenas mencionar nomes como Joseph Diaz Gergonne (1771-1859, oficial de artilharia, editor e professor de matemática), Augustus Ferdinand Möbius (1790-1868, professor em Leipzig), Gabriel Lamé (1795-1870, engenheiro e professor de matemática), Étienne Bobillier (1798-1840, professor de mecânica), Ludwig Otto Hesse (1811-1874, professor em Königsberg), Rudolph Friedrich Alfred Clebsch (1833-1872, professor em Königsberg e mais tarde em Göttingen), George-Henri Halphen (1844-1889, de Rouen e examinador na Escola Politécnica de Paris) e outros.

A seção seguinte está reservada a uma discussão das aplicações da geometria analítica ao estudo de um hiperespaço n -dimensional ($n > 3$) em pontos.

14.6 Geometria n -dimensional

As primeiras e nebulosas noções de um hiperespaço n -dimensional ($n > 3$) em pontos se perdem na obscuridade do passado e se confundem com considerações metafísicas. O primeiro artigo publicado que lidava explicitamente com geometria pontual de dimensão superior foi escrito por Arthur Cayley (1821-1895) em 1843, depois do qual o assunto recebeu a atenção dos matemáticos ingleses, J. J. Sylvester (1814-1897) e W. K. Clifford (1845-1879), além do próprio Cayley. O pioneirismo do trabalho feito por H. G. Grassmann (1809-1877) e Ludwig Schläfli (1814-1895) em geometria de dimensão superior, na Europa Continental, por algum tempo não chamou a atenção. De fato, o grosso do trabalho de Schläfli só foi publicado vários anos depois de sua morte, e por essa época Victor Schlegel (1843-1905) e outros na Alemanha já haviam tornado o assunto bem conhecido. A geometria projetiva de dimensão superior foi quase que inteiramente desenvolvida pela escola de geômetras italianos, embora seu estudo tivesse sido inaugurado por Clifford em 1878.

Bastante independentemente do trabalho descrito acima, envolvendo os primórdios da geometria pontual de dimensão superior, encontram-se os aspectos aritméticos do assunto que foram gradualmente emergindo das aplicações da análise, em que facilmente se pode estender um tratamento analítico de duas ou três variáveis para um número finito arbitrário de variáveis. Assim, George Green (1793-1841), em 1833, reduziu o problema da atração mútua de duas massas elipsoidais à análise e então resolveu o problema para um número qualquer de variáveis dizendo, “Não mais está circunscrito,

como estava, às três dimensões do espaço”. Outros escritores fizeram generalizações semelhantes para um número arbitrário de variáveis, e não foi senão um passo à frente aplicar a terminologia da geometria à álgebra e à análise. Esse procedimento foi enunciado claramente por Cauchy em 1847 num artigo sobre lugares analíticos quando disse “chamaremos um conjunto de n variáveis de ponto analítico, uma equação ou sistema de equações de lugar analítico” e assim por diante. Sem sombra de dúvida, a expressão inicial mais importante desse ponto de vista analítico da geometria de dimensão superior encontra-se na grande conferência probatória de Riemann em 1854, embora só publicada em 1866. Foi nessa conferência que Riemann construiu sua noção de variedade n -dimensional e suas relações mensuradoras, mantendo à frente do espírito, por toda a discussão, as concepções geométricas e a imaginação.

O número de artigos e trabalhos dedicados à geometria de dimensão superior cresceu grandemente depois de 1870. Em 1911 D. M. Y. Sommerville publicou sua *Bibliography on Non-Euclidean Geometry, Including the Theory of Parallels, the Foundations of Geometry, and Space of n -Dimensions*. Nessa bibliografia havia 1832 referências à geometria n -dimensional, das quais cerca de um terço eram italianas, um terço alemãs e o resto principalmente francesas, inglesas e holandesas.

Estuda-se geometria n -dimensional analiticamente pela introdução de conceitos apropriados no espaço aritmético n -dimensional. O *espaço aritmético n -dimensional* é o conjunto dos n -uplos $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ de números reais, sendo cada um desses n -uplos chamado *ponto* do espaço. Definem-se as relações entre esses pontos por fórmulas análogas àquelas que se verificam para as relações correspondentes entre pontos, digamos, do espaço cartesiano bi ou tridimensional. Assim, como a distância entre dois pontos (x_1, x_2) e (y_1, y_2) num espaço cartesiano retangular bidimensional é dada por

$$[(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2]^{1/2},$$

e a distância entre os pontos (x_1, x_2, x_3) e $y = (y_1, y_2, y_3)$ num sistema cartesiano retangular tridimensional é dada por

$$[(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2]^{1/2},$$

define-se a *distância* entre dois pontos $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ de um espaço n -dimensional aritmético como

$$[(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2]^{1/2}.$$

Analogamente, define-se uma *esfera n -dimensional* de raio r e centro no ponto (a_1, \dots, a_n) como a coleção de todos os pontos $x = (x_1, \dots, x_n)$ tais que

$$(x_1 - a_1)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2 = r^2.$$

Define-se um par de pontos como um *segmento de reta* e os n -uplos ordenados da forma

$$(k(y_1 - x_1), \dots, k(y_n - x_n)) \quad k \neq 0,$$

como os *números diretores* do segmento de reta xy determinado pelos pontos x e y . O *cosseno do ângulo* θ entre os dois segmentos de reta xy e uv se define como

$$\cos \theta = \frac{(y_1 - x_1)(v_1 - u_1) + \dots + (y_n - x_n)(v_n - u_n)}{d(x, y) d(u, v)},$$

onde $d(x, y)$ é a distância entre os pontos x e y e $d(u, v)$ a distância entre os pontos u e v . Os dois segmentos se dizem *perpendiculares* se, e somente se, o cosseno do ângulo entre eles é zero. Uma transformação definida por $y_i = a_i + x_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, associando o ponto y ao ponto x , chama-se *translação*. Podem-se definir outras transformações do espaço nele mesmo de maneira semelhante. É fácil formular uma definição de *conicoide n -dimensional* e depois estudar polo, polar e outras propriedades desse ente. Uma geometria n -dimensional dessa espécie pode ser considerada como um estudo puramente algébrico que emprega a terminologia geométrica.

As geometrias de dimensão superior não deixam de ter aplicações em outras áreas de estudo. De fato, os físicos e os estatísticos têm hoje certas necessidades que respondem efetiva e grandemente por grande parte da expansão e crescimento do assunto. Por exemplo, é em geral bastante sabido hoje, mesmo entre os leigos, que a teoria da relatividade usa a ideia de um espaço quadridimensional. Mas se poderia dar aqui um exemplo mais fácil, mostrando como o tratamento matemático da teoria cinética dos gases veio a empregar geometria de dimensão superior. Considere um recipiente fechado contendo um certo gás composto hipoteticamente de m moléculas. Essas moléculas se movem dentro do recipiente e uma qualquer particular delas, num dado instante, está num ponto (x, y, z) do espaço que nos cerca e tem, naquele instante, certos componentes de velocidade u, v, w ao longo dos eixos coordenados. Somente conhecendo-se todos os seis números x, y, z, u, v, w sabemos onde está a molécula no instante dado, e a direção e a taxa de seu movimento. As m moléculas de gás no recipiente dependem assim de $6m$ coordenadas. Em qualquer instante essas $6m$ coordenadas têm valores definidos que determinam o *estado* do gás naquele instante. Agora, esses $6m$ valores determinam um ponto de um espaço $6m$ -dimensional e há uma correspondência biunívoca entre esses pontos e os possíveis estados do gás. Conforme o estado do gás varia, devido ao movimento das moléculas, o ponto correspondente gera um caminho, ou lugar, no espaço $6m$ -dimensional. O comportamento, ou história, do gás fica, pois, representado por esse lugar.

14.7 Geometria diferencial

A geometria diferencial é o estudo das propriedades das curvas e superfícies, e suas generalizações, por meio do cálculo. Na maior parte dos casos, a geometria diferencial

investiga curvas e superfícies nas vizinhanças imediatas de qualquer de seus pontos. Conhece-se esse aspecto da geometria diferencial como *geometria diferencial local*. Porém, há às vezes propriedades da estrutura total de uma figura geométrica que decorrem de certas propriedades locais que a figura apresenta em cada um de seus pontos. Isso leva ao que se chama de *geometria integral* ou *geometria diferencial global*.

Embora se possam achar teoremas geométricos deduzidos do estudo de figuras evanescentes no trabalho de Arquimedes sobre áreas e volumes, no tratamento de Apolônio das normais às secções cônicas e bastante posteriormente no método dos indivisíveis de Cavalieri e no belo trabalho de Huygens sobre curvatura e evolutas, provavelmente é mais correto dizer-se que a geometria diferencial, pelo menos em sua forma moderna, começou nas décadas iniciais do século XVIII, com aplicações do cálculo diferencial e integral à geometria analítica. Porém, o primeiro estímulo ao assunto, ultrapassando as situações planas, foi fornecido por Gaspard Monge (1746-1818), que pode ser considerado o pai da geometria diferencial de curvas e superfícies do espaço.

Monge foi um grande professor, e suas aulas na Escola Politécnica inspiraram uma plêiade de jovens a entrar para o campo da geometria diferencial. Entre eles estavam J. B. Meusnier (1754-1793), E. L. Malus (1775-1812), C. Dupin (1784-1873) e O. Rodrigues (1794-1851), todos com importantes teoremas da geometria diferencial associados a seus nomes. Por exemplo, um teorema de Meusnier afirma que: *Se PT é uma reta tangente a uma dada superfície S num ponto P de S , então o círculo osculador em P de uma secção variável de S por PT é o círculo em que o plano da secção corta a esfera de centro C_n e raio r_n , onde C_n e r_n são o centro e o raio do círculo osculador em P da secção normal de S pela tangente PT .* Um dos teoremas de Dupin afirma que: *A soma das curvaturas normais, num ponto P de uma superfície S , em duas direções quaisquer perpendiculares, é constante.* Deve-se também a Dupin a *indicatriz de Dupin*, um instrumento que fornece muitas informações sobre a natureza de uma superfície S num de seus pontos.

Monge e seus discípulos formaram o núcleo inicial da grande escola francesa de especialistas em geometria diferencial, que mais tarde incluiria nomes como Augustin Louis Cauchy (1789-1857); B. de Saint-Venant (1796-1886) que, entre outras coisas, em 1845, introduziu o nome *binormal* associado a um dos conceitos que acompanham o triedro local de um ponto de uma curva espacial; F. Frenet (1816-1888) e J. A. Serret (1819-1885), responsáveis pelas *fórmulas de Frenet-Serret* de importância central no estudo analítico das curvas do espaço; V. Puiseux (1820-1883); e J. Bertrand (1822-1900), cujo nome se liga a pares de curvas do espaço tais que as normais principais de uma são as normais principais da outra e vice-versa.

O trabalho de Cauchy em geometria diferencial marca o fechamento do primeiro período da história do assunto. O segundo período foi inaugurado por Carl Friedrich Gauss (1777-1855), que introduziu o método singularmente produtivo de estudar a geometria diferencial de curvas e superfícies por meio de representações parametrizadas desses objetos. Encontramos agora as figuras de G. Mainardi (1800-1879) e D. Codazzi (1824-1875) a cujos nomes estão associados importantes equações sobre o assunto, o físico belga cego J. Plateau (1801-1883); C. G. J. Jacobi (1804-1851); O. Bonnet (1819-1892); E. B. Christoffel (1829-1901); E. Beltrami (1835-1900); J. D. Darboux (1842-

1917) em homenagem a quem se deu nome a um vetor especial associado a cada ponto de uma curva do espaço e que, entre outras coisas, completou o trabalho empreendido por Dupin com as *famílias de superfícies triplamente ortogonais*, em que cada família é ortogonal às outras duas; entre outras que deram sua contribuição à teoria clássica das curvas e superfícies do espaço.

O terceiro grande período da história da geometria diferencial se iniciou com Georg Bernhard Riemann (1826-1866). Encontramos agora uma afirmação da tendência da matemática moderna no sentido do empenho pela maior generalização possível. O espaço tridimensional usual é deixado para trás, concentrando-se o estudo em coisas como variedades m -dimensionais imersas em espaços n -dimensionais. Dois requisitos se faziam necessários para esse desenvolvimento adicional: uma notação aperfeiçoada e um procedimento que dependesse apenas da natureza da variedade e não do particular sistema de coordenadas usado. Para tanto engendrou-se o *cálculo tensorial*, matéria de caráter geral que foi desenvolvida por matemáticos como G. Ricci-Curbastro (1853-1925), T. Levi-Civita (1873-1941) e A. Einstein (1879-1955). Exploraram-se então intensivamente geometrias diferenciais generalizadas, conhecidas como *geometrias riemannianas*, as quais, por sua vez, abriram caminho para as *geometrias não riemannianas* (e outras). As pesquisas de hoje em geometria diferencial guardam pouca semelhança com o estudo clássico, fortemente ligado ao concreto.

Pode-se encarar uma superfície de duas maneiras: ou como a fronteira de um corpo sólido ou como uma película bidimensional destacada. É da primeira dessas maneiras que um engenheiro civil deve considerar uma superfície e é a segunda visão que um agrimensor deve ter a respeito. O primeiro enfoque leva a uma pesquisa das propriedades da superfície que a relacionam com o espaço circundante, ao passo que o segundo leva a uma pesquisa das propriedades da superfície que independem do espaço circundante. As propriedades da primeira espécie chamam-se *propriedades relativas* da superfície e seu estudo recebe o nome de *geometria extrínseca* da superfície; as propriedades da segunda espécie chamam-se *propriedades absolutas* e seu estudo se denomina *geometria intrínseca* da superfície. É interessante que Monge e Gauss, os grandes nomes da geometria diferencial das superfícies, entre os precursores de seus períodos, viam uma superfície primária, respectivamente, da primeira e da segunda maneiras acima. Monge é conhecido, entre outras coisas, por seu trabalho como engenheiro especializado em construções militares e Gauss é conhecido, entre outras coisas, por seu trabalho em geodésia e agrimensura geodésica.

O importante conceito de curvatura de uma superfície S num ponto P de S foi introduzido por Gauss, em 1827, em suas *Disquisitiones Generales Circa Superfícies Curvas*. Considere as secções de S formadas pelos planos que contêm a normal a S num ponto P de S . Dessas secções há uma de curvatura máxima k e uma de curvatura mínima k' em P . Essas duas secções em geral são perpendiculares entre si e suas curvaturas em P se chamam *curvaturas principais* de S em P . O produto $K = kk'$ é chamado *curvatura total* ou *gaussiana* da superfície S em P . Se as duas curvaturas principais têm mesmo sentido, então K é positivo; se as duas curvaturas principais têm sentidos opostos, então K é negativo; se pelo menos uma das curvaturas principais é nula, então K é nula. Gauss

descobriu o fato notável seguinte: *deformando-se uma superfície* (sem dilatar, vincar ou rasgar), *a curvatura total da superfície em cada ponto permanece invariante*. Duas superfícies que podem ser deformadas convenientemente de modo a poderem coincidir se dizem *aplicáveis* entre si e têm a mesma geometria intrínseca; por exemplo, um plano e um cilindro circular têm a mesma geometria intrínseca, embora certamente eles não sejam parecidos no espaço. Deve-se ter em mente que estamos tratando aqui de geometria diferencial local e não de geometria diferencial global. Um plano e um cilindro circular têm a mesma geometria intrínseca *local* mas obviamente não têm a mesma geometria intrínseca *global*.

Uma das mais notáveis descobertas de Gauss sobre superfícies é que a curvatura total K é uma propriedade absoluta da superfície. À primeira vista isso parece incrível, pois a curvatura total de uma superfície num ponto da superfície é igual ao produto das duas curvaturas normais principais da superfície no ponto. Ora, as curvaturas normais num ponto são propriedades relativas da superfície! A afirmação de que a curvatura total K é uma propriedade absoluta da superfície é conhecida como *therema egregium de Gauss*.

Gauss mostrou também que se temos numa superfície um triângulo limitado por geodésicas (isto é, curvas de menor comprimento que ligam dois pontos da superfície) e se os ângulos do triângulo são a_1, a_2, a_3 , então

$$\iint_A K dA = a_1 + a_2 + a_3 - \pi.$$

onde A é a área do triângulo. Se a superfície tem curvatura total constante K , então,

$$a_1 + a_2 + a_3 - \pi = KA,$$

e a diferença entre a soma dos ângulos e π é positiva, zero ou negativa conforme $K > 0$, $= 0$ ou < 0 e o excesso, quando $K > 0$, ou deficiência, quando $K < 0$, é proporcional à área do triângulo. Segue-se então que a geometria intrínseca das geodésicas de uma superfície de curvatura total constante não nula é não euclidiana, ao passo que no caso de uma superfície de curvatura total constante zero essa geometria é euclidiana.

Em 1831 Sophie Germain (1776-1831) introduziu o conceito de *curvatura média* $M = (k + k')/2$ de uma superfície num ponto P dessa superfície. São particularmente importantes as superfícies para as quais M é nula em todos os pontos; estas superfícies se denominam *superfícies mínimas*. É imediato que, em qualquer ponto de uma superfície mínima, as duas curvaturas normais principais têm mesmo valor absoluto, mas sinais contrários. A designação superfícies mínimas decorre do fato de que elas se caracterizam por serem as superfícies de área menor entre todas as superfícies limitadas por uma dada curva fechada do espaço. Ilustram-nas as formas assumidas pelas películas de espuma de sabão obtidas quando se mergulham laços fechados de arame de qualquer forma numa solução de água e sabão; a tensão superficial das películas minimiza as áreas das superfícies das películas. Quem pela primeira vez propôs o problema de determinar a superfície mínima por uma dada curva fechada do espaço foi Lagrange, mas a questão tornou-se conhecida como *problema de Plateau*, devido ao fato de o físico cego Joseph Plateau

ter tido a primazia de conceber o método da película de espuma de sabão para “enxergar” essas superfícies. É interessante que se possa caracterizar uma superfície mínima tanto local como globalmente. Em 1931 o matemático americano Jesse Douglas (1897-1965), quando tinha apenas 34 anos de idade, deu uma solução completa do problema de Plateau, graças ao que ele recebeu o prêmio Bôcher e uma das duas primeiras medalhas Fields concedidas (1936).

14.8 Felix Klein e o programa de Erlanger

Indicado em 1872, com apenas 23 anos de idade, professor titular da Faculdade de Filosofia e membro do Conselho da Universidade de Erlanger, Felix Klein (1849-1925) preparou, de acordo com o costume, uma palestra de apresentação a seus novos colegas de faculdade e um trabalho escrito mostrando interesses de pesquisa em seu campo matemático. A palestra, dirigida a um extenso auditório universitário, expressou a visão pedagógica de Klein da unidade de todo o conhecimento, ideal que uma educação completa não poderia negligenciar em função de estudos particulares. O trabalho escrito, que foi distribuído durante a palestra, destinava-se a seus pares de departamento. Assim, as duas partes da apresentação inicial de Klein revelavam de um lado seu interesse profundo por questões pedagógicas e de outro seu envolvimento sério com a pesquisa matemática.

Seu trabalho escrito, baseado em pesquisa desenvolvida por ele próprio e Sophus Lie (1842-1899) em teoria dos grupos, apresentava a notável definição de “geometria” que serviu para codificar essencialmente todas as geometrias existentes à época e apontou o caminho para novas e frutíferas avenidas da pesquisa geométrica. Tornou-se conhecido como *Programa de Erlanger* e apareceu exatamente na época em que a teoria dos grupos estava invadindo quase todos os domínios da matemática e alguns matemáticos começavam a achar que toda a matemática não passaria de alguns aspectos dessa teoria. Talvez se possa considerar esse programa como a realização matemática isolada mais importante de Klein.

A aplicação dos grupos à geometria, segundo Klein, depende do conceito de *transformação de um conjunto S sobre ele mesmo*, ou seja, uma correspondência pela qual a cada elemento de S está associado um único elemento de S e na qual, ainda, cada elemento de S é correspondente de um único elemento de S . Por *produto* $T_2 T_1$ de duas transformações T_1 e T_2 do conjunto de elementos S sobre ele próprio, entende-se a transformação resultante de se efetuar primeiro a transformação T_1 e depois a transformação T_2 . Se T é uma transformação de S nele próprio que leva o elemento a de S no elemento correspondente b de S , então a transformação que inverte a transformação T , levando cada elemento b de S de volta ao elemento original a , chama-se *transformação inversa* da transformação T e se denota por T^{-1} . A transformação que leva cada elemento de S nesse mesmo elemento chama-se *transformação idêntica* do conjunto S e se indica por I . Pode-se então agora provar facilmente o seguinte: *Um conjunto Γ de transformações de um conjunto S sobre si mesmo constitui um grupo* (no sentido técnico da álgebra abstrata, ver

Exercício 13.6) *para a multiplicação de transformações se (1) o produto de duas transformações de Γ está em Γ , (2) a transformação inversa de qualquer transformação do conjunto Γ está em Γ . Falaremos desse grupo abreviadamente como grupo de transformações.*

Estamos agora em condições de dar a famosa definição de Klein de geometria: *Uma geometria é o estudo das propriedades de um conjunto S que permanecem invariantes quando se submetem os elementos de S às transformações de algum grupo de transformações Γ . Pode-se denotar convenientemente uma geometria por $G(S, \Gamma)$.*

Para ilustrar a definição de Klein de geometria, seja S o conjunto de todos os pontos de um plano usual e consideremos o conjunto Γ de todas as transformações de S abrangendo as rotações, as translações e as reflexões em torno de retas. Como o produto de duas dessas transformações e a inversa de uma delas qualquer sempre estão em Γ , segue-se que se trata de um grupo de transformações. A geometria resultante é a *geometria métrica euclidiana plana*. Uma vez que propriedades como comprimento, área, congruência, paralelismo, perpendicularidade, semelhança de figuras, colinearidade de pontos e concorrência de retas são invariantes sob o grupo Γ , essas propriedades fazem parte do estudo da geometria métrica euclidiana plana. Ampliando-se agora Γ de modo a incluir, além das translações, rotações e reflexões em torno de retas, as transformações homotéticas (em que cada ponto P é levado num ponto P' tal que $AP = k \cdot AP'$, onde A é um certo ponto fixo, k é uma constante positiva e A, P e P' são colineares), obtemos a *geometria de semelhança plana*. Para este grupo ampliado, propriedades como comprimento, área e congruência não mais permanecem invariantes e, então, não mais são objeto de estudo; mas paralelismo, perpendicularidade, semelhança de figuras, colinearidade de pontos e concorrência de retas são propriedades que ainda são invariantes e portanto constituem objetos de estudo dessa geometria. Do ponto de vista de Klein a geometria projetiva é o estudo das propriedades dos pontos de um plano *projetivo* que permanecem invariantes quando se submetem os pontos ao grupo das transformações chamadas projetivas. Das propriedades previamente mencionadas, somente a colinearidade de pontos e a concorrência de retas ainda permanecem invariantes. Um invariante importante para esse grupo de transformações é a razão dupla de quatro pontos colineares; esse invariante desempenha um papel importante no estudo da geometria projetiva. As geometrias métricas não euclidianas, consideradas nos capítulos precedentes, podem ser pensadas como o estudo das propriedades dos pontos de um plano *não euclidiano* que permanecem invariantes para o grupo de transformações composto das translações, das rotações e das reflexões em torno de retas.

Em todas as geometrias acima, os elementos básicos sobre os quais atuam as transformações de algum grupo de transformações são pontos; daí porque as geometrias acima são exemplos das chamadas *geometrias pontuais*. Mas há, como já se salientou na Seção 14-5, geometrias em que outros entes que não pontos são escolhidos como elementos fundamentais. Assim se têm as geometrias de retas, geometrias de circunferências, geometrias de superfícies esféricas e várias outras, como objeto de estudo dos geométricos. Na construção de uma geometria, antes de mais nada se tem a liberdade de escolher o elemento fundamental da geometria (ponto, reta, circunferência etc.); depois a varie-

dade ou espaço desses elementos (plano de pontos, espaço usual de pontos, superfície esférica de pontos, plano de retas, feixe de circunferências etc.); e finalmente o grupo de transformações ao qual se deve sujeitar os elementos fundamentais. A construção de uma nova geometria se torna, dessa maneira, uma questão bastante simples.

Outro aspecto interessante dessa abordagem é que certas geometrias abarcam outras. Assim, como o grupo de transformações da geometria métrica euclidiana plana é um subgrupo do grupo de transformações da geometria de semelhança plana, segue-se que todo teorema válido nesta última geometria também deve valer para a primeira. Desse ponto de vista, pode-se mostrar que a geometria projetiva situa-se dentro de cada uma das anteriores e assim temos uma espécie de sequência de geometrias em que uma se encaixa na outra. Até recentemente, o grupo de transformações da geometria projetiva continha como subgrupos os grupos de transformações de praticamente todas as outras geometrias que haviam sido estudadas. Isso essencialmente era o que Cayley queria dizer quando frisava que “a geometria projetiva contém todas as geometrias”. Na verdade, até o ponto em que digam respeito aos teoremas geométricos, acontece o contrário, os teoremas da geometria projetiva estão entre os teoremas de cada uma das outras geometrias.

Por quase 50 anos, a síntese e a codificação das geometrias de Klein permaneceram essencialmente válidas. Mas logo depois da virada do século começaram a emergir corpos de proposições matemáticas que, segundo a percepção dos especialistas, deveriam se chamar geometrias; esses corpos de proposições não se ajustavam necessariamente à codificação kleiniana, o que levou a um novo ponto de vista sobre a questão, baseado na ideia de espaço abstrato com uma estrutura sobreposta que poderia ou não ser definida em termos de algum grupo de transformações. Examinaremos esse novo ponto de vista na Seção 15-3, apenas registrando aqui que algumas dessas novas geometrias vieram a encontrar aplicações na teoria moderna do espaço físico incorporada na teoria da relatividade geral de Einstein. O conceito kleiniano, onde se aplica, é ainda altamente útil, e podemos chamar uma geometria que se ajusta à definição de Klein dada acima de *geometria kleiniana*. No século XX verificaram-se esforços parcialmente bem sucedidos, em especial da parte de Oswald Veblen (1880-1960) e Élie Cartan (1869-1951), no sentido de estender e generalizar a definição de Klein de modo a incluir geometrias que se situam fora do programa original de Klein.

Felix Klein nasceu em Düsseldorf em 1849. Estudou em Bonn, Göttingen e Berlim e foi assistente de Julius Plücker em Bonn. Como professor, sua primeira experiência foi na Universidade de Erlanger (1872-1875), onde em seu trabalho inaugural lançou o programa descrito acima. Depois ensinou em Munique, Universidade de Leipzig (1880-1886) e Universidade de Göttingen (1886-1913), exercendo as funções de chefe de departamento nesta última instituição. Foi editor de *Mathematische Annalen* e fundador da grande *Encyklopädie* matemática. Foi um expositor lúcido, um professor inspirado e um conferencista de talento. Morreu em Göttingen em 1925.

Durante o período em que foi chefe de departamento na Universidade de Göttingen, essa instituição tornou-se a meca dos estudantes de matemática de todo o mundo. Um número notável de matemáticos de primeira linha passou pela universidade, ou para estudar ou para emprestar seu talento como dignos sucessores de Gauss, Dirichlet e

Riemann, fazendo da escola de matemática de Göttingen uma das mais famosas dos tempos modernos. Entre esses matemáticos estavam David Hilbert (1862-1943, o maior matemático dos últimos tempos), Edmund Landau (1877-1938, um famoso especialista em teoria dos números), Hermann Minkowski (1864-1909, nascido na Rússia e criador da teoria geométrica dos números), Wilhelm Ackermann (1896-1962, que trabalhou junto com Hilbert em lógica matemática), Constantin Carathéodory (1873-1950, um matemático grego que ganhou fama no campo da teoria das funções), Ernst Zermelo (1871-1953, do famoso postulado de Zermelo), Carl Runge (1856-1927, conhecido pelo método de Runge-Kutta da teoria das equações diferenciais), Emmy Noether (1882-1935, renomada algebrista), Richard Dedekind (1831-1916, dos conhecidos cortes de Dedekind), Max Dehn (1878-1952, o primeiro matemático a resolver um dos 23 problemas propostos por Hilbert em Paris), Hermann Weyl (1885-1955, conhecido especialmente por seu trabalho sobre os fundamentos e a filosofia da matemática) e muitos, muitos outros.



Felix Klein
(Coleção David Smith)

Entre os muitos alunos de Felix Klein em Göttingen, a jovem inglesa Grace Emily Chisholm tornou-se sua “discípula diletta”. As escolas inglesas daquela época não admitiam mulheres nos cursos de pós-graduação, daí sua ida para Göttingen. Em 1895 Miss Chisholm tornou-se a primeira mulher a receber um doutorado na Alemanha mediante o processo de exames regulares e no ano seguinte casou-se com o matemático inglês William Henry Young.

O primeiro texto abrangente sobre teoria dos conjuntos e suas aplicações à teoria das funções, *The Theory of Sets of Points*, apareceu na Inglaterra em 1906, sendo seus autores William Henry Young (1863-1942) e sua esposa Grace Chisholm Young (1868-1944). O casal ainda publicou dois outros livros de matemática e mais de 200 artigos. Seu filho Laurence C. Young tornou-se um matemático famoso.

A grande escola de Göttingen permaneceu uma potência no mundo da matemática até praticamente ser destruída com a ascensão política de Adolph Hitler (1889-1945) e do nazismo. O totalitarismo e a discriminação racial do novo governo levaram muitos sábios eminentes a migrar para outras partes do mundo, sendo os Estados Unidos, provavelmente, os maiores beneficiários desse fluxo. O resultado foi um crescimento acentuado na produção matemática nos Estados Unidos na primeira metade do século XX. Migrações semelhantes, embora menores, ocorreram em tempos remotos, como quando Pitágoras se mudou para Crotona ou quando os últimos e tumultuados dias da Universidade de Alexandria obrigaram muitos sábios a fugir para outros centros.

14.9 A aritmetização da análise

Além da libertação da geometria e da libertação da álgebra, um terceiro movimento matemático profundamente significativo teve lugar no século XIX. Esse terceiro movimento, que se materializou lentamente, tornou-se conhecido como *aritmetização da análise*.

Quando se entende apenas parcialmente a teoria subjacente a uma certa operação matemática, há o perigo de se aplicar essa operação de maneira formal, cega e, talvez, ilógica. O executante, desinformado das possíveis limitações da operação, é levado a usá-la em exemplos nos quais ela não se aplica necessariamente. Quase todo dia os professores de matemática se deparam com erros dessa natureza cometidos por alunos. Assim, um aluno de álgebra elementar, convencido firmemente de que $a^0 = 1$ para todo número real a , põe que $0^0 = 1$, ao passo que outro admite que a equação $ax = b$ sempre tem exatamente uma única solução real para um par de números reais dados a e b . Além disso, um aluno que faz trigonometria pode pensar que a fórmula

$$\sqrt{1 - \sin^2 x} = \cos x$$

se verifica para todo x . Um aluno de cálculo, que desconheça as integrais impróprias, pode obter um resultado errado aplicando de maneira aparentemente correta as regras formais da integração ou pode chegar a resultados paradoxais aplicando a certas séries infinitas convergentes resultados que só valem para séries infinitas absolutamente convergentes. Foi isso essencialmente o que aconteceu com a análise durante o século seguinte à invenção do cálculo. Tangidos pela aplicabilidade imensa do assunto, e carecendo de um entendimento real dos seus fundamentos, os matemáticos manipulavam os processos analíticos de uma maneira quase cega, muitas vezes guiados apenas pela intuição. O resultado só poderia ser uma acumulação de absurdos, até que, como reação natural ao emprego desordenado do intuicionismo e do formalismo⁶, alguns

⁶ Os termos *formalismo* e *intuicionismo* usados aqui não devem ser confundidos com os significados particulares dados a eles nas discussões atuais da filosofia da matemática. Encontraremos essas conotações filosóficas no final do livro.

matemáticos conscienciosos se sentiram na obrigação de tentar a difícil tarefa de estabelecer uma fundamentação rigorosa para a análise.

A primeira sugestão de um remédio real para o estado insatisfatório dos fundamentos da análise veio de Jean-le-Rond d'Alembert (1717-1783), ao observar muito corretamente, em 1754, que era necessária uma teoria dos limites; mas até 1821 não se verificou um desenvolvimento sólido dessa teoria. O mais antigo matemático de primeiro plano a efetivamente tentar uma rigorização do cálculo foi o ítalo-francês Joseph Louis Lagrange (1736-1813). A tentativa, baseada na representação de uma função por uma expansão em série de Taylor, ficou muito longe de ser bem sucedida, pois ignorava questões necessárias sobre convergência e divergência. Essa tentativa foi publicada em 1797 no monumental trabalho de Lagrange, *Théorie des Fonctions Analytiques*. Por ser talvez Lagrange o matemático mais importante do século XVIII, seu trabalho teve uma influência profunda nas pesquisas matemáticas posteriores; com o trabalho de Lagrange teve início a longa e difícil tarefa de banir o intuicionismo e o formalismo da análise.

No século XIX o corpo da análise continuou a se erguer, mas sobre alicerces cada vez mais profundos. Sem dúvida, deve-se a Gauss o mérito de ter laborado mais do que qualquer matemático de seu tempo para romper com as ideias intuitivas e estabelecer padrões de rigor mais elevados para a matemática. Ademais, no tratamento das séries hipergeométricas feito por ele em 1812 encontra-se o que geralmente se considera como a primeira consideração efetivamente adequada a respeito da questão da convergência de uma série infinita.

O primeiro grande progresso se deu em 1821, quando o matemático francês Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) pôs em prática com êxito a sugestão de d'Alembert de desenvolver uma teoria dos limites aceitável e definir então continuidade, diferenciabilidade e integral definida em termos do conceito de limite. São essas definições, em essência, embora formuladas mais cuidadosamente, que encontramos hoje nos textos elementares de cálculo. Certamente, o conceito de limite é essencial e indispensável para o desenvolvimento da análise, pois convergência e divergência de séries também dependem desse conceito. O rigor de Cauchy inspirou outros matemáticos a se unirem no esforço para escoimar a análise do formalismo e do intuicionismo.

A procura de um entendimento mais profundo dos fundamentos da análise ganhou um relevo extraordinário em 1874 com a publicação de um exemplo, da lavra do matemático alemão Karl Weierstrass, de uma função contínua não derivável ou, o que é equivalente, de uma curva contínua que não admite tangente em nenhum de seus pontos. Georg Bernhard Riemann inventou uma função que é contínua em todos os valores irracionais da variável mas descontínua para os valores racionais. Exemplos como esses pareciam contrariar a intuição humana e tornavam cada vez mais evidente que Cauchy não tinha atingido o verdadeiro âmago das dificuldades na procura de uma fundamentação sólida para a análise. A teoria dos limites fora construída sobre uma noção intuitiva simples do sistema dos números reais. De fato, o sistema dos números reais tinha sido mais ou menos admitido sem maiores cuidados, como ainda se faz na maioria dos textos elementares de cálculo. E é claro que a teoria dos limites, continuidade e diferenciabilidade

dependem mais de propriedades recônditas dos números do que se supunha então. Assim, Weierstrass defendeu um programa no qual o próprio sistema dos números reais, antes de mais nada, fosse tornado rigoroso para que assim tudo que dele decorresse na análise inspirasse segurança. Esse notável programa, conhecido como *aritmética da análise*, revelou-se difícil e intrincado, mas acabou se concretizando através de Weierstrass e seus seguidores, e hoje a análise pode ser deduzida logicamente de um conjunto de postulados que caracterizem o sistema dos números reais.

Os matemáticos foram consideravelmente além do estabelecimento do sistema dos números reais como o fundamento da análise. Pode-se também fazer com que a geometria euclidiana se baseie no sistema dos números reais através de sua interpretação analítica e foi demonstrado pelos matemáticos que a maior parte dos ramos da geometria é consistente se a geometria euclidiana é consistente. Ademais, como o sistema dos números reais, ou alguma parte dele, pode servir para interpretar tantos ramos da álgebra, parece evidente que também se pode fazer depender uma boa parte da álgebra desse sistema. De fato, pode-se afirmar hoje que, essencialmente, a consistência de toda a matemática existente depende da consistência do sistema dos números reais. Nisso reside a tremenda importância do sistema dos números reais para os fundamentos da matemática.

Uma vez que se pode fazer com que o grosso da matemática existente se alicerce no sistema dos números reais, é natural a curiosidade de saber se seus fundamentos podem penetrar mais fundo ainda. Nos fins do século XIX, com o trabalho de Richard Dedekind (1831-1916), Georg Cantor (1845-1918) e Giuseppe Peano (1858-1932), esses fundamentos se assentaram no muito mais simples e básico sistema dos números naturais. Isto é, esses matemáticos mostraram como o sistema dos números reais, e portanto o grosso da matemática, pode ser deduzido de um conjunto de postulados para o sistema dos números naturais. Então, no princípio do século XX, mostrou-se que o sistema dos números naturais pode ser definido em termos de conceitos da teoria dos conjuntos, e assim o grosso da matemática pode ser fundamentado sobre uma plataforma na teoria dos conjuntos. Especialistas em lógica, como Bertrand Russell (1872-1970) e Alfred North Whitehead (1861-1947) empenharam-se em aprofundar ainda mais esses fundamentos, deduzindo a teoria dos conjuntos de um embasamento no cálculo proposicional da lógica, embora nem todos os matemáticos entendam que esse passo tenha sido dado com êxito.

14.10 Weierstrass e Riemann

Pensa-se em geral que um matemático com potencial de primeira linha, a fim de ter êxito em seu campo, deve começar cedo a estudar seriamente matemática e não deve embotar-se ministrando muitas aulas em nível elementar. Karl Theodor Wilhelm Weierstrass, que nasceu em Ostenfelde em 1815, é uma exceção notável a essas duas regras gerais. Mal orientado, encaminhou-se na juventude para o estudo de leis e finanças, o que retardou sua iniciação em matemática; e só aos 40 anos de idade conseguiu se libertar do ensino secundário, quando obteve um lugar de instrutor na Universidade de Berlim. E só oito anos mais tarde, em 1864, foi guindado à condição de profes-

sor titular, podendo então dedicar-se integralmente à matemática avançada. Weierstrass nunca lamentou os anos gastos no ensino elementar, transferiu sua notável capacidade pedagógica para o trabalho universitário, tornando-se provavelmente o maior professor de matemática avançada que o mundo já teve.

De início Weierstrass escreveu muitos artigos sobre integrais hiperelípticas, funções abelianas e equações diferenciais algébricas, mas suas contribuições à matemática mais amplamente conhecidas referem-se à teoria das funções complexas por meio de séries de potências. Trata-se, num certo sentido, de uma extensão ao plano complexo da ideia anteriormente tentada por Lagrange, só que Weierstrass a pôs em prática com absoluto rigor. Weierstrass mostrou um interesse particular por funções inteiras e funções definidas por produtos infinitos. Descobriu a convergência uniforme e, como já vimos, deu início à chamada aritmetização da análise ou redução dos princípios da análise ao conceito de número real. Grande parte de suas descobertas matemáticas tornaram-se de domínio do mundo matemático não através de suas publicações, mas através de notas de suas aulas. Generosamente permitia que alunos e outros polissem (ficando com os méritos) muitas das joias matemáticas descobertas por ele. Como ilustração, algo a calhar, estão suas preleções de 1861, em que pela primeira vez discutiu seu exemplo de função contínua não diferenciável cuja publicação se deu em 1874 através de Paul du Bois-Reymond (1831-1889). Como salientamos anteriormente, Bolzano já havia dado antes um exemplo de uma função com essas características.



Karl Weierstrass
(Coleção David Smith)

Na álgebra, Weierstrass foi talvez o primeiro a dar uma definição postulacional de determinante. Ele definiu determinante de uma matriz quadrada A como um polinômio nos elementos de A , homogêneo e linear nos elementos de cada linha de A , que simplesmente muda de sinal quando se permutam duas linhas de A e que se reduz a 1

quando A é a matriz identidade. Contribuiu também para a teoria das formas bilineares e quadráticas e, juntamente com J. J. Sylvester (1814-1897) e H. J. S. Smith (1826-1883), criou a teoria dos divisores elementares de λ -matrizes.

Como professor, Weierstrass exerceu muita influência, e suas aulas meticulosamente preparadas estabeleceram um ideal para muitos futuros matemáticos; “rigor weierstrassiano” tornou-se sinônimo de “raciocínio extremamente cuidadoso”. Weierstrass foi “a consciência matemática por excelência” e tornou-se conhecido como “o pai da análise moderna”. Faleceu em Berlim em 1897, exatamente um século depois da publicação da tentativa de Lagrange de rigorizar o cálculo.

A par dessa rigorização da matemática, verificou-se uma tendência no sentido da generalização abstrata, um processo que se tornou muito pronunciado nos dias de hoje. E no século XIX talvez nenhum matemático tenha contribuído tanto para esse aspecto da matemática quanto Georg Friedrich Bernhard Riemann. Ele certamente exerceu uma influência profunda em vários ramos da matemática, em particular geometria e teoria das funções, e poucos matemáticos deixaram a seus sucessores um legado de ideias tão rico para desenvolvimentos posteriores.



Georg Riemann
(Coleção David Smith)

Riemann nasceu em 1826, numa aldeia de Hanover, filho de um pastor luterano. Suas maneiras sempre foram tímidas e sua saúde sempre foi frágil. A despeito de suas modestas posses, o pai de Riemann conseguiu dar-lhe uma boa educação, primeiro na Universidade de Berlim e depois na de Göttingen. Obteve seu doutorado nessa última instituição com uma brilhante tese no campo da teoria das funções complexas. Nessa tese encontram-se as chamadas *equações diferenciais de Cauchy-Riemann* (conhecidas, porém, antes do tempo de Riemann) que garantem a analiticidade de uma função de variável complexa, e o produtivo conceito de *superfície de Riemann*, que introduziu

considerações topológicas na análise. Riemann tornou claro o conceito de integrabilidade pela definição do que chamamos agora *integral de Riemann*, abrindo caminho, no século XX, para o conceito mais geral de *integral de Lebesgue* e, daí, para generalizações ulteriores da integral.

Em 1854 Riemann tornou-se Privatdocent (professor oficial mas não remunerado) de Göttingen e para esse privilégio apresentou famosa conferência probatória sobre as hipóteses em que se baseiam os fundamentos da geometria. De todos os artigos comparáveis a esse em tamanho, nenhum se mostrou mais rico em implicações em toda a história da matemática; nele se apresenta uma generalização ampla de espaço e geometria. O ponto de partida de Riemann foi a fórmula da distância entre dois pontos infinitesimalmente próximos. Na geometria euclidiana essa *métrica* é dada por

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Riemann salientou que se podem usar muitas outras fórmulas de distância, sendo as propriedades do espaço e da geometria resultantes determinadas pela métrica escolhida. Um espaço com uma métrica da forma

$$\begin{aligned} ds^2 = & g_{11} dx^2 + g_{12} dx dy + g_{13} dx dz \\ & + g_{21} dy dx + g_{22} dy^2 + g_{23} dy dz \\ & + g_{31} dz dx + g_{32} dz dy + g_{33} dz^2, \end{aligned}$$

onde os g_{ij} são constantes ou funções de x, y e z , é conhecido agora como *espaço de Riemann* e a geometria desse espaço como *geometria riemanniana*. O espaço euclidiano é o caso bastante particular em que $g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1$ e os outros g_{ij} são nulos. Mais tarde, Albert Einstein e outros iriam encontrar no conceito amplo de espaço de Riemann o contexto necessário para a teoria da relatividade. O próprio Riemann contribuiu para a física em várias direções; ele foi o primeiro, por exemplo, a dar um tratamento matemático às ondas de choque.

Na literatura matemática é famosa a chamada *função zeta de Riemann* e a *hipótese de Riemann* associada a ela. Esta última é uma célebre conjectura ainda em aberto que está para a análise clássica como o último “teorema” de Fermat está para a teoria dos números. Euler chamou a atenção para ligações entre a teoria dos números primos e a série

$$1/1^s + 1/2^s + 1/3^s + \dots + 1/n^s + \dots,$$

onde s é um inteiro. Riemann estudou a mesma série para um número complexo $s = \sigma + i\tau$. A soma da série define a função $\zeta(s)$, que veio a se tornar conhecida como função zeta de Riemann. Riemann, por volta de 1859, conjecturou que todos os zeros da função zeta têm sua parte real $\sigma = 1/2$. Em 1914, Sir Godfrey Harold Hardy (1877-1947), um inglês especialista em teoria dos números, conseguiu provar que $\zeta(s)$ tem

uma infinidade de zeros para $\sigma = 1/2$. Mesmo decorridos mais de cem anos de sua formulação, a conjectura original de Riemann continua não resolvida. Hilbert escolheu a resolução da hipótese de Riemann como um dos seus famosos 23 problemas de Paris.

Em 1857 Riemann foi indicado professor assistente de Göttingen e em 1859 sucedeu a Dirichlet como professor titular de uma cadeira que antes fora ocupada por Gauss. Mas em 1866, com apenas 40 anos de idade, morreu vítima da tuberculose no norte da Itália, para onde havia ido à procura de melhoras para sua saúde.

14.11 Cantor, Kronecker e Poincaré

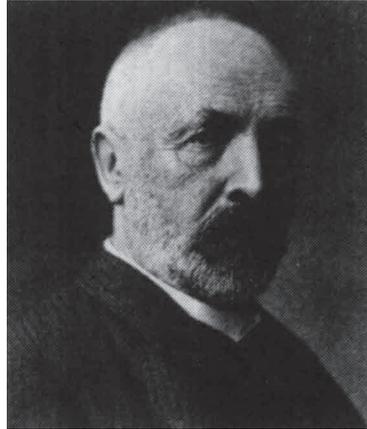
Esta seção será dedicada a algumas breves considerações sobre Georg Cantor e Henri Poincaré, dois matemáticos cujas vidas se situam parte no século XIX, parte no século XX, e que exerceram influência considerável em área muito extensa da matemática dos tempos atuais. É natural também inserir umas poucas palavras sobre Leopold Kronecker, o severo e implacável crítico da matemática do infinito de Cantor.

Georg Ferdinand Ludwig Philip Cantor, cujos pais eram dinamarqueses, nasceu em S. Petersburgo, Rússia, em 1845. Em 1856 sua família transferiu-se para Frankfurt, Alemanha. O pai de Cantor era um judeu convertido ao protestantismo e a mãe havia nascido na religião católica. O filho tomou-se de profundo interesse pela teologia medieval e seus argumentos intrincados sobre o contínuo e o infinito. Como consequência, abandonou a sugestão do pai de se preparar para a carreira de engenharia a fim de se concentrar em filosofia, física e matemática. Estudou em Zurique, Göttingen e Berlim (onde recebeu a influência de Weierstrass e obteve o doutorado em 1867). A seguir, de 1869 a 1905, desenvolveu sua longa carreira no ensino na Universidade de Halle. Faleceu no hospital de doenças mentais de Halle em 1918.

Os primeiros interesses de Cantor se voltavam para a teoria dos números, equações indeterminadas e séries trigonométricas. A sutil teoria das séries trigonométricas parece tê-lo inspirado a se enfiar nos fundamentos da análise. Criou então uma bela abordagem dos números irracionais, que utiliza sequências convergentes de números racionais e difere radicalmente do inspirado tratamento de Dedekind, e em 1874 começou seu revolucionário trabalho em teoria dos conjuntos e teoria do infinito. Com este último trabalho, Cantor criou um campo novo da pesquisa matemática. Em seus artigos ele desenvolveu a teoria dos números transfinitos, baseado num tratamento matemático do infinito atual e criou uma aritmética dos números transfinitos análoga à aritmética dos números finitos. Algumas dessas questões estão desenvolvidas na Seção 15-4.

Cantor era profundamente religioso e seu trabalho, que num certo sentido dá continuidade a argumentos ligados aos paradoxos de Zenão, reflete seu simpático respeito por especulações escolásticas medievais sobre a natureza do infinito. Seus pontos de vista encontraram oposição considerável, principalmente da parte de Leopold Kronecker, que resolutamente se opôs aos esforços de Cantor no sentido de conseguir um lugar de professor na Universidade de Berlim, onde Kronecker lecionava. Hoje a teoria dos conjuntos de Cantor penetrou quase todos os ramos da matemática e mostrou-se

de importância especial na topologia e nos fundamentos da teoria das funções reais. Há dificuldades lógicas e surgiram paradoxos. A controvérsia do século XX entre os formalistas, liderados por Hilbert, e os intuicionistas, liderados por Brouwer, essencialmente é uma continuação da controvérsia entre Cantor e Kronecker. Examinaremos mais a fundo essas questões no capítulo seguinte.

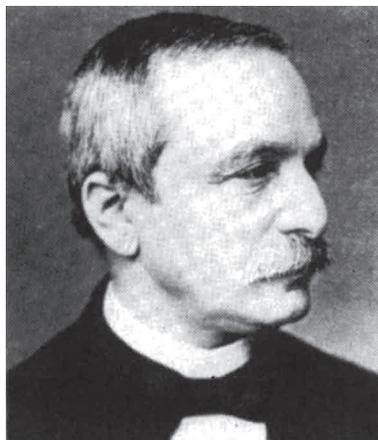


Georg Cantor
(Coleção David Smith)

Kronecker nasceu em Liegnitz, perto de Breslau, em 1823, e foi aluno de Kummer, no ginásio de sua cidade natal. Posteriormente estudou na Universidade de Berlim onde teve como mestres Jacobi, Steiner e Dirichlet e depois na Universidade de Bonn, onde novamente foi aluno de Kummer. Depois de seus estudos entrou para o mundo dos negócios onde atuou de 1844 a 1855, acumulando considerável fortuna pessoal graças ao seu incomum talento financeiro. Em 1855 mudou-se para Berlim em cuja Universidade começou a lecionar em 1861. Com isso Kummer, que também tinha se transferido para Berlim, Weierstrass e Kronecker passaram a formar o trio de ferro da matemática local. Kronecker especializou-se em teoria das equações, funções elípticas e teoria dos números algébricos. Como finitista, ele condenava o trabalho de Cantor, que considerava como teologia e não como matemática. Acreditando que toda a matemática deve se basear em métodos finitos desenvolvidos a partir dos números inteiros, era um pitagórico do século XIX. É sua a famosa frase: “Deus fez os números inteiros, todo o resto é criação do homem”. Faleceu em Berlim em 1891.

Jules Henri Poincaré, geralmente reconhecido como o principal matemático de sua época, nasceu em Nancy, França, em 1854. Era primo de Raymond Poincaré, eminente estadista e presidente da França durante a Primeira Guerra Mundial. Depois de se graduar na Escola Politécnica em 1875, graduou-se também engenheiro de minas em 1879 na École des Mines e, no mesmo ano, conseguiu o doutorado em ciências na Universidade de Paris. Depois disso foi indicado professor da Universidade de Caen

mas, decorridos dois anos, transferiu-se para a Universidade de Paris, onde ocupou várias cadeiras nas áreas de matemática e ciências até sua morte em 1912.



Leopold Kronecker
(Coleção David Smith)

Já se descreveu Poincaré como o último universalista da matemática. E é certamente verdadeiro que ele liderou e enriqueceu uma gama espantosa de assuntos. Na Sorbonne, a cada ano ele lecionava um tópico diferente da matemática pura ou aplicada, não demorando muito para os cursos dados por ele serem impressos. Era um escritor prolífico, tendo deixado mais de 30 livros e mais de 500 artigos técnicos. Foi também um dos mais hábeis divulgadores da matemática e da ciência. Suas exposições em brochuras baratas eram compradas avidamente e lidas de maneira ampla por pessoas das mais diferentes atividades; eram obras-primas que, pela lucidez da comunicação e pelo estilo envolvente, jamais foram superadas, tanto que foram traduzidas para várias línguas estrangeiras. De fato, tão grande era a excelência literária dos escritos populares de Poincaré que se concedeu a ele a honra mais alta que um escritor francês pode alcançar: foi eleito membro da seção literária do *Institut* francês.

Poincaré nunca se preocupou em permanecer num campo por muito tempo, antes preferia pular lepidamente duma área para outra. Foi descrito por um de seus contemporâneos como “um conquistador, não um colonizador”. Sua tese de doutoramento sobre equações diferenciais dizia respeito a teoremas de existência. Esse trabalho levou-o a desenvolver a teoria das funções automórficas e, em particular, das funções zeta-fuchsianas que, conforme ele mostrou, podem ser usadas para resolver equações diferenciais lineares de segunda ordem com coeficientes algébricos. Como Laplace, Poincaré contribuiu notavelmente para a teoria das probabilidades. Antecipou-se também ao interesse do século XX pela topologia e seu nome hoje se encontra nos *grupos de Poincaré* da topologia combinatória. Já vimos antes, na Seção 13-7 e no Exercício 13.12, o interesse de Poincaré pela geometria não euclidiana.

Na matemática aplicada seu gênio versátil deu contribuições a assuntos os mais diversos como óptica, eletricidade, telegrafia, capilaridade, elasticidade, termodinâmica, teoria do potencial, teoria quântica, teoria da relatividade e cosmogonia.



Henri Poincaré
(Coleção David Smith)

Por toda a vida Poincaré foi uma pessoa de modos canhestros, além de míope e distraído, mas era dotado da capacidade de reter quase que completamente e de maneira instantânea tudo que acaso lesse. Sua cabeça produzia matemática enquanto ele caminhava intranquilamente e, uma vez esgotadas as cogitações, com rapidez registrava tudo no papel de maneira tal que quase não se faziam necessárias emendas posteriores. Em contraste com essa produção rápida e extensa, lembre-se a de Gauss, meticulosamente preparada e sob o lema: “Pouco, porém maduro”.

Contam-se histórias sobre a falta de controle motor de Poincaré. Diz-se que ele era ambidestro, ou seja, podia se desempenhar igualmente mal com ambas as mãos. Não tinha nenhum jeito para o desenho, tendo obtido um rotundo zero nessa matéria na escola. Ao fim do ano, seus colegas de classe jocosamente organizaram uma exposição de suas obras-primas artísticas. Cuidadosamente eles puseram uma legenda em grego debaixo de cada uma, “Isto é uma casa”, “Isto é um cavalo” e assim por diante.

Pode ser que Poincaré seja a última pessoa a respeito da qual se possa sustentar sensatamente que seu campo de atuação era *toda* a matemática. Pois a matemática vem crescendo a uma taxa tão incrível nos tempos modernos que se acredita ser bastante impossível que possa alguém alcançar novamente essa distinção.

14.12 *Sonja Kovalevsky, Emmy Noether e Charlotte Scott*

Sophia Korvin-Krukovsky, posteriormente conhecida como Sonja Kovalevsky, nasceu em Moscou, em 1850, numa família da nobreza russa. Aos 17 anos de idade foi para

S. Petersburgo onde estudou cálculo com um professor da escola naval da cidade. Impedida, devido ao sexo, de seguir estudos superiores em universidades russas, casou-se nominalmente com o amável Vladimir Kovalevsky (que mais tarde se tornou um paleontologista conhecido) para se livrar das objeções familiares a que estudasse no exterior. O casamento ocorreu em 1868 e, na primavera seguinte, o casal mudou-se para Heidelberg.

Em Heidelberg, Kovalevsky assistiu a preleções de Leo Königsberger (1837-1921) e du Bois-Reymond (1831-1889) na área da matemática e de Kirchhoff (1824-1887) e Helmholtz (1821-1894) na área da física. Königsberger fora aluno de Weierstrass na Universidade de Berlim e as referências entusiásticas a seu mestre incutiram em Kovalevsky o desejo de também estudar com o grande professor. Mas, chegando a Berlim em 1870, encontrou a universidade irreduzível quanto à não aceitação de alunas do sexo feminino. Por isso aproximou-se diretamente de Weierstrass que, devido às recomendações calorosas de Königsberger, aceitou-a como aluna particular. Logo tornou-se a discípula predileta de Weierstrass, que repetia para ela suas aulas da universidade. Ela conquistou a admiração de Weierstrass com quem estudou por quatro anos (1870-1874) durante os quais não só cobriu o curso universitário de matemática como também escreveu três importantes artigos, um sobre a teoria das equações diferenciais, parciais, um sobre a redução de integrais abelianas de terceira espécie e uma suplementação da pesquisa de Laplace sobre os anéis de Saturno.

Em 1874 Sonja Kovalevsky foi distinguida, *in absentia*, com o grau de Doutora em Filosofia pela Universidade de Göttingen e, devido à excelência de um artigo apresentado sobre equações diferenciais parciais, foi dispensada do exame oral. Em 1888, com 38 anos de idade, atingiu seu apogeu ao conquistar o prestigioso Prêmio Bordin da Academia Francesa com sua memória “Sobre o problema da rotação de um corpo sólido em torno de um ponto fixo”. Dos 15 artigos apresentados o seu foi considerado o melhor; tão melhor e de nível tão alto que o prêmio foi aumentado de 3000 para 5000 francos.



Sonja Kovalevsky
(Coleção David Smith)

De 1884 até sua morte em 1891, Kovalevsky atuou como professora de matemática superior na Universidade de Estocolmo. Seu lema era: “Diga o que você sabe, faça o que você deve, conclua o que puder”.

Há uma história muito contada sobre um fator preliminar, excluídas as tendências do pai e do tio para a matemática, que teria atraído Kovalevsky para essa ciência quando ainda era criança. Ao que parece, certa ocasião, um dos quartos das crianças em sua casa foi revestido temporariamente com folhas de papel com anotações de aulas de cálculo feitas por seu pai quando era estudante. Essas folhas teriam-na fascinado, fazendo com que gastasse horas tentando decifrá-las e colocá-las em ordem.

Amalie Emmy Noether, uma das mais importantes matemáticas no campo da álgebra, nasceu em Erlanger, Alemanha, em 1882. Embora nascida no final do século XIX, sua obra matemática foi realizada na primeira metade do século XX. Seu pai, Max Noether (1844-1921) foi um matemático ilustre da Universidade de Erlanger. Max Noether era um algebrista, assim como Paul Gordan (1837-1912), também ligado à universidade e amigo íntimo da família Noether. Por isso; não é de se estranhar que Emmy Noether, que estudou na Universidade, também se tornasse algebrista. Sua tese de doutorado, *Sobre sistemas completos de invariantes para formas biquadradas ternárias*, foi defendida em 1907 sob a orientação de Gordan. Um ano após sua aposentadoria em 1910, Gordan foi sucedido por Ernst Fischer (1875-1959), outro algebrista que trabalhava com teoria da eliminação e teoria dos invariantes. Sua influência sobre Noether foi grande e, sob sua orientação, sua preocupação passou dos aspectos algorítmicos do trabalho de Gordan à abordagem axiomática de Hilbert.



Amalie Emmy Noether
(Arquivos do Bryn Mawr College)

Depois de deixar Erlanger, Emmy Noether estudou em Göttingen, onde, em 1919, foi aprovada no exame de habilitação, após superar objeções de parte da faculdade que se opunha a aulas de mulheres. “O que nossos militares pensarão”, argumentavam, “quando retornarem à universidade e verificarem que têm de aprender aos pés de uma mulher?” David Hilbert ficou muito irritado com a pergunta e respondeu: “Não vejo em que o sexo de um candidato possa ser um argumento contra sua admissão como Privatdozent. Afinal, o Conselho não é nenhuma casa de banhos”. Em 1922 tornou-se professora, em caráter extraordinário, de Göttingen, um lugar que manteve até 1933 quando, devido ao domínio e excessos nazistas, foi proibida, juntamente com muitos outros intelectuais, de participar de atividades acadêmicas. Logo após deixou a Alemanha para ocupar uma cadeira no Bryn Mawr College, Pennsylvania, tornando-se também membro do Instituto de Estudos Avançados de Princeton. Seus poucos anos de Estados Unidos foram talvez os mais felizes e produtivos de sua vida. Mas faleceu em 1935, com 53 anos de idade, no auge de sua capacidade criativa.

Embora Noether deixasse a desejar como professora, pedagogicamente falando, logrou inspirar um número surpreendentemente grande de alunos que, também, deixariam suas pegadas no campo da álgebra abstrata. Suas pesquisas sobre anéis abstratos e teoria dos ideais foram particularmente importantes no desenvolvimento da álgebra moderna.

Nas cerimônias que se seguiram à sua morte, Emmy Noether recebeu encômios calorosos de Albert Einstein. Alguém, certa vez, referiu-se a ela como a filha de Max Noether. Ao que Edmund Landau replicou: “Max Noether foi o pai de Emmy Noether. Emmy é a origem das coordenadas da família Noether”. Hermann caracterizou-a como uma pessoa muito afetuosa. Em 1982 celebrou-se no Bryn Mawr College o centenário de seu nascimento.

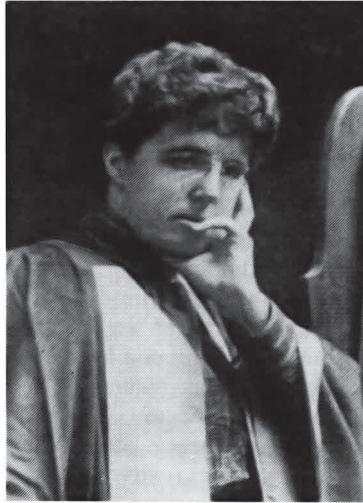
É natural, quando se fala de Emmy Noether, lembrar sua eminente predecessora no Bryn Mawr College, Charlotte Angas Scott (1858-1931). Charlotte Scott foi a primeira inglesa a receber um doutorado (incluindo todos os campos): em matemática, na Universidade de Londres. Ela passara nove anos na Universidade de Cambridge que, somente em 1948, iria propiciar às mulheres a oportunidade desse grau acadêmico.

Além de suas pesquisas matemáticas (publicou mais de 20 artigos em jornais especializados de sua época), Scott foi uma professora magistral, sempre buscando os mais altos padrões acadêmicos. Seu campo de estudos foi principalmente a geometria das curvas. Escreveu três livros, dos quais *An Introductory Account of Certain Modern Ideas and Methods in Plane Analytic Geometry*, publicado em 1894, foi uma obra-prima inspiradora⁷.

De 1899 a 1926, Scott atuou como coeditora do *American Journal of Mathematics* que fora fundado por J. J. Sylvester (1814-1897) em 1878 quando era chefe do departamento de Johns Hopkins. Scott também teve papel ativo na fundação da Sociedade Matemática de Nova York que, em 1894, foi reorganizada como American Mathematical Society⁸.

⁷ Reimpresso em 1961 pela Chelsea. Ver Bibliografia ao fim do capítulo.

⁸ Para um excelente relato sobre Charlotte Scott ver Patrícia C. Kenshaft, “Charlotte Angas Scott, 1858-1931”, *The College Mathematics Journal*, mar., 1987, pp. 98-110.



Charlotte Angas Scott
(Arquivos do Bryn Mawr College)

As sete filhas míticas de Atlas foram colocadas num relicário, ao norte do céu, na forma das estrelas principais do aglomerado das Plêiades. Qual uma espécie de imitação no firmamento da ciência, as matemáticas Hipátia, Maria Gaetana Agnesi, Sophie Germain, Mary Fairfax Somerville, Sonja Kovalevsky, Grace Chisholm Young e Amalie Emmy Noether se tornaram conhecidas como As Plêiades Matemáticas. Essas mulheres não só foram matemáticas competentes como inspiraram e capacitaram outras mulheres a entrar para a matemática. Quebraram-se as barreiras do sexo existentes no século XIX e começo do século XX no campo da matemática e as universidades por fim se abriram para a aceitação das mulheres em suas faculdades e para seu reconhecimento acadêmico.

Em 1971 fundou-se nos Estados Unidos a Association for Women in Mathematics (aberta também ao sexo masculino) com o objetivo de colocar homens e mulheres da matemática em pé de igualdade. Não há nenhuma superioridade inerente aos homens no que tange ao raciocínio ou criatividade em matemática, como se nota hoje com o rápido crescimento do número de mulheres entre os que praticam e criam essa ciência em nível superior.

14.13 Os números primos

Os números primos ostentam uma longa história, desde os dias dos gregos antigos até o presente. Como algumas das mais importantes descobertas sobre primos foram feitas no século XIX, parece apropriado discutir-se aqui esses interessantes números.

O teorema fundamental da aritmética diz que os números primos são tijolos de construção a partir dos quais os outros inteiros são formados multiplicativamente. Por conse-

guinte, os números primos foram muito estudados e se fizeram esforços consideráveis no sentido de determinar a natureza de sua distribuição na sequência dos inteiros positivos. Os principais resultados obtidos na Antiguidade foram a prova da infinitude dos primos e o crivo de Eratóstenes para determinar os primos inferiores a um inteiro dado n .

A partir do crivo de Eratóstenes pode-se obter uma fórmula maljeitosa para determinar o número de primos inferiores a n , quando se conhecem os primos inferiores a \sqrt{n} . Essa fórmula foi consideravelmente aprimorada em 1870 por Ernst Meissel que conseguiu mostrar que o número de primos inferiores a 10^8 é 5 761 455. O matemático dinamarquês Bertelsen prosseguiu esses cálculos e anunciou em 1893 que o número de primos abaixo de 10^9 é 50 847 478. Em 1959 o matemático americano D. H. Lehmer mostrou que esse último resultado não é correto (o número encontrado por ele foi 50 847 534); Lehmer mostrou também que o número de primos abaixo de 10^{10} é 455 052 511.

Não há porém nenhum procedimento prático para testar se um número grande é primo e o esforço feito na verificação de alguns números particulares foi enorme. Por mais de 75 anos o maior número primo efetivamente testado foi

$$2^{127} - 1 = 170\,141\,183\,460\,469\,231\,731\,687\,303\,715\,884\,105\,727,$$

com 39 algarismos, num trabalho do matemático francês Anatole Lucas (1842-1891) em 1876. Em 1952 o computador EDSAC, em Cambridge, Inglaterra, mostrou que é primo o número muito maior (79 algarismos)

$$180 (2^{127} - 1)^2 + 1.$$

Desde então outros computadores mostraram que são primos os números $2^n - 1$ para $n = 521, 607, 1279, 2203, 2281, 3217, 4253, 4423, 9689, 9941, 11\,213, 19\,937, 21\,701, 23\,209, 86\,243, 132\,049$ e $216\,091$, todos enormes.

Um sonho dos especialistas em teoria dos números é encontrar uma função $f(n)$ que, para inteiros positivos n , forneça apenas números primos, uma infinidade desses números.

Assim

$$f(n) = n^2 - n + 41$$

fornece primos para todo $n < 41$, mas $f(41) = 41^2$ é um número composto. O polinômio quadrático $f(n) = n^2 - 79n + 1601$ fornece primos para $n < 80$. Podem-se encontrar funções polinomiais que forneçam sucessivamente tantos primos quanto se deseje, mas nenhum delas fornecerá sempre números primos. Em 1640 Pierre de Fermat conjecturou que $f(n) = 2^{(2^n)} + 1$ é primo para todos os inteiros não negativos n mas isso, como já salientamos na Seção 10-3, não é verdadeiro. Um resultado recente e interessante, nessa linha, é a demonstração, feita em 1947 por W. H. Mills, da existência de um número real A tal que o maior inteiro que não excede $A^{(3^n)}$ é primo, para todo inteiro positivo n . Nada se mostrou sobre o valor real nem mesmo sobre a ordem de grandeza por alto do número A .

Uma generalização notável do teorema de Euclides da infinitude dos primos foi estabelecida por Lejeune-Dirichlet (1805-1859) ao conseguir mostrar que toda progressão aritmética

$$a, a + d, a + 2d, a + 3d, \dots,$$

onde a e d são primos entre si, contém infinitos números primos. A prova desse resultado está muito longe de ser fácil.

Talvez o mais surpreendente dos resultados já encontrados referentes à distribuição dos primos seja o chamado *teorema dos números primos*. Indiquemos por A_n o número de primos abaixo de n . O teorema dos números primos assegura que $(A_n \log_e n)/n$ se aproxima de 1 conforme n cresce indefinidamente. Em outras palavras, A_n/n , chamada *densidade* dos primos entre os primeiros n inteiros, aproxima-se de $1/\log_e n$, tanto mais quanto maior for n . Esse teorema, que fora conjecturado por Gauss após o exame de uma grande tábua de números primos, foi provado independentemente em 1896 pelo francês J. Hadamard e pelo belga C. J. de la Vallée Poussin.

Nas pesquisas sobre números primos calcularam-se tábuas extensas de fatores. Uma delas, para todos os números até 24 000, foi publicada em 1659 por J. H. Rahn (1622-1676), como apêndice de um livro de álgebra. Em 1668 o inglês John Pell estendeu essa tábua até 100 000. Em resposta aos apelos do matemático alemão J. H. Lambert, o mestre-escola vienense Anton Felkel calculou uma extensa e malfadada tábua. O primeiro volume, com os fatores dos números até 408 000, foi publicado em 1776 às expensas do tesouro imperial austríaco. Como houvesse pouco interesse pelo volume, o tesouro recolheu a edição quase que completa e converteu o papel em cartuchos a serem usados numa guerra para matar turcos! No século XIX, os esforços combinados de Chernac, Burckhardt, Crelle, Glaisher e o calculador relâmpago Dase redundaram numa tábua cobrindo todos os números até 10 000 000, publicada em dez volumes. Mas a realização máxima quanto a isso é a tábua calculada por J. P. Kulik (1773-1863) da Universidade de Praga. Seu manuscrito ainda não publicado é o fruto de um pasatempo de 20 anos e cobre os números até 100 000 000. A melhor das tábuas de fatores disponíveis é a do matemático americano D. N. Lehmer⁹ (1867-1938). É uma tábua em um volume, inteligentemente preparada, e que cobre os números até 10 000 000. Com o advento dos computadores eletrônicos modernos o trabalho de verificar se um número é primo e de construir tábuas de primos especiais se intensificou grandemente. Por exemplo, em novembro de 1980 a revista *Crux mathematicorum* estampou uma tábua de todos os primos palindrômicos de cinco dígitos (são 93) e de todos os de sete dígitos (são 668) (um palíndromo é um número, como o primo 3 417 143, cujo valor é o mesmo quando lido da esquerda para a direita ou vice-versa). O cálculo foi feito num PDP-11/45 da Universidade de Waterloo e o tempo gasto nesse trabalho foi ligeiramente superior a um minuto. Um bonito palíndromo primo de nove algarismos é o número 345676543, dado por Léo Sauvé, editor da revista citada, que afirmou existirem 5172 palíndromos primos de nove algarismos.

⁹ Pai de D. H. Lehmer, D. N. Lehmer alertou que a tábua de Kulik contém erros.

Há muitas conjecturas em aberto com relação aos números primos. Uma delas aponta para a existência de infinitos pares de *primos gêmeos* ou primos da forma p e $p + 2$, como 3 e 5, 11 e 13 e 29 e 31. Outra é a conjectura feita por Christian Goldbach (1690-1764) em 1742 numa carta a Euler. Goldbach observou que todo inteiro par, exceto o 2, parecia ser exprimível como a soma de dois primos. Por exemplo, $4 = 2 + 2$, $6 = 3 + 3$, $8 = 5 + 3$, ..., $16 = 13 + 3$, $18 = 11 + 7$, ..., $48 = 29 + 19$, ..., $100 = 97 + 3$ e assim por diante. O primeiro progresso nesse problema só se deu em 1931, quando o matemático russo L. G. Schnirelmann (1905-1935) mostrou que todo inteiro positivo pode ser representado como uma soma de não mais que 300 000 primos! Algum tempo mais tarde o matemático russo I. M. Vinogradoff (nascido em 1891) mostrou que existe um inteiro positivo N tal que todo inteiro $n > N$ pode ser expresso como soma de no máximo quatro primos, mas a demonstração em hipótese alguma nos permite estimar a ordem de grandeza de N . Já se comprovou a hipótese de Goldbach para os números até 100 milhões.

As seguintes questões (nas quais n representa um inteiro positivo) sobre primos ainda não foram respondidas: há uma infinidade de primos da forma $n^2 + 1$? Sempre há um primo entre n^2 e $(n + 1)^2$? É um n qualquer, de um certo ponto em diante, ou um quadrado ou a soma de um primo e um quadrado? Há uma infinidade de números *primos de Fermat* (primos da forma $2^{(2^n)} + 1$)?

Exercícios

14.1 A configuração de Feuerbach

O *círculo dos nove pontos* tem um lugar de destaque na geometria elementar moderna do triângulo. Num dado triângulo $A_1A_2A_3$ de circuncentro O e ortocentro (ponto de intersecção das três alturas) H , sejam O_1, O_2, O_3 os pontos médios dos lados, H_1, H_2, H_3 os pés das três alturas e C_1, C_2, C_3 os pontos médios dos segmentos HA_1, HA_2, HA_3 . Então os 9 pontos $O_1, O_2, O_3, H_1, H_2, H_3, C_1, C_2, C_3$ pertencem à circunferência do chamado *círculo dos nove pontos*. Fala-se desse círculo às vezes erradamente em virtude de descobertas anteriores, como o *círculo de Euler*. Na Alemanha é chamado *círculo de Feuerbach* porque Karl Wilhelm Feuerbach (1800-1834) publicou um opúsculo em que não só chegou ao círculo dos nove pontos como também provou que ele é tangente à circunferência inscrita e às três circunferências excritas ao triângulo dado. Esse último fato é conhecido como *teorema de Feuerbach* e é com justiça considerado um dos teoremas mais elegantes da moderna geometria do triângulo. Os quatro pontos de tangência do círculo de nove pontos com as circunferências inscrita e excritas se denominam *pontos de Feuerbach* do triângulo e têm merecido estudo considerável. O centro, F , do círculo dos nove pontos é o ponto médio de OH . O centroide (intersecção das três medianas do triângulo), G , também pertence a OH e $HG = 2(GO)$. Dá-se o nome de *reta de Euler* do triângulo dado à reta pelos pontos O, F, G, H . Suponhamos que H_2H_3, H_3H_1, H_1H_2

seccionem os lados opostos A_2A_3 , A_3A_1 , A_1A_2 em P_1 , P_2 , P_3 . Então P_1 , P_2 , P_3 pertencem a uma reta chamada *eixo polar* do triângulo $A_1A_2A_3$, eixo este que é perpendicular à reta de Euler. Se o círculo dos nove pontos e a circuncircunferência se cortam, então o eixo polar é a reta da corda comum e a circunferência do círculo de diâmetro HG , chamado *círculo ortocentroidal* do triângulo dado, também passa pelos mesmos pontos de intersecção.

Desenhe a figura de um triângulo obtuso, grande e cuidadosamente bem construído, incluindo centroide, ortocentro, circuncentro, incentro, os 3 excentros, reta de Euler, eixo polar, círculo dos nove pontos, pontos de Feuerbach, circuncírculo e círculo ortocentroidal.

14.2 O teorema de Commandino

Em 1565 Federigo Commandino (1509-1575) publicou um dos primeiros teoremas, depois da época dos gregos, sobre a geometria do tetraedro. O teorema refere-se às medianas do tetraedro, entendendo-se por *mediana* o segmento de reta que une um vértice do tetraedro ao centroide da face oposta. O Teorema de Commandino garante que: As quatro medianas de um tetraedro concorrem num ponto que quadrissecciona cada uma delas.

(a) Prove analiticamente o teorema de Commandino.

(b) Prove sinteticamente o teorema de Commandino.

(c) Prove que o plano determinado pelos centroides de 3 faces de um tetraedro é paralelo à quarta face.

O tetraedro formado pelos planos que passam pelos vértices de um tetraedro dado e são paralelos às faces opostas respectivas se denomina *tetraedro anticomplementar* do tetraedro dado.

(d) Prove que os vértices de um tetraedro são os centroides das faces do tetraedro anticomplementar.

(e) Prove que uma aresta do tetraedro anticomplementar é trisseccionada pelas duas faces do tetraedro dado que interceptam essa aresta.

14.3 As alturas de um tetraedro

As três alturas de um triângulo são concorrentes. As quatro alturas de um tetraedro também são concorrentes?

14.4 Análogos no espaço

Enuncie teoremas no espaço que são análogos dos seguintes teoremas no plano.

- (a) As bissetrizes dos ângulos internos de um triângulo concorrem no centro do círculo inscrito no triângulo.
- (b) A área de um círculo é igual à área de um triângulo cujo comprimento da base é o mesmo da circunferência do círculo e cuja altura é igual ao raio do círculo.
- (c) O pé da altura de um triângulo isósceles é o ponto médio da base.

14.5 Elementos isogonais

Duas retas pelo vértice de um ângulo e simétricas em relação à bissetriz do ângulo se denominam *retas conjugadas isogonais* do ângulo. Há um bonito teorema sobre triângulos que afirma que se três retas pelos vértices de um triângulo são concorrentes, então as três retas conjugadas isogonais pelos vértices do triângulo também são concorrentes. Os dois pontos de concorrência formam um par de *pontos conjugados isogonais* do triângulo. Os 6 pés das perpendiculares baixadas de um par de pontos conjugados isogonais sobre os lados do triângulo estão numa circunferência cujo centro é o ponto médio do segmento de reta que une o par de pontos conjugados isogonais.

- (a) Desenhe uma figura que ilustre os fatos acima.
- (b) Prove que o ortocentro e o circuncentro de um triângulo constituem um par de pontos conjugados isogonais.
- (c) Tente encontrar análogos para o espaço das definições e dos teoremas enunciados ao início do Exercício.

O ponto conjugado isogonal do centroide de um triângulo se denomina *ponto de Lemoine* do triângulo. Numa comunicação de 1873 à Association Française pour l'Avancement des Sciences, Émile Lemoine (1840-1912) deu notícia pela primeira vez desse ponto. Pode-se afirmar que o estudo moderno da geometria do triângulo começou efetivamente com Lemoine.

14.6 Construções impossíveis

- (a) Estabeleça a identidade: $\cos \theta = 4 \cos^3 (\theta/3) - 3 \cos (\theta/3)$.
- (b) Mostre que é impossível, com os instrumentos euclidianos, construir um polígono regular de 9 lados.
- (c) Mostre que é impossível, com os instrumentos euclidianos, construir um ângulo de 1° .
- (d) Mostre que é impossível, com os instrumentos euclidianos, construir um polígono regular de 7 lados.
- (e) Mostre que é impossível, com os instrumentos euclidianos, trisseccionar um ângulo cujo cosseno é $2/3$.

(f) Dado um segmento s , mostre que é impossível, com os instrumentos euclidianos, construir segmentos m e n tais que $s : m = m : n = n : 2s$.

(g) Mostre que é impossível, com os instrumentos euclidianos, construir o raio de uma esfera cujo volume é a soma dos volumes de duas esferas arbitrárias de raios dados.

(h) Mostre que é impossível, com os instrumentos euclidianos, construir um segmento de reta cujo comprimento é igual ao de uma circunferência dada.

(i) São dados um ângulo AOB e um ponto P interior ao ângulo. A reta por P que intercepta OA e OB em C e D de maneira que $CE = PD$, onde E é o pé da perpendicular por O a CD se denomina *reta de Fílon* para o ângulo AOB e o ponto P . Pode-se mostrar que a reta de Fílon é a corda mínima dentre todas as que se podem traçar por P . Mostre que, de maneira geral, é impossível construir, com os instrumentos euclidianos, a reta de Fílon para um ângulo e um ponto dados.

14.7 Algumas construções aproximadas

(a) Para uma construção aproximada do heptágono regular inscrito num círculo dado, tome como lado do heptágono o apótema do hexágono regular inscrito. Quão boa é essa aproximação?

(b) Para trisseccionar um ângulo central dado de um círculo, alguém sugere trisseccionar a corda do arco determinada pelo ângulo e depois ligar esses pontos ao centro do círculo. Mostre que a aproximação fornecida por esse método é insatisfatória para ângulos obtusos grandes.

(c) Estude a precisão do seguinte procedimento para trisseccionar aproximadamente um ângulo; foi dado por Kopf em 1919 e aperfeiçoado posteriormente por O. Perron e M. d'Ocagne. Suponha-se que o ângulo dado AOB seja o ângulo central de um círculo de diâmetro BOC . Determine D , ponto médio de OC , e depois P no prolongamento de OC de maneira que $CP = OC$. Por D erga a perpendicular e indique por E uma de suas intersecções com a circunferência do círculo. Entre C e D marque o ponto F tal que $DF = (DE)/3$. Com centro em F e raio FB descreva um arco e chame de A' sua intersecção com o prolongamento de CA . Então o ângulo $A'PB$ é aproximadamente igual a $1/3$ do ângulo AOB .

(d) Estude a precisão do seguinte procedimento para trisseccionar aproximadamente um ângulo; é de autoria de M. d'Ocagne, foi exposto em 1934 e é surpreendentemente acurado para ângulos pequenos. Suponha-se que o ângulo dado AOB seja o ângulo central de um círculo de diâmetro BOC . Seja D o ponto médio de OC e M o ponto médio do arco AB . Então o ângulo MDB é aproximadamente $1/3$ do ângulo AOB .

14.8 O teorema de construção de Mascheroni

Designemos a circunferência de centro C e que passa pelo ponto A pelo símbolo $C(A)$ e a circunferência de centro C e raio igual ao segmento AB pelo símbolo $C(AB)$. Prove a seguinte cadeia de construções e mostre que elas estabelecem o teorema de construção de Mascheroni: *Toda construção euclidiana, na medida em que os elementos dados e procurados são pontos, pode ser efetuada com o compasso euclidiano apenas.* As construções estão anotadas numa forma tabular em que na linha de cima se indica o que deve ser traçado e na de baixo os novos pontos assim construídos.

(a) Construir, com o compasso euclidiano, a circunferência $C(AB)$.

$C(A), A(C)$	$M(B) N(B)$	$C(X)$
M, N	X	

(Nota: Essa construção mostra que o compasso euclidiano e o moderno são instrumentos equivalentes.)

(b) Construir, com o compasso moderno, a intersecção de $C(D)$ com a reta determinada pelos pontos A e B .

CASO 1: C não está em AB .

$A(C), B(C)$	$C(D), C_1(CD)$
C_1	X, Y

CASO 2: C está em AB .

$A(D), C(D)$	$C(DD_1), D(C)$	$C(DD_1), D_1(C)$	$F(D_1), F_1(D)$	$F(CM), C(D)$
D_1	F , quarto vértice do paralelogramo CD_1DF	F_1 , quarto vértice do paralelogramo CDD_1F_1	M	X, Y

(c) Construir, com compasso moderno, o ponto de intersecção das retas determinadas pelos pares de pontos A, B e C, D

$A(C), B(C)$	$A(D), B(D)$	$C(DD_1), D_1(CD)$	$C_1(G), G(D_1)$	$C_1(C), G(CE)$	$C(F), C_1(CF)$
C_1	D_1	G , colinear com C, C_1	E , uma das intersecções	F , colinear com C_1, E	X

(d) Lê-se na página 268 de *A History of Mathematics* de Cajori: “Napoleão propôs aos matemáticos franceses o problema de dividir uma circunferência em quatro partes iguais usando apenas o compasso. Mascheroni aplicou o raio três vezes à circunferência obtendo os arcos AB , BC , CD ; então AD é um diâmetro; o resto é óbvio”. Complete a parte “óbvia” da construção.

14.9 construções com régua e compasso enferrujado

Resolva, com régua e compasso enferrujado, as construções seguintes, que são as primeiras 14 do *Compendium Euclidis curiosi* de Mohr:

1. Dividir um segmento de reta dado em duas partes iguais.
2. Levantar uma perpendicular a uma reta por um de seus pontos.
3. Construir um triângulo equilátero, conhecido um lado.
4. Traçar uma perpendicular a uma reta por um ponto fora dela.
5. Por um ponto dado traçar uma reta paralela a uma reta dada.
6. Somar dois segmentos de reta dados.
7. Subtrair de um segmento dado um outro menor do que ele.
8. Colocar perpendicularmente, numa das extremidades de um segmento de reta dado, um outro segmento de reta dado.
9. Dividir um segmento de reta dado em um número qualquer de partes iguais.
10. Dados dois segmentos de reta, determinar a terceira proporcional.
11. Dados três segmentos de reta, determinar a quarta proporcional.
12. Determinar a média proporcional de dois segmentos dados.
13. Transformar um retângulo dado num quadrado.
14. Construir um triângulo, dados os três lados.

14.10 Geometrografia de Lemoine

Encontre o *símbolo*, a *simplicidade* e a *precisão* das seguintes construções usuais de uma reta por um ponto A , paralela a uma reta dada MN .

(a) Por A trace uma reta qualquer e seja B sua intersecção com MN . Com raio r arbitrário trace a circunferência $B(r)$ e indique por C e D suas intersecções com MB e AB , respectivamente. Trace a circunferência $A(r)$, cortando AB em E . Trace a circunferência $E(CD)$, cortando $A(r)$ em X . Trace AX , que é a paralela desejada.

(b) Tomando qualquer ponto conveniente D como centro, trace a circunferência $D(A)$, cortando MN em B e C . Trace a circunferência $C(AB)$, cortando $D(A)$ em X . Trace AX .

(c) Com qualquer raio conveniente r , trace a circunferência $A(r)$, cortando MN em B . Trace a circunferência $B(r)$, cortando MN em C . Trace a circunferência $C(r)$, cortando $A(r)$ em X . Trace AX .

Encontre o *símbolo, a simplicidade e a precisão* das seguintes construções da perpendicular a uma reta m por um ponto P de m .

(d) Com centro em P e qualquer raio conveniente, trace uma circunferência, cortando m em A e B . Tomando A e B como centros e com raios quaisquer convenientes, trace arcos interceptando-se em Q . Trace PQ , que é a perpendicular desejada.

(e) Tomando qualquer ponto conveniente fora de m como centro, trace uma circunferência por P , cortando m noutro ponto, Q , e trace o diâmetro QR dessa circunferência. Trace PR , que é a perpendicular desejada.

14.11 O princípio de dualidade

(a) Dualize 9.12(a). (Ver Exercício 9.12)

(b) Dadas 5 retas, encontre em qualquer uma delas o ponto de tangência da cônica que tangência as 5 retas.

(c) Dadas 4 tangentes a uma cônica e o ponto de tangência de uma qualquer delas, construa outras tangentes à cônica.

(d) Dualize 9.12(d).

(e) Dualize 9.12(e).

(f) Dadas 3 tangentes a uma cônica e os pontos de tangência de duas delas, construa o ponto de tangência da terceira.

(g) Dualize o teorema de Desargues dos dois triângulos.

14.12 Um conjunto autodual de postulados para a geometria projetiva

(a) Mostre que o seguinte conjunto de postulados para a geometria projetiva, dado por Karl Menger em 1945, é autodual.

P1: *Há uma, e uma só, reta por dois pontos distintos quaisquer, e um, e um só, ponto em duas retas distintas quaisquer.*

P2: *Existem dois pontos e duas retas tais que cada um dos pontos está em apenas uma das retas e cada uma das retas em apenas um dos pontos.*

P3: *Existem dois pontos e duas retas, os pontos não nas retas, de modo que o ponto das duas retas está na reta dos dois pontos.*

(b) Verifique os 3 postulados de (a) para os 7 “pontos” indicados pelas letras A, B, C, D, E, F, G e as 7 “retas” denotadas pelos ternos (AFB) , (BDC) , (CEA) , (AGD) ,

(BGE) , (CGF) , (DEF) . Esse exemplo estabelece a existência de geometrias projetivas *finitas* (isto é, geometrias projetivas constituídas de um número finito de retas e de pontos).

14.13 O princípio de dualidade da trigonometria

Se numa equação trigonométrica substituir-se cada uma das funções trigonométricas que nela aparecem por sua cofunção, a nova equação obtida chama-se *dual* da equação dada inicialmente. Estabeleça o seguinte *princípio de dualidade* da trigonometria: Se uma relação trigonométrica que envolve apenas um ângulo é uma identidade, então sua dual também é uma identidade.

14.14 Sistemas de coordenadas

Chamemos de *sistema de coordenadas bipolares* o referencial constituído de um segmento de reta AB de comprimento a em relação ao qual se localiza um ponto P do plano anotando como coordenadas os ângulos $\alpha = \angle BAP$, no sentido anti-horário, e $\beta = \angle ABP$, no sentido horário (ver Figura 118).

(a) Encontre a equação bipolar de (1) a mediatriz de AB e (2) um arco de círculo tendo AB como corda.

(b) Determine as equações de transformação que estabelecem a ligação entre o sistema de coordenadas bipolares e o sistema de coordenadas cartesianas retangulares com origem no ponto médio de AB e eixo x ao longo de AB .

(c) Identifique as curvas (1) $\cotg \alpha \cotg \beta = k$, (2) $\cotg \alpha / \cotg \beta = k$ e (3) $\cotg \alpha + \cotg \beta = k$, onde k é uma constante.

(d) Encontre as equações cartesianas retangulares das seguintes curvas dadas por equações polares: (1) lemniscata de Bernoulli, $r^2 = a^2 \cos 2\theta$, (2) cardioide, $r = a(1 - \cos \theta)$, (3) espiral de Arquimedes, $r = a\theta$, (4) espiral equiangular, $r = e^{a\theta}$, (5) espiral hiperbólica, $r\theta = a$, (6) rosácea de 4 folhas, $r = a \sin 2\theta$.

(e) Descreva o sistema de coordenadas por latitudes e longitudes numa superfície esférica.

(f) Uma extensão natural ao espaço do sistema de coordenadas polares do plano consiste em fixar uma origem O e tomar então como coordenadas de um ponto P o comprimento do raio vetor OP e a latitude ϕ e a longitude θ de P em relação à esfera de centro O e raio OP . Essas coordenadas se denominam *coordenadas esféricas*. Determine as equações que estabelecem a ligação entre as coordenadas esféricas (r, ϕ, θ) de um ponto P e suas coordenadas cartesianas retangulares (x, y, z) . Essas relações, basicamente, se encontram nos trabalhos de Lagrange (1736-1813).

(g) Planeje um sistema de coordenadas para localizar pontos de (1) uma superfície cilíndrica circular e (2) um toro.

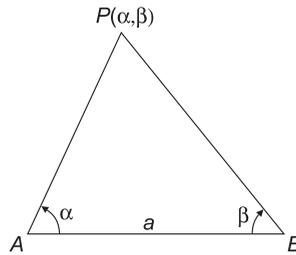


Figura 118

14.15 Coordenadas lineares

(a) Mostre que num sistema de referência cartesiano retangular podemos usar a inclinação e o coeficiente linear de uma reta como suas coordenadas ou, ainda, o comprimento do segmento de perpendicular à reta pela origem e o ângulo que a perpendicular faz com o eixo x .

(b) Os opostos dos inversos, u e v , da abscissa e da ordenada dos pontos de intersecção de uma reta com os eixos x e y , respectivamente, são suas coordenadas de *Plücker*. Determine as coordenadas de Plücker das retas cujas equações cartesianas são $5x + 3y - 6 = 0$ e $ax + by + 1 = 0$. Escreva a equação cartesiana da reta cujas coordenadas de Plücker são $(1,3)$.

(c) Mostre que as coordenadas de Plücker, u , v , de todas as retas que passam pelo ponto de coordenadas cartesianas $(2,3)$ satisfazem a equação linear $2u + 3v + 1 = 0$. Toma-se essa equação como a equação de Plücker do ponto $(2,3)$. Quais são as coordenadas cartesianas dos pontos cujas equações de Plücker são $5u + 3v - 6 = 0$ e $au + bv + 1 = 0$? Escreva a equação de Plücker do ponto de coordenadas cartesianas $(1,3)$.

14.16 Dimensionalidade

- (a) Mostre que o plano é quadridimensional em segmentos de reta orientados.
- (b) Qual é a dimensionalidade do plano em segmentos de reta orientados de um dado comprimento?
- (c) Mostre que o espaço é quadridimensional em retas.
- (d) Mostre que o espaço é tridimensional em planos.
- (e) Mostre que o espaço é quadridimensional em esferas. Qual é a dimensionalidade das variedades abaixo?
- (f) Das retas que cruzam duas retas reversas.

- (g) Das retas por um ponto do espaço.
- (h) Dos planos por um ponto do espaço.
- (i) Dos círculos do espaço por um ponto fixo.
- (j) Das esferas do espaço por um ponto fixo.
- (k) De todos os círculos sobre uma esfera dada.
- (l) De todos os círculos do espaço.
- (m) De todos os círculos cujos planos passam por uma reta fixa do espaço.
- (n) De todas as retas tangentes a uma esfera dada.
- (o) De todos os planos tangentes a uma esfera dada.

14.17 Notação abreviada

Estabeleça os seguintes teoremas.

(a) Se $\alpha = 0$ e $\beta = 0$ são as equações normais de duas retas distintas que não passam pela origem e se $m\alpha + n\beta = 0$, onde m e n são constantes, é uma reta pelo seu ponto de intersecção, então m/n é o oposto (simétrico aditivo) da razão entre as distâncias (com sinal) de um ponto da reta $m\alpha + n\beta = 0$ às retas $\beta = 0$ e $\alpha = 0$.

(b) Se $\alpha = 0$ e $\beta = 0$ são as equações normais de duas retas não paralelas dadas que não passam pela origem, então $\alpha - \beta = 0$ e $\alpha + \beta = 0$ são as bissetrizes dos ângulos formados pelas duas retas dadas, sendo a primeira a bissetriz do ângulo que contém a origem.

(c) Se $\alpha = 0$ e $\beta = 0$ são as equações normais de duas retas não paralelas que não passam pela origem, então $m\alpha + n\beta = 0$ e $n\alpha + m\beta = 0$, onde m e n são constantes, são retas isogonais para os ângulos formados pelas duas retas originais.

(d) Sejam $\alpha = 0$, $\beta = 0$ e $\gamma = 0$ as equações dos lados de um triângulo. Então as três cevianas $m\beta - n\gamma = 0$, $r\gamma - s\alpha = 0$ e $u\alpha - v\beta = 0$ são concorrentes se, e somente se, $mru = nsv$.

(e) Se $\alpha = 0$, $\beta = 0$ e $\gamma = 0$ são equações dos lados de um triângulo, quaisquer três cevianas concorrentes podem ser escritas como $r\beta - s\gamma = 0$, $s\gamma - t\alpha = 0$, $t\alpha - r\beta = 0$.

(f) As bissetrizes dos ângulos de um triângulo são concorrentes.

(g) As alturas de um triângulo são concorrentes.

(h) As medianas de um triângulo são concorrentes.

(i) Se 3 cevianas de um triângulo são concorrentes, então o mesmo acontece com suas três cevianas isogonais.

(j) O lugar de um ponto que se move de modo que o produto de suas distâncias a um par de lados opostos de um quadrilátero é proporcional ao produto de suas distâncias ao outro par de lados opostos é uma cônica que passa pelos vértices do quadrilátero.

(k) O lugar de um ponto que se move de modo que o produto de suas distâncias a duas retas é proporcional ao quadrado de sua distância a uma terceira reta é uma cônica tangente às duas primeiras retas nos pontos em que elas são cortadas pela terceira reta.

14.18 Coordenadas homogêneas

(a) Escreva as coordenadas cartesianas homogêneas correspondentes dos pontos $(2, 3)$, $(-1, 0)$ e $(0, 7)$.

(b) Escreva as coordenadas cartesianas homogêneas dos pontos no infinito das retas $x = y$, $3x + 2y - 7 = 0$ e $ax + by + c = 0$.

(c) Escreva as coordenadas cartesianas não homogêneas correspondentes dos pontos $(7, 3, -4)$, $(1, 1, 1)$ e $(0, -2, 2)$.

(d) Escreva a equação cartesiana não homogênea da reta que passa pelo ponto ideal $(1, -2, 0)$.

(e) Escreva a equação cartesiana homogênea correspondente da circunferência

$$x^2 + y^2 + 2fy + 2gx + c = 0.$$

(f) Mostre que toda circunferência passa pelos dois pontos ideais imaginários $(1, -i, 0)$ e $(1, i, 0)$ denominados *pontos circulares no infinito*.

(g) Mostre que qualquer cônica real que passa pelos dois pontos circulares no infinito é uma circunferência.

14.19 Números de Plücker

Usando as equações de Plücker que relacionam os pontos singulares de uma curva algébrica, mostre que:

(a) Toda cônica é de classe 2.

(b) A curva cúbica $y = x^3$ é de classe 3 e tem uma cúspide no infinito.

(c) A curva cúbica $y^2 = x^3$ é de classe 6 e tem uma inflexão no infinito.

(d) $\iota - \kappa = 3(m - n)$.

14.20 Geometria dimensional

(a) Como se poderia definir, analiticamente, num hiperespaço, a reta determinada pelos dois pontos (x_1, \dots, x_n) e (y_1, \dots, y_n) ?

(b) Como se poderiam definir os cossenos diretores da reta de (a)?

- (c) Como se poderia definir um ponto *situado entre* os dois pontos de (a)?
- (d) Como se poderia definir o *ponto médio* do segmento determinado pelos dois pontos de (a)?
- (e) Justifique a definição de cosseno do ângulo entre dois segmentos de reta de um hiperespaço, dada na Seção 14-6: isto é, mostre que $0 \leq |\cos \theta| \leq 1$.
- (f) Se x, y, z são três pontos de um hiperespaço e se $d(x, y)$ denota a distância entre x e y , mostre que
1. $d(x, y) \geq 0$,
 2. $d(x, y) = 0$ se, e somente se, $x = y$,
 3. $d(x, y) = d(y, x)$,
 4. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

14.21 Curvatura gaussiana

- (a) Há uma superfície quádrica cuja curvatura total é positiva em todos os pontos? E negativa em todos os pontos? E nula em todos os pontos? E positiva em alguns e negativa noutros?
- (b) Mostre que a correspondência biunívoca entre os pontos de um par de superfícies aplicáveis é tal que nos pares de pontos correspondentes as curvaturas totais das duas superfícies são iguais.
- (c) Mostre que quando se deforma uma superfície transformando-a noutra, as geodésicas da primeira superfície são levadas nas geodésicas da segunda.
- (d) Mostre que a curvatura total de uma superfície esférica de raio r é constante e igual a $1/r^2$.
- (e) Mostre que a curvatura total de um plano é constante e igual a zero.
- (f) Mostre que a curvatura total de uma superfície cilíndrica é constante e igual a zero. A superfície cilíndrica é aplicável no plano?
- (g) Mostre que se uma superfície é aplicável em si mesma em todas as posições, sua curvatura total deve ser constante.
- (h) Mostre que as únicas superfícies sobre as quais é possível livremente a mobilidade de figuras são aquelas de curvatura total constante.
- (i) Mostre que a esfera não é aplicável no plano. (É por isso que, na confecção de mapas terrestres, necessariamente ocorre algum tipo de distorção.)

14.22 A Pseudoesfera

O gráfico de $y = k \cosh(x/k)$ é a *catenária*, a forma assumida por uma corrente perfeitamente inextensível e flexível, de densidade uniforme, pendurada em dois su-

portes não situados na mesma vertical. Suponha-se que essa catenária (ver Figura 119) corte o eixo y em A ; seja P um ponto qualquer da curva e seja F o pé da perpendicular por P ao eixo x ; seja T o ponto onde a tangente à curva em P corta o eixo x e seja Q o pé da perpendicular por F a PT .

(a) Com o cálculo comum, mostre que QF é constante e igual a k .

(b) Com a ajuda do cálculo integral, mostre que QP é igual ao comprimento do arco AP .

(c) Mostre que, desenrolando-se um fio AP da catenária, faz-se com que a extremidade A descreva uma curva AQ com a propriedade de que o comprimento da tangente QF é constante e igual a k . Em outras palavras, o lugar de Q , que é a evolvente da catenária, é uma tratriz.

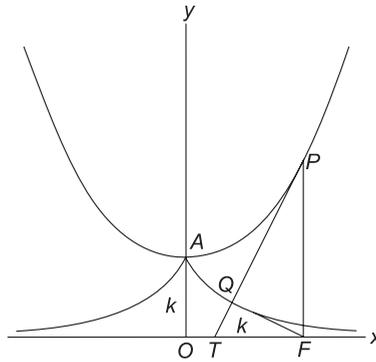


Figura 119

(d) Pode-se mostrar que, para uma superfície de revolução, as curvaturas principais (ver Seção 14-7) num ponto Q da superfície são a curvatura do meridiano por Q e a curvatura da secção por Q normal ao meridiano por esse ponto. Se a normal à superfície em Q corta seu eixo de revolução em T , então se sabe que a última curvatura é igual a $1/QT$. Mostre que as curvaturas principais em Q da pseudoesfera obtida ao se girar a tratriz de (c) em torno do eixo x são dadas por $1/QP$ e $1/QT$.

(e) Mostre que a curvatura (ver Exercício 14.21) da pseudoesfera de (d) é constante e em todos os pontos igual a $-1/k^2$.

14.23 O programa de Erlanger

(a) Mostre que o conjunto das transformações projetivas do plano projetivo sobre ele mesmo, para as quais a imagem de uma reta fixa do plano (chamada *reta no infinito*) é ela própria, constitui um grupo de transformações. (A geometria associada a esse grupo se chama *geometria afim plana*.)

(b) Mostre que o conjunto de todas as transformações projetivas do plano projetivo sobre ele mesmo, para as quais a imagem de uma reta fixa do plano é ela própria e a imagem de um ponto fixo do plano (que não pertence à reta) é ele próprio, constitui um grupo de transformações. (A geometria associada a esse grupo é conhecida como *geometria centro-afim plana*.)

(c) Mostre que vale a seguinte inclusão de geometrias:

$$\{ \text{métrica euclidiana, equiforme, centro-afim, afim, projetiva} \}$$

em que o grupo de transformações de qualquer das geometrias é um subgrupo dos grupos de transformações de quaisquer das geometrias seguintes da sequência.

(d) Mostre que o conjunto de todas as transformações projetivas do plano projetivo sobre ele mesmo, para as quais a imagem de um círculo dado é o próprio círculo e a imagem do interior desse círculo também é o próprio, constitui um grupo de transformações. (Com definições adequadas de distância e medida angular, pode-se mostrar que a geometria associada a esse grupo de transformações é equivalente à geometria métrica lobachevskiana do plano.)

14.24 Misticismo e absurdo no cálculo antigo

(a) Uma das críticas mais argutas à falta de fundamentação do cálculo antigo foi desferida pelo eminente metafísico, o bispo George Berkeley (1685-1753), que bateu na tecla de que a abordagem de Newton ao cálculo envolvia uma falácia lógica: *um artifício nas hipóteses*. Saliente esse artifício nas hipóteses, acompanhando a determinação de Newton da derivada (ou fluxo, segundo ele) de x^3 . Seguiremos aqui o tratamento dado por Newton à questão em *Quadrature of Curves*, de 1704.

Ao mesmo tempo em que x crescendo se torna $x + o$, x^3 se torna $(x + o)^3$, ou

$$x^3 + 3x^2o + 3xo^2 + o^3,$$

e os crescimentos, ou incrementos,

$$o e 3x^2o + 3xo^2 + o^3$$

estão entre si como

$$1 \text{ está para } 3x^2 + 3xo + o^2.$$

Fazendo-se os incrementos desaparecerem, sua última razão será de 1 para $3x^2$ e portanto a taxa de variação de x^3 em relação a x é $3x^2$.

(b) Explique a descrição sarcástica dada por Berkeley das derivadas como “fantasmas de quantidades que expiraram”.

(c) Discuta o seguinte postulado, devido a Johann Bernoulli, cujo objetivo é tornar válidas operações como aquela ilustrada em (a) acima: “Uma quantidade que foi acrescida ou diminuída de uma quantidade infinitamente pequena nem cresce e nem decresce”.

14.25 Dificuldades iniciais com as séries infinitas

Os matemáticos dos séculos XVII e XVIII pouca compreensão tinham das séries infinitas. Eles não raro aplicavam a essas séries operações válidas para séries *finitas* mas aplicáveis para séries *infinitas* apenas sob certas restrições. Não estando cientes dessas restrições, como resultado surgiam paradoxos em seu trabalho com séries infinitas.

(a) Uma série que causou muito embaraço nos primeiros tempos do cálculo foi a série alternada

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots,$$

levando inclusive a muitas discussões sobre que soma S se deveria atribuir a ela. Mostre que para o agrupamento

$$(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots,$$

$S = 0$ e para o agrupamento

$$1 - (1 - 1) - (1 - 1) - (1 - 1) - \dots,$$

$S = 1$. Alguns argumentaram que, como as somas 0 e 1 são igualmente prováveis, a soma correta da série seria a média aritmética $1/2$. Mostre que esse valor também pode ser obtido de maneira puramente formal fazendo-se o agrupamento

$$1 - (1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots).$$

(b) A expansão binomial

$$(a + b)^n = a^n + C(n, 1) a^{n-1} b + C(n, 2) a^{n-2} b^2 + C(n, 3) a^{n-3} b^3 + \dots,$$

onde

$$C(n, r) = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{(1)(2)(3)\dots(r)},$$

é válida sob certas restrições. Isto é, somente com certas restrições sobre a , b e n , a série do segundo membro converge para a expressão do primeiro membro. O não conhecimento dessas restrições e a aplicação da expansão como se ela fosse universal-

mente verdadeira pode levar a paradoxos. Obtenha um desses paradoxos (tal como Euler) aplicando a expansão binomial a $(1 - 2)^{-1}$.

(c) Dividindo $1 - x$ por x e $x - 1$ por x e depois somando os resultados obtenha a igualdade absurda encontrada por Euler:

$$\dots + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1 + x + x^2 + \dots = 0$$

para todo x diferente de 0 e 1.

(d) Explique o seguinte paradoxo. Seja S a soma da série *convergente*

$$\frac{1}{(1)(3)} + \frac{1}{(3)(5)} + \frac{1}{(5)(7)} + \dots$$

Então

$$\begin{aligned} S &= \left(\frac{1}{1} - \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{5}\right) + \left(\frac{3}{5} - \frac{4}{7}\right) + \dots \\ &= 1 - \frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \frac{3}{5} + \frac{3}{5} - \frac{4}{7} + \dots = 1, \end{aligned}$$

uma vez que todos os termos, depois do primeiro, se cancelam. E também

$$\begin{aligned} S &= \frac{\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right)}{2} + \frac{\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right)}{2} + \frac{\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right)}{2} + \dots \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{10} + \frac{1}{10} - \frac{1}{14} + \dots = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

uma vez que todos os termos, depois do primeiro, se cancelam. Portanto $1 = \frac{1}{2}$.

14.26 Alguns paradoxos em álgebra elementar

Quando se entende apenas parcialmente a teoria subjacente a uma certa operação matemática, há o perigo de se aplicar essa operação de maneira formal, cega e, talvez, ilógica. O executante, desinformado das possíveis limitações da operação, é levado a usá-la em exemplos nas quais ela não se aplica necessariamente. Foi isso essencialmente o que aconteceu com a análise durante o século seguinte à invenção do cálculo,

tendo como resultado uma acumulação gradual de absurdos. O presente exercício ilustra como tais absurdos podem aparecer em álgebra elementar quando se efetuam certas operações sem se dar conta de suas limitações.

(a) Explique o seguinte paradoxo:

Certamente

$$3 > 2.$$

Multiplicando-se ambos os membros por $\log(1/2)$ encontramos

$$3\log(1/2) > 2\log(1/2)$$

ou

$$\log(1/2)^3 > \log(1/2)^2$$

e daí

$$(1/2)^3 > (1/2)^2 \text{ ou } 1/8 > 1/4.$$

(b) Explique o seguinte paradoxo:

Obviamente $(-1)^2 = (+1)^2$. Tomando o logaritmo de ambos os membros obtemos $\log(-1)^2 = \log(1)^2$. Logo

$$2\log(-1) = 2\log 1 \text{ ou } -1 = 1.$$

(c) A maior parte dos alunos que já fizeram álgebra elementar concordará com o seguinte teorema: *Se duas frações são iguais e têm numeradores iguais, então elas também têm denominadores iguais.* Considere agora o seguinte problema. Desejamos resolver a equação

$$\frac{x+5}{x-7} - 5 = \frac{4x-40}{13-x}.$$

Efetuada-se a subtração do primeiro membro, encontramos

$$\frac{(x+5) - 5(x-7)}{x-7} = \frac{4x-40}{13-x} \text{ ou } \frac{4x-40}{7-x} = \frac{4x-40}{13-x}.$$

Pelo teorema citado, segue-se que $7-x = 13-x$ ou, após se somar x a ambos os membros, $7 = 13$. O que está errado?

(d) Descubra a falácia na seguinte demonstração por indução matemática:

$P(n)$: Todos os números de um conjunto de n números são iguais entre si.

1. $P(1)$ é obviamente verdadeira.

2. Seja k um número natural para o qual $P(k)$ é verdadeira. Seja $\{a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}\}$ um conjunto de $k + 1$ números. Então, por hipótese, $a_1 = a_2 = \dots = a_k$ e $a_2 = a_3 = \dots = a_{k+1}$. Portanto $a_1 = a_2 = \dots = a_k = a_{k+1}$ e $P(k + 1)$ é verdadeira.

Segue-se então que $P(n)$ é verdadeira para todo número natural n .

(e) Descubra a falácia na seguinte demonstração por indução matemática:

$P(n)$: Se a e b são dois números naturais quaisquer tais que $\max(a, b) = n$, então $a = b$. [Nota: Por $\max(a, b)$, quando $a \neq b$, entende-se o maior dos números a e b . Por $\max(a, a)$ entende-se o número a . Assim, $\max(5, 7) = 7$, $\max(8, 2) = 8$ e $\max(4, 4) = 4$.]

1. $P(1)$ é obviamente verdadeira.

2. Seja k um número natural para o qual $P(k)$ é verdadeira. Sejam a e b dois números naturais quaisquer tais que $\max(a, b) = k + 1$ e considere $\alpha = a - 1$, $\beta = b - 1$. Então $\max(\alpha, \beta) = k$ e daí, pela hipótese, $\alpha = \beta$. Donde $a = b$ e $P(k + 1)$ é verdadeira.

Segue-se então que $P(n)$ é verdadeira para todo número natural n .

(f) Explique os três paradoxos finais envolvendo radicais de raízes quadradas:

1. Como $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$, temos

$$\sqrt{-1}\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1.$$

Mas, por definição, $\sqrt{-1}\sqrt{-1} = -1$. Logo $-1 = +1$.

2. Temos, sucessivamente,

$$\sqrt{-1} = \sqrt{-1},$$

$$\sqrt{\frac{1}{-1}} = \sqrt{\frac{-1}{1}},$$

$$\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}} = \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{1}},$$

$$\sqrt{1}\sqrt{1} = \sqrt{-1}\sqrt{-1},$$

$$1 = -1.$$

3. Considere a seguinte identidade, verdadeira para todos os valores de x e de y .

$$\sqrt{x-y} = i\sqrt{y-x},$$

Fazendo $x = a$ e $y = b$, com $a \neq b$, obtemos

$$\sqrt{a-b} = i\sqrt{b-a},$$

Fazendo agora $x = b$ e $y = a$, obtemos

$$\sqrt{a-b} = i\sqrt{b-a}$$

Multiplicando as duas últimas equações membro a membro, encontramos

$$\sqrt{a-b} \sqrt{b-a} = i^2 \sqrt{b-a} \sqrt{a-b}.$$

Dividindo ambos os membros por $\sqrt{a-b} = \sqrt{b-a}$ obtemos finalmente

$$1 = i^2 \text{ ou } 1 = -1.$$

14.27 Alguns paradoxos no cálculo

(a) Por procedimentos padronizados chega-se a

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x} \right]_{-1}^1 = -1 - 1 = -2.$$

Porém, a função $y = 1/x^2$ não é nunca negativa; daí que a “avaliação” acima não pode ser correta.

(b) Seja e a excentricidade da elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$. É um fato bem conhecido que o raio vetor traçado do foco esquerdo da elipse a um ponto $P(x, y)$ de curva tem comprimento dado por $r = a + ex$. Logo $dr/dx = e$. Como não há valores de x para os quais dr/dx se anule, então r não tem máximo nem mínimo. Mas a única curva fechada para a qual o raio vetor não tem máximo nem mínimo é a circunferência. Segue-se que toda elipse é uma circunferência.

(c) Considere o triângulo isósceles ABC da Figura 120 no qual base $AB = 12$ e altura $CD = 3$. Seguramente há um ponto P em CD tal que

$$S = PC + PA + PB$$

é um mínimo. Tentemos localizar esse ponto. Denote DP por x . Então $PC = 3 - x$ e $PA = PB = (x^2 + 36)^{1/2}$. Portanto

$$S = 3 - x + 2(x^2 + 36)^{1/2}$$

e

$$\frac{dS}{dx} = 1 - 2x(x^2 + 36)^{-1/2}.$$

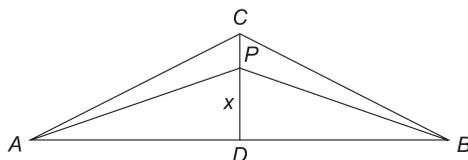


Figura 120

Fazendo $dS/dx = 0$ encontramos $x = 2\sqrt{3} > 3$ e P está fora do triângulo, no prolongamento de DC . Donde, não há nenhum ponto em CD para o qual S é um mínimo.

(d) Considere a integral

$$I = \int \operatorname{sen} x \cos x \, dx$$

Temos então

$$I = \int \operatorname{sen} x (\cos x \, dx) = \int \operatorname{sen} x \, d(\operatorname{sen} x) = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{2}.$$

Por outro lado,

$$I = \int \cos x (\operatorname{sen} x \, dx) = -\int \cos x \, d(\cos x) = -\frac{\cos^2 x}{2}.$$

Portanto

$$\operatorname{sen}^2 x = -\cos^2 x$$

ou

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 0.$$

Mas, para todo x ,

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1.$$

(e) Como

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{-dx}{-x},$$

então $\log x = \log(-x)$ ou $x = -x$ e daí $1 = -1$.

14.28 Uma curva contínua sem nenhuma tangente

É um fato bem conhecido que se pode definir uma curva contínua geometricamente como o limite de uma sequência de linhas poligonais. Esse processo tem sido usado por muitos matemáticos para criar curvas contínuas sem tangentes ou semitangentes em nenhum de seus pontos. Consideraremos aqui uma curva inventada pelo matemático sueco Helge von Koch (1870-1924).

Divida o segmento horizontal AB (ver Figura 121) em três partes iguais com os pontos C e D ; sobre a parte média, CD , construa o triângulo equilátero CED no lado esquerdo do segmento orientado AB e depois apague o interior do segmento CD . Repita a seguir a mesma construção com cada um dos segmentos orientados AC , CE , ED , DB . Prossiga indefinidamente com essas construções. O limite do qual se aproxima a figura é a *curva de Koch*.

(a) Considerando uma tangente a uma curva num de seus pontos, denotado por P , como a posição limite, caso exista, de uma reta secante por P e por um ponto Q da curva, vizinho de P , conforme Q se aproxima indefinidamente de P , ao longo da curva, mostre que a curva de Koch da Figura 121 não tem tangente em nenhum ponto C .

(b) Mostre que o comprimento da curva de Koch é infinito.

(c) Construa sobre cada lado de um triângulo equilátero, exteriormente ao triângulo, uma curva de Koch. A curva fechada resultante às vezes é chamada de *curva do floco de neve*. Mostre que a curva do floco de neve é uma curva contínua, fechada e simples, de comprimento infinito, que limita uma área finita.

(d) Seja T_1 uma região triangular equilátera plana horizontal. Divida T_1 em 4 partes congruentes, ligando os pontos médios dos lados de T_1 . Sobre a parte central construa um tetraedro regular assentado sobre o plano de T_1 ; apague a parte central de T_1 e denote por T_2 a superfície resultante. Descreva a sequência do processo pelo qual se chegará a uma superfície espacial contínua sem nenhuma tangente.

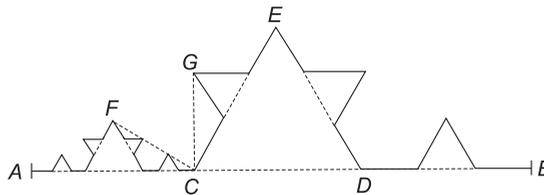


Figura 121

14.29 Números algébricos e transcendentos

Um número complexo se diz *algébrico* se é raiz de algum polinômio não nulo de coeficientes racionais; caso contrário se diz *transcendente*. O primeiro a demonstrar a transcendência de π foi F. Lindemann (1852-1939) em 1882.

- (a) Mostre que todo número racional é algébrico e portanto que todo número transcendente é irracional.
- (b) Todo número irracional é transcendente?
- (c) A unidade imaginária i é um número algébrico ou transcendente?
- (d) Usando o resultado de Lindemann, mostre que $\pi/2$ é transcendente.
- (e) Usando o resultado de Lindemann, mostre que $\pi + 1$ é transcendente.
- (f) Usando o resultado de Lindemann, mostre que $\sqrt{\pi}$ é transcendente.
- (g) Generalize (d), (e) e (f).
- (h) Mostre que um número algébrico é raiz de um polinômio não nulo de coeficientes *inteiros*.

14.30 Limites

Um número real a se diz limite superior de um conjunto não vazio M de números reais se, para todo m de M , se tem $m \leq a$; se, ademais, $a < b$ para qualquer outro limite superior b de M , então dá-se o nome a a de supremo de M . Uma propriedade fundamental do conjunto dos números reais é a que garante que se *um conjunto não vazio de números reais tem um limite superior, então ele tem pelo menos um supremo*.

(a) Dê uma definição de limite inferior e de ínfimo de um conjunto não vazio de números reais.

(b) Prove que um conjunto não vazio de números reais pode ter no máximo um supremo e um ínfimo.

(c) Dê um exemplo de um conjunto M de números reais para cada uma das seguintes situações:

1. M tem limites superiores e limites inferiores.
2. M tem limites superiores mas não tem limites inferiores.
3. M tem limites inferiores mas não tem limites superiores.
4. M não tem nem limites superiores, nem limites inferiores.
5. M tem supremo e este pertence a M .
6. M tem supremo mas este não pertence a M .

(d) Prove que se um conjunto não vazio M de números reais tem um limite inferior, então ele tem um ínfimo.

(e) Seja M um conjunto não vazio de números reais e seja t um número real positivo qualquer fixo. Seja, ainda, N o conjunto dos números da forma tx , onde x é um elemento genérico de M . Mostre que se b é o supremo de M , então tb é o supremo de N .

(f) Sejam M e N dois conjuntos não vazios de números reais, ambos tendo supremos, indicados por a e b , respectivamente. Seja P o conjunto dos números da forma $x + y$, onde x pertence a M e y pertence a N . Mostre que $a + b$ é o supremo de P .

(g) Seja M o conjunto dos números reais

$$x_n = (-1)^n (2 - 4/2^n), \quad n = 1, 2, \dots$$

Encontre o supremo e o ínfimo de M . Faça o mesmo com o conjunto de números

$$y_n = (-1)^n + 1/n, \quad n = 1, 2, \dots$$

(h) Restringindo essas ideias exatamente ao conjunto dos números racionais, a existência de um limite superior de um conjunto não vazio M implica necessariamente a existência de supremo de M ?

(i) Se a restrição for feita ao conjunto dos números reais não nulos, a existência de um limite superior de um conjunto não vazio M implica necessariamente a existência de supremo de M ?

14.31 Números primos

(a) Usando o crivo de Eratóstenes, encontre todos os números primos menores que 500.

(b) Prove que um número inteiro positivo p é primo se não é divisível por nenhum primo positivo r tal que $r^2 \leq p$. Esse teorema informa que, no processo de eliminação do crivo de Eratóstenes, podemos parar tão logo alcancemos um primo $p > \sqrt{n}$, pois daí para a frente simplesmente repetiríamos cancelamentos já efetuados. Assim, ao procurar os primos menores que 500, podemos parar tão logo riscarmos os múltiplos próprios de 19 pois o primo seguinte, 23, é maior que $\sqrt{500}$.

(c) Calcule $(A_n \log_e n)/n$ para $n = 500, 10^8$ e 10^9 .

(d) Prove que sempre se podem encontrar n números inteiros compostos consecutivos, por maior que seja n .

(e) Quantos pares de números primos gêmeos menores que 100 existem?

(f) Expresse cada um dos inteiros pares maiores que 2 e menores que 100 como soma de dois números primos.

(g) Mostre que as fórmulas $2 + \sin^2(n\pi/2)$, $3(\cos 2n\pi)$ e $3(n^0)$ fornecem números primos para todos os inteiros $n > 0$.

(h) Mostre que $n^2 + n + 17$ é primo para todo inteiro n de 1 a 16 e que $2n^2 + 29$ é primo para todo inteiro n de 1 a 28.

(i) Mostre que 11 é o único palíndromo primo formado de um número par de algarismos.

(j) Encontre todos os 15 palíndromos primos de três algarismos. (Não se sabe se existem infinitos palíndromos primos.)

Temas

- 14/1 A célula de Peaucellier e o contraparelógramo de Hart.
- 14/2 Augustus Ferdinand Möbius (1790-1868).
- 14/3 Karl Feuerbach (1800-1834).
- 14/4 William Kingdon Clifford (1845-1879).
- 14/5 Charles Lutwidge Dodgson (1832-1898).
- 14/6 Giuseppe Peano (1858-1932).
- 14/7 A teoria polo-polar e o princípio de dualidade.
- 14/8 Um conjunto autodual de postulados para a geometria projetiva.
- 14/9 O princípio de dualidade no estudo dos triângulos esféricos.
- 14/10 O problema de Malfatti.
- 14/11 O hipercubo.
- 14/12 Geometria das superfícies: intrínseca *versus* extrínseca.
- 14/13 Klein como chefe de departamento da Universidade de Göttingen.
- 14/14 A geometria como a teoria dos invariantes e a álgebra como a teoria das estruturas.
- 14/15 A conferência probatória de Riemann em 1854.
- 14/16 Poincaré como escritor popular.
- 14/17 Uma geometria analítica sem coordenadas e sem sistema de referência.
- 14/18 A importância dos teoremas de existência.
- 14/19 O desenvolvimento da análise no século XIX em virtude de fatores internos à matemática.
- 14/20 Alguns matemáticos do século XIX que se sobressaíram na pesquisa e no ensino.
- 14/21 Comparação entre Jacob Steiner e Julius Plücker.
- 14/22 O confronto entre Cantor e Kronecker.
- 14/23 Por que tão poucas mulheres se sobressaíram na matemática?

Bibliografia

- ALTSHILLER-COURT, Nathan. *College Geometry, an Introduction to the Modern Geometry of the Triangle and the Circle*. 2ª ed., revista e ampliada, com notas históricas e bibliográficas. Nova York, Barnes & Noble, 1952.
- . *Modern Pure Solid Geometry*. 2ª ed., incluindo notas históricas e bibliográficas. Nova York, Chelsea, 1964.

- BARON, Margarete. *The Origins of the Infinitesimal Calculus*. Oxford, Pergamon Press, 1969.
- BELL, E. T. *Men of Mathematics*. Nova York, Simon and Schuster, 1937.
- BIRKHOFF, Garrett. (ed.) *A Source Book in Classical Analysis*. Cambridge (Mass.), Harvard University Press, 1973.
- BOYER, C. B. *The History of the Calculus and Its Conceptual Development*. Nova York, Dover Publications, 1949.
- . *History of Analytic Geometry*. Nova York, Scripta Mathematica, 1956.
- BREWER, J. W. e SMITH, Martha. *Emmy Noether: A Tribute to Her Life and Work*. Nova York, Marcel Dekker, 1981.
- BURRILL, C. W. *Foundations of Real Numbers*. Nova York, McGraw-Hill, 1967.
- COHEN, L. W. e EHRLICH, Gertrude. *The Structure of the Real Number System*. Princeton (N. J.), Van Nostrand Reinhold, 1963.
- COOKE, Roger. *The Mathematics of Sonya Kovalevskaya*. Nova York, Springer-Verlag, 1984.
- COOLIDGE, J. L. *A Treatise on the Circle and the Sphere*. Oxford, The Clarendon Press, 1916.
- . *A History of Geometrical Methods*. Oxford, The Clarendon Press, 1940.
- DEDEKIN, Richard. *Essays on the Theory of Numbers*. Trad. para o inglês por W. W. Beman. Chicago, Open Court, 1901. Reimpresso por Dover Publications, Nova York, 1963.
- DICK, Auguste. *Emmy Noether 1882-1935*. Basileia, Suíça, Birkhauser Verlag, 1970.
- DICKSON, L. E. “Constructions with ruler and compasses”. Em *Monographs on Topics of Modern Mathematics*. Ed. por J. W. A. Young. Nova York, Longmans, Green, 1924.
- . *History of the Theory of Numbers*. Nova York, Chelsea, 1962, 3 vols.
- DODGE, C. W. *Numbers and Mathematics*. 2ª ed. Boston, Prindle, Weber & Schmidt, 1975.
- EVES, Howard. *A Survey of Geometry*. Boston, Allyn and Bacon, 1965 e 1972, 2 vols.
- . *Foundations and Fundamental Concepts of Mathematics*. 3ª ed. Boston, PWS-KENT Publishing Company, 1990.
- GRATTAN-GUINNESS, Ivor. *The Development of the Foundations of Mathematical Analysis from Euler to Riemann*. Cambridge (Mass.), M. I. T. Press, 1970.
- HANCOCK, Harris. *Foundations of the Theory of Algebraic Numbers*. Nova York, Dover Publications, 1931 e 1932, 2 vols.
- . *Development of the Minkowski Geometry of Numbers*. Nova York, Dover Publications, 1939, 2 vols.
- HUDSON, H. P. *Ruler and Compasses*. Nova York, Chelsea, 1953. Reimpresso em *Squaring the Circle, and Other Monographs*.
- KAZARINOFF, N. C. *Ruler and the Round*. Boston, Prindle, Weber & Schmidt, 1970.

- KEMPE, A. B. *How to Draw a Straight Line; A Lecture on Linkages*. Nova York, Chelsea, 1953. Reimpresso em *Squaring the Circle, and Other Monographs*.
- KENNEDY, D. H. *Little Sparrow: A Portrait of Sophia Kovalevsky*. Atenas (Ohio), Ohio University Press, 1983.
- KENNEDY, Hubert, Jr. (ed.). *Selected Works of Giuseppe Peano*. Toronto, University of Toronto Press, 1973.
- . *Peano: Life and Works of Giuseppe Peano*. Dordrecht, D. Reidel, 1980.
- KLEIN, Felix. *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint*. Trad. para o inglês por E. R. Hedrick e C. A. Noble. Nova York, Dover Publications, 1939 e 1945, 2 vols.
- . *Famous Problems of Elementary Geometry*. Trad. para o inglês por W. W. Beman e D. E. Smith. Nova York, Chelsea, 1955. Reimpresso em *Famous Problems, and Other Monographs*.
- KOBLITZ, Ann. *A Convergence of Lives. Sofia Kovaleskaia: Scientist, Writer, Revolutionary*. Boston, Birkhauser, 1983.
- KOSTOVKIL, A. N. *Geometrical Constructions Using Compasses Only*. Trad. para o inglês por Halina Moss. Nova York, Blaisdell, 1961.
- KOVALEVSKAYA, S. *A Russian Childhood*. Trad. para o inglês por B. Stillman. Berlim, Springer-Verlag, 1978.
- LANDAU, Edmund. *Foundations of Analysis*. Trad. para o inglês por F. Steinhardt. Nova York, Chelsea, 1951.
- LANG, Serge. *Algebraic Numbers*. Reading (Mass.), Addison-Wesley, 1964.
- MESCHOWSKI, Herbert. *Ways of Thought of Great Mathematicians*. S. Francisco, Holden-Day, 1964.
- . *Evolution of Mathematical Thought*. S. Francisco, Holden-Day, 1965.
- MOORE, Gregory. *Zermelo's Axiom of Choice: Its Origins, Development and Influence*. Nova York, Springer-Verlag, 1982.
- MUIR, Jane. *Of Men and Numbers, The Story of the Great Mathematicians*. Nova York, Dood, Mead, 1961.
- NIVEN, Ivan. "Irrational numbers", *Carus Mathematical Monograph*, nº 11. Nova York, John Wiley, 1956.
- POINCARÉ, Henri. *The Foundations of Science*. Trad. para o inglês por G. B. Halsted. Lancaster (Pa.), The Science Press, 1946.
- POLLARD, Harry. "The theory of algebraic numbers". *Carus Mathematical Monograph*, nº 9. Nova York, John Wiley, 1950.
- PRASAD, Ganesh. *Some Great Mathematicians of the Nineteenth Century*. Benares, Benares Mathematical Society, 1933 e 1934, 2 vols.
- PUKERT, Walter e ILGAUDS, H. J. *Georg Cantor, 1845-1918*. Boston, Birkhauser, 1981.

- SANDHEIMER, Ernst e ROGERSON, Alan. *Numbers and Infinity, A Historical Account of Mathematical Concepts*. Nova York, Cambridge University Press, 1981.
- SIEGEL, C. L. *Transcendental Numbers*. Princeton (N. J.), Princeton University Press, 1949.
- SMITH, D. E. *A Source Book in Mathematics*. Nova York, McGraw-Hill, 1929.
- SMOGORZHEVSKII, A. S. *The Ruler in Geometrical Construction*. Trad. para o inglês por Halina Moss. Nova York. Blaisdell, 1961.
- STEINER, Jacob. *Geometrical Constructions with a Ruler*. Trad. para o inglês por M. E. Stark. Editado por R. C. Archibald. Nova York, Scripta Mathematica, 1950.
- TEMPLE, George. *100 Years of Mathematics, a Personal Viewpoint*. Nova York, Springer-Verlag, 1981.
- THURSTON, H. A. *The Number-System*. Nova York, Interscience, 1956.
- TURNBULL, H. W. *The Great Mathematicians*. Nova York, New York University Press, 1961.
- WAISMANN, Friedrich. *Introduction to Mathematical Thinking: The Formation of Concepts in Modern Mathematics*. Trad. para o inglês por T. J. Benac, Nova York, Frederick Ungar, 1951.
- YATES, R. C. *The Trisection Problem*. Ann Arbor (Mich.), Edward Brothers, 1947.
- . *Geometrical Tools*. St. Louis, Educational Publishers, 1949.
- YOUNG, J. W. A. (ed.). *Monographs on Topics of Modern Mathematics Relevant to the Elementary Field*. Nova York, Dover Publications, 1955.

Panorama Cultural X

O átomo e a roda de fiar

O século XX
(Para acompanhar o Capítulo 15)

Quem quer que se disponha a escrever sobre o século XX defrontará com problemas muito especiais. O século XX, ao contrário de outras épocas, ainda não terminou; logo, não podemos saber com certeza que feição ele terá quando completo. Nos nove Panoramas Culturais precedentes empenhamo-nos em identificar cada um dos períodos históricos considerados com um tema central. Nos tempos pré-históricos os homens viviam como caçadores e colhedores. Vimos que a Revolução Agrícola começou na China, Egito e Oriente Médio antigos, no alvorecer da história documentada. Desenvolveu-se a democracia na Grécia Clássica e surgiram grandes impérios em Roma e na China. A Índia e a Arábia testemunharam o nascimento de novas e dinâmicas religiões moldadas no caráter de suas civilizações. Com a Idade Média veio a queda do Império Romano e a emergência de uma nova cultura europeia sob o feudalismo. Depois do ano 1500 d.C. a sociedade europeia se expandiu por outros continentes na Era das Explorações. O século XVIII assistiu à ascensão da burguesia que, no século XIX, empreendeu a Revolução Industrial.

Não é possível identificar o século XX com nenhum tema central. Se imaginarmos a história como um enorme tapete, veremos que a parte que estampa a época atual ainda está sendo tecida e que, portanto, não se pode a esta altura identificar com precisão o desenho que ao fim se formará. Podemos, porém, examinar os fios com que o tapete está sendo tecido e, a partir deles e da parte do panorama já encerrada, projetar uma visão final do desenho.

Vemos que grande parte dessa porção do tapete já está tecida. As grandes potências imperiais do século XIX se digladiaram numa sangrenta “guerra para acabar com as guerras”, a Primeira Guerra Mundial (1914-1918), que não pôs fim às guerras mas esgotou e destruiu os velhos impérios industriais. A Revolução Russa (1917) derrubou uma monarquia secular, substituindo-a pelo primeiro Estado socialista do mundo. Na Polônia, Iugoslávia, Tchecoslováquia e Hungria, pouco depois, instalaram-se novos regimes de cunho nacionalista. Fascistas, fanáticos ultranacionalistas hipócritas, aproveitaram-se da Grande Depressão da década de 1930 para assumir o poder na Alemanha, Espanha, Itália e Japão. Num programa de genocídio preconcituoso e infame contra pessoas inocentes, os fascistas europeus aprisionaram e as-

sassinaram brutalmente milhares de judeus, homossexuais e outras minorias. Fascistas alemães, italianos e japoneses, inebriados pelo poder, lançaram-se a um frenesi de conquistas e guerras que só terminou com sua derrota final na Segunda Guerra Mundial (1939-1945) perante os aliados (Grã-Bretanha, União Soviética, Estados Unidos e outras nações) e grupos de guerrilheiros secretos antifascistas. Os Estados Unidos e a União Soviética saíram da Segunda Guerra Mundial como potências mundiais dominantes, com esferas de influência que dividiam o globo em bloco ocidental e bloco oriental.

O fim da Segunda Guerra Mundial marcou também o início da gradual desintegração dos velhos impérios coloniais e econômicos do século XIX. Dezenas de novas nações independentes surgiram na África, Ásia, no Pacífico e em outros lugares, variando em tamanho desde as gigantescas Índia e Indonésia (antiga Índias Orientais Holandesas) até as minúsculas Nauru e Granada. Essas ex-colônias iniciaram sua caminhada em desvantagem. As nações a que haviam estado submetidas tinham feito delas meras produtoras de matérias-primas, não se interessando por sua industrialização. Pobres, superpovoados e com níveis de industrialização e educação muito baixos, as nações desse “Terceiro Mundo” viram-se às voltas com o analfabetismo, a fome e a doença. Muitas vezes se endividaram e sua pobreza tornou-se o caldo de cultura ideal para a violência revolucionária. Algumas nações do Terceiro Mundo, porém, conseguiram realizar progressos notáveis no que se refere ao padrão de vida de suas populações e à estabilidade política. Podemos mencionar a Arábia Saudita, o Egito e a China como nações relativamente bem-sucedidas em contraposição a outras mais turbulentas como Vietnã, Zaire, Nigéria e Uganda, embora no caso do Vietnã (para falar de um caso apenas), pelo menos em parte a instabilidade se tenha gerado fora de suas fronteiras. Por serem em grande número, as nações do Terceiro Mundo têm tido oportunidade de exercer, como um bloco, uma certa influência na Organização das Nações Unidas, assembleia internacional constituída na esteira da Segunda Guerra Mundial.

Lançamos assim uma vista de olhos por sobre o desenho em formação no tapete, neste século XX. Se atentarmos para os fios que formam a textura do tapete, em cruzamentos horizontais e verticais que assinalam os contrastes, poderemos identificar duas tendências conflitantes: a mecanicista e a organicista. Segundo sugeriu a historiadora e filósofa Carolyn Merchant em seu livro *The Death of Nature* (1980), há duas maneiras essenciais de atentar para o mundo, e ambas remontam à Grécia Clássica. Uma delas, a mecanicista, sustenta que a natureza e a civilização atuam como máquinas formadas de componentes sobre os quais a espécie humana exerce controle, daí os constantes consertos que vive a fazer neles. A outra visão, a organicista, considera o mundo como um todo vivo, do qual a espécie humana é apenas uma parte, e que esse todo subsiste num estado de equilíbrio delicado e natural. Ambas essas visões são antigas; ambas são compatíveis com a ciência; ambas ainda perduram.

Para muitos o átomo passou a simbolizar a visão mecanicista do mundo no século XX. Servindo tanto para fins destrutivos como construtivos, a energia atômica

representa tanto a dominação final da natureza pelo homem como sua autodestruição potencial. Para os países do Terceiro Mundo o átomo simbolizou a supremacia das superpotências, Estados Unidos e União Soviética, ao mesmo tempo que seu *status* secundário. A energia atômica resultou da fusão, concretizada no século XX, da ciência pura e da tecnologia, fusão essa que elevou a um nível sem precedentes a corrida pelos frutos da ciência em todos os setores de atividades (públicas e privadas) e, conseqüentemente, ampliou de maneira substancial o campo de trabalho dos cientistas. A energia atômica nos levará a uma utopia mecanicista? A uma guerra atômica? Ou à destruição irremediável do meio ambiente? Só o futuro responderá a essas perguntas.

O falecido líder indiano do Terceiro Mundo, Mahatma Gandhi (1869-1948) propôs como símbolo da filosofia organicista a roda de fiar. Máquina simples, a roda de fiar é acionada pelas mãos humanas e não pela eletricidade, e para Gandhi isso representava a harmonia entre a humanidade e a natureza. Sua forma arredondada lembrava a Gandhi a esfericidade da Terra; sua simetria indicava a unidade simbólica da espécie humana. Embora o átomo pareça ter dominado o século XX, pode-se notar igualmente a influência da roda de fiar: o esfacelamento dos impérios coloniais do século XIX; os movimentos pelos direitos civis nos Estados Unidos e na África desde 1955; os movimentos pela preservação do meio ambiente e pelos direitos das mulheres na Europa, América e Ásia; a cruzada antinuclear e a luta por uma “tecnologia apropriada”; o fundamentalismo religioso nos Estados Unidos e no Irã — tudo isso aponta para a face não mecanicista do mundo.

Nem se poderia mesmo separar essas duas ideias em campos opostos, facilmente identificáveis. Ninguém melhor do que o grande cientista do século XX, Albert Einstein (1879-1955), representa a interdependência estreita entre o átomo e a roda de fiar. Embora se dedicasse à mecânica, Einstein foi um humanista compassivo. Ele reconheceu a natureza mecânica do Universo mas, também, em sua teoria da relatividade, subentendeu-o como um todo coeso esplêndido. Ele ajudou a aproveitar a potência do átomo, mas foi sábio o suficiente para advertir sobre os perigos de usá-lo erradamente.

Ainda faltam alguns anos para que o século XX se encerre, e só bem depois de terminado se terá condições de avaliá-lo objetivamente. Ao descrever um herói antigo, o poeta inglês Tennyson (lord Alfred) escreveu, “muito se retira, mas ainda fica muito”. As gerações futuras, quando se debruçarem sobre o século XX, decidirão sobre o que retirar e o que ficar e sobre se aqueles que vivem hoje foram dignos das altruísticas palavras que se seguem, encontradas na Carta das Nações Unidas: “promover o progresso social e melhorar os padrões de vida na mais ampla liberdade, e para essa finalidade praticar a tolerância e viver pacificamente e em congraçamento uns com os outros, como bons vizinhos...”.

15.1 Deficiências lógicas dos “*Elementos*” de Euclides

O exame dos fundamentos e da estrutura lógica da matemática constitui grande parte do trabalho desenvolvido nessa ciência no século XX. Isso, por sua vez, levou à criação da *axiomática*, ou o estudo dos sistemas de postulados e suas propriedades. Muitos dos conceitos básicos da matemática passaram por evoluções e generalizações notáveis, e áreas de importância fundamental, como a teoria dos conjuntos, a álgebra abstrata e a topologia se desenvolveram enormemente. A teoria geral dos conjuntos produziu alguns paradoxos tão profundos e inquietadores que se impôs um tratamento urgente. A própria lógica, como instrumento usado pela matemática para obter conclusões a partir de hipóteses aceitas, foi esquadrihada minuciosamente, vindo a nascer daí a *lógica matemática*. Os laços entre a lógica e a filosofia levaram às várias e importantes escolas de filosofia da matemática dos dias atuais. A revolução computacional do século XX afetou também profundamente muitos ramos da matemática. Definitivamente, a velha imagem da “árvore da matemática” tornou-se obsoleta. E o que é bastante curioso, como grande parte da matemática, a maioria dessas considerações modernas têm suas raízes no trabalho dos gregos antigos, muito em particular nos *Elementos* de Euclides.

Seria realmente notável se os *Elementos* de Euclides, sendo uma tentativa tão antiga e monumental de aplicar o método postulacional, não apresentasse defeitos lógicos. Os focos de luzes de inúmeras análises críticas subsequentes revelaram muitos defeitos na estrutura lógica da obra. De todos esses defeitos, talvez o mais grave consista em várias suposições tácitas, sem base nos postulados, admitidos por Euclides. Assim, embora o Postulado P2 afirme que uma reta pode ser prolongada indefinidamente¹, ele não garante necessariamente que uma reta é infinita, mas tão somente que ela não tem fim, ou que é ilimitada. Um arco de circunferência máxima de uma esfera pode ser prolongado indefinidamente ao longo dessa circunferência, o que o torna ilimitado; mas nem por isso ele é infinito. O grande matemático alemão Riemann, em sua famosa conferência probatória *Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen*, de 1854, distinguiu entre não limitação e infinitude. Há várias ocasiões, como na demonstração da Proposição I 16, em que Euclides assume inadvertidamente a infinitude da reta. Euclides também assumiu tacitamente, ao demonstrar, por exemplo, a Proposição I 21,

¹ Ver as Seções 5 a 7 para o enunciado dos axiomas e postulados de Euclides.

que se uma reta fura um triângulo num de seus vértices, então ela, se prolongada suficientemente, interceptará também o lado oposto. Moritz Pasch (1843-1930) percebeu que havia necessidade de um postulado para fazer frente a essa situação. Outro descuido de Euclides consiste em admitir a existência de pontos de intersecção entre certas retas e circunferências. Assim, na Proposição I 1, admite-se que se duas circunferências têm um raio comum em cujas extremidades estão seus centros, então elas se interceptam em vez de se enfiarem uma pela outra, de alguma maneira, sem nenhum ponto em comum. Ocorre que, para garantir a existência desses pontos de intersecção, seria preciso algum tipo de postulado de continuidade, como um que posteriormente foi dado por R. Dedekind. Além disso, o Postulado P1 garante a existência de pelo menos uma reta por dois pontos A e B , mas não garante a unicidade dessa reta. Euclides frequentemente assumia a unicidade da reta por dois pontos distintos. Também se levantaram objeções ao princípio da superposição, usado por Euclides, com aparente relutância, para demonstrar alguns de seus primeiros teoremas de congruência, embora se possam levantar parcialmente essas objeções com o Axioma A4.

Não são apenas as numerosas suposições tácitas que prejudicam o trabalho de Euclides; algumas de suas definições preliminares também são suscetíveis de críticas. Euclides empenhou-se em definir todos os conceitos técnicos de seu discurso. Ocorre que é impossível definir *explicitamente* todos os conceitos técnicos de um discurso (assim como é impossível provar todas as proposições de um discurso), pois a definição de um conceito técnico envolve outros conceitos técnicos, e destes últimos outros conceitos técnicos e assim por diante. A fim de iniciar o discurso de maneira a evitar círculos viciosos nas definições, impõe-se primeiro a fixação de um conjunto de conceitos primitivos, ou básicos, sobre cujo significado não parem dúvidas. Todos os demais conceitos técnicos do discurso deverão ser definidos então por meio dos conceitos primitivos. Os postulados de um discurso são, portanto, em última análise, afirmações que se assumem sobre os conceitos primitivos. Por esse ponto de vista, pode-se considerar que os conceitos primitivos estejam definidos *implicitamente*, no sentido de que eles são coisas ou noções que satisfazem os postulados, sendo essa forma de definição a única que um conceito primitivo pode receber.

No desenvolvimento da geometria de Euclides os termos *ponto* e *reta*, por exemplo, poderiam muito bem ser incluídos no conjunto dos conceitos primitivos do discurso. De qualquer maneira, é fácil perceber que as definições de Euclides “Ponto é aquilo que não tem partes” e “Reta é um comprimento sem largura” envolvem círculos viciosos e portanto, de um ponto de vista lógico, são lamentavelmente inadequadas. Uma das distinções entre a concepção grega e a concepção moderna de método axiomático reside na questão dos conceitos primitivos; para os gregos não havia uma lista de conceitos primitivos. Justifica-se esse procedimento pelo fato de que para os gregos a geometria não era exatamente um estudo abstrato, mas uma tentativa de análise lógica do espaço físico idealizado. Para os gregos, pontos e retas eram idealizações de partículas muito pequenas e fios muito finos. É essa idealização que Euclides procurou expressar em algumas de suas definições iniciais. Há outras diferenças entre os pontos de vista grego e moderno sobre o método axiomático.

Só no final do século XIX e começo do século XX, depois que os fundamentos da geometria passaram por um estudo minucioso e intensivo, surgiram conjuntos de postulados logicamente satisfatórios para embasar a geometria euclidiana, plana e espacial. Entre os matemáticos que mais contribuíram nesse sentido figuram M. Pasch, G. Peano, M. Pieri, D. Hilbert, O. Veblen, E. V. Huntington, G. D. Birkhoff e L. M. Blumenthal. Hilbert, por exemplo, estruturou sua geometria sobre os conceitos primitivos de *ponto*, *reta*, *plano*, *estar em*, *congruente* e *entre* e sobre 21 postulados; já para Pieri os conceitos primitivos são dois, o de *ponto* e o de *movimento* e são 20 os postulados; Veblen partiu dos conceitos primitivos de *ponto* e *ordem* e de um conjunto de 16 postulados; Huntington tomou como primitivos os conceitos de *esfera* e *inclusão* e admitiu 23 postulados.

Desde a década de 1950, aproximadamente, vêm se fazendo várias tentativas de escrever textos de geometria em nível de ensino médio a partir de bases postulacionais, com a preocupação de um desenvolvimento rigoroso. Nesses casos, em geral, tem-se adotado ou o conjunto de postulados de Hilbert ou o de Birkhoff (muitas vezes com alterações).

15.2 Axiomática²

Os grandes fatores do desenvolvimento da axiomática, isto é, do estudo dos conjuntos de postulados e suas propriedades, foram, de um lado, as pesquisas modernas visando encontrar um conjunto de postulados aceitável para a geometria euclidiana e, de outro, a descoberta de geometrias não euclidianas igualmente consistentes.

Uma das grandes armadilhas que ameaçam os que trabalham com um sistema dedutivo consiste na excessiva familiaridade com a matéria objeto do sistema. Essa armadilha responde pela maioria dos defeitos dos *Elementos* de Euclides. Para evitar essa armadilha é conveniente substituir os conceitos primitivos do discurso por símbolos, por exemplo, x , y , z e assim por diante. Então os postulados do discurso tornam-se afirmações sobre esses símbolos e se despem assim de significado concreto; as conclusões são obtidas, portanto, a partir de uma base estritamente lógica, sem a intromissão de fatores intuitivos. A axiomática objetiva o estudo das propriedades de conjuntos de postulados expressos dessa maneira.

É óbvio que não podemos tomar como conjunto de postulados qualquer conjunto de afirmações sobre os conceitos primitivos. Há certos requisitos e certas propriedades desejáveis que um conjunto de postulados deve possuir. É essencial, por exemplo, que o conjunto de postulados seja *consistente* — isto é, que dele não possam decorrer contradições.

O método mais bem-sucedido inventado para estabelecer a consistência de um conjunto de postulados é o método dos modelos. Obtém-se um modelo de um conjunto

² Para um tratamento mais completo desse tópico ver, por exemplo, H. Eves e C. V. Newsom, *An Introduction to the Foundations and Fundamental Concepts of Mathematics*, ed. rev. Nova York, Holt, Rinehart and Winston, 1965, cap. 6.

de postulados sempre que se puder atribuir significados aos conceitos primitivos do conjunto de maneira tal que os postulados se convertam em afirmações verdadeiras sobre os significados atribuídos. Há dois tipos de modelos — *modelos concretos* e *modelos ideais*. Um modelo se diz *concreto* se os significados atribuídos aos conceitos primitivos são objetos e relações adaptados do mundo real, ao passo que um modelo se diz *ideal* se os significados atribuídos aos conceitos primitivos são objetos e relações adaptados de um outro desenvolvimento postulacional.

A exibição de um modelo concreto produz a sensação de que se estabeleceu uma consistência *absoluta* do conjunto de postulados considerado, pois, se se chegasse dedutivamente a algum teorema absurdo a partir desses postulados, então o modelo concreto também deveria encerrar alguma contradição. Mas acredita-se que as contradições sejam impossíveis no mundo real.

Nem sempre é possível construir um modelo concreto de um dado conjunto de postulados. Se, por exemplo, um conjunto de postulados envolve uma infinidade de conceitos primitivos, então é impossível obter um modelo concreto para ele, uma vez que no mundo real não há coleções infinitas de objetos. Em casos assim, procura-se construir um modelo ideal, atribuindo aos conceitos primitivos do sistema de postulados A noções de um outro sistema de postulados B , de maneira tal que as interpretações dos postulados de A sejam consequências lógicas do sistema de postulados B . Quando se procede dessa maneira não mais se pode falar em consistência absoluta, mas tão somente em *consistência relativa*. E tudo o que se pode garantir é que, se o conjunto de postulados B é consistente, o mesmo acontece com A ; a consistência do sistema A fica assim reduzida à do sistema B .

Uma questão aberta em axiomática é a de saber se um conjunto de postulados é consistente sem que se possa ser capaz de provar isso. Estudos sobre a consistência levaram a vários resultados perturbadores e controversos no que se refere ao conhecimento dos fundamentos da matemática. A demonstração da consistência pelo método dos modelos é indireta. É concebível que se possa estabelecer a consistência absoluta por um procedimento direto cuja finalidade seja mostrar a impossibilidade de se chegar, pelas regras de inferência dedutiva, a partir de um dado conjunto de postulados, a dois teoremas contraditórios entre si. Perto do início do século Hilbert concebeu um método com esse objetivo, mas seu êxito foi apenas parcial.

Um conjunto de postulados se diz *independente* se nenhum deles é consequência lógica dos outros. Para provar que um postulado particular qualquer do conjunto é independente, deve-se conceber uma interpretação dos conceitos primitivos para a qual o postulado em apreço seja falso e os demais verdadeiros. Conseguindo-se encontrar essa interpretação, então o postulado em tela não pode decorrer logicamente dos demais; de fato, se ele decorresse dos outros, a interpretação que converte todos os outros postulados em proposições verdadeiras também o converteria numa proposição verdadeira. É óbvio que testar a independência de um conjunto completo de postulados pode ser uma tarefa bastante longa, pois se são n os postulados há que se formular n testes individuais (um para cada postulado). A questão

da independência é que foi particularmente importante no caso da geometria não euclidiana.

Pode-se deduzir o mesmo corpo de conhecimentos a partir de mais do que um conjunto de postulados. Tudo de que se precisa para que dois conjuntos de postulados $P^{(1)}$ e $P^{(2)}$ levem ao mesmo desenvolvimento é que os conceitos primitivos de cada um deles possam ser definidos por meio dos conceitos primitivos do outro e que os postulados de cada um deles possam ser deduzidos a partir dos postulados do outro. Dois conjuntos de postulados nessas condições dizem-se *equivalentes*. A noção de conjuntos de postulados equivalentes nasceu das tentativas de substituir o postulado das paralelas de Euclides.

Há na axiomática outras propriedades a respeito de conjuntos de postulados, além da consistência, independência e equivalência. Esse estudo tem ligação estreita com a lógica simbólica e a filosofia da matemática. São muitos os nomes de expressão que contribuíram ou ainda contribuem para seu desenvolvimento. Merecem ser lembrados, entre outros, Hilbert, Peano, Pieri, Veblen, Huntington, Russell, Whitehead e Gödel.

15.3 *Evolução de alguns conceitos básicos*

A teoria dos conjuntos, criada por Georg Cantor perto do final do século XIX, logo despertou um interesse generalizado muito grande e praticamente não há hoje nenhum campo da matemática que não tenha recebido seu impacto. As noções de espaço e geometria de um espaço, por exemplo, passaram por uma revolução completa com a teoria dos conjuntos. Os conceitos básicos da análise, como os de limite, função, continuidade, derivada e integral ganharam uma formulação muito mais conveniente em termos das ideias da teoria dos conjuntos. Mais importante porém foi a oportunidade que ela abriu para progressos matemáticos com que sequer se sonhava há 50 anos. Assim, paralelamente à nova atividade consistindo em apreciar os procedimentos postulacionais em matemática, foram nascendo os espaços abstratos, sendo criadas as teorias gerais da dimensão e da medida e infundidos a um ramo da matemática chamado *topologia* progressos extraordinários. Em resumo, sob a influência da teoria dos conjuntos verificou-se uma unificação considerável da matemática tradicional e se criou muita matemática nova em ritmo acelerado.

Para ilustrar a evolução histórica dos conceitos matemáticos básicos, consideremos primeiro as noções de espaço e de geometria de um espaço. Esses conceitos passaram por mudanças substanciais desde os dias dos gregos antigos. Para os gregos havia apenas um espaço e uma só geometria; eram conceitos absolutos. Eles não imaginavam o espaço como uma coleção de pontos mas, isto sim, como um domínio ou lugar em que os objetos se podiam mover de um lado para outro livremente e ser comparados entre si. Sob esse ponto de vista as ideias básicas da geometria eram a de congruência e superposição.

Com a criação da geometria analítica no século XVII, o espaço passou a ser considerado como uma coleção de pontos e, com a criação das geometrias não euclidianas

clássicas no século XIX, os matemáticos passaram a aceitar o fato de que há mais do que uma geometria. Mas o espaço ainda continuava a ser um lugar onde as figuras podiam ser comparadas entre si. A ideia central passou a ser a de um grupo de transformações-congruentes do espaço sobre ele próprio e a geometria passou a ser considerada como o estudo das configurações de pontos que se mantêm inalteradas quando se submete o espaço circundante a essas transformações. Vimos na Seção 14-8 como Felix Klein ampliou esse ponto de vista em seu *Erlanger Programm* de 1872. No *Erlanger Programm* definia-se geometria como a teoria dos invariantes de um grupo de transformações. Esse conceito sintetizava e generalizava todos os conceitos de geometria anteriores e proporcionava uma classificação singularmente límpida de um grande número de importantes geometrias.

No fim do século XIX, com o desenvolvimento da ideia de ramo da matemática como um corpo abstrato de teoremas deduzidos a partir de um conjunto de postulados, cada geometria se tornou, sob esse ponto de vista, um particular ramo da matemática. Estudaram-se conjuntos de postulados para uma ampla gama de geometrias, mas o *Erlanger Programm* de maneira nenhuma estava destruído, pois se podia considerar uma geometria como um ramo da matemática correspondente à teoria dos invariantes de um grupo de transformações.

Em 1906, porém, Maurice Fréchet (1878-1973) inaugurou o estudo dos espaços abstratos (ver Exercício 15.15), surgindo dessa maneira geometrias muito gerais que não se ajustavam necessariamente à límpida classificação kleiniana. O espaço tornou-se meramente um conjunto de objetos, comumente chamados *pontos*, juntamente com um conjunto de relações envolvendo esses pontos, e se chamou de geometria simplesmente a teoria desse espaço. O conjunto de relações às quais estão submetidos os pontos chama-se *estrutura* do espaço e essa estrutura pode ou não ser explicável em termos da teoria dos invariantes de um grupo de transformações. Assim, através da teoria dos conjuntos, a geometria recebeu generalizações adicionais. Embora os espaços abstratos tivessem sido introduzidos formalmente em 1906, a ideia de geometria como um conjunto de pontos com uma estrutura sobreposta na verdade já estava embutida nas observações feitas por Riemann em sua grande conferência de 1854. É interessante que algumas dessas novas geometrias acabaram encontrando aplicações valiosas na teoria da relatividade de Einstein e em outras partes da física moderna.

O conceito de função, como as noções de espaço e geometria, passou por evoluções acentuadas. O estudante de matemática perceberá bem esse fato ao atentar para os vários refinamentos desse processo evolutivo que acompanham seus progressos escolares, desde os cursos mais elementares da escola secundária até os mais avançados e sofisticados em nível de pós-graduação.

A história do termo *função* proporciona outro exemplo interessante da tendência dos matemáticos de generalizar e ampliar os conceitos. A palavra *função*, na sua forma latina equivalente, parece ter sido introduzida por Leibniz em 1694, inicialmente para expressar qualquer quantidade associada a uma curva, como, por exemplo, as coordenadas de um ponto da curva, a inclinação de uma curva e o raio da curvatura de uma curva. Por volta de 1718, Johann Bernoulli havia chegado a considerar uma função como uma expressão qualquer formada de uma variável e algumas constantes; pouco

tempo depois Euler considerou uma função como uma equação ou fórmula qualquer envolvendo variáveis e constantes. Esta última ideia corresponde ao conceito de função que a maioria dos alunos dos cursos elementares de matemática tem. O conceito de Euler se manteve inalterado até que Joseph Fourier (1768-1830) foi levado a considerar, em suas pesquisas sobre a propagação do calor, as chamadas séries trigonométricas. Essas séries envolvem uma forma de relação mais geral entre as variáveis que as que já haviam sido estudadas anteriormente. Numa tentativa de dar uma definição de função ampla o suficiente a ponto de englobar essa forma de relação, Lejeune Dirichlet (1805-1859) chegou à seguinte formulação: Uma *variável* é um símbolo que representa um qualquer dos elementos de um conjunto de números; se duas variáveis x e y estão relacionadas de maneira que, sempre que se atribui um valor a x , corresponde automaticamente, por alguma lei ou regra, um valor a y , então se diz que y é uma *função* (unívoca) de x . A variável x , à qual se atribuem valores à vontade, é chamada *variável independente* e a variável y , cujos valores dependem dos valores de x , é chamada *variável dependente*. Os valores possíveis que x pode assumir constituem o *campo de definição* da função e os valores assumidos por y constituem o *campo de valores* da função.

O aluno do curso de matemática possivelmente encontrou a definição de função de Dirichlet em seu curso inicial de cálculo. Trata-se de uma definição muito ampla que, ademais, não implica a necessidade de acomodar em alguma forma de expressão analítica a relação que há entre x e y ; essa definição acentua a ideia de relação entre dois conjuntos de números.

A teoria dos conjuntos propiciou ampliar o conceito de função de maneira a abranger relações entre dois conjuntos de elementos quaisquer, sejam esses elementos números ou qualquer outra coisa. Assim, na teoria dos conjuntos, uma *função* f é, por definição, um conjunto qualquer de pares ordenados de elementos, pares esses sujeitos à condição seguinte: se $(a_1, b_1) \in f$, $(a_2, b_2) \in f$ e $a_1 = a_2$, então $b_1 = b_2$. O conjunto A dos primeiros elementos dos pares ordenados chama-se *domínio* da função e o conjunto B de todos os segundos elementos dos pares ordenados se diz *imagem* da função. Assim, uma função é simplesmente um tipo particular de subconjunto do produto cartesiano $A \times B$. Uma função f se diz *injetora* se, de $(a_1, b_1) \in f$, $(a_2, b_2) \in f$ e $b_1 = b_2$, decorre $a_1 = a_2$. Se f é uma função e $(a, b) \in f$, escreve-se $b = f(a)$.

O conceito de função permeia grande parte da matemática e, desde as primeiras décadas do século presente, muitos matemáticos vêm advogando seu uso como princípio central e unificador na organização dos cursos elementares de matemática. O conceito parece representar um guia natural e efetivo para a seleção e desenvolvimento do material de textos de matemática. Enfim, é inquestionável que quanto antes se familiarize um estudante com o conceito de função, tanto melhor para sua formação matemática.

15.4 Números transfinitos

A moderna teoria matemática dos conjuntos é uma das mais notáveis criações do espírito humano. Devido ao arrojo fora do comum de algumas de suas ideias e devido

a alguns dos métodos de demonstração singulares aos quais deu origem, a teoria dos conjuntos é indescritivelmente fascinante. Acima disso, há a enorme importância que a teoria assumiu em praticamente todo o corpo da matemática. Ela enriqueceu, tornou mais claro e generalizou muitos domínios da matemática, e seu papel no estudo dos fundamentos da matemática é essencial. E constitui também um dos elos entre a matemática, de um lado, e a filosofia e a lógica, de outro.

Dois conjuntos se dizem *equipotentes* se, e somente se, eles podem ser colocados em correspondência biunívoca. Se dois conjuntos são equipotentes, diz-se que eles têm o mesmo *número cardinal*. Os números cardinais dos conjuntos finitos podem ser identificados com os números naturais. Os números cardinais dos conjuntos infinitos recebem o nome de *números transfinitos*. O desenvolvimento inicial da teoria dos números transfinitos foi obra de Georg Cantor, numa série de artigos notáveis iniciada em 1874 e publicada, em sua maior parte, nas revistas de matemática alemãs *Mathematische Annalen* e *Journal für Mathematik*. Antes dos trabalhos de Cantor os matemáticos aceitavam apenas um infinito, denotado por algum símbolo como ∞ , o qual era empregado indiscriminadamente para indicar o “número” de elementos de conjuntos como o dos números naturais e o dos números reais. Com esses trabalhos introduziu-se uma nova visão que resultou, entre outras coisas, numa aritmética e numa escala para as infinidades.

O princípio básico de que os conjuntos equipotentes devem possuir o mesmo número cardinal leva a situações muito interessantes e intrigantes quando os conjuntos considerados são infinitos. Galileu Galilei já observara, perto do final do século XVI, que, mediante a correspondência $n \leftrightarrow 2n$, o conjunto dos inteiros positivos pode ser colocado em correspondência biunívoca com o conjunto dos inteiros pares positivos. Donde, deve-se atribuir o mesmo número cardinal a cada um desses conjuntos e, segundo esse enfoque, dizer que há tantos inteiros positivos pares quanto inteiros positivos. Observa-se de imediato que o axioma de Euclides que afirma que o todo é maior do que as partes é insustentável quando se trata de números cardinais de conjuntos infinitos. De fato, Dedekind, por volta de 1888, definiu efetivamente *conjunto infinito* como todo conjunto que é equipotente a uma sua parte própria.

Designaremos o cardinal do conjunto dos números naturais pela letra d e diremos que todo conjunto cujo cardinal é d é *enumerável*³. Segue-se que um conjunto é enumerável se, e somente se, seus elementos podem ser escritos como uma sequência infinita $\{s_1, s_2, s_3, \dots\}$. É fácil provar que todo conjunto infinito contém um subconjunto enumerável; logo d é o “menor” número transfinito.

Cantor, num de seus primeiros artigos sobre a teoria dos conjuntos, provou a enumerabilidade de dois importantes conjuntos que, à primeira vista, certamente não parecem ter essa propriedade.

O primeiro é o conjunto dos números racionais. Este conjunto goza da propriedade da *densidade*. Isso significa que entre dois números racionais quaisquer existem outros

³ Cantor denotava o cardinal de um conjunto enumerável pela letra alef (do alfabeto hebreu) com índice zero; isto é \aleph_0 .

números racionais — na verdade, infinitos. Por exemplo, entre 0 e 1 estão os números racionais

$$1/2, 2/3, 3/4, 4/5, \dots, n/(n+1), \dots;$$

entre 0 e 1/2 estão os números racionais

$$1/3, 2/5, 3/7, 4/9, 5/11, \dots, n/(2n+1), \dots;$$

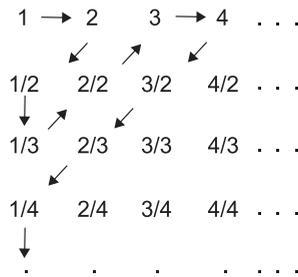
entre 0 e 1/4 estão os números racionais

$$1/5, 2/9, 3/13, 4/17, 5/21, \dots, n/(4n+1);$$

e assim por diante. Devido a essa propriedade poder-se-ia muito bem esperar que o número transfinito do conjunto dos números racionais fosse maior que d^4 . Cantor mostrou que não é isso o que acontece; ao contrário, o conjunto dos números racionais é enumerável. Sua demonstração é interessante e segue o caminho seguinte.

Teorema 1: O conjunto dos números racionais é enumerável.

Considere a formação



em que a primeira linha contém, em ordem crescente, todos os números naturais (isto é, todas as frações positivas de denominador 1), a segunda linha contém, em ordem crescente, todas as frações positivas de denominador 2, a terceira linha contém, em ordem crescente, todas as frações de denominador 3 etc. É óbvio que todo número racional positivo aparece nessa formação e se fizermos uma lista na ordem de sucessão indicada pelas flechas, omitindo os números que já apareceram, obteremos a sequência infinita

$$1, 2, 1/2, 1/3, 3, 4, 3/2, 2/3, 1/4, \dots$$

⁴ Diz-se que o cardinal de um conjunto A é maior que o cardinal de um conjunto B se B é equipotente a uma parte própria de A , mas A não é equipotente a nenhuma parte própria de B .

na qual cada número racional aparece uma, e uma só vez. Denote essa sequência por $\{r_1, r_2, r_3, \dots\}$. Então a sequência $\{0, -r_1, r_1, -r_2, r_2, -r_3, r_3, \dots\}$ contém todos os números racionais, o que conclui a demonstração.

O segundo conjunto considerado por Cantor aparentemente é bem mais amplo que o conjunto dos números racionais. Daremos inicialmente a seguinte definição.

DEFINIÇÃO 1: Um número complexo se diz *algébrico* se é raiz de algum polinômio

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n,$$

onde $a_0 \neq 0$ e todos os a_i são inteiros. Um número complexo que não é algébrico se diz *transcendente*.

É evidente que o conjunto dos números algébricos, inclui, entre outros, todos os números racionais e as raízes desses números. Assim sendo, o seguinte teorema é surpreendente:

Teorema 2: O conjunto dos números algébricos é enumerável.

Seja $f(x)$ um polinômio nos moldes da Definição 1 e suponhamos, o que não traz perda de generalidade, que $a_0 > 0$. Consideremos a *altura* h do polinômio, definida por

$$h = n + a_0 + |a_1| + |a_2| + \dots + |a_{n-1}| + |a_n|.$$

Obviamente h é um inteiro ≥ 1 . É claro que o número de polinômios de uma dada altura h é finito e portanto os polinômios de altura h fornecem apenas um número finito de números algébricos. Pode-se então construir uma lista (teoricamente falando) de todos os números algébricos, tomando primeiro aqueles que resultam de polinômios de altura 1, depois aqueles que resultam de polinômios de altura 2 e assim por diante, eliminando-se em cada etapa aqueles que constituiriam repetições. Podendo ser colocados numa lista infinita, os números algébricos formam um conjunto enumerável.

A possibilidade de que todo conjunto infinito pudesse ser enumerável, deixada em aberto por esses dois teoremas, foi destruída magistralmente por Cantor no teorema que se segue.

Teorema 3: O conjunto dos números reais do intervalo $0 < x < 1$ não é enumerável.

A demonstração é indireta e usa um método pouco comum conhecido como *processo da diagonal de Cantor*. Admitamos que o conjunto fosse enumerável. Então poderíamos colocá-lo na forma de sequência, a saber, $\{p_1, p_2, p_3, \dots\}$. Cada um dos números p_i pode ser escrito univocamente como uma fração decimal infinita; a esta altura convém lembrar que todo número racional pode ser escrito como um “decimal periódico”: um número como 0,3, por exemplo, pode ser representado por 0,2999... . Podemos então arranjar a sequência da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
 P_1 &= 0, a_{11} a_{12} a_{13} \dots \\
 P_2 &= 0, a_{21} a_{22} a_{23} \dots \\
 P_3 &= 0, a_{31} a_{32} a_{33} \dots \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

onde cada símbolo a_{ij} representa algum dos algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Porém, a despeito de todo o cuidado tomado para incluir na lista todos os números reais entre 0 e 1, há um número que não foi incluído. Esse número é $0, b_1, b_2, b_3, \dots$, onde, digamos, $b_k = 7$ se $a_{kk} \neq 7$ e $b_k = 3$ se $a_{kk} = 7$, $k = 1, 2, 3, \dots, n, \dots$. Esse número obviamente situa-se entre 0 e 1 e é diferente de cada p_i ; de fato, é diferente de p_1 pois $b_1 \neq a_{11}$, é diferente de p_2 pois $b_2 \neq a_{22}$ e assim por diante. Assim, a suposição inicial de que o conjunto dos números reais entre 0 e 1 fosse enumerável levou a uma contradição; donde, ele não é enumerável.

Dos Teoremas 2 e 3 Cantor deduziu o notável corolário seguinte:

Teorema 4: Existem números transcendententes.

Como, pelo Teorema 3, o conjunto dos números reais entre 0 e 1 não é enumerável, é fácil mostrar que o conjunto dos números complexos também não é enumerável. Mas, pelo Teorema 2, o conjunto dos números algébricos é enumerável. Segue-se que existem números complexos que não são algébricos, o que conclui a demonstração.

Nem todos os matemáticos se inclinam a aceitar a demonstração dada para o Teorema 4. A aceitação ou não da demonstração depende do que se entende por existência em matemática. Ocorre que há matemáticos para os quais só se estabelece a existência matemática quando efetivamente se constrói e exhibe um dos objetos cuja existência está em questão. E a demonstração anterior não estabelece a existência de números transcendententes, produzindo um exemplo específico de um desses números. Há muitas demonstrações de existência em matemática feitas dessa maneira não construtiva, presumindo-se nesses casos que o fato de a suposição da não existência levar a uma contradição garanta necessariamente a existência. A maioria das demonstrações do Teorema Fundamental da Álgebra, por exemplo, segue essa linha de raciocínio.

A insatisfação de alguns matemáticos com as demonstrações de existência não construtivas acarretou uma grande soma de esforços para substituir essas demonstrações por outras que efetivamente fornecessem os objetos em exame.

É muito diferente provar a existência de números transcendententes e provar que algum número particular é transcendente, podendo a última questão ser muito difícil de estabelecer. A primeira demonstração de que o número e , base dos logaritmos naturais, é transcendente foi dada por Hermite em 1873 e a primeira demonstração da transcendentalidade de π foi dada por Lindemann em 1882. Infelizmente este não é o lugar oportuno para se provar esses dois fatos tão interessantes. Ilustra a dificuldade de se estabelecer se um particular número dado é algébrico ou transcendente o fato de essa questão estar em aberto para o número π^π . Nesse sentido constitui um avanço signi-

ficativo a demonstração relativamente recente de que os números da forma a^b , onde a é um número algébrico diferente de 0 e 1 e b é um número irracional algébrico, são todos transcendentos. Esse resultado, conseguido em 1934 por Alexander Osipovich Gelfond (1906-1968) e conhecido por teorema de Gelfond, foi o ponto culminante de quase 30 anos de esforços para provar que o chamado *número de Hilbert*, $2^{\sqrt{2}}$, é transcendente.

Como o conjunto dos números reais do intervalo $0 < x < 1$ não é enumerável, o número transfinito desse conjunto é maior que d . Ele será denotado por c e chamado *número cardinal do contínuo*. Aceita-se em geral que c é o número transfinito sucessor de d — isto é, acredita-se que não há nenhum cardinal maior que d e menor que c . Essa suposição é conhecida como *hipótese do contínuo*, mas, a despeito de enormes esforços, ainda não se conseguiu prová-la. Deduziram-se muitas consequências dessa hipótese. Por volta de 1940, o lógico austríaco Kurt Gödel (1906-1978) logrou mostrar que a hipótese do contínuo é consistente com um conhecido sistema de postulados da teoria dos conjuntos, desde que esses postulados sejam, eles próprios, consistentes. Gödel conjecturou que a negação da hipótese do contínuo também é consistente com os postulados da teoria dos conjuntos. Essa conjectura foi confirmada em 1963 por Paul J. Cohen (nascido em 1934), da Universidade de Stanford, estabelecendo assim que a hipótese do contínuo é independente dos postulados da teoria dos conjuntos e, portanto, não pode ser deduzida a partir desses postulados. Ou seja, a situação é análoga àquela do postulado das paralelas da geometria euclidiana.

Já se provou que o conjunto das funções $f(x)$ definidas no intervalo $0 < x < 1$ tem número cardinal maior que c , mas não se sabe se esse cardinal é o sucessor de c . A teoria de Cantor permite a construção de uma sequência infinita de números transfinitos e há demonstrações que se destinam a mostrar que há efetivamente um número ilimitado de números cardinais maiores que o número cardinal do contínuo.

15.5 Topologia

A topologia começou como um ramo da geometria, mas durante o segundo quartel do século XX passou por generalizações tais e se envolveu com tantos outros ramos da matemática que hoje talvez, numa visão mais adequada, possa ser considerada, ao lado da geometria, da álgebra e da análise, como uma das partes fundamentais da matemática. Grosso modo, pode-se definir a topologia como o estudo matemático da continuidade. Nesta seção nos restringiremos a alguns aspectos da matéria que refletem sua origem geométrica. Por esse ponto de vista pode-se considerar a topologia como o estudo das propriedades das figuras geométricas que permanecem invariantes sob as transformações chamadas *transformações topológicas*; isto é, sob aplicações contínuas que têm inversas também contínuas. Entendemos por figura geométrica um conjunto não vazio qualquer de pontos do espaço tridimensional (ou de um espaço de dimensão superior); as aplicações contínuas se caracterizam pelo fato de poderem ser representadas, em relação a um sistema de coordenadas cartesianas, por funções contínuas das coordenadas.

Como o conjunto de todas as transformações topológicas de uma figura geométrica forma um grupo de transformações, a topologia pode, sob esse ponto de vista, ser considerada como uma geometria kleiniana e portanto enquadrada no *Erlanger Programm*. As propriedades de uma figura geométrica que se mantêm invariantes sob as transformações topológicas da figura se denominam *propriedades topológicas* da figura; e duas figuras tais que cada uma delas pode ser transformada topologicamente na outra se dizem *homeomorfas* ou *topologicamente equivalentes*.

As funções subjacentes a uma transformação topológica não precisam estar definidas em todo o espaço em que a figura está mergulhada, mas tão somente nos pontos que constituem essa figura. Daí então se poder distinguir entre as propriedades topológicas *intrínsecas* da figura, que são aquelas que permanecem invariantes sob *todas* as transformações topológicas da figura e as propriedades topológicas *extrínsecas* da figura, que são aquelas que permanecem invariantes sob todas as transformações topológicas do espaço em que a figura está contida. As propriedades intrínsecas da figura são aquelas que independem do espaço em que ela está imersa ao passo que as propriedades topológicas extrínsecas das figuras são aquelas que dependem do espaço em que ela está imersa. Lembremos que para a geometria diferencial das superfícies do espaço tridimensional se tem uma situação análoga, como vimos na Seção 14-7.

A topologia, como campo de estudos autônomo, certamente não é anterior a meados do século XIX, mas podem-se encontrar investigações isoladas anteriores sobre questões de natureza topológica. Perto do fim do século XVII, Leibniz usou o termo *geometria situs* para designar uma espécie de matemática qualitativa que hoje seria considerada como parte da topologia; mas suas previsões de que se tratava de um campo muito rico demoraram a se concretizar. Uma das descobertas topológicas mais antigas é a propriedade de uma superfície poliédrica fechada simples traduzida na relação $v - a + f = 2$, onde v , a , f denotam o número de vértices, arestas e faces, respectivamente, da figura. Essa relação foi enunciada por Descartes em 1640 mas somente em 1752 ela seria provada pela primeira vez, cabendo a Euler essa primazia. Anteriormente, em 1736, Euler já havia entrado no terreno da topologia dos grafos lineares em sua abordagem do problema das pontes de Königsberg (ver Exercício 12.8). Gauss deu diversas contribuições à topologia. Das várias demonstrações que deu do teorema fundamental da álgebra, duas eram explicitamente topológicas. A primeira dessas demonstrações, dada em sua tese de doutorado em 1799, quando ele tinha 22 anos de idade, utiliza-se de técnicas topológicas. Mais tarde, embora brevemente, Gauss dirigiu sua atenção para a teoria dos nós, hoje um importante ramo da topologia. Por volta de 1850, Francis Guthrie lançou a conjectura que se tornou conhecida por problema das quatro cores⁵, uma questão em que mais tarde trabalhariam nomes como Augustus De Morgan e Arthur Cayley, além de outros. Nessa altura a topologia era conhecida como *analysis situs*. O termo *topologia* foi introduzido por J. B. Listing (1808-1882), um discípulo de Gauss, em 1847, no título *Vorstudien zur Topologie*, do primeiro livro dedicado ao assunto. Outro discípulo

⁵ Segundo o qual qualquer mapa plano ou sobre uma superfície esférica pode ser colorido com no máximo quatro cores.

de Gauss, G. R. Kirchhoff (1824-1887), em 1847, empregou a topologia dos grafos lineares ao estudo dos circuitos elétricos. Mas, de todos os discípulos de Gauss, o que de longe mais contribuiu para a topologia foi Bernhard Riemann que, em sua tese de doutorado, em 1851, introduziu conceitos topológicos no estudo da teoria das funções de variável complexa. O principal estímulo aplicado por Riemann à topologia foi a noção de *superfície de Riemann*, um expediente topológico para transformar funções complexas multívocas em funções unívocas. Também de importância para a topologia foi a conferência probatória de Riemann, em 1854, a respeito das hipóteses que fundamentam a geometria. Essa conferência representou a brecha para as dimensões superiores, sendo nela que se introduziu o conceito de *variedade*. Por volta de 1865, A. F. Möbius (1790-1868) escreveu um artigo em que as superfícies poliédricas eram consideradas simplesmente como uma coleção de polígonos ligados entre si. Isso introduziu o conceito de 2-complexo em topologia. Em sua abordagem sistemática dos 2 complexos, Möbius foi levado à superfície de uma só face e uma só aresta conhecida hoje como *faixa de Möbius*. Em 1873, James Clerk Maxwell (1831-1879) usou a teoria topológica da conectividade no estudo dos campos eletromagnéticos. Outros, como H. Helmholtz (1821-1894) e Lord Kelvin (William Thomson, 1824-1907), se incluem entre os físicos que aplicaram ideias topológicas com êxito. Henri Poincaré (1854-1912) tem um lugar de destaque entre os primeiros a contribuir para a topologia. O primeiro artigo significativo dedicado inteiramente à topologia, publicado em 1895 com o título de *Analysis situs*, é de sua autoria. Foi nele que se introduziu a importante teoria da homologia em dimensão n . Foi também Poincaré quem introduziu os grupos de Betti em topologia. Com o trabalho de Poincaré, a topologia avançou bastante e um número cada vez maior de matemáticos entrou nesse campo. Nomes particularmente importantes da topologia a partir de Poincaré são O. Veblen (1880-1960), J. W. Alexander (1888-1971), S. Lefschetz (1884-1972), L. E. J. Brouwer (1881-1966) e M. Fréchet (1878-1973).

A noção de figura geométrica como formada de um conjunto finito de partes fundamentais ligadas entre si, do modo enfatizado por Möbius, Riemann e Poincaré, gradualmente deu lugar ao conceito cantoriano de um conjunto arbitrário de pontos, reconhecendo-se que qualquer conjunto de objetos — seja um conjunto de números, de entes algébricos, funções ou objetos matemáticos — pode constituir, em algum sentido, um espaço topológico. As pesquisas orientadas por essa última visão, muito geral, da topologia tornaram-se conhecidas como *topologia conjuntiva*, ao passo que as investigações mais intimamente ligadas à visão anterior tornaram-se conhecidas como *topologia combinatória* ou *topologia algébrica*. A estruturação clássica da topologia conjuntiva emergiu em 1914 do livro *Grundzüge der Mengenlehre* de Felix Hausdorff (1868-1942). Nele se faz uma exposição sistemática da matéria de maneira tal que a natureza dos elementos fundamentais é irrelevante. Na última parte do trabalho encontra-se uma abordagem dos espaços topológicos hoje conhecidos como *espaços de Hausdorff* (ver Exercício 15.27).

15.6 Lógica matemática

Uma teoria matemática resulta da interação de dois fatores, um conjunto de postulados e uma lógica. O conjunto de postulados constitui a base da qual a teoria

brota e a lógica proporciona as regras pelas quais essa base pode se expandir para transformar-se num corpo de teoremas. É óbvio que ambos os fatores são importantes e que, em razão disso, cada um deles já foi examinado e estudado cuidadosamente. O estudo do primeiro fator constitui o objeto da axiomática e já foi focalizado na Seção 15-2; nesta seção nossa atenção estará dirigida para o segundo desses fatores.

Embora os gregos antigos tivessem desenvolvido consideravelmente a lógica formal e Aristóteles (384-322 a.C.) tivesse sistematizado o material resultante, esse trabalho pioneiro foi levado a efeito totalmente com o uso da linguagem corrente. Os matemáticos da atualidade entenderam que seria uma tarefa praticamente inútil, tendo em conta as preocupações modernas, continuar abordando a lógica dessa maneira. A fim de que essa matéria pudesse ser estudada com o caráter científico necessário, era necessário introduzir-se uma linguagem simbólica. A concretização desse intento resultou no que se chama hoje de *lógica simbólica* ou *lógica matemática*. Na lógica simbólica representam-se as várias relações entre proposições, classes etc., por fórmulas cujos significados estão livres das ambigüidades tão comuns à linguagem corrente. Torna-se então possível desenvolver a matéria a partir de um conjunto inicial de fórmulas de acordo com certas regras de transformação formal claramente prescritas, de maneira muito parecida com o desenvolvimento de algum tópico da álgebra habitual. Ademais, da mesma maneira que no desenvolvimento de um tópico de álgebra, as vantagens da linguagem simbólica sobre a linguagem corrente no que se refere à facilidade de entendimento e brevidade são enormes.

Considera-se que Leibniz tenha sido o primeiro a cogitar seriamente dos benefícios de uma lógica simbólica. Num de seus primeiros trabalhos, *De arte combinatoria*, publicado em 1666, ele manifestou sua crença na possibilidade de uma linguagem científica universal, expressa num simbolismo reduzido e prático que guiaria o processo do raciocínio. Retornando a essas ideias entre os anos 1679 e 1690, Leibniz realizou progressos consideráveis no sentido da criação de uma lógica simbólica, formulando, inclusive, muitos conceitos de grande importância modernamente.

Em 1847, com a publicação de *The Mathematical Analysis of Logic, Being an Essay towards a Calculus of Deductive Reasoning*, um pequeno livro de autoria de George Boole (1815-1864), verificou-se um ressurgimento do interesse pela lógica simbólica. Seguiu-o um artigo de 1848 e, finalmente, em 1854, Boole logrou expor de maneira notável suas ideias no trabalho *An Investigation into the Laws of Thought, on Which Are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probability*.

Augustus De Morgan (1806-1871), um contemporâneo de Boole, com seu tratado *Formal Logic, or the Calculus of Inference, Necessary and Probable*, publicado em 1847, chegou a ir, em alguns pontos, consideravelmente além de Boole. Mais tarde De Morgan desenvolveu estudos amplos sobre a lógica das relações, até então negligenciada.

Nos Estados Unidos, uma figura que contribuiu com um trabalho relevante para a lógica matemática foi Charles Sanders Peirce (1839-1914), filho do ilustre matemático de Harvard, Benjamin Peirce (1809-1880). Peirce redescobriu alguns dos princípios enunciados por seus predecessores. Infelizmente seu trabalho permaneceu algo à margem da corrente principal das pesquisas nesse campo; assim, só há pouco tempo, relativamente, começou-se a dar o merecimento devido a grande parte de suas ideias.

As noções booleanas receberam um acabamento e uma complementação notáveis no volumoso tratado de Ernst Schröder (1841-1902), *Vorlesungen über die Algebra der Logic*, publicado no período entre 1890 e 1895. Na verdade, os lógicos modernos se inclinam a designar a lógica simbólica segundo a tradição booleana por *álgebra de Boole-Schröder*. Ainda se pesquisa muito em álgebra booleana, como o mostram os muitos artigos sobre o assunto publicados atualmente em revistas de matemática.

Uma abordagem ainda mais moderna da lógica simbólica se iniciou no trabalho do lógico alemão Gottlob Frege (1848-1925), no período entre 1879 e 1903, e nas pesquisas de Giuseppe Peano (1858-1932). O que motivava o trabalho de Peano era o desejo de expressar toda a matemática em termos de um cálculo lógico, ao passo que o trabalho de Frege derivava da necessidade de uma fundamentação mais sólida para a matemática. São marcos na obra de Frege: *Begriffsschrift*, que apareceu em 1879 e *Grundgesetze der Arithmetik*, em dois volumes (1893 e 1903) e historicamente muito importante; e na obra de Peano vale destacar o *Formulaire de Mathématiques*, em cinco volumes (escritos com a participação de colaboradores) publicados a partir de 1894. O trabalho iniciado por Frege e Peano levou diretamente aos *Principia mathematica* de Alfred North Whitehead (1861-1947) e Bertrand Russell (1872-1970), uma obra monumental e muito influente, em três volumes (1910-1913). A ideia básica dessa obra é a identificação de grande parte da matemática com a lógica pela dedução do sistema dos números naturais e, portanto, do grosso da matemática, a partir de um conjunto de premissas ou postulados da própria lógica. No período entre 1934 e 1939 apareceu o abrangente *Grundlagen der Mathematik* de David Hilbert (1862-1943) e Paul Bernays (1888-1977). Esse trabalho, baseado numa série de artigos e preleções acadêmicas de Hilbert, tentava construir a matemática mediante o uso da lógica simbólica de uma nova maneira cujo objetivo era tornar possível a determinação da consistência da matemática.

Presentemente há muitos matemáticos empenhados em pesquisas elaboradas no campo da lógica simbólica, principalmente em função do impulso dado a esse campo pelos *Principia mathematica*. E, para publicar os trabalhos desse grupo, criou-se em 1935 o periódico especializado *Journal of Symbolic Logic*.

Há uma analogia interessante (não se indo muito longe com ela) entre a lei do paralelogramo de forças e o método axiomático. Pela lei do paralelogramo, duas forças componentes se combinam numa só força resultante. Obtêm-se forças resultantes diferentes variando-se uma ou outra das forças componentes, embora seja possível obter a mesma força resultante tomando-se pares de forças componentes iniciais diferentes. Assim, da mesma forma como uma força resultante é determinada pelas duas forças componentes iniciais, uma teoria matemática (ver Figura 122) é determinada por um conjunto de postulados e uma lógica; isto é, o conjunto de afirmações que constituem uma teoria matemática resulta da interação de um conjunto inicial de afirmações chamadas de postulados e de outro conjunto inicial de afirmações ou regras de procedimento chamado de lógica. Já há algum tempo os matemáticos têm ciência da mutabilidade do primeiro conjunto de afirmações iniciais (os postulados) mas até tempos recentes pensava-se universalmente que o segundo conjunto de afirmações iniciais (ou seja, a lógica) fosse fixo, absoluto e imutável. De fato, essa ainda é a visão

que prevalece entre as pessoas de um modo geral, pois parece inconcebível, salvo para os poucos especialistas, que possa haver uma alternativa para as leis da lógica enunciadas por Aristóteles no século IV a.C. A impressão geral é que essas leis são, de alguma maneira, atributos da estrutura do universo e que elas são inerentes à própria natureza do raciocínio humano. Tal como muitas visões absolutas do passado essa também veio abaixo, mas só em 1921. Ninguém, talvez, exprimiu com mais clareza o ponto de vista moderno do que o lógico americano Alonzo Church, nas seguintes palavras:

Não se atribui nenhum caráter de unicidade ou de verdade absoluta a qualquer sistema lógico particular. Os entes da lógica formal são abstrações criadas com o fito de descrever ou sistematizar fatos da experiência ou observação, e suas propriedades, delineadas aproximadamente pelo uso em vista, dependem do inventor para adquirir um caráter exato. A presença dessa situação é mais fácil de reconhecer, acreditamos, na geometria tridimensional, usada para descrever o espaço físico. Os entes da geometria são, obviamente, abstrações, incluindo planos sem espessura, pontos que não ocupam área nenhuma do plano, conjuntos de pontos com uma infinidade desses elementos, retas de comprimento infinito e outras coisas impossíveis de reproduzir numa experiência física. No entanto, pode-se aplicar a geometria ao espaço físico de tal maneira que se estabeleça uma correspondência extremamente útil entre os teoremas da geometria e os fatos da observação sobre corpos materiais do espaço. Ao se construir a geometria, as aplicações em vista ao espaço físico servem como um roteiro aproximado para estabelecer que propriedades os entes abstratos devem ter, mas não especificam essas propriedades completamente. Consequentemente pode haver, e realmente há, mais do que uma geometria suscetível de descrever o espaço físico. Analogamente existe, sem dúvida nenhuma, mais de uma lógica suscetível de ser usada e, de todas elas, uma pode ser mais agradável ou mais conveniente, mas não se pode dizer que esta seja certa e aquela errada.

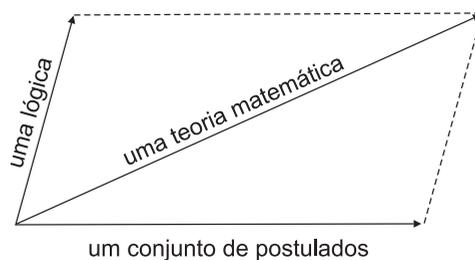


Figura 122

Deve-se lembrar que as novas geometrias surgiram primeiro da negação do postulado das paralelas de Euclides e que a emergência de novas álgebras decorreu primeiro da negação da lei comutativa da multiplicação. De maneira análoga, as novas lógicas,

chamadas “lógicas multivalentes”, resultaram primeiro da negação da lei do terceiro excluído de Aristóteles. De acordo com esta lei, a proposição disjuntiva “ p ou não p ” é uma tautologia, considerando que uma proposição p , na lógica aristotélica, é sempre verdadeira ou falsa. Pelo fato de nessa lógica uma proposição só admitir dois valores lógicos — verdadeiro ou falso — ela se denomina lógica bivalente. Em 1921, J. Lukasiewicz considerou uma lógica trivalente, ou seja, uma lógica em que uma proposição pode assumir três valores lógicos possíveis. Bem pouco depois, e independentemente do trabalho de Lukasiewicz, E. L. Post considerou lógicas m -valentes, nas quais uma proposição p pode assumir um qualquer de m valores lógicos possíveis, sendo m um inteiro qualquer maior que 1. Se m é maior que 2 a lógica se diz *multivalente*. Em 1930, Lukasiewicz e A. Tarski deram a conhecer um outro estudo das lógicas m -valentes. Pouco depois, em 1932, H. Reichenbach ampliou os sistemas m -valentes criando uma lógica infinito-valente em que uma proposição p pode assumir um qualquer de infinitos valores lógicos possíveis⁶.

Nem todas as lógicas são dos tipos que acabamos de discutir. Assim, A. Heyting desenvolveu uma lógica bivalente para servir à escola matemática intuicionista; ela difere da de Aristóteles pelo fato de não aceitar a lei do terceiro excluído e a lei da dupla negação. Logo, como as lógicas multivalentes, essa lógica construída com propósitos especiais apresenta diferenças das leis aristotélicas. Tais lógicas chamam-se *lógicas não aristotélicas*.

Como as geometrias não euclidianas, as lógicas não aristotélicas também se mostraram capazes de aplicações. Reichenbach, na verdade, concebeu sua lógica infinito-valente, para servir como uma base para a teoria matemática das probabilidades. Em 1933, F. Zwicky observou que as lógicas multivalentes podem ser aplicadas à teoria quântica da física moderna. Muitos dos detalhes dessa aplicação foram proporcionados por Garrett Birkhoff, J. von Neumann e H. Reichenbach. É ainda incerto o papel que as lógicas não aristotélicas podem desempenhar no desenvolvimento futuro da matemática, mas se trata de uma questão intrigante; a aplicação da lógica simbólica de Heyting à matemática intuicionista indica que as novas lógicas podem ser matematicamente valiosas. Na próxima seção, chamaremos a atenção para um possível uso dessas lógicas na resolução da crise moderna dos fundamentos da matemática.

Da discussão anterior pode-se tirar um princípio notável sobre descobertas e progressos — o de duvidar construtivamente das crenças tradicionais. Quando se perguntou a Einstein como havia feito para descobrir a teoria da relatividade ele respondeu, “Contestando um axioma”. Lobachevsky e Bolyai contestaram o postulado das paralelas de Euclides; Hamilton e Cayley contestaram a lei comutativa da multiplicação; Lukasiewicz e Post contestaram a lei do terceiro excluído da lógica aristotélica. Ana-

⁶ Historicamente é interessante registrar que, em 1936, K. Michalski descobriu que as lógicas trivalentes já tinham sido antevistas pelo sábio medieval William de Occam no século XIV. A possibilidade de uma lógica trivalente também mereceu a atenção do filósofo Hegel e, em 1896, de Hugh MacColl. Essas cogitações, porém, pouco efeito tiveram no desenvolvimento subsequente e, assim, não podem ser consideradas como contribuições decisivas.

logamente, no campo das ciências naturais, Copérnico contestou o axioma que punha a Terra no centro do Sistema Solar; Galileu contestou o axioma da proporcionalidade direta entre o peso de um corpo e a rapidez de sua queda; Einstein contestou o axioma segundo o qual de dois instantes distintos um deveria preceder o outro. Essa contestação construtiva de axiomas tornou-se uma das maneiras mais comuns de produzir avanços na matemática e certamente esse desafio se enquadra no âmago do aforismo de Georg Cantor: “A essência da matemática reside em sua liberdade”.

15.7 *Antinomias da teoria dos conjuntos*

O estudo da história da matemática, desde a Antiguidade grega até o presente, revela que os fundamentos da matemática sofreram três crises profundamente perturbadoras. E em cada uma delas uma porção substancial da matemática, que até então se supunha bem assentada, tornou-se objeto de suspeição e, ao mesmo tempo, de cuidados com vistas a uma reformulação urgente.

A primeira crise nos fundamentos da matemática ocorreu no século V a.C.; na verdade, essa crise não poderia ter ocorrido muito antes pois, como vimos, a matemática, como ciência dedutiva, não é anterior ao século VI a.C., tendo se originado talvez com Tales, Pitágoras e seus discípulos. A crise se desencadeou com a descoberta de que nem todas as grandezas geométricas da mesma espécie são comensuráveis; mostrou-se, por exemplo, que a diagonal e o lado de um quadrado não admitem uma unidade de medida comum. Como a teoria pitagórica das grandezas se baseava na crença intuitiva de que todas as grandezas da mesma espécie deveriam ser comensuráveis, a descoberta de segmentos incomensuráveis provocou grandes transtornos. Por exemplo, toda a teoria pitagórica das proporções, com todas as suas conseqüências, teria que ser jogada fora por infundada. A superação dessa crise não foi fácil nem rápida. Foi levada a efeito por volta de 370 a.C. pelo brilhante Eudoxo, cuja revisão da teoria das grandezas e proporções é uma das grandes obras-primas matemáticas de todos os tempos. A notável abordagem dos incomensuráveis de Eudoxo pode ser encontrada no quinto livro dos *Elementos* de Euclides e coincide em essência com a moderna teoria dos números irracionais dada por Richard Dedekind em 1872. Focalizamos essa primeira crise na Seção 3-5 e sua resolução na Seção 5-5. É bem possível que essa crise seja grandemente responsável pela subsequente instituição e adoção do método axiomático em matemática.

A segunda crise nos fundamentos da matemática seguiu-se à criação do cálculo por Newton e Leibniz no final do século XVII⁷. Já vimos como os sucessores desses dois homens, embriagados pela potência e aplicabilidade do novo método, descuraram-se de examinar suficientemente a solidez da base sobre a qual o cálculo se assentava. Assim, em vez de demonstrações para justificar resultados, chegou-se ao ponto de usar resulta-

⁷ Os famosos paradoxos de Zenão (perto de 450 a.C.) podem constituir um prenúncio dessa crise.

dos para justificar demonstrações. Com o passar do tempo começaram a aparecer paradoxos e contradições em número crescente e uma crise séria nos fundamentos da matemática tornou-se patente. Percebeu-se cada vez mais que o edifício da análise estava sendo construído sobre a areia e, finalmente, no começo do século XIX, Cauchy deu os primeiros passos rumo à superação da crise, substituindo o vago método dos infinitésimos pelo preciso método dos limites. Com a subsequente aritmetização da análise, levada a efeito por Weierstrass e seus seguidores, entendeu-se que a segunda crise nos fundamentos da matemática tinha sido superada e que toda a estrutura da matemática tinha sido reabilitada e colocada sobre bases impecáveis. A origem e resolução dessa segunda crise nos fundamentos da matemática constitui o assunto da Seção 14-9.

A terceira crise nos fundamentos da matemática consubstanciou-se com rapidez impressionante em 1897 e, embora já se tenha passado quase um século, não foi resolvida ainda a contento de todos os envolvidos. A crise eclodiu com a descoberta de paradoxos ou antinomias nas bordas da teoria dos conjuntos de Cantor. Como os conceitos da teoria dos conjuntos permeiam tão grandemente a matemática, constituindo-se mesmo num de seus fundamentos, é óbvio que a descoberta de paradoxos na teoria dos conjuntos põe em dúvida a validade dos próprios alicerces da matemática.

Em 1897, o italiano Burali-Forti tornou público o primeiro paradoxo da teoria dos conjuntos. Da maneira como foi concebido e enunciado por Burali-Forti, o paradoxo envolve termos e ideias técnicas que escapam às nossas limitações materiais. Mas a essência do paradoxo pode ser dada de maneira informal num outro paradoxo semelhante descoberto por Cantor dois anos depois. Em sua teoria dos conjuntos Cantor havia logrado provar que, dado um número transfinito qualquer, sempre existe um número transfinito maior, de forma que, assim como não há um número natural máximo, também não há um número transfinito máximo. Consideremos então o conjunto cujos membros são todos os conjuntos possíveis. Seguramente nenhum conjunto pode ter mais membros do que o conjunto de todos os conjuntos. Mas se é assim, como pode haver um número transfinito maior que o número transfinito desse conjunto?

Enquanto os paradoxos de Burali-Forti e Cantor envolvem apenas resultados da teoria dos conjuntos, Bertrand Russell, em 1902, descobriu um paradoxo que depende apenas do próprio conceito de conjunto. Antes de descrever o paradoxo de Russell, notemos que os conjuntos se dividem em duas classes: a dos que são membros de si mesmos e a dos que não são membros de si mesmos. Assim, o conjunto de todas as ideias abstratas é também uma ideia abstrata, mas o conjunto de todos os homens não é um homem. Ademais, o conjunto de todos os conjuntos também é um conjunto, mas o conjunto de todas as estrelas não é uma estrela. Representemos por M o conjunto de todos os conjuntos que são membros de si próprios e por N o conjunto de todos os conjuntos que não são membros de si próprios. Perguntamos então se N é um membro de si próprio ou não. Se N é um membro de si próprio, então N é um membro de M e não de N e portanto N não é membro de si próprio. De outra parte, se N não é membro de si mesmo, então N é membro de N e não de M , ou seja, N é membro de si próprio. O paradoxo reside no fato de que ambos os casos levam a uma contradição.

Uma formulação mais compacta e menos palavrosa do paradoxo de Russell é a seguinte. Seja X um conjunto *qualquer*. Então, pela definição de N

$$(X \in N) \leftrightarrow (X \notin X).$$

Para o caso em que X é N tem-se então a contradição

$$(N \in N) \leftrightarrow (N \notin N).$$

Este último paradoxo foi comunicado por Russell a Frege logo depois que este havia concluído o último dos dois volumes de seu grande tratado sobre os fundamentos da aritmética. Frege registrou seus agradecimentos ao fim da obra por meio da sentença seguinte, notavelmente comedida mas patética: “Difícilmente um cientista pode enfrentar uma situação mais desagradável do que a de presenciar o abalo dos fundamentos de uma obra sua, logo depois de concluí-la. Pois uma carta do Sr. Bertrand Russell, exatamente quando este segundo volume estava prestes a ser concluído, colocou-me nessa situação...”. Assim terminava um trabalho de uma dezena ou mais de anos.

O paradoxo de Russell se popularizou em muitas versões. Uma delas, dada pelo próprio Russell em 1919, diz respeito aos apuros do barbeiro de uma pequena cidade que firmou a regra de fazer a barba de todas as pessoas da cidade, e somente delas, que não se barbeavam a si mesmas, e somente dessas. A natureza paradoxal dessa situação vem à tona quando tentamos responder a pergunta, “O barbeiro barbeia-se a si mesmo?” Se ele não se barbeia a si mesmo, então ele se enquadra em sua regra; e se ele se barbeia a si mesmo, então ele não se enquadra em sua regra.

Desde a descoberta das contradições mencionadas, encontraram-se muitos outros paradoxos dentro da teoria dos conjuntos de Cantor. Muitos desses paradoxos da teoria dos conjuntos guardam relação com paradoxos lógicos dos tempos antigos. Atribui-se a Eubúlides (séc. IV a.C.) a seguinte observação, “A afirmação que estou fazendo agora é falsa”. Se a afirmação de Eubúlides é verdadeira, então, pelo que ela diz, deve ser uma afirmação falsa. Por outro lado, se a afirmação de Eubúlides é falsa, segue-se então que ela deve ser verdadeira. Assim, a afirmação de Eubúlides não pode ser verdadeira nem falsa sem implicar uma contradição. Um paradoxo que pode ser mais antigo ainda (se sua designação for autêntica) é o paradoxo de Epiménedes. Consta que o filósofo cretense Epiménedes teria feito a seguinte afirmação: “Os cretenses são sempre mentirosos”. Uma análise simples revela que essa afirmação é auto-contraditória.

A existência de paradoxos na teoria dos conjuntos, como os que acabamos de descrever, indicam claramente que algo está errado. Desde a descoberta desses paradoxos muito já se escreveu sobre a questão, não faltando propostas de solução.

No que se refere à matemática, parece haver uma saída fácil à mão. Basta reconstruir a teoria dos conjuntos sobre uma base axiomática suficientemente restrita para eliminar as antinomias conhecidas. A primeira tentativa nesse sentido foi feita por Zermelo em 1908; seguiram-se aprimoramentos feitos por Fraenkel (1922, 1925), Skolem

(1922, 1929), von Neumann (1924, 1928), Bernays (1937-1948) e outros. Mas esse procedimento foi criticado por simplesmente evitar os paradoxos; certamente não explicava o porquê deles. Além do mais, esse procedimento não implicava nenhuma garantia de que outros tipos de paradoxos não pudessem aflorar no futuro.

Há outro procedimento que, aparentemente, tanto explica como evita os paradoxos conhecidos. Num exame atento, perceber-se-á que cada um dos paradoxos considerados até agora envolve um conjunto S e um membro m de S cuja definição depende de S . Uma definição dessa natureza se diz *impredicativa* e as definições impredicativas são, de certo modo, círculos viciosos. Consideremos, por exemplo, o paradoxo do barbeiro de Russell. Indiquemos o barbeiro por m e o conjunto dos membros de sua cidade por S . Então m é definido impredicativamente como “o membro de S que faz a barba de todos os membros, e apenas daqueles membros de S , que não se barbeiam a si mesmos”. A natureza circular dessa definição é evidente — a definição do barbeiro envolve os membros da cidade e o próprio barbeiro é um membro da cidade.

Poincaré entendia que a causa das antinomias eram as definições impredicativas e Russell expressou a mesma opinião em seu Princípio do Círculo Vicioso: *Nenhum conjunto S pode conter membros m que se definam apenas em termos de S ou membros m envolvendo ou pressupondo S* . Esse princípio importa numa restrição ao conceito de conjunto. Cantor havia tentado dar ao conceito de conjunto um significado muito amplo ao enunciar: *Por conjunto S entendemos uma coleção de objetos definidos e distintos m de nossa intuição ou de nosso pensamento; esses objetos m chamam-se elementos de S* . A teoria dos conjuntos de Cantor, erigida sobre um conceito de conjunto assim tão amplo, leva, como vimos, a contradições; mas, impondo-se à noção de conjunto o Princípio do Círculo Vicioso, a teoria resultante evita as antinomias conhecidas. A proibição de definições impredicativas parece ser, então, uma solução para os paradoxos conhecidos da teoria dos conjuntos. Há, porém, uma objeção séria a essa solução: há partes da matemática que envolvem definições impredicativas e que os matemáticos relutam em abandonar.

Um exemplo de definição impredicativa em matemática é a de supremo de um conjunto não vazio de números reais — o supremo de um conjunto dado é o menor de seus limites superiores. Há muitos exemplos semelhantes de definições impredicativas em matemática, embora muitas delas possam ser contornadas. Em 1918, Hermann Weyl empreendeu a tarefa de averiguar o quanto da análise poderia ser construído geneticamente a partir do sistema dos números naturais sem o uso de definições impredicativas. Embora ele tenha logrado construir uma parte considerável da análise, não conseguiu deduzir o importante teorema que garante a existência de supremo de todo conjunto não vazio e limitado superiormente de números reais.

Outro caminho tomado visando eliminar os paradoxos da teoria dos conjuntos foi o de procurar o problema na lógica. Com efeito, a descoberta de paradoxos na teoria geral dos conjuntos desencadeou investigações minuciosas nos fundamentos da lógica. É bastante intrigante a sugestão de que o meio de se sair das dificuldades dos paradoxos talvez seja a adoção de uma lógica trivalente. Por exemplo, no paradoxo de Russell focalizado, vimos que a afirmação “ N é membro de si mesmo” não pode ser nem verdadeira nem falsa. Nesse caso, então, uma terceira possibilidade poderia ser proveitosa.

Denotando o valor lógico de uma proposição verdadeira por V , de uma falsa por F e de uma terceira possibilidade, nem V e nem F , por $?$ (significando, talvez, *indecidível*), então a situação seria salva se pudéssemos classificar a afirmação simplesmente como $?$.

Três correntes filosóficas, ou escolas de pensamento, principais — o logicismo, o intuicionismo e o formalismo — se desenvolveram para investigar os fundamentos da matemática. É óbvio que qualquer filosofia moderna dos fundamentos da matemática deve, de uma maneira ou outra, enfrentar a crise atual. Na próxima seção focalizaremos cada uma dessas três escolas, salientando as propostas de cada uma com vistas às antinomias da teoria geral dos conjuntos.

15.8 *Filosofias da matemática*

Pode-se considerar uma filosofia como uma explanação que visa extrair alguma espécie de sentido da desordem natural de um conjunto de experiências. Por esse ponto de vista é possível falar-se em filosofia de quase tudo: uma filosofia da arte, da religião, da educação, da sociedade, da história, da ciência, da matemática e mesmo da própria filosofia. Uma filosofia é o mesmo que um processo de refinar e ordenar experiências e valores; busca relações entre coisas aparentemente díspares e localiza diferenças importantes entre coisas que normalmente não se distinguem; é a descrição de uma teoria sobre a natureza de algo. Em particular, uma filosofia da matemática é essencialmente o mesmo que uma tentativa de reconstrução em que se busca dar um certo sentido e uma certa ordem à massa caótica de conhecimentos matemáticos acumulados ao longo do tempo. Obviamente, uma filosofia é função do tempo e uma particular filosofia pode tornar-se superada ou pode ter que ser alterada à luz de experiências adicionais. Estamos preocupados aqui apenas com as filosofias contemporâneas da matemática — filosofias que levam em conta os avanços recentes bem como a crise atual da matemática.

Presentemente são três as filosofias principais da matemática, cada uma com um grupo considerável de seguidores e com uma bagagem volumosa de trabalhos produzidos. São conhecidas como escola logicista, cujas figuras principais são Russell e Whitehead; escola intuicionista, liderada por Brouwer; e escola formalista, cujo desenvolvimento se deve especialmente a Hilbert. Há, evidentemente, outras filosofias da matemática nos dias atuais, além dessas — algumas independentes e algumas que são simples mesclas das três principais —, mas elas ou não foram cultivadas em escala considerável ou não empreenderam uma reconstrução da matemática em grau equivalente ao daquelas mencionadas.

LOGICISMO: A tese do logicismo é que a matemática é um ramo da lógica. Assim, a lógica, em vez de ser apenas um instrumento da matemática, passa a ser considerada como a geradora da matemática. Todos os conceitos da matemática têm que ser formulados em termos de conceitos lógicos e todos os teoremas da matemática têm que ser desenvolvidos como teoremas da lógica; a distinção entre matemática e lógica passa a ser uma questão de conveniência prática.

A noção de lógica como uma ciência que abrange os princípios e ideias subjacentes a todas as outras ciências remonta pelo menos a Leibniz (1666). A efetiva redução de

conceitos matemáticos a conceitos lógicos foi uma tarefa de que se ocuparam Dedekind (1888) e Frege (1884-1903) e a enunciação de teoremas matemáticos por meio de um simbolismo lógico foi empreendida por Peano (1889-1908). Esses homens são, portanto, precursores do logicismo cuja expressão definitiva é a monumental obra *Principia mathematica* de Whitehead e Russell (1910-1913). Em sua magnificência e complexidade os *Principia mathematica* propõem-se a reduzir detalhadamente toda a matemática à lógica. Modificações e aprimoramentos ao programa foram oferecidos posteriormente por Wittgenstein (1922), Chwistek (1924-1925), Ramsey (1926), Langford (1927), Carnap (1931), Quine (1940) e outros.

A tese do logicismo surgiu naturalmente dos esforços no sentido de assentar os fundamentos da matemática num plano tão fundo quanto possível. Já vimos como do plano dos números reais esses fundamentos foram assentados no plano mais fundo dos números naturais e depois no da teoria dos conjuntos, mais fundo ainda. Como a teoria das classes é uma parte essencial da lógica, torna-se natural a ideia de reduzir a matemática à lógica. A tese logicista é, assim, um esforço de sintetização sugerido por uma importante tendência na história da aplicação do método axiomático.

Os *Principia mathematica* começam com “ideias primitivas” e “proposições primitivas”, correspondentes aos “conceitos primitivos” e “postulados” dos desenvolvimentos abstratos formais. Essas ideias e proposições primitivas não se sujeitam a interpretações, restringindo-se tão somente aos conceitos intuitivos da lógica; devem ser considerados, ou pelo menos aceitos, como descrições plausíveis ou hipóteses a respeito do mundo real. Em resumo, prevalece um ponto de vista concreto em vez de abstrato e, portanto, não se faz nenhuma tentativa de provar a consistência das proposições primitivas. O objetivo dos *Principia mathematica* é desenvolver os conceitos e teoremas matemáticos a partir dessas ideias e proposições primitivas, começando com o cálculo de proposições, passando pela teoria das classes e das relações, deduzindo o sistema dos números naturais e daí toda a matemática que se assenta nesse sistema. Nessa abordagem, os números naturais emergem com o caráter de unicidade que comumente se atribui a eles e não como *coisas quaisquer*, não necessariamente únicas, que satisfazem um certo conjunto de postulados abstratos.

Para evitar as contradições da teoria dos conjuntos, os *Principia mathematica* se valem da “teoria dos tipos”. Numa descrição talvez excessivamente simplificada, pode-se dizer que essa teoria estabelece uma hierarquia de níveis de elementos. Os elementos primários formam o tipo 0; as classes de elementos de tipo 0 formam o tipo 1; as classes de elementos do tipo 1 formam o tipo 2 e assim por diante. Ao aplicar a teoria dos tipos deve-se tomar como regra que todos os elementos de uma classe qualquer devem estar no mesmo tipo. A observância dessa regra evita definições impredicativas e, portanto, paradoxos na teoria dos conjuntos. Na apresentação original dos *Principia mathematica*, surgem hierarquias dentro de hierarquias, levando à chamada teoria “ramificada” dos tipos. A fim de obter as definições impredicativas necessárias para a construção da análise, Russell formulou o “axioma da redutibilidade”. O fato de não ser primitivo e o seu caráter arbitrário desencadearam uma avalanche de críticas. Daí para a frente, grande parte do trabalho de aprimoramento do programa logicista se concentrou em esforços para evitar o indesejável axioma.

Se o logicismo vingou ou não é uma questão de opinião. Embora alguns considerem o programa satisfatório, outros levantam muitas objeções a ele. Num ponto pelo menos a tese do logicismo pode ser questionada: é que o desenvolvimento sistemático da lógica (como o de qualquer estudo organizado) pressupõe ideias matemáticas em sua formulação, como a ideia fundamental de iteração que tem de ser usada, por exemplo, na descrição da teoria dos tipos ou a ideia de dedução a partir de premissas dadas.

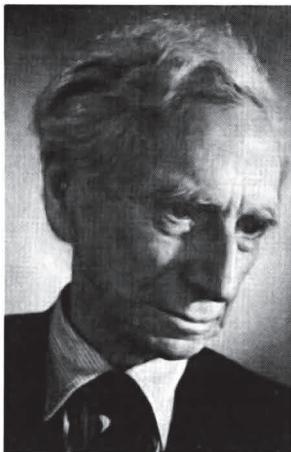
Alfred North Whitehead nasceu em Ramsgate, Inglaterra, em 1861, e estudou na Sherborne School e no Trinity College, Cambridge. Lecionou matemática no Trinity College de 1885 a 1911 e depois matemática aplicada e mecânica no University College da Universidade de Londres. Foi professor de matemática do Imperial College of Science and Technology da Universidade de Londres de 1914 a 1924, após o que foi para os Estados Unidos como professor de filosofia da Universidade de Harvard, função que exerceu até sua aposentadoria em 1936. Faleceu em Cambridge, Massachusetts, em 1947. Como o mais eminente de seus discípulos, Bertrand Russell, Whitehead concebia a filosofia de um ponto de vista matemático; os *Principia mathematica*, obra memorável, foram escritos pelos dois entre 1910 e 1913. Whitehead publicou muitos trabalhos notavelmente brilhantes, tanto em matemática como em física.

Bertrand Arthur William Russell, descendente de uma família aristocrática, nasceu perto de Trelleck, País de Gales, em 1872. Ganhador de uma bolsa de estudos pública no Trinity College, Cambridge, foi aluno de Whitehead e distinguiu-se notavelmente em matemática e filosofia. Além de lecionar amplamente em universidades americanas, escreveu mais de 40 livros, entre matemática, lógica, filosofia, sociologia e educação. Foi contemplado com muitos prêmios, como as medalhas Sylvester e De Morgan da Royal Society (1934), a Ordem do Mérito (1940) e o Prêmio Nobel de Literatura (1950). Suas atitudes corajosas e francas muitas vezes envolveram-no em controvérsias. Durante a Primeira Guerra Mundial foi desligado da Universidade de Cambridge e preso por quatro meses em virtude de seus pontos de vista pacifistas e por se opor à conscrição. Na década de 1960, liderou movimentos pacifistas pela proscricção de armas nucleares e também acabou preso, embora por pouco tempo. Homem de espírito e predicados extraordinários, faleceu em 1970, mentalmente lúcido e atento, aos 98 anos de idade.

INTUICIONISMO: A tese do intuicionismo é que a matemática tem de ser desenvolvida apenas por métodos construtivos finitos sobre a sequência dos números naturais, dada intuitivamente. Logo, por essa visão, a base última da matemática jaz sobre uma intuição primitiva, aliada, sem dúvida, ao nosso senso temporal de antes e depois, que nos permite conceber um objeto, depois mais um, depois outro mais e assim por diante indefinidamente. Dessa maneira obtêm-se sequências infindáveis, a mais conhecida das quais é a dos números naturais. A partir dessa base intuitiva (a sequência dos números naturais), a elaboração de qualquer outro objeto matemático deve ser feita necessariamente por processos construtivos, mediante um número finito de passos ou operações. Na tese intuicionista o desenvolvimento genético da matemática é levado a seus últimos extremos.

A escola intuicionista (como escola) nasceu por volta de 1908 com o matemático holandês L. E. J. Brouwer, embora algumas de suas ideias tenham sido prenunciadas por matemáticos como Kronecker (nos anos 1880) e Poincaré (1902-1906). A escola se

fortaleceu gradualmente com a passagem do tempo, ganhou a adesão de eminentes matemáticos da atualidade e exerceu influência enorme em todas as reflexões acerca dos fundamentos da matemática.



Bertrand Russell
(Coleção da Biblioteca Pública de Nova York)

Algumas das consequências da tese intuicionista são pouco menos que revolucionárias; assim, a insistência nos métodos construtivos levou a uma concepção de existência não compartilhada pelos matemáticos em geral. Para os intuicionistas, quando se trata de provar a existência de uma entidade é preciso que se mostre que ela é construtível em um número finito de passos; não basta mostrar que a suposição da não existência da entidade acarreta uma contradição. Isso significa que muitas demonstrações de existência que fazem parte da matemática corrente não são aceitas pelos intuicionistas.

Um exemplo importante da insistência dos intuicionistas nos procedimentos construtivos é a teoria dos conjuntos. Para eles um conjunto não pode ser imaginado como uma coleção acabada, mas sim através de uma lei pela qual os elementos do conjunto possam ser construídos passo a passo. Esse conceito de conjunto elimina a possibilidade de conjuntos contraditórios como “o conjunto de todos os conjuntos”.

Há outra consequência notável da insistência dos intuicionistas na construtibilidade finita, a saber, a negação da aceitação universal da lei do terceiro excluído. Consideremos, por exemplo, o número x assim definido: $x = (-1)^k$, se k é o número da primeira casa decimal em que começa pela primeira vez a sequência de dígitos 123456789 na expansão decimal de π e $x = 0$, se não existe k nessas condições. Assim, embora o número x esteja bem definido, não podemos no momento, sob as restrições intuicionistas, dizer se a proposição “ $x = 0$ ” é verdadeira ou falsa. Só se poderia concluir que essa proposição é verdadeira fazendo-se uma demonstração construtiva dela em um número finito de passos; e só se poderia concluir que ela é falsa construindo-se uma prova da

falsidade em um número finito de passos. Até que se estabeleça uma ou outra dessas demonstrações, a proposição não é verdadeira nem falsa e a lei do terceiro excluído é inaplicável. Fazendo-se porém a restrição de que k seja menor que 1 bilhão, por exemplo, então ela é verdadeira ou falsa pois, nesse caso, com um número finito de passos pode-se certamente estabelecer uma coisa ou outra.

Assim, para os intuicionistas, a lei do terceiro excluído vale para conjuntos finitos mas não deve ser empregada quando se lida com conjuntos infinitos. Brouwer responsabilizou o desenvolvimento sociológico da lógica por esse estado de coisas. As leis da lógica se formaram numa etapa do desenvolvimento do homem em que ele tinha uma boa linguagem para lidar com conjuntos finitos de fenômenos; mais tarde o homem cometeu o erro de aplicar essas leis a conjuntos infinitos da matemática, resultando assim no aparecimento de antinomias.

Nos *Principia mathematica*, a lei do terceiro excluído e a lei da contradição são equivalentes. Para os intuicionistas isso não se verifica e é uma questão interessante tentar construir, se possível, o arcabouço lógico ao qual as ideias intuicionistas nos levam. Isso foi feito em 1930 por A. Heyting, que logrou desenvolver uma lógica simbólica intuicionista. A matemática intuicionista produziu assim seu próprio tipo de lógica, e a lógica matemática, como consequência, é um ramo da matemática.

Há ainda a importante questão final: Quanto da matemática existente pode-se construir dentro das limitações intuicionistas? Se toda a matemática pudesse ser reconstruída, sem um grande acréscimo de trabalho, aparentemente estaria resolvida a crise atual. Mas, embora os intuicionistas tenham conseguido reconstruir partes amplas da matemática atual, inclusive a teoria do contínuo e a teoria dos conjuntos, há muito ainda por fazer. De modo que, até agora, a matemática intuicionista revelou-se menos produtiva que a matemática clássica e, em vários aspectos, muito mais complicada de desenvolver. Esse o defeito encontrado na abordagem intuicionista — o sacrifício de tanta coisa valiosa para a maioria dos matemáticos. Essa situação pode não ser eterna, pois resta a possibilidade de uma reconstrução intuicionista da matemática clássica levada a efeito de uma maneira diferente e cheia de êxito. Por enquanto, a despeito das objeções levantadas presentemente contra a tese intuicionista, geralmente há concordância de que seus métodos não levam a contradições.

Além de ser o líder e um advogado incansável da causa do intuicionismo, Brouwer deixou seu nome em outras áreas da matemática. Ele é considerado um dos fundadores da moderna topologia e é particularmente conhecido por seu *teorema do ponto fixo* e seu *teorema da invariância*. O primeiro garante que toda função contínua da bola fechada n -dimensional nela mesma tem pelo menos um ponto fixo e o segundo que a dimensionalidade de uma variedade numérica n -dimensional cartesiana é um invariante topológico.

Brouwer nasceu em 1881, dedicou a maior parte de sua vida profissional à Universidade de Amsterdam, e faleceu em 1966. Lutou impiedosamente por suas ideias. Como editor da revista *Mathematische Annalen*, encarregado de aceitar ou rejeitar artigos submetidos para publicação, abriu ataque contra o uso indiscriminado da *reductio ad absurdum*, recusando todos os artigos que aplicavam a lei do terceiro excluído em proposições cuja veracidade ou falsidade não podia ser decidida em um número finito de

passos. A crise se encerrou com a comissão editorial decidindo por sua renúncia coletiva. Só que depois todos se reelegeram, menos Brouwer. O governo holandês ficou tão indignado com essa afronta ao maior de seus matemáticos que resolveu criar uma revista rival, com Brouwer à testa.

Os quadros do intuicionismo se reforçaram consideravelmente quando Hermann Weyl se juntou a eles. Weyl nasceu em 1885 perto de Hamburgo. Aos 18 anos ingressou na Universidade de Göttingen, onde se tornou um dos alunos mais brilhantes de Hilbert. Permaneceu em Göttingen (afora uma estada de um ano em Munique) até 1913, quando passou a lecionar na Escola Politécnica de Zurique, tendo então conhecido Einstein. Em 1930 foi convidado para suceder Hilbert em Göttingen. Permaneceu em Göttingen apenas três anos, após os quais renunciou devido à demissão de muitos de seus colegas pelos nazistas. Em 1933 aceitou um convite para ser membro permanente do recém-fundado Instituto de Estudos Avançados de Princeton. Passou o resto de seus dias entre Princeton e Zurique, meio ano em cada um desses lugares. Morreu subitamente em 1955.

FORMALISMO: A tese do formalismo é que a matemática é, essencialmente, o estudo dos sistemas simbólicos formais. De fato, o formalismo considera a matemática como uma coleção de desenvolvimentos abstratos em que os termos são meros símbolos e as afirmações são apenas fórmulas envolvendo esses símbolos; a base mais funda da matemática não está plantada na lógica mas apenas numa coleção de sinais ou símbolos pré-lógicos e num conjunto de operações com esses sinais. Como, por esse ponto de vista, a matemática carece de conteúdo concreto e contém apenas elementos simbólicos ideais, a demonstração da consistência dos vários ramos da matemática constitui uma parte importante e necessária do programa formalista. Sem o acompanhamento dessa demonstração de consistência, todo o estudo perde fundamentalmente o sentido. Na tese formalista se tem o desenvolvimento axiomático da matemática levado ao seu extremo.

A escola formalista foi criada por David Hilbert posteriormente ao seu célebre estudo postulacional da geometria. Nesse estudo, consubstanciado no livro *Grundlagen der Geometrie* (1899), Hilbert aguçou o método matemático, levando-o da axiomática material dos tempos de Euclides à axiomática formal dos dias atuais. Só mais tarde, para enfrentar a crise causada pelos paradoxos da teoria dos conjuntos e o desafio à matemática clássica lançado pelos intuicionistas, Hilbert desenvolveu a visão formalista. Assim, embora em 1904 já falasse em termos formalistas, só depois de 1920 ele e seus colaboradores, Bernays, Ackermann, von Neumann e outros iniciaram seriamente o trabalho que redundou no que se conhece hoje por programa formalista.

O sucesso ou fracasso do programa de Hilbert para salvar a matemática clássica vincula-se à resolução do problema da consistência. Só demonstrações consistentes garantem a ausência de contradições, e as demonstrações antigas de consistência, baseadas em interpretações e modelos, simplesmente transferem a questão da consistência de um domínio da matemática para outro. Em outras palavras, a demonstração da consistência pelo método dos modelos é apenas relativa. Hilbert, então, concebeu uma abordagem direta nova para o problema da consistência. Em grande parte, assim como se pode provar, pelas regras de um jogo, que certa situação não pode ocorrer dentro desse jogo, Hilbert

esperava provar, mediante um conjunto conveniente de regras de procedimento para obtenção de fórmulas aceitáveis a partir de símbolos básicos, que nunca poderia ocorrer nenhuma fórmula contraditória. Uma fórmula contraditória, em notação lógica, é do tipo “ F e não F ”, onde F é alguma fórmula aceita do sistema. Podendo-se mostrar que nenhuma dessas fórmulas contraditórias é possível, então fica estabelecida a consistência do sistema.

O desenvolvimento das ideias precedentes, com vistas a um teste de consistência direto em matemática, constitui o estudo que Hilbert chamou de *teoria da demonstração*. Hilbert e Bernays planejaram dar uma exposição detalhada (com aplicações a toda a matemática clássica) da teoria da demonstração em *Grundlagen der Mathematik*, uma obra monumental, considerada como os “Principia mathematica” da escola formalista. Apesar de dificuldades científicas imprevistas, surgidas durante a redação, que não permitiram completar a teoria da demonstração, os *Grundlagen der Mathematik* acabaram sendo publicados em dois volumes (1934 e 1939). Para certos sistemas elementares, encontraram-se demonstrações de consistência, ilustrando o que Hilbert gostaria de fazer com toda a matemática. Mas, para a totalidade dos sistemas, o problema da consistência manteve-se refratário.

Aliás, o programa de Hilbert, pelo menos na forma original vislumbrada por ele, parecia desde logo fadado ao fracasso e isso foi posto em relevo por Kurt Gödel, em 1931, antes mesmo da publicação dos *Grundlagen*. Gödel provou, por métodos considerados válidos e irrepreensíveis pelos seguidores das três principais correntes filosóficas matemáticas, que é impossível provar a consistência de um sistema dedutivo formalizado como o de Hilbert, rico e suficiente para abarcar toda a matemática clássica, com os seus próprios princípios lógicos. Esse resultado notável é consequência de um outro mais fundamental ainda; Gödel provou que o sistema de Hilbert não é completo, isto é, ele demonstrou que no sistema existem problemas “indecidíveis”, sendo a consistência do sistema um deles. É muito difícil entrar nos detalhes técnicos desses teoremas de Gödel. Mas eles certamente estão entre os resultados mais notáveis da matemática e revelam limitações imprevistas nos métodos matemáticos formais. Eles mostram “que os sistemas formais conhecidos como adequados para a dedução de matemática são perigosos no sentido de que sua consistência não pode ser demonstrada por métodos finitistas formalizados, dentro do sistema, enquanto que os sistemas que se sabe serem seguros nesse sentido são inadequados”⁸.

David Hilbert nasceu em Königsberg em 1862 e recebeu seu Ph.D. da universidade local em 1885. Lecionou na Universidade de Königsberg, primeiro como Privatdozent

⁸ F. De Sua, “Consistency and completeness: a résumé”, *The American Mathematical Monthly*, nº 63, 1956, pp. 295-305. Encontramos aí, também, a seguinte observação interessante: “Suponhamos que se defina *religião* imprecisamente como uma disciplina qualquer cujos fundamentos se baseiam em um elemento da fé, não importando a presença de qualquer elemento de razão eventual. A mecânica quântica seria um exemplo de religião, por essa definição. A matemática ocuparia então a posição ímpar de ser o único ramo da teologia a possuir uma demonstração rigorosa do fato de que ela poderia ser classificada desse modo”. Ver também, Howard Eves e C. V. Newsom, *An Introduction to the Foundations and Fundamental Concepts of Mathematics*, ed. revisada. Nova York, Holt, Rinehart and Winston, 1965, Apêndice, Seção A-7.

(1886-1892) depois como professor titular (1893-1894). Em 1895 tornou-se professor da Universidade de Göttingen, onde permaneceu até sua aposentadoria em 1930. Faleceu em Göttingen em 1943.



David Hilbert
(Coleção David Smith)

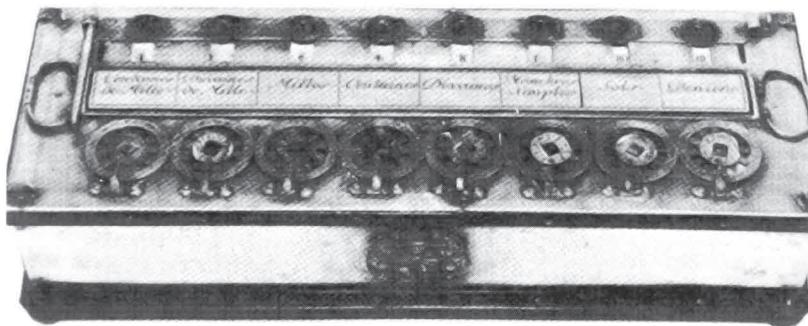
Hilbert foi um matemático excepcionalmente abrangente e talentoso, como o provam suas muitas e importantes contribuições a diversas áreas. Era comum pôr em ordem caprichosamente cada área da matemática por que passava, antes de voltar sua atenção para outra. Entre essas áreas figuram a teoria algébrica dos invariantes (1885-1892); a teoria dos números algébricos (1893-1899); os fundamentos da geometria, em que se iniciou seu trabalho em axiomática (1898-1899); o problema de Dirichlet e o cálculo de variações (1900-1905); equações integrais, incluindo a teoria espectral e o conceito de espaço de Hilbert (até 1912); seguiram-se contribuições em física-matemática à teoria cinética dos gases e teoria da relatividade; e, finalmente, suas investigações críticas dos fundamentos da matemática e da lógica matemática. Suas preleções estimulantes atraíam estudantes de todo o mundo. Era o dínamo da Universidade de Göttingen cuja cidade transformou, juntamente com uma plêiade de colegas brilhantes, na meca da matemática, situação que perdurou até os nefastos acontecimentos políticos da década de 1930. Hilbert recebeu muitas honrarias em vida. Em 1902 tornou-se editor da revista *Mathematische Annalen*. No Congresso Internacional de Matemática realizado em Paris em 1900 propôs 23 problemas abertos importantes, o que resultou em grande enriquecimento para a matemática com o trabalho subsequente para resolvê-los.

15.9 Computadores

Os progressos que redundaram nos espantosos e sofisticados computadores eletrônicos atuais, descendentes dos antigos instrumentos de cálculo mecânicos simples,

contam entre as façanhas matemáticas mais importantes do século XX. Particularmente revolucionária foi a ideia de uma máquina que além de operar com dados armazenasse um programa de instrução. Dedicaremos esta seção a uma breve história dos instrumentos de cálculo que culminaram nessa última maravilha.

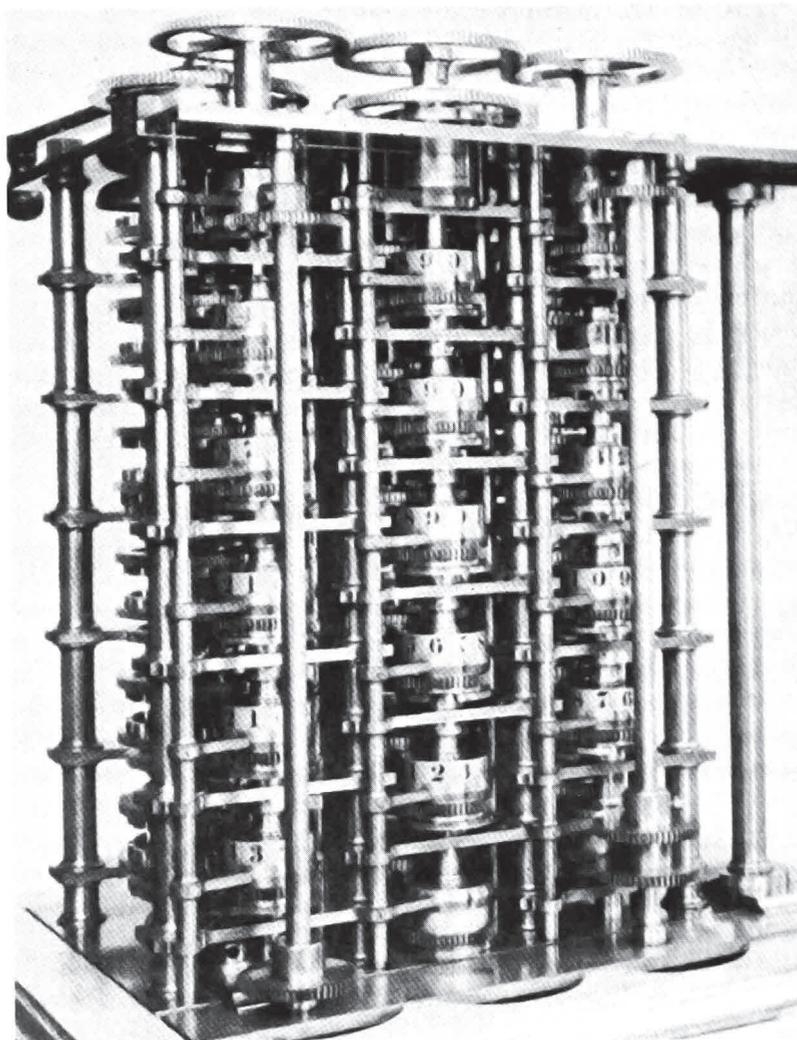
Excluído o instrumento computacional dado ao homem pela natureza, na forma de seus dez dedos (ainda em uso nas salas de aula) e o altamente eficiente e barato ábaco de origem remota (ainda em uso em muitas partes do mundo), considera-se que uma máquina de somar inventada por Blaise Pascal, em 1642, para assistir seu pai nos fatigantes cálculos que era obrigado rotineiramente a fazer como coletor regional de impostos de Rouen, seja o protótipo das atuais máquinas de calcular. Esse instrumento tinha condições de operar com números de até seis dígitos. Possuía uma sequência de mostradores, com os algarismos de 0 a 9 impressos em cada um, engrenados de maneira tal que quando um deles girava de 0 a 9, o da sua esquerda, que representava uma unidade decimal mais alta, girava de uma unidade. Com isso o processo de “transportar” da adição se efetuava mecanicamente. Pascal fabricou mais de 50 dessas máquinas, algumas das quais se acham preservadas no Conservatório de Artes e Ofícios de Paris. É interessante que se atribui também a Pascal a invenção do carrinho de mão de uma roda, na forma conhecida hoje.



Uma das máquinas aritméticas inventadas por Pascal em 1642

Na segunda metade do século, o alemão Leibniz (1671) e o inglês Sir Samuel Morland (1673) inventaram máquinas que multiplicavam. Houve muitas outras tentativas no mesmo sentido, mas essas máquinas quase sempre se revelaram lentas e muito pouco práticas. Em 1820, Thomas de Colmar, embora não conhecesse bem o trabalho de Leibniz, transformou o tipo de máquina deste último num outro, capaz de subtrair e dividir. Sua invenção constituiu-se no protótipo de quase todas as máquinas comerciais construídas antes de 1875 e de muitas outras desde então. Em 1875, o americano Frank Stephen Baldwin registrou a patente da primeira máquina de calcular capaz de efetuar as quatro operações fundamentais sem a necessidade de readaptações. Em 1878, o suco Willgodt Theophile Odhner patenteou nos Estados Unidos uma máquina muito semelhante à projetada por Baldwin. As calculadoras de mesa elétricas da primeira

metade do século XX, como as de Friden, Marchant e Monroe, não diferiam, essencialmente, quanto à sua construção, da máquina de Baldwin.



Parte da máquina diferencial de Babbage

Por volta de 1812, o matemático inglês Charles Babbage (1792-1871) começou a cogitar da construção de uma máquina para ajudar no cálculo de tábuas matemáticas. A fim de dedicar todas as suas energias a esse projeto, renunciou à cátedra lucasiana de Cambridge. Em 1823, depois de investir e perder sua fortuna pessoal nessa aventura, conseguiu auxílio financeiro do governo britânico e pôs-se a construir sua *máquina diferencial* que deveria ser capaz de trabalhar com 26 algarismos significativos e calcular e imprimir diferenças sucessivas até as de ordem seis. Mas o trabalho de Babbage não

correu satisfatoriamente e dez anos depois o auxílio governamental foi cortado. Logo em seguida Babbage abandonou sua máquina diferencial e começou a trabalhar num engenho mais ambicioso, projetado para executar de maneira completamente automática uma série de operações aritméticas prescritas de início por um operador. A *máquina analítica*, como Babbage a chamou, também não chegou a ficar pronta, em grande parte devido à carência de componentes tecnológicos de precisão.



Charles Babbage
(Coleção David Smith)

O primeiro descendente direto da máquina analítica de Babbage foi o enorme *IBM Automatic Sequence Controlled Calculator* (o ASCC), construído em convênio entre a Universidade de Harvard e a International Business Machines Corporation (IBM), sob contrato com o Departamento Naval dos Estados Unidos. Concluído em Harvard em 1944, o ASCC media cerca de 15 metros de comprimento por 2,5 metros de altura, tinha nada menos que 750 000 componentes, ligados por aproximadamente 80 400 metros de fio e pesava cerca de cinco toneladas. Um segundo modelo, aperfeiçoado, do ASCC começou a operar em 1948 no Campo de Provas da Marinha em Dahlgren, Virgínia. Na mesma linha de descendência figura o *Electronic Numerical Integrator and Computer* (o ENIAC), um computador eletrônico com múltiplas finalidades, concluído em 1945 na Universidade de Pennsylvania sob contrato com o Laboratório de Pesquisas Balísticas do Campo de Provas do Exército em Aberdeen, Maryland. Essa máquina requeria um compartimento de aproximadamente 9m x 15m, continha 19 000 válvulas e pesava cerca de 30 toneladas; encontra-se hoje, como peça de museu, no Smithsonian Institution, em Washington, D.C. Esses espantosos computadores de alta velocidade, juntamente com projetos semelhantes, como o *Selective Sequence Electronic Calculator* (SSEC) da IBM, o *Electronic Discrete Variable Calculator* (EDVAC) da Universidade da Pennsylvania, o MANIAC do Instituto de Estudos Avançados de Princeton, o *Universal Automatic Computer* (UNIVAC) do Bureau

of Standards e os vários *analísadores diferenciais*, prenunciavam máquinas de desempenho ainda mais fantástico. A cada poucos anos, uma nova geração de máquinas parece eclipsar por completo em velocidade, confiabilidade e memória a precedente. A tabela seguinte, com dados comparativos sobre o cálculo de π com computadores eletrônicos, ilustra bem o crescimento da velocidade dos computadores entre 1949 e 1961.

<i>Autor</i>	<i>Computador</i>	<i>Data</i>	<i>Casas Decimais</i>	<i>Tempo</i>
Reitwiesner	ENIAC	1949	2037	70 h
Nicholson e Jeenel	NORC	1954	3089	13 min
Felton	Pegasus	1958	10 000	33 h
Genuys	IBM 704	1958	10 000	100 min
Genuys	IBM 704	1959	16 167	4,3 h
Shanks e Wrench	IBM 7090	1961	100 265	8,7 h

Ultimamente o crescimento da velocidade computacional tem sido espantoso, bastando citar que D. H. Bailey, em 1986, com um supercomputador Cray-2, fez a aproximação de π com nada menos que 29 360 000 casas decimais em 28 horas. Além disso, os computadores se tornaram cada vez mais leves e compactos. Esses dois últimos aspectos se devem ao progresso traduzido na substituição das válvulas pelos transistores e destes pelos microchips.

Os primeiros computadores, em sua grande maioria, tinham propósitos militares, mas hoje eles são projetados para atender também as empresas, a administração pública, o setor de engenharia e muitas outras atividades. De objetos de luxo transformaram-se em requisitos essenciais ao desenvolvimento. Devido a eles a análise numérica recebeu um impulso extraordinário nos últimos tempos, transformando-se numa área de importância cada vez maior. As escolas de nível médio cada vez mais oferecem cursos de introdução à computação em laboratórios próprios equipados de microcomputadores. Os departamentos de matemática das universidades ou se dividem com a criação de departamentos de computação ou se transformam em departamentos mistos, de matemática e ciência da computação. O sonho de Babbage tornou-se realidade.

Infelizmente, há um sentimento crescente, não só entre o povo em geral, mas também entre os jovens estudantes de matemática, de que doravante todo problema de matemática se resolverá através de um computador eletrônico suficientemente sofisticado e de que toda a matemática se norteia pelo computador. Os professores de matemática devem combater essa doença, a “computadorite”, e frisar que as máquinas são apenas calculadores extremamente rápidos e eficientes mas de valor insuperável apenas quando se trata de problemas que envolvem cálculos ou enumerações muito extensos.

Não obstante, na sua área de aplicabilidade as máquinas têm alcançado vitórias matemáticas notáveis. Haja vista os resultados recentes sobre números amigáveis e perfeitos descritos na Seção 3-3 e aqueles sobre números primos mencionados na Seção 14-13, todos eles praticamente impossíveis de obter sem a assistência do computador. Essas máquinas mostraram-se valiosas não só em certas partes da teoria dos números, mas também em outras áreas, como a teoria dos grupos, as geometrias finitas e a matemática recreativa. Nesta última área, por exemplo, em 1958, Dana S. Scott programou o MANIAC para procurar todas as soluções do problema consistindo em juntar um conjunto completo de 12 *pentaminós*⁹ de modo a formar um quadrado oito por oito com um quadrado vazio dois por dois no meio. Depois de operar por cerca de 3,5 horas, a máquina forneceu uma lista completa de 36 soluções distintas e tais que nenhuma delas resultava de uma outra por rotações e reflexões. De forma análoga, também se conseguiu com um computador a enumeração e a construção dos 880 quadrados mágicos normais distintos de ordem quatro e não é difícil programar o problema correspondente para quadrados mágicos normais de ordem cinco, ou maior.

Um triunfo matemático retumbante dos computadores foi a resolução, em 1976, do famoso problema das quatro cores da topologia; a secular conjectura afirmava que é possível pintar qualquer mapa plano ou sobre a superfície de uma esfera sem que se usem mais do que quatro cores. Desde sua formulação, por volta de 1850, gastara-se uma soma enorme de esforços visando comprová-la ou comprovar sua negação. E embora se tivessem obtido muitos resultados parciais ou paralelos, a questão central resistia firme. Até que no verão de 1976, Kenneth Appel e Wolfgang Haken, da Universidade de Illinois, anunciaram a comprovação da conjectura por via computacional, mediante uma análise extremamente complicada. Basta dizer que a demonstração contém várias centenas de páginas de detalhes complexos e consumiu mais de mil horas de cálculos computacionais. O método da demonstração envolve o exame de 1936 configurações redutíveis, cada uma envolvendo, por sua vez, o estudo de até meio milhão de opções lógicas para verificar a redutibilidade. Esta última fase do trabalho consumiu seis meses, completando-se finalmente em junho de 1976. A verificação final ocupou a maior parte do mês de julho e em 26 de julho de 1976 chegava ao *Bulletin of the American Mathematical Society* a comunicação dos resultados.

A solução de Appel-Haken é inquestionavelmente um feito gigantesco. Mas uma solução baseada numa análise computadorizada de quase 2000 casos, envolvendo um montante da ordem de um bilhão de opções lógicas, não agradou ao senso estético, pelo menos, de muitos matemáticos. Certamente em pé de igualdade com a resolução de um problema está a própria elegância da solução. Ademais, embora no ano seguinte, 1977, F. Allaire tivesse dado uma solução computadorizada consideravelmente menos complexa, a existência e a possível necessidade desse tipo de tratamento matemático suscitou questões filosóficas sobre o que vem a ser uma *demonstração* de um teorema matemático.

Muito úteis para os estudantes, homens de negócio e engenheiros são as calculadoras portáteis, hoje disponíveis por menos de \$10 e a cada ano mais sofisticadas. O primeiro

9 Um pentaminó é um arranjo plano de cinco quadrados unitários unidos ao longo de seus lados.

modelo dessas calculadoras foi introduzido no mercado pela Bowmar Instrument Corporation em 1971; media aproximadamente 8 cm por 13 cm e custava \$249. Em um ano e meio, cerca de uma dúzia de empresas estavam comerciando calculadoras portáteis. A concorrência acirrada fez os preços baixarem para \$100 e, em um ano mais, para \$50. Em 1974 as vendas anuais dessas calculadoras atingiram US\$10 milhões. Com novos desenhos e baterias, propiciando calculadoras cada vez menores e mais estreitas, semelhantes a cartões de crédito, e com a queda crescente de preços, elas figuram entre os produtos de maior consumo no mundo, com vendas anuais da ordem de bilhões de dólares. Esse pequenos engenhos podem operar com números de cerca de oito algarismos, possuem memória, efetuam instantaneamente operações aritméticas e, também, no caso de alguns modelos, cálculos trigonométricos. Seu uso escolar, do nível médio ao superior, em disciplinas como trigonometria e cálculo, vem crescendo amplamente. Em 1988, quando da convenção pelo centenário da American Mathematical Society, foi lançada a HP 28 S (ao preço de US\$235). Ela faz gráficos de funções, diferencia, determina integrais definidas e indefinidas, manipula funções algébricas, resolve equações e sistemas lineares, opera com números complexos e vetores assim como opera com os números reais e, com sua memória de 16K, executa programas razoavelmente sofisticados.

Nenhuma discussão sobre os modernos computadores estaria completa sem uma breve menção, pelo menos, ao grande matemático húngaro John von Neumann, responsável maior pela entrada em operação do primeiro computador plenamente eletrônico e pelo conceito de armazenamento de programas nos computadores digitais. Devem-se a ele investigações sobre o cérebro humano e a lógica que se mostraram de grande valia para o sucesso de suas pesquisas em computação.

Von Neumann nasceu em Budapeste em 1903 e desde muito cedo revelou-se um prodígio científico. Doutorou-se em Budapeste em 1926, imigrou para os Estados Unidos em 1930 e em 1933, desfrutando já de reputação internacional por suas contribuições à teoria dos operadores, à teoria quântica e à teoria dos jogos, tornou-se membro permanente do Instituto de Estudos Avançados de Princeton. Seu trabalho foi notavelmente corajoso e original e exerceu muita influência na determinação do rumo de grande parte da matemática do século XX. Durante a Segunda Guerra Mundial engajou-se no serviço científico e administrativo, colaborando em projetos relacionados com a bomba atômica, a bomba de hidrogênio e a previsão a longo prazo do tempo. Morreu de câncer em 1957.

15.10 A matemática moderna e o grupo Bourbaki

Duas das características principais da matemática do século XX, a ênfase na abstração e a preocupação crescente com a análise das estruturas e modelos subjacentes, chamaram a atenção, em meados do século, dos interessados em ensino da matemática. Vários destes entenderam que seria oportuno adaptar tais características ao ensino e, não demorou, formaram-se grupos competentes e entusiastas empenhados em reformular e “modernizar” a matemática escolar. Nascia a *matemática moderna*.

Como, em geral, se podem expressar as ideias abstratas da matemática de maneira mais clara e concisa em termos da notação e dos conceitos da teoria dos conjuntos e como esta é, reconhecidamente, um dos fundamentos da matemática, compreende-se por que a matemática moderna se inicia com uma introdução elementar à teoria dos conjuntos e prossegue com uma utilização persistente de suas notações e ideias. A matemática moderna também enfatiza, conforme características do século XX, as estruturas matemáticas subjacentes. Assim, na álgebra elementar, passa-se a dar muito mais atenção do que antes às leis básicas da álgebra (comutativa, associativa, distributiva e outras) que irão constituir as diversas estruturas algébricas. Como ocorre frequentemente com as ideias novas, houve uma tendência entre os mais arrebatados a aplicar os princípios da nova abordagem mesmo a situações em que não ajudavam a simplificar ou tornar mais claras as coisas, levando certos pedagogos a expressar a preocupação de que com o empenho em enfatizar o *porquê* em matemática havia-se passado para trás o *como*. Parece não haver dúvida, contudo, de que, com uma utilização mais sensata, as ideias básicas da matemática moderna poderão permanecer.

Desde 1939 vem aparecendo na França uma série de obras matemáticas da mais alta abrangência, supostamente de autoria de Nicolas Bourbaki, refletindo propositadamente e acentuadamente as tendências da matemática no século XX. O nome Bourbaki começou a aparecer em algumas notas e artigos publicados nos *Comptes rendus* da Academia de Ciências da França e em outros veículos. Depois disso começaram a aparecer os diversos volumes do grande tratado de Nicolas Bourbaki. O propósito dessa série de obras foi explicado num artigo que, numa tradução inglesa, apareceu em 1950 no *The American Mathematical Monthly* com o título de “The architecture of mathematics”. Em nota de rodapé se lê: “O professor N. Bourbaki, ex-membro da Academia Real Poldaviana, atualmente residindo em Nancy, França, é o autor do abrangente tratado de matemática moderna, com publicação em andamento, intitulado *Éléments de Mathématique* (Herman et Cie, Paris, 1939-), do qual dez volumes já apareceram até agora”. Até 1970 já haviam sido publicados mais de 30 volumes.

Nicolas Bourbaki, cujo nome é grego, mas a nacionalidade é francesa, coloca-se entre os matemáticos mais influentes deste século. Seus trabalhos são muito lidos e muito citados. Conta com adeptos entusiasmados mas não lhe faltam críticos severos. E, o que é mais curioso, não existe.

Nicolas Bourbaki é, na verdade, um pseudônimo usado por um grupo de matemáticos. Embora os membros dessa organização não tenham de fazer nenhum juramento de segredo, a maioria se compraz com uma certa aura de mistério que paira sobre eles. Não obstante, a maioria dos matemáticos acaba por saber quem são eles (pelo menos em parte), embora não oficialmente. Acredita-se que entre os membros originais figuravam C. Chevalley, J. Delsarte, J. Dieudonné e A. Weil. A composição do grupo é variável, tendo chegado a ter até 20 matemáticos. A única norma é que não há normas, salvo o jubramento compulsório dos membros aos 50 anos de idade. O trabalho do grupo se baseia na crença metafísica não demonstrável de que para cada questão matemática há, entre as muitas maneiras de lidar com ela, uma que é a melhor, ou ótima.

Embora os fundadores do grupo Bourbaki tenham, propositadamente, mantido em segredo a origem do nome que adotaram, há algumas versões que ajudam a entender a escolha. O general Charles Denis Sauter Bourbaki, uma figura pitoresca, ganhou certa fama na Guerra Franco-Prussiana. Em 1862, quando tinha 46 anos de idade, foi-lhe oferecido o trono da Grécia, que rejeitou. Depois de campanha militar desastrosa em 1871, foi forçado a recuar até a Suíça, onde se asilou e tentou o suicídio. Tudo indica que sua tentativa de suicídio falhou, pois ele viveu até a propecta idade de 83 anos. Consta que há uma estátua em homenagem ao general em Nancy, França, e essa pode ser a ligação entre ele e o posterior grupo de matemáticos. De fato, vários membros do grupo, numa ou noutra ocasião, tiveram vínculos com a Universidade de Nancy. Essa explicação deixa em aberto a questão da origem do “Nicolas” do nome.

Há outra versão baseada na história de que, por volta de 1930, os calouros da Escola Normal Superior, onde estudaram tantos matemáticos franceses, tiveram de assistir a uma aula de um visitante ilustre chamado Nicolas Bourbaki que, na realidade, era apenas um ator amador disfarçado ou talvez um calouro bastante hábil em tornar aparentemente plausível uma fala matemática confusa e de duplo sentido.

Segundo a concepção bourbakiana, ou pelo menos a de Jean Dieudonné, a matemática atual é como uma bola formada de muitos fios emaranhados (ver Figura 123) de maneira tal que aqueles que estão no centro reagem entre si firme e imprevisivelmente. Nesse emaranhado há fios, ou pontas de fios, que saem em várias direções e que não têm nenhuma conexão íntima com nada do que está dentro. O método bourbakiano corta todos esses fios livres e se concentra no apertado núcleo da bola de onde tudo o mais se desembaraça. O núcleo apertado contém as estruturas básicas e os processos ou instrumentos fundamentais da matemática — ou seja, as partes da matemática que gradualmente passaram do nível de artifícios ao de métodos com um grau considerável de solidez. É apenas essa parte da matemática que N. Bourbaki tenta arranjar logicamente e moldar numa teoria coerente e fácil de aplicar. Segue-se então que, propositadamente, o grupo Bourbaki deixa para fora de seus territórios grande parte da matemática.

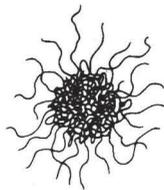


Figura 123

15.11 *A árvore da matemática*

Era comum, alguns anos atrás, desenhar-se a matemática com a forma de uma árvore, em geral um carvalho. Nas raízes da árvore havia etiquetas com dizeres como *álgebra*,

geometria, trigonometria, geometria analítica e números irracionais. Das raízes erguia-se o robusto tronco onde estava gravado *cálculo*. Sobre o tronco finalmente a copa formada de numerosos galhos subdivididos em ramos menores. Esses galhos recebiam designações como *variáveis complexas, variáveis reais, cálculo de variações, probabilidades* e assim por diante, passando pelos vários ramos da matemática.

O propósito da árvore da matemática não era apenas o de chamar a atenção para como a matemática se desenvolveu historicamente, mas também para a trilha que o estudante deveria seguir para internar-se no seu estudo. Assim, no primeiro e no segundo graus, e talvez no primeiro ano de faculdade, o estudante deveria ver apenas as matérias fundamentais que constituem as raízes da matemática. Logo depois, mas ainda no começo do curso superior, seria a vez de dominar cuidadosamente o cálculo, através de um curso deveras consistente. Feito isso, o estudante poderia escolher os galhos avançados que mais lhe interessassem para ir complementando sua formação.

O princípio pedagógico simbolizado na árvore da matemática provavelmente tem fundamento, pois se baseia na famosa lei enunciada vigorosamente pelos biólogos nos termos: “A ontogenia recapitula a filogenia”, cujo significado, em geral, é “O indivíduo repete o desenvolvimento do grupo”. Grosso modo, o estudante aprende tanto melhor um assunto quanto mais de perto o ensino desse assunto acompanhar seu desenvolvimento histórico. Como exemplo específico consideremos a geometria. A geometria mais antiga, que se originou de simples observações provenientes da capacidade humana de reconhecer configurações físicas e comparar formas e tamanhos, pode ser chamada de *geometria subconsciente*. Veio depois a *geometria científica* ou *experimental*, característica de uma fase em que a inteligência humana tornara-se capaz de, a partir de um conjunto de relações geométricas concretas, extrair relações abstratas gerais (leis geométricas) que incluíam as anteriores como casos particulares. Nos capítulos iniciais vimos como o grosso da geometria pré-helênica tinha caráter experimental. Mais tarde, precisamente no período grego, a geometria evoluiu para um estágio mais elevado, tornando-se a *geometria demonstrativa*. Pelo princípio pedagógico em consideração, o primeiro contato das crianças pequenas com a geometria deveria ser então em sua forma subconsciente, provavelmente através de trabalhos artísticos e observações simples da natureza. Então, algum tempo depois, essa base subconsciente deveria ter sequência com a geometria científica, em que os alunos induzem uma soma considerável de fatos geométricos experimentalmente, com o uso de régua sem escala e compasso, régua com escala e transferidor e tesoura e cola. Mais tarde ainda, quando o estudante estiver suficientemente amadurecido, aí sim seria a ocasião de pô-lo em contato com a geometria demonstrativa, ou dedutiva, podendo-se então destacar as vantagens e desvantagens do processo indutivo anterior.

Assim, não temos nenhum motivo de queixa com relação ao princípio pedagógico defendido pela árvore da matemática. Mas o que diz afinal essa árvore? Ela acaso representa razoavelmente o panorama verdadeiro da matemática moderna? Pensamos que não. Uma árvore da matemática é obviamente função do tempo. O carvalho que descrevemos ao início da seção certamente não poderia ter sido, por exemplo, a árvore da matemática correspondente ao grande período alexandrino. O carvalho representa razoavelmente bem a situação da matemática no século XVIII e uma boa parte do século

XIX, pois nesse período as metas principais da matemática eram o desenvolvimento, a extensão e as aplicações do cálculo. Mas, com o enorme crescimento da matemática no século XX, a imagem geral da matemática como um carvalho já não se sustenta. Talvez não fosse exagero dizer que hoje a maior parte da matemática tem pouca ou nenhuma ligação com o cálculo e seus desdobramentos. Basta considerar as vastas áreas cobertas pela álgebra abstrata, a matemática finita, a teoria dos conjuntos, a combinatória, a lógica matemática, a axiomática, a teoria dos números não analítica, os estudos postulacionais da geometria, as geometrias finitas e vários outros assuntos.

Devemos redesenhar a árvore da matemática, se ela não representa a matemática de hoje. Felizmente há uma árvore que serve de representação ideal: a bânica ou figueira-brava-de-bengala. A bânica tem muitos troncos que nascem continuamente. É que nos galhos da bânica desenvolvem-se filamentos que atingem o chão, deitam raízes e, com o passar dos anos, tornam-se mais espessos e fortes, transformando-se por sua vez em novos troncos com muitos galhos que vão produzir filamentos que atingirão o chão.

Há algumas bânias com muitas dezenas de troncos, abarcando áreas equivalentes a quarteirões. Como o carvalho, a bânica é muito bonita e duradoura; diz-se que a bânica em que Buda se encostava para meditar ainda está viva. A bânica é, então, uma árvore que representa mais condignamente a matemática de hoje. No futuro, novos troncos se desenvolverão, ao passo que outros poderão se atrofiar ou até morrer. Estudantes diferentes poderão escolher troncos diferentes para subir, cada um estudando primeiro os fundamentos cobertos pelas raízes do tronco escolhido. Todos esses troncos, obviamente, se comunicam pelo alto através do intrincado sistema de galhos da árvore. O tronco do cálculo ainda está vivo e ativo mas há também, por exemplo, o tronco da álgebra linear, o da lógica matemática e outros.

A matemática se ampliou tanto que alguém atualmente pode se tornar um matemático muito produtivo mal conhecendo o cálculo e seus desdobramentos. Nós que ensinamos matemática hoje nas faculdades, ao fazer com que todos os nossos alunos subam na árvore da matemática pelo tronco do cálculo, talvez estejamos desservindo a alguns deles. Pois, a despeito do grande fascínio e da beleza do cálculo, ele não é a “menina dos olhos” de todos os estudantes. Forçando *todos* os estudantes a subirem pelo tronco do cálculo, talvez estejamos destruindo talentos potenciais para outras áreas. Em resumo, talvez seja tempo de reestruturar o ensino da matemática de modo a ajustá-lo à árvore da matemática que reflete melhor o desenvolvimento histórico recente de nossa ciência.

15.12 E doravante?

Nenhuma bola de cristal seria capaz de revelar as linhas futuras do desenvolvimento da matemática, nem tampouco parece sensato, em vista do insucesso de tentativas do passado, arriscar predições a respeito do assunto. A história nos dá conta de áreas da matemática bastante ativas em determinados momentos que, subitamente, se apagaram e de outras que pareciam exauridas mas que, de repente, voltaram a produzir com abundância. Isso sem falar na criação de campos novos e totalmente imprevistos como,

por exemplo, as recentes teorias das categorias, dos fractais e das catástrofes. Quem, no começo do século, poderia prever o progresso fantástico recente na área das calculadoras e dos computadores eletrônicos?

Não obstante, parece haver uns poucos pontos sobre os quais talvez se possa prognosticar com alguma segurança. Senão vejamos:

1. O tremendo e incrível desenvolvimento da computação eletrônica no século XX deverá prosseguir no futuro por algum tempo, levando a uma velocidade nos cálculos e a aplicações difíceis de imaginar hoje.

2. Tendo finalmente ganho emancipação no campo da matemática, as mulheres deverão ocupar espaços cada vez mais amplos e importantes nesse campo¹⁰.

3. A linha divisória entre a matemática pura e a matemática aplicada deverá se enevoar cada vez mais. Por outro lado, como assinalou certa feita G. H. Hardy, a matemática pura é a verdadeira matemática aplicada, pois o que realmente importa em matemática é a técnica e esta se adquire em matemática pura. Aliás, como ilustra bem a aplicação da teoria das secções cônicas dos gregos antigos à mecânica celeste, a matemática toda é matemática aplicada — a aplicação é, às vezes, uma questão de tempo.

E os matemáticos, o que pensam do futuro de sua ciência? A maioria entende que o poço da matemática é infinitamente profundo e que se poderá continuar sorvendo dele sem limites. Que a matemática tira sua seiva do suprimento frequente de problemas não resolvidos. Que os matemáticos jamais deixarão de tentar resolver esses problemas e que é dos esforços nesse sentido que a matemática se desenvolve e se renova. Como observou uma vez Julian Lowell Coolidge, uma das coisas bonitas da matemática é que nunca se resolve um de seus problemas sem que se criem outros.

Por outro lado, nem todos os matemáticos compartilharam ou compartilham dessa visão otimista. Muitos têm expressado seu receio de que o poço da matemática esteja secando, haja vista as palavras “a matemática está começando a declinar”, transmitidas pelo criativo Lagrange a d’Alembert. E presentemente não são poucos os que acham que esse encaminhamento cada vez maior da matemática no sentido da abstração pode representar o seu canto do cisne.

Há uma preocupação ainda mais sombria para com o futuro da matemática. Há os que entendem que ela está se tornando um monstro, um Frankenstein que ao fim dará cabo de si mesmo. A matemática tem um papel primordial na era nuclear que vivemos. Ela é uma das grandes responsáveis pelo desenvolvimento da bomba atômica e de outros artefatos destrutivos e parece ser uma verdade axiomática que toda matemática que *pode* ser usada para fins destrutivos *será* usada para esses fins. Corrobora essas preocupações a famosa carta-depoimento de Norbert Wiener, escrita depois do decisivo lançamento das bombas atômicas sobre Hiroshima e Nagasaki, na qual ele censura o hábito dos matemáticos de partilhar livremente seus conhecimentos e suas descobertas.

¹⁰ Edna E. Kramer, no capítulo final de seu excelente livro *The Nature and Growth of Modern Mathematics*, defende muito bem esse prognóstico.

tas, e os problemas de consciência de Einstein e outros em torno do papel da matemática em certos aspectos do programa nuclear. Mais recentemente, na reunião conjunta da American Mathematical Society e da Mathematical Association of America realizada em San Antonio, em janeiro de 1987, um grupo de matemáticos exortou seus colegas a se recusarem a participar do programa da “guerra nas estrelas”.

Um número crescente de matemáticos sente que há hoje duas áreas antagônicas na matemática, uma digna de confiança e a outra não, e eles, por motivos de consciência, tentam situar suas pesquisas claramente na primeira. Preocupam-se esses matemáticos com questões como: Pode-se esperar para o futuro migrações em massa de matemáticos, como aquela verificada nos tempos antigos, a partir da Universidade de Alexandria, nos dias tumultuados da desintegração do Império Egípcio ou como modernamente, a partir da Alemanha, durante os dias de repressão nazista? Caminha o mundo para outra Idade Média, mas desta vez de âmbito global, em virtude de uma guerra nuclear ou da poluição nuclear? O atual estado das relações entre matemáticos e militares é moralmente defensável?

Esperemos que predominem os frutos sadios, que a matemática continue a florescer indefinidamente e que, parafraseando Carl Gustav Jacobi, ela continue a honrar a inteligência e o espírito humanos.

Exercícios

15.1 Suposições tácitas feitas por Euclides

Leia com atenção (por exemplo, em *The Thirteen Books of Euclid's Elements* de T. L. Heath) os enunciados e demonstrações das Proposições I 1, I 16 e I 21 e mostre que:

(a) Na Proposição I 1 Euclides assumiu tacitamente que duas circunferências que têm um raio comum e centros nas extremidades desses raios se interceptam.

(b) Na Proposição I 16 Euclides assumiu tacitamente a infinitude das retas.

(c) Na Proposição I 21 Euclides assumiu que se uma reta entra num triângulo por um vértice, então ela, se prolongada suficientemente, deve interceptar o lado oposto.

15.2 Três paradoxos geométricos

Se numa dedução se adota tacitamente uma suposição que envolve conceitos errados, pode-se não só chegar a uma proposição que não é consequência do sistema dedutivo, como também a alguma que contrarie proposições do sistema, previamente demonstradas. Em face disso, faça um estudo crítico dos 3 paradoxos geométricos seguintes:

(a) *Provar que todo triângulo é isósceles.*

Seja ABC um triângulo qualquer (ver Figura 124). Trace a bissetriz do $\angle C$ e a mediatriz do lado AB . Do ponto de intersecção E , trace as perpendiculares EF e EG a AC e BC , respectivamente, e trace ainda EA e EB . Os triângulos retângulos CFE e CGE são congruentes porque a hipotenusa CE é comum e $\angle FCE = \angle GCE$; portanto, $CF = CG$. Também são congruentes os triângulos retângulos EFA e EGB , porque o cateto EF do primeiro é igual ao cateto EG do outro (estando E na bissetriz do ângulo C , equidista dos lados desse ângulo) e a hipotenusa EA do primeiro é igual à hipotenusa EB do outro (estando E na mediatriz de AB , equidista das extremidades desse segmento); portanto $FA = GB$. Segue-se então que $CF + FA = CG + GB = CB$, ou $CA = CB$, e o triângulo é isósceles.

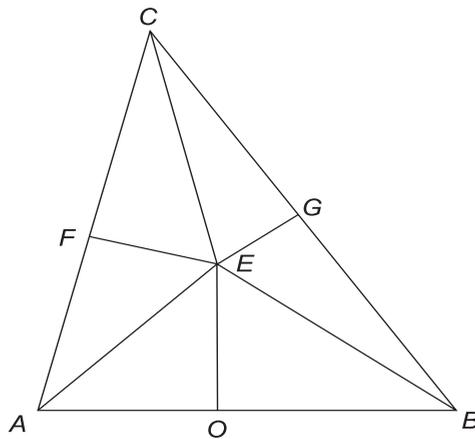


Figura 124

(b) *Provar que um ângulo reto é igual a um ângulo obtuso.*

Seja $ABCD$ um retângulo qualquer (ver Figura 125). Trace um segmento BE de comprimento igual a BC , e portanto a AD , fora do retângulo. Trace as mediatrizes de DE e AB ; como elas são perpendiculares a retas não paralelas, devem se interceptar num ponto P . Trace AP , BP , DP , EP . Então $PA = PB$ e $PD = PE$ (todo ponto da mediatriz de um segmento equidista de suas extremidades). Também, por construção, $AD = BE$. Os triângulos APD e BPE são então congruentes pois os três lados de um são respectivamente iguais aos três lados do outro. Daí, $\angle DAP = \angle EBP$. Mas $\angle BAP = \angle ABP$, pois se trata dos ângulos da base do triângulo isósceles APB . Por subtração segue-se que ângulo reto $DAG =$ ângulo obtuso EBA .

(c) *Provar que há duas perpendiculares por um ponto a uma reta.*

Considere duas circunferências quaisquer que se interceptam em A e B (ver Figura 126). Trace os diâmetros AC e AD e sejam M e N as intersecções de CD com as respectivas circunferências. Então os ângulos AMC e AND são retos, porque inscritos num semicírculo. Donde, AM e AN são duas perpendiculares a CD .

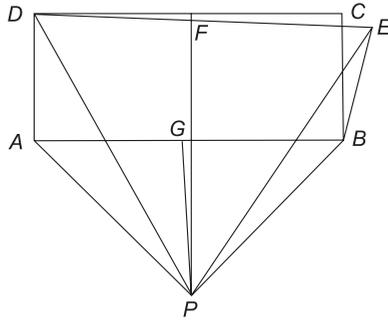


Figura 125

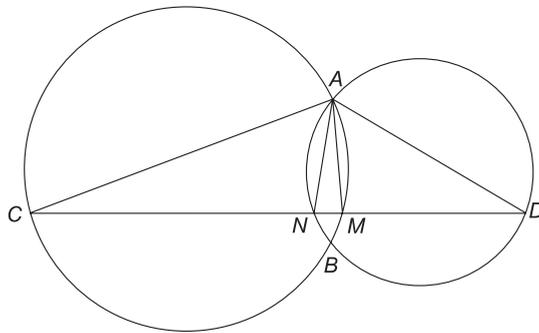


Figura 126

15.3 O postulado da continuidade de Dedekind

Para garantir a existência de certos pontos de intersecção (de reta e circunferência) Richard Dedekind (1831-1916) introduziu na geometria o seguinte postulado de continuidade: *Se os pontos de uma reta se dividem em duas classes tais que todos os pontos da primeira estão à esquerda de todos os pontos da segunda, então existe um, e um só, ponto que realiza essa divisão de todos os pontos em duas classes, isto é, que separa a reta em duas partes.*

(a) Complete com os detalhes necessários a demonstração esboçada abaixo do teorema: *O segmento de reta que une um ponto A interior a um círculo com um ponto B fora desse círculo, tem um ponto comum com a circunferência do círculo.*

Sejam O o centro e r o raio do círculo dado (ver Figura 127) e seja C o pé da perpendicular baixada de O sobre a reta determinada por A e B . Podem-se dividir os pontos do segmento AB em duas classes: a dos pontos P tais que $OP < r$ e a dos pontos Q tais que $OQ \geq r$. Pode-se mostrar que, em todos os casos, $CP < CQ$; logo, pelo postulado

de Dedekind, existe um ponto R de AB tal que todos os pontos que o precedem pertençam a uma classe e aqueles que o seguem estão na outra classe. Então OR não é menor que r , pois do contrário se poderia escolher S em AB , entre R e B , de modo que $RS < r - OR$. Mas, uma vez que $OS < OR + RS$, seguir-se-ia o absurdo $OS < r$. Analogamente, prova-se que OR não pode ser maior que r . Donde $OR = r$, o que encerra a demonstração.

(b) Como se deveria estender o postulado de Dedekind de modo a abranger ângulos?

(c) Como se deveria estender o postulado de Dedekind de modo a abranger arcos de circunferência?

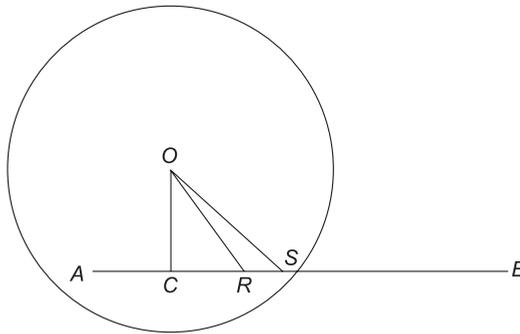


Figura 127

15.4 Uma interpretação com coordenadas de alguns postulados de Euclides

Reformulemos, por conveniência, os três primeiros postulados de Euclides nos termos seguintes:

1. *Dois pontos distintos quaisquer determinam uma reta.*
2. *Uma reta é ilimitada.*
3. *Para todo par de pontos distintos existe uma circunferência que tem centro num deles e passa pelo outro.*

Mostre que os postulados de Euclides, conforme reformulação anterior, se verificam quando se restringem os pontos do plano àqueles cujas coordenadas em relação a um sistema cartesiano retangular fixo são números racionais. Mostre, porém, que com essas restrições uma circunferência e uma reta pelo seu centro não se interceptam necessariamente.

15.5 Uma interpretação esférica dos postulados de Euclides

Mostre que os postulados de Euclides (conforme reformulação feita em 15.4) se verificam quando se interpreta o plano como a superfície de uma esfera, as retas como circunferências máximas e os pontos como pontos da superfície esférica. Mostre, porém, que nesse caso valem os seguintes resultados.

- (a) Não existem retas paralelas.
- (b) Todas as perpendiculares a uma reta, erguidas em um de seus lados, se interceptam num ponto.
- (c) Podem-se ter duas retas distintas unindo o mesmo par de pontos.
- (d) A soma dos ângulos de um triângulo supera 2 ângulos retos.
- (e) Existem triângulos que se compõem de 3 ângulos retos.
- (f) O ângulo externo a um triângulo pode não ser maior que um dos dois internos não adjacentes a ele.
- (g) A soma dos dois lados de um triângulo pode ser menor que o terceiro lado.
- (h) Num triângulo com dois ângulos iguais os lados opostos a eles podem não ser iguais.
- (i) O maior lado de um triângulo não se opõe necessariamente ao maior ângulo.

15.6 O postulado de Pasch

Em 1882, Moritz Pasch formulou o seguinte postulado: *Sejam A, B, C três pontos não alinhados e seja m uma reta que está no plano desses pontos mas não passa por nenhum deles. Então, se m passa por um ponto do segmento AB, ela passa também por um ponto do segmento BC ou por um ponto do segmento AC.* Esse postulado é um dos que os geométricos modernos chamam de *postulados de ordem* e que servem para dar a ideia de “entre”.

- (a) Prove, como consequência do Postulado de Pasch, que *se uma reta entra num triângulo por um vértice, então ela corta o lado oposto.*
- (b) Mostre que o Postulado de Pasch não se verifica para um triângulo esférico cortado por uma circunferência máxima.

15.7 Um sistema matemático abstrato

Considere um conjunto K de elementos não definidos, que serão denotados por letras minúsculas, e seja R uma relação binária sobre K . Se um elemento a de K está relacionado com um elemento b de K através de R , isso será indicado por $R(a, b)$. Assumamos os seguintes 4 postulados relativos aos elementos de K e à relação R :

P1: Se a e b são 2 elementos de K e a é distinto de b , então se tem $R(a, b)$ ou $R(b, a)$.

P2: Se a e b são 2 elementos de K tais que $R(a, b)$, então a e b são elementos distintos.

P3: Se a, b, c são 3 elementos quaisquer de K tais que $R(a, b)$ e $R(b, c)$, então $R(a, c)$. (Em outras palavras R é transitiva.)

P4: K consiste em exatamente 4 elementos distintos.

Deduz os 7 teoremas seguintes a partir dos 4 postulados precedentes:

T1: Sempre que se tem $R(a, b)$, então não se tem $R(b, a)$. (Em outras palavras, R não é uma relação simétrica.)

T2: Sempre que se tem $R(a, b)$, então se tem $R(a, c)$ ou $R(c, b)$, para todo c de K .

T3: Existe pelo menos 1 elemento de K que não está R -relacionado com nenhum elemento de K . (Este é um teorema de existência.)

T4: Existe no máximo 1 elemento de K que não está R -relacionado com nenhum elemento de K . (Este é um teorema de unicidade.)

Definição 1: Sempre que se tem $R(b, a)$, diz-se que vale $D(a, b)$.

T5: Sempre que se tem $D(a, b)$ e $D(b, c)$, então se tem também $D(a, c)$.

Definição 2: Sempre que se tem $R(a, b)$ e não há nenhum elemento c para o qual se verifique $R(a, c)$ e $R(c, b)$, então se diz que vale $F(a, b)$.

T6: Sempre que se tem $F(a, c)$ e $F(b, c)$, então a é igual a b .

T7: Sempre que se tem $F(a, b)$ e $F(b, c)$, então não se tem $F(a, c)$.

Definição 3: Sempre que se tem $F(a, b)$ e $F(b, c)$, então se diz que vale $G(a, c)$.

15.8 Axiomática

(a) Estabeleça a consistência do conjunto de postulados do Exercício 15.7 por meio de cada uma das seguintes interpretações:

1. Seja informado de um homem, seu pai, o pai de seu pai, e o pai de seu pai de seu pai e seja R definida por “ $R(a, b)$ se, e somente se, a é antepassado de b ”.

2. Seja informado de 4 pontos distintos de uma reta horizontal e seja R definida por “ $R(a, b)$ se, e somente se, a está à esquerda de b ”.

3. Seja K formado pelos quatro inteiros 1,2,3,4 e seja R definida por “ $R(a, b)$ se, e somente se, $a < b$ ”.

Os postulados desse conjunto caracterizam uma *relação sequencial entre quatro elementos*. Qualquer relação R que satisfaça esses postulados se diz *relação sequencial*; diz-se também que os elementos de K informam uma *sequência*. As interpretações

sugeridas proporcionam 3 aplicações do ramo abstrato da matemática desenvolvido no Exercício 15.7.

(b) Enuncie os teoremas e definições do Exercício 15.7 para cada uma das interpretações de (a).

(c) Estabeleça a independência do conjunto de postulados do Exercício 15.7 por meio das quatro interpretações parciais seguintes:

1. Seja K formado de 2 irmãos, seu pai e o pai de seu pai e seja R definida por “ $R(a, b)$ se, e somente se, a é antepassado de b ”. Esse modelo garante a independência do Postulado P1.

2. Seja K formado dos quatro inteiros 1,2,3,4 e seja R definida por “ $R(a, b)$ se, e somente se, $a \leq b$ ”. Esse modelo garante a independência do Postulado P2.

3. Seja K formado dos quatro inteiros 1,2,3,4 e seja R definida por “ $R(a, b)$ se, e somente se, $a \neq b$ ”. Esse modelo garante a independência do Postulado P3.

4. Seja K formado dos cinco inteiros 1,2,3,4,5 e seja R definida por “ $R(a, b)$ se, e somente se, $a < b$ ”. Esse modelo garante a independência do Postulado P4.

(d) Mostre que P1, T1, P3, P4 constituem um conjunto de postulados equivalente ao conjunto P1, P2, P3, P4.

15.9 Proposições com hipóteses associadas

(a) Prove a proposição: *Se um triângulo é isósceles, então as bissetrizes dos ângulos de sua base são iguais.*

(b) Enuncie a *recíproca* da proposição (a). (Esta recíproca, que é meio penosa de demonstrar, tornou-se conhecida como *problema de Steiner-Lehmus*.)

(c) Enuncie a *contrária* da proposição (a).

(d) Se uma proposição do tipo *Se A , então B* é verdadeira, sua recíproca é necessariamente verdadeira? E sua contrária?

(e) Mostre que se uma proposição do tipo *Se A , então B* e sua contrária são verdadeiras, então a recíproca da proposição original também é verdadeira.

(f) Enuncie as proposições que devem ser verdadeiras se A é uma condição necessária para B ; uma condição suficiente para B ; uma condição necessária e suficiente para B . (Se A é necessária e suficiente para B , diz-se que A é um *critério* para B .)

15.10 Intuição versus demonstração

Responda às seguintes questões intuitivamente e depois teste as respostas através de cálculos:

(a) Um carro vai de P a Q à velocidade de 40 milhas por hora e depois retorna de Q a P à velocidade de 60 milhas por hora. Qual é a velocidade média do percurso completo?

(b) A pode fazer certo trabalho em 4 dias e B pode fazer o mesmo trabalho em 6 dias. Quanto tempo gastarão A e B para fazer esse trabalho juntos?

(c) Um homem vende metade de suas maçãs à razão de 17 centavos cada 3 maçãs e a outra metade à razão de 17 centavos cada 5 maçãs. A que razão deveria vender todas as suas maçãs para obter o mesmo lucro?

(d) Se um novelo de linha de 4 polegadas de diâmetro custa 20 centavos, quanto custaria um novelo da mesma linha mas de 6 polegadas de diâmetro?

(e) Há duas propostas de emprego, ambas com salário inicial de \$6000 por ano e com salário máximo de \$12 000 por ano. Uma delas oferece um aumento anual de \$800 e a outra um aumento semestral de \$200. Qual é a mais compensadora?

(f) Cada bactéria de uma certa cultura divide-se em duas uma vez por minuto. Se ao fim de uma hora verifica-se a presença de 20 milhões de bactérias, depois de quanto tempo eram 10 milhões as bactérias da cultura?

(g) Um salário de 1 centavo de dólar na primeira metade de mês de trabalho, 2 centavos na segunda metade de mês, 4 centavos na terceira metade de mês, 8 centavos na quarta metade de mês e assim por diante até se esgotar o ano, é um bom ou mau salário anual?

(h) Um relógio gasta 5 segundos com suas batidas para marcar 6 horas. Quanto gastará para marcar meio-dia?

(i) Uma garrafa e uma rolha custam juntas \$1.10 (um dólar e dez centavos de dólar). Se a garrafa sozinha custa um dólar mais que a rolha, quanto custa a rolha?

(j) Suponha que num frasco haja uma certa quantidade de um líquido A e num segundo frasco uma quantidade igual de um outro líquido B . Tira-se uma colherada do líquido A do primeiro frasco e põe-se no segundo frasco; a seguir tira-se uma colherada da mistura do segundo frasco e põe-se no primeiro frasco. Com isso há mais ou menos líquido A no segundo frasco do que líquido B no primeiro frasco?

(k) Considere uma tira de papel bastante grande, de largura igual a um milésimo de polegada. Corta-se essa tira ao meio e juntam-se as duas partes, uma sobre a outra. Corta-se o conjunto obtido ao meio e forma-se uma pilha com as quatro peças resultantes. Prosseguindo com esse processo até a quinquagésima vez, a pilha de papel final terá altura maior ou menor que uma milha?

(l) O desconto de 15% no preço de venda de um artigo é o mesmo que um desconto de 10% no preço de venda, seguido de um desconto de 5% no preço reduzido?

(m) Quatro quartas partes excedem três quartas partes de que número fracionário?

(n) Um menino quer calcular a média aritmética de suas 8 notas. Ele calcula a média aritmética das 4 primeiras, depois a média aritmética das outras e por fim a média aritmética das duas médias já obtidas. Esse procedimento é correto?

15.11 Um sistema matemático minúsculo

Considere o seguinte conjunto de postulados:

P1: Todo abba é uma coleção de dabbas.

P2: Existem pelo menos dois dabbas.

P3: Se p e q são dois dabbas, então existe um, e um só, abba que contém p e q .

P4: Se L é um abba, então existe um dabba que não está em L .

P5: Se L é um abba, e p é um dabba que não está em L , então existe um, e um só, abba que contém p e não contém nenhum dabba de L .

- (a) Quais são os conceitos primitivos desse conjunto de postulados?
- (b) Mostre que esse conjunto de postulados é absolutamente consistente.
- (c) Prove que os Postulados P3 e P5 são independentes.
- (d) Demonstre o seguinte conjunto de teoremas a partir do conjunto de postulados dado:

1. *Todo dabba pertence a pelo menos 2 abbas.*
2. *Todo abba contém pelo menos 2 dabbas.*
3. *Existem pelo menos 4 dabbas distintos.*
4. *Existem pelo menos 6 abbas distintos.*

15.12 Um conjunto de afirmações inconsistente

Se p, q, r representam proposições, mostre que o conjunto das 4 afirmações seguintes é inconsistente:

1. Se q é verdadeira, então r é falsa.
2. Se q é falsa, então p é verdadeira.
3. r é verdadeira.
4. p é falsa.

15.13 Um conjunto de postulados relacionados com a Teoria da Relatividade

Seja S um conjunto de elementos e seja F uma relação binária sobre S . Suponhamos que se verifiquem os seguintes postulados:

P1: Se a e b são elementos de S e se $b F a$, então $\sim(a F b)$. (Aqui $b F a$ significa que o elemento b está F -relacionado com o elemento a e $\sim(a F b)$ que a não está F -relacionado com b .)

P2: Se a é um elemento de S , então existe pelo menos um elemento b de S tal que $b F a$.

P3: Se a é um elemento de S , então existe pelo menos um elemento b de S tal que $a F b$.

P4: Se a, b, c são elementos de S tais que $b F a$ e $c F b$, então $c F a$.

P5: Se a e b são elementos de S tais que $b F a$, então existe pelo menos um elemento c de S tal que $c F a$ e $b F c$.

(a) Mostre que a afirmação, “Se a é um elemento de S , então existe pelo menos 1 elemento b de S , distinto de a , tal que $\sim(b F a)$ e $\sim(a F b)$ ”, é consistente com o conjunto de postulados dado. (O conjunto de postulados considerado, acrescido da afirmação anterior, foi usado na teoria da relatividade através da interpretação em que os elementos de S são *instantes de tempo* e a relação F significa “segue”).

(b) Reescreva os postulados e a afirmação acima em termos da interpretação mencionada em (a).

15.14 Abelhas e colmeias

Considere o seguinte conjunto de postulados, no qual *abelha* e *colmeia* são conceitos primitivos.

P1: Toda colmeia é uma coleção de abelhas.

P2: Duas colmeias distintas quaisquer têm uma, e uma só, abelha em comum.

P3: Toda abelha pertence a duas, e apenas duas, colmeias.

P4: Existem exatamente quatro colmeias.

(a) Mostre que esse conjunto de postulados é absolutamente consistente.

(b) Mostre que os Postulados P2, P3 e P4 são independentes.

(c) Demonstre os seguintes teoremas, a partir do conjunto de postulados dado:

T1: Existem exatamente 6 abelhas.

T2: Existem exatamente três abelhas em cada colmeia.

T3: Para cada abelha, existe exatamente uma outra abelha, numa outra colmeia que não a sua.

15.15 Espaços métricos

Em 1906, Maurice Fréchet introduziu o conceito de *espaço métrico*. Um *espaço métrico* consiste em um conjunto M de elementos, chamados *pontos*, e uma função d , chamada *métrica*, que associa a cada par de pontos x e y de M um número real $d(x, y)$, de maneira tal que se verifiquem os 4 postulados seguintes:

M1: $d(x, y) \geq 0$.

M2: $d(x, y) = 0$ se, e somente se, $x = y$.

M3: $d(x, y) = d(y, x)$.

M4: $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$, onde x, y, z são três pontos quaisquer de M , não necessariamente distintos entre si. (Este postulado é conhecido como *desigualdade triangular*.)

(a) Mostre que o conjunto M dos números reais x , junto com a função d definida por $d(x_1, x_2) = |x_1 - x_2|$, constituem um espaço métrico.

(b) Mostre que o conjunto M de todos os pares ordenados $p = (x, y)$ de números reais, junto com a função d definida por

$$d(p_1, p_2) = [(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2]^{1/2},$$

onde $p_1 = (x_1, y_1)$ e $p_2 = (x_2, y_2)$, constituem um espaço métrico.

(c) Mostre que o conjunto M de todos os pares $p = (x, y)$ de números reais, junto com a função d definida por

$$d(p_1, p_2) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|,$$

onde $p_1 = (x_1, y_1)$ e $p_2 = (x_2, y_2)$, constituem um espaço métrico. (Com um gráfico num plano cartesiano logo se perceberá por que às vezes se dá a esse espaço o nome de *espaço dos táxis*.)

(d) Mostre que o conjunto M de todos os pares $p = (x, y)$ de números reais, junto com a função d definida por

$$d(p_1, p_2) = \max(|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|),$$

onde $p_1 = (x_1, y_1)$ e $p_2 = (x_2, y_2)$, constituem um espaço métrico.

(e) Mostre que os Postulados *M1*, *M3* e *M4* de um espaço métrico podem ser substituídos pelo postulado único *M1'*: $d(x, y) \leq d(y, z) + d(z, x)$, onde x, y, z são três pontos quaisquer de M , não necessariamente distintos entre si.

(f) Mostre que um conjunto M qualquer pode ser transformado num espaço métrico através da função d definida por $d(x, y) = 1$, se $x \neq y$ e $d(x, y) = 0$, se $x = y$.

(g) Mostre que se d é uma métrica sobre um conjunto M , então também são métricas sobre M as funções d_1, d_2, d_3 relacionadas com d da seguinte maneira:

1. $d_1(x, y) = kd(x, y)$, onde k é um número real positivo.

2. $d_2(x, y) = [d(x, y)]^{1/2}$.

3. $d_3(x, y) = d(x, y) / [1 + d(x, y)]$. Mostre que, neste caso, a *distância* $d_3(x, y)$ entre dois pontos quaisquer é sempre menor que 1.

(h) Seja c um ponto de um espaço métrico e seja r um número real positivo. A esfera de centro c e raio r é, por definição, o conjunto de todos os pontos x de M tais que $d(c, x) = r$. Descreva cartesianamente as formas das esferas nos espaços métricos de (a), (b), (c) e (d).

15.16 Segmentos equipotentes

(a) Para indicar que um extremo A (ou B) de um segmento de reta AB está ou não sendo considerado elemento do segmento, usaremos colchete ou parêntese, respectivamente, junto à letra A (ou B). Levando em conta essa notação, prove os segmentos $[AB]$, (AB) , $[AB)$, $(AB]$, considerados como conjuntos de pontos, são equipotentes entre si.

(b) Mostre que o conjunto dos pontos de um segmento finito e o conjunto dos pontos de um segmento infinito são equipotentes.

15.17 Alguns conjuntos enumeráveis e não enumeráveis

(a) Prove que a união de um número finito de conjuntos enumeráveis é enumerável.

(b) Prove que a união de um número enumerável de conjuntos enumeráveis é enumerável.

(c) Mostre que o conjunto dos números irracionais não é enumerável.

(d) Mostre que o conjunto dos números transcendententes não é enumerável.

15.18 Polinômios de altura 1, 2, 3, 4 e 5

(a) Mostre que 1 é o único polinômio de altura 1.

(b) Mostre que x e 2 são os únicos polinômios de altura 2.

(c) Mostre que x^2 , $2x$, $x + 1$, $x - 1$ e 3 são os únicos polinômios de altura 3 e que eles fornecem os três números algébricos 0, 1, -1 .

(d) Construa todos os polinômios possíveis de altura 4 e mostre que os únicos números algébricos reais novos com que eles contribuem são -2 , $-1/2$, $1/2$, 2.

(e) Mostre que os polinômios de altura 5 contribuem com mais 12 números algébricos reais.

15.19 A medida de um conjunto enumerável de pontos

(a) Complete com os detalhes a seguinte demonstração de que o conjunto de pontos de um segmento de reta AB não é enumerável:

Suponha AB unitário e que os pontos de AB formassem um conjunto enumerável. Então os pontos de AB constituiriam uma sequência $\{P_1, P_2, P_3, \dots\}$. Circunde o ponto P_1 com um intervalo de amplitude $1/10$, o ponto P_2 com um intervalo de amplitude $1/10^2$, o ponto P_3 com um intervalo de amplitude $1/10^3$ e assim por diante. Segue-se que a sequência dos intervalos tomados (alguns dos quais eventualmente se sobrepõem) recobre o segmento unitário AB . Mas a soma das amplitudes desses intervalos é

$$1/10 + 1/10^2 + 1/10^3 + \dots = 1/9 < 1.$$

(b) Tomando os subintervalos de (a) com amplitudes $\varepsilon/10, \varepsilon/10^2, \varepsilon/10^3, \dots$, onde ε é um número positivo arbitrariamente pequeno, mostre que se pode recobrir um conjunto enumerável de pontos com uma sequência de intervalos cuja soma das amplitudes é arbitrariamente pequena. (Segundo a terminologia da teoria da medida, um conjunto enumerável de pontos tem *medida zero*.)

15.20 Números transfinitos e teoria da dimensão

Seja E_1 o conjunto dos pontos do segmento $(0,1]$ e seja E_2 o conjunto dos pontos do quadrado unitário $0 < x, y \leq 1$. Pode-se expressar um ponto Z de E_1 por uma fração decimal infinita $z = 0, z_1 z_2 z_3 \dots$ situada entre 0 e 1, e um ponto P de E_2 por um par ordenado de frações decimais infinitas

$$(x = 0, x_1 x_2 x_3 \dots; y = 0, y_1 y_2 y_3 \dots),$$

cada uma delas entre 0 e 1. Vamos supor que nessas representações decimais cada um dos z_i, x_i, y_i denote ou um algarismo não nulo ou um algarismo não nulo precedido de um possível bloco de zeros. Por exemplo, se $z = 0,73028007\dots$, então $z_1 = 7, z_2 = 3, z_3 = 02, z_4 = 8, z_5 = 007, \dots$. Mostre que se pode estabelecer uma correspondência biunívoca entre os pontos de E_1 e os de E_2 , associando a cada ponto $0, z_1 z_2 z_3 \dots$ de E_1 o ponto

$$(0, z_1 z_3 z_5 \dots; 0, z_2 z_4 z_6 \dots)$$

de E_2 e a cada ponto

$$(0, x_1 x_2 x_3 \dots; 0, y_1 y_2 y_3 \dots)$$

de E_2 o ponto $0, x_1 y_1 x_2 y_2 x_3 y_3 \dots$ de E_1 . Mostre assim que o número transfinito do conjunto dos pontos de um quadrado unitário é c . (Isso mostra que não se pode distinguir a dimensão de uma variedade pelo número transfinito do conjunto subjacente.)

15.21 Circunferências e retas

(a) Mostre que se uma das coordenadas ao menos do centro de uma circunferência é irracional, então não há mais do que dois pontos na circunferência de coordenadas racionais.

(b) Mostre que se uma das coordenadas ao menos do centro de uma circunferência é transcendente, então não há mais do que dois pontos na circunferência de coordenadas algébricas.

(c) Existe a possibilidade de uma reta ou uma circunferência de um plano cartesiano não conter senão pontos de coordenadas racionais? E coordenadas algébricas apenas?

(d) Mostre que qualquer conjunto infinito de intervalos de uma reta, mutuamente disjuntos, é enumerável.

(e) Mostre que qualquer conjunto infinito de círculos de um plano, mutuamente disjuntos, é enumerável.

15.22 Superfícies homeomorfas

Duas superfícies se dizem *homeomorfas* ou *topologicamente equivalentes* se é possível passar de uma para outra por um processo consistindo em esticar, contrair, torcer (sem rasgar ou colar) e fazer cortes, se assim se desejar, desde que nesse caso se rejuntem as bordas de cada um de maneira a não deixar alterações.

(a) Dado um conjunto de 26 letras de nosso alfabeto (em forma de macarrão de sopa, por exemplo), distribua seus elementos em classes topologicamente equivalentes.

(b) Mostre que quando se substituem as arestas de um tetraedro regular por pedaços de arame, produz-se uma superfície topologicamente equivalente a uma superfície esférica com três asas de xícaras de chá presas a ela.

(c) Explique a observação jocosa: “Um topólogo não é capaz de distinguir uma rosca de uma xícara de café”.

15.23 Lados e arestas

(a) Torcendo-se de 180° uma tira de papel e colando-se as pontas, obtém-se uma superfície chamada *faixa de Möbius*. Mostre que a faixa de Möbius tem apenas uma face e apenas uma aresta sem nós.

(b) Construa uma superfície constituída de uma face e uma aresta com um nó, apenas.

(c) Construa uma superfície constituída de duas faces e uma aresta com um nó, apenas.

(d) Construa uma superfície constituída de duas faces e uma aresta sem nós, apenas.

15.24 Anéis paradrômicos

Discuta o procedimento do feiticeiro cujas recomendações aos casais que pretendiam contrair matrimônio se faziam de uma das seguintes maneiras: Se desejava profetizar um desenlace futuro no matrimônio em vista, ele cortava ao longo uma pulseira de fita sem nenhuma torção; se desejava profetizar que os dois pretendentes teriam atritos mas permaneceriam juntos, cortava ao longo uma pulseira de fita com uma torção completa; se desejava profetizar um casamento perfeito ele cortava ao longo uma faixa de Möbius.

15.25 Superfícies poliédricas

(a) Calcule $v - a + f$ para cada uma das superfícies poliédricas regulares. (Pode-se mostrar que $v - a + f = 2$ para toda superfície poliédrica homeomorfa à superfície esférica.)

(b) Dê exemplos de superfícies poliédricas fechadas de 6 arestas e de 8 arestas e mostre que não existe nenhuma de 7 arestas.

(c) Mostre, a partir da relação $v - a + f = 2$, que não pode haver mais do que 5 poliedros regulares.

15.26 Faces e vértices das superfícies poliédricas

Considere uma superfície poliédrica fechada simples P de v vértices, a arestas e f faces. Seja f_n o número de faces de n arestas e seja v_n o número de vértices dos quais saem n arestas.

(a) Mostre que

$$1. f = f_3 + f_4 + \dots,$$

$$2. v = v_3 + v_4 + \dots,$$

$$3. 2a = 3f_3 + 4f_4 + 5f_5 + \dots,$$

$$4. 2a = 3v_3 + 4v_4 + 5v_5 + \dots.$$

Mostre agora, a partir da relação $v - a + f = 2$, que

$$5. 2(v_3 + v_4 + \dots) = 4 + f_3 + 2f_4 + 3f_5 + 4f_6 + \dots.$$

Analogamente, mostre que

$$6. 2(f_3 + f_4 + \dots) = 4 + v_3 + 2v_4 + 3v_5 + 4v_6 + \dots.$$

Dobrando (6) e subtraindo (5), obtém-se

$$7. 3f_3 + 2f_4 + f_5 = 12 + 2v_4 + 4v_5 + \dots + f_7 + 2f_8 + \dots$$

(b) A partir de (7) de (a) deduza o seguinte:

1. Não existe P tal que cada uma de suas faces tenha mais do que 5 arestas.
2. Se P não tem nenhuma face triangular e nenhuma face quadrilateral, então pelo menos 12 de suas faces são pentagonais.
3. Se P não tem nenhuma face triangular e nenhuma face pentagonal, então pelo menos 6 de suas faces são quadrilaterais.
4. Se P não tem nenhuma face quadrilateral e nenhuma face pentagonal, então pelo menos 4 de suas faces são triangulares.

(c) P se diz *triedral* se de cada um de seus vértices saem exatamente 3 arestas. Mostre que:

1. Se P é triedral e tem apenas faces pentagonais e hexagonais, então o número de faces pentagonais é 12.
2. Se P é triedral e tem apenas faces quadrilaterais e hexagonais, então o número de faces quadrilaterais é 6.
3. Se P é triedral e tem apenas faces triangulares e hexagonais, então o número de faces triangulares é 4.

15.27 Espaços de Hausdorff

Em 1914, Felix Hausdorff desenvolveu a teoria dos espaços topológicos abstratos hoje conhecidos como *espaços de Hausdorff*. Tais espaços se constituem de um conjunto H de elementos, chamados *pontos*, e uma coleção de subconjuntos de H , chamados *vizinhanças*, devendo verificar-se os 4 postulados seguintes:

H1: Para cada x de H existe pelo menos uma vizinhança N_x que contém x .

H2: Para quaisquer vizinhanças N_x e N'_x de x , existe uma terceira vizinhança N''_x de x contida em N_x e em N'_x .

H3: Se y é um ponto de N_x , então existe uma vizinhança N_y de y contida em N_x .

H4: Se x e y são pontos de H , x diferente de y , então existe vizinhanças N_x e N_y sem pontos em comum.

(a) Mostre que se pode transformar o conjunto dos pontos de uma reta num espaço de Hausdorff, tomando como vizinhanças de um ponto x os segmentos abertos dos quais x é o ponto médio. (A versão aritmética desse espaço desempenha um papel importante na análise.)

(b) Mostre que se pode transformar o conjunto dos pontos de um plano num espaço de Hausdorff, tomando como vizinhanças de um ponto P os interiores dos círculos de centro P .

(c) Mostre que se pode transformar o conjunto dos pontos de um plano num espaço de Hausdorff, tomando como vizinhanças de um ponto P os interiores dos quadrados de centro P e lados paralelos a duas retas dadas perpendiculares entre si.

(d) Mostre que se pode transformar qualquer conjunto de pontos num espaço de Hausdorff, tomando como coleção de vizinhanças todos os subconjuntos unitários do conjunto dado.

(e) Mostre que se pode transformar todo espaço métrico num espaço de Hausdorff, tomando para vizinhanças de um ponto x todas as *bolas abertas de centro x* . (Uma *bola aberta de centro* num ponto p do espaço métrico e *raio* ε , onde ε é um número real maior que zero, é o conjunto dos pontos do espaço cuja distância a p é menor que ε .)

Definição: Um ponto x de um espaço de Hausdorff H se diz *ponto de acumulação* de um subconjunto S de H , se toda vizinhança de x contém pelo menos um ponto de S distinto de x .

(f) Prove que qualquer vizinhança N_x de um ponto de acumulação x de um subconjunto S de um espaço de Hausdorff H contém uma infinidade de pontos de S .

15.28 Proposições aparentadas

Relacionam-se com a proposição “Se p , então q ” as três proposições seguintes:

1. A *recíproca*, “Se q , então p ”.
2. A *contrária*, “Se não p , então não q ”.
3. A *contrapositiva*, “Se não q , então não p ”.

Mostre que:

- (a) A recíproca de uma implicação verdadeira não é necessariamente verdadeira.
- (b) A contrária de uma implicação verdadeira não é necessariamente verdadeira.
- (c) A contrapositiva de uma implicação verdadeira é verdadeira.
- (d) A contrapositiva de uma implicação é a recíproca da contrária da implicação.
- (e) A contrária da recíproca de uma implicação equivale à recíproca da contrária da implicação?

15.29 Lógicas trivalentes

(a) Mostre que há 256 possibilidades diferentes para o preenchimento da tábua-verdade da conjunção numa lógica trivalente, admitindo-se que “ p e q ” é verdadeira se, e somente se, p e q são verdadeiras.

(b) Mostre que há 12 possibilidades diferentes para o preenchimento da tábua-verdade da negação numa lógica trivalente, admitindo-se que quando p é verdadeira, $\text{não } p$ não é verdadeira e que quando p é falsa, $\text{não } p$ não é falsa.

(c) Admitindo-se, como é o caso nas lógicas bivalentes usuais, que todos os conectivos lógicos outros que não a conjunção e a negação possam ser definidos em termos destes dois, mostre que há ao todo 3072 lógicas trivalentes.

(d) Quantas são as lógicas m -valentes possíveis, análogas das 3072 lógicas trivalentes possíveis?

15.30 O paradoxo de Russell

Considere as seguintes versões populares do paradoxo de Russell:

(a) Todo município de um certo país deve ter um prefeito e dois municípios diferentes não podem ter o mesmo prefeito. Alguns prefeitos não residem no município que administram. Baixou-se uma lei obrigando os prefeitos não residentes em seus municípios a morar numa área especial A . Sendo tantos os prefeitos não residentes, A foi elevada à condição de município. Onde residirá o prefeito de A ?

(b) Um adjetivo se diz *autológico* quando se aplica a si mesmo; caso contrário se diz *heterológico*. Assim, por exemplo, “português” e “polissílabo” são adjetivos autológicos de nossa língua pois se aplicam a si mesmos, ao passo que os adjetivos “francês” e “monossílabo”, por não se aplicarem a si mesmos, são heterológicos. Isso posto, o adjetivo “heterológico” é autológico ou heterológico?

(c) Suponha agora que um bibliotecário compile um catálogo, para sua biblioteca, de todos os catálogos da biblioteca que não se incluem a si mesmos.

15.31 Um paradoxo

Examine o seguinte paradoxo. Pode-se expressar todo número inteiro positivo em português corrente, sem o uso de símbolos aritméticos; assim, pode-se expressar 5 por “cinco” ou “metade de dez” ou ainda por “a raiz quadrada positiva de vinte e cinco” e assim por diante. Considere a expressão “o menor inteiro positivo que não se pode expressar com vinte e sete sílabas”. Dessa maneira, expressou-se com vinte e sete sílabas um número inteiro positivo que não pode ser expresso com menos do que vinte e sete sílabas.

15.32 Alguns dilemas e algumas questões

(a) Um pai recebe a promessa de que uma filha sua, sequestrada, será posta em liberdade caso adivinhe se ela será libertada ou não. Como deve proceder o sequestrador se o pai respondeu que ela não será libertada?

(b) Um explorador foi preso por canibais que lhe deram a oportunidade de fazer uma afirmação que, caso verdadeira, sua pena seria ser cozido em água fervente, caso falsa, ser assado numa fogueira. Como deveriam proceder os canibais caso ele afirmasse “Eu serei assado numa fogueira”?

(c) A afirmação, “Toda regra tem uma exceção”, é autocontraditória?

(d) O que aconteceria se uma força irresistível colidisse contra um corpo inamovível?

(e) Se Zeus é capaz de tudo, pode criar uma pedra que nem ele próprio seja capaz de carregar?

15.33 Recreações matemáticas

(a) Construa todos os 12 pentaminos e ache empiricamente pelo menos uma das 65 maneiras de juntá-los de modo a formar um quadrado 8×8 com um quadrado 2×2 vazio no meio.

(b) Ponha 8 rainhas num tabuleiro de xadrez de modo que nenhuma delas possa comer a outra. (Esse problema foi proposto originalmente por Franz Nauck em 1850. São 12 suas soluções fundamentais, isto é, soluções tais que nenhuma delas possa ser obtida de uma outra por rotações ou reflexões.)

Temas

15/1 Bertrand Russell (1872-1970).

15/2 Histórias e anedotas sobre David Hilbert.

15/3 Hermann Minkowski (1864-1909).

15/4 Hardy e Littlewood.

15/5 Albert Einstein (1879-1955).

15/6 Anna Johnson Pell Wheeler (1883-1966).

15/7 Srinivasa Ramanujan (1887-1920).

15/8 Norbert Wiener (1894-1964).

15/9 Propriedades dos Sistemas de Axiomas.

15/10 Um conjunto de postulados para a álgebra booleana.

15/11 O princípio de dualidade na álgebra booleana.

15/12 Aspectos recreativos da faixa de Möbius.

15/13 Superfícies homeomorfas.

15/14 Definições impredicativas.

- 15/15 Teoremas de Gödel.
- 15/16 A arte computadorizada.
- 15/17 Selos postais holandeses sobre computação.
- 15/18 A escola polonesa de matemática.
- 15/19 A psicologia da criação matemática.
- 15/20 A matemática é inventada ou descoberta?
- 15/21 Estética da matemática e matemática da estética.
- 15/22 Obrigações morais do matemático.
- 15/23 O que é a geometria? — uma visão evolutiva.
- 15/24 Histórias e anedotas sobre Nicolas Bourbaki.
- 15/25 Efeitos da matemática moderna.
- 15/26 Lições da árvore da matemática.
- 15/27 Por que estudar história da matemática.
- 15/28 A história da matemática como instrumento de ensino.
- 15/29 A história da matemática no ensino de primeiro e segundo graus.
- 15/30 A “contribuição” de Adolph Hitler à matemática.
- 15/31 O Instituto de Estudos Avançados de Princeton.

Bibliografia

- ALEXANDROFF, Paul. *Elementary Concepts of Topology*. Trad. para o inglês por A. N. Obolensky, Nova York, Frederick Ungar, 1965.
- AMBROSE, Alice e LAZEROWITZ, Morris. *Fundamentals of Symbolic Logic*. Nova York, Holt, Rinehart and Winston, 1948.
- APOSTLE, H. G. *Aristotle's Philosophy of Mathematics*. Chicago, University of Chicago Press, 1952.
- AUGARTEN, Stan. *Bit by Bit, An Illustrated History of Computers*. Nova York, Picknor & Fields, 1986.
- BARKER, S. F. *Philosophy of Mathematics*. Englewood Cliffs (N. J.), Prentice-Hall, 1964.
- BEGLE, E. G. (ed.). *The Role of Axiomatics in Problem Solving in Mathematics*. Boston, Ginn, 1966.
- BENACERRAFF, Paul e PUTNAM, Hilary (eds.). *Philosophy of Mathematics: Select Readings*. Englewood Cliffs (N. J.), Prentice-Hall, 1964.
- BERKELEY, E. C. *Giant Brains; Or, Machines that Think*. Nova York, John Wiley, 1949.
- BERNAYS, Paul. *Axiomatic Set Theory*. Amsterdam, Holanda, North- Holland, 1958.

- BERNSTEIN, Jeremy. *The Analytical Engine: Computers-Past, Present and Future*. Nova York, Randon House, 1963.
- BETH, E. W. *The Foundations of Mathematics*. Amsterdam, Holanda, North-Holland, 1959.
- . *Mathematical Thought: An Introduction to the Philosophy of Mathematics*. Nova York, Gordon & Breach Science Publishers, 1965.
- BIGGS, N. L.; LLOYD, E. K. e WILSON, R. J. *Graph Theory, 1736-1936*. Oxford, Clarendon Press, 1976.
- BIRKHOFF, G. D. e BEATLEY, Ralph. *Basic Geometry*. Chicago, Scott, Foresman, 1940; Nova York, Chelsea, 1959.
- BLACK, Max. *Critical Thinking: An Introduction to Logic and Scientific Method*. 2ª ed. Englewood Cliffs (N. J.), Prentice Hall, 1952.
- . *The Nature of Mathematics: A Critical Survey*. Londres, Routledge & Kegan Paul, 1965.
- BLANCHÉ, Robert. *Axiomatics*. Trad. para o inglês por G. B. Kleene. Londres, Routledge & Kegan Paul, 1962.
- BLUMENTHAL, L. M. *A Modern View of Geometry*. São Francisco, W. H. Freeman, 1961.
- BOCHENSKI, J. M. *A Precis of Mathematical Logic*. Trad. para o inglês por Otto Bird. Dordrecht, D. Reidel, 1959.
- . *A History of Formal Logic*. Trad. para o inglês por Ivor Thomas. Notre Dame (Ind.), University of Notre Dame Press, 1961.
- BOOLE, George. *An Investigation of the Laws of Thought*. Nova York, Dover Publications, 1951.
- BRADIS, V. M.; MINKOVSKII, V. L. e KHARCHEVA, A. K. *Lapses in Mathematical Reasoning*. Nova York, Macmillan, 1959.
- BREUER, JOS. H. *Introduction to the Theory of Sets*. Trad. para o inglês por H. F. Fehr. Englewood Cliffs (N. J.), Prentice-Hall, 1958.
- BROWDER, Felix (ed.) “Mathematical developments arising from Hilbert’s problems”. *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, vol. 28. Providence (R. I.), American Mathematical Society, 1976.
- BYNUM, T. W. *Gottlob Frege: Conceptual Notations and Related Articles*. Oxford, Oxford University Press, 1972.
- CANTOR, Georg. *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers*. Trad. para o inglês por P. E. B. Jourdain. La Salle (Ill.), Open Court, 1952.
- CARMICHAEL, R. D. *The Logic of Discovery*. Chicago, Open Court, 1930.
- CARNAP, Rudolf. *The Logical Syntax of Language*. Nova York, Brace & World, 1937.
- CARTWRIGHT, M. L. *The Mathematical Mind*. Nova York, Oxford University Press, 1955.
- CHAPMAN, F. M. e HENLE, Paul. *The Fundamentals of Logic*. Nova York, Charles Scribner, 1933.
- CHURCH, Alonzo. “Introduction to mathematical logic (Part 1)”. *Annals of Mathematical Studies*, nº 13. Princeton (N. J.), Princeton University Press, 1944.

- COHEN, M. R. e NAGEL, Ernest. *Introduction to Logic and Scientific Method*. Harcourt, Brace & World, 1934.
- COHEN, Paul. *Set Theory and the Continuum Hypothesis*. Nova York, W. A. Benjamin, 1966.
- COOLEY, J. C. *A Primer of Formal Logic*. Nova York, Macmillan, 1942.
- COURANT, Richard e ROBBINS, Herbert. *What is Mathematics? An Elementary Approach to Ideas and Methods*. Nova York, Oxford University Press, 1941.
- CURRY, H. B. *Outlines of a Formalist Philosophy of Mathematics*. Amsterdam, North-Holland, 1951.
- DAVIS, Martin. *Computability & Unsolvability*. Nova York, McGraw-Hill, 1958.
- DELACHET, André. *Contemporary Geometry*. Trad. para o inglês por H. G. Bergmann. Nova York, Dover Publications, 1962.
- DUBBEY, J. M. *Development of Modern Mathematics*. Londres, Butterworth, 1970.
- DUMMETT, Michael. *Frege: Philosophy of Language*. Nova York, Harper & Row, 1973.
- . *Elements of Intuitionism*. Oxford, Oxford University Press, 1977.
- ENDERTON, Herbert. *Elements of Set Theory*. Nova York, Academic Press, 1977.
- ENRIQUES, Federigo. *The Historic Development of Logic*. Trad. para o inglês por J. Rosenthal. Nova York, Holt, Rinehart and Winston, 1929.
- EVES, Howard. *A Survey of Geometry*, vol. 2. Boston, Allyn and Bacon, 1965.
- EVES, Howard e NEWSOM, C. V. *An Introduction to the Foundations and Fundamental Concepts of Mathematics*. Edição revisada. Nova York, Holt, Rinehart and Winston, 1965.
- EXNER, R. M. e ROSSKOPF, M. F. *Logic in Elementary Mathematics*. Nova York, MacGraw-Hill, 1959.
- FANG, J. *Hilbert: Towards a Philosophy of Modern Mathematics*. Hauppauge (N. Y.), Paideia Press, 1970.
- FEARNSIDE, W. W. e HOLTHERR, W. B. *Fallacy, the Counterfeit of Argument*. Englewood Cliffs (N. J.), Prentice-Hall, 1959.
- FÉLIX, Lucienne. *The Modern Aspect of Mathematics*. Trad. para o inglês por J. H. e F. H. Hlavaty. Nova York, Basic Books, 1960.
- FORDER, H. G. *The Foundations of Euclidean Geometry*. Nova York, Cambridge University Press, 1927.
- FRAENKEL, Abraham. *Abstract Set Theory*. 3ª ed. revisada. Amsterdam, North-Holland, 1966.
- . *Set Theory and Logic*. Reading (Mass.), Addison-Wesley, 1966.
- FRAENKEL, Abraham. e BAR-HILLEL, Y. *Foundations of Set Theory*. Amsterdam, North-Holland, 1958.
- FRÉCHET, Maurice e FAN, Ky. *Initiation to Combinatorial Topology*. Trad. para o inglês, com acréscimo de notas, por Howard Eves. Boston, Prindle, Weber & Schmidt, 1967.

- FREGE, Gottlog. *The Foundations of Arithmetic*. Trad. para o inglês por J. L. Austing. Evanston (Ill.), Northwestern University Press, 1968.
- GALILEU GALILEI. *Dialogue Concerning Two New Sciences*. Trad. para o inglês por H. Crew e A. deSalvio. Nova York, Dover Publications, 1951.
- GARDNER, Martin. *Logic Machines and Diagrams*. Nova York, McGraw-Hill, 1958.
- GÖDEL, Kurt. *On Undecidable Propositions of Formal Mathematical Systems*. Princeton (N. J.), Princeton University Press, 1934.
- . *Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum Hypothesis with the Axioms of Set Theory*. Edição revisada. Princeton (N. J.), Princeton University Press, 1951.
- . *On Formally Undecidable Propositions of Principia Mathematica and Related Systems*. Nova York, Basic Books, 1962.
- GOODSTEIN, R. L. *Essays in the Philosophy of Mathematics*. Leicester, Leicester University Press, 1965.
- GOLDSTINE, H. H. *The Computer from Pascal to Von Neumann*. Princeton (N. J.), Princeton University Press, 1972.
- GRADSHTEIN, I. S. *Direct and Converse Theorems*. Trad. para o inglês por T. Boddington. Nova York, Macmillan, 1963.
- HADAMARD, Jacques. *An Essay on the Psychology of Invention in the Mathematical Field*. Princeton (N. J.), Princeton University Press, 1945.
- HALMOS, Paul. *Naive Set Theory*. Princeton (N. J.), Van Nostrand, 1960.
- HALSTED, G. B. *Rational Geometry*. Nova York, John Wiley, 1904.
- HARDY, G. H. *A Mathematician's Apology*. Nova York, Cambridge University press, 1941.
- . *Bertrand Russell and Trinity*. Cambridge, Cambridge University Press, 1970.
- HATCHER, William. *Foundations of Mathematics*. Filadélfia, W. B. Saunders, 1968.
- HAUSDORFF, Felix. *Mengenlehre*. Nova York, Dover Publications, 1944.
- . *Grundzüge der Mengenlehre*. Nova York, Chelsea, 1949.
- HEATH, T. L. *The Thirteen Books of Euclid's Elements*. 2ª ed. Nova York, Dover Publications, 1966, 3 vols.
- HEYTING, A. *Intuitionism: An Introduction*. Amsterdam, North-Holland Publishing Company, 1956.
- HILBERT, David. *The Foundations of Geometry*. 10ª ed. revisada e ampliada por Paul Bernays. Trad. para o inglês por Leo Unger. Chicago, Open Court, 1971.
- HILBERT, David. e ACKERMANN, Wilhelm. *Principles of Mathematical Logic*. Trad. para o inglês por L. M. Hammond *et al.* Nova York, Chelsea, 1950.
- HYMAN, Anthony. *Charles Babbage, Pioneer of the Computer*. Princeton (N. J.), Princeton University Press, 1982.

- INFELD, Leopold. *Albert Einstein: His Work and Its Influence on Our World*. Nova York, Charles Scribner's, 1950.
- JAMES, Glenn (ed.). *The Tree of Mathematics*. Pacoma (Calif.), The Digest Press, 1957.
- JOHNSON, P. E. *A History of Set Theory*. Boston, Prindle, Weber & Schmidt, 1972.
- KANKE, E. *Theory of Sets*. Trad. para o inglês por F. Bagemihl. Nova York, Dover Publications, 1950.
- KATTSOFF, Louis. *A Philosophy of Mathematics*. Freeport (N. Y.), Books for Libraries Press, 1969.
- KELLY, J. L. *General Topology*. Princeton (N. J.), Van Nostrand Reinhold, 1955.
- KENNELLY, J. W. *Informal Logic*. Boston, Allyn and Bacon, 1967.
- KEYSER, C. J. *Mathematical Philosophy: A Study of Fate and Freedom*. Nova York, E. P. Dutton, 1922.
- . "Mathematics and the question of cosmic mind, with other essays". Nova York, *Scripta Mathematica*, 1935.
- . "Thinking about thinking". Nova York, *Scripta Mathematica*, 1942.
- KILMISTER, C. W. *Language, Logic and Mathematics*. Nova York, Barnes & Noble, 1967.
- KING, Amy e READ, C. B. *Pathways to Probability*. Nova York, Holt, Rinehart and Winston, 1963.
- KLEENE, S. C. *Introduction to Metamathematics*. Princeton (N. J.), Van Nostrand Reinhold, 1952.
- . *Mathematical Logic*. Nova York, John Wiley, 1967.
- KLINE, Morris. *Mathematics: The Loss of Certainty*. Nova York, Oxford University Press, 1979.
- KNEALE, William e Martha. *The Development of Logic*. Nova York, Oxford University Press, 1962.
- KNEEBONE, G. T. *Mathematical Logic and the Foundations of Mathematics*. Princeton (N. J.), Van Nostrand Reinhold, 1963.
- KÖRNER, Stephan. *The Philosophy of Mathematics: An Introduction*. Nova York, Harper & Row, 1962.
- KURATOWSKI, K. e FRAENKEL, A. *Axiomatic Set Theory*. Amsterdam, North-Holland, 1968.
- LANGER, S. K. *An Introduction to Symbolic Logic*. 2ª ed. revisada. Nova York, Dover Publications, 1953.
- LASALLE, J. P. e LEFSCHETZ, Solomon (eds.). *Recent Soviet Contributions to Mathematics*. Nova York, Macmillan, 1962.
- LEIBNIZ, G. W. *Logical Papers*. Editado e trad. para o inglês por G. A. R. Parkinson. Nova York, Oxford University Press, 1966.
- LE LIONNAIS, F. (ed.). *Great Currents of Mathematical Thought*. Trad. para o inglês por R. A. Hall e H. G. Bergmann. Nova York, Dover Publications, 1971, 2 vols.
- LEVY, Azriel. *Basic Set Theory*. Berlim, Springer-Verlag, 1979.

- LUCHINS, A. S. e E. H. *Logical Foundations of Mathematics for Behavioral Scientists*. Nova York, Holt, Rinehart and Winston, 1965.
- LUKASIEWICZ, Jan. *Elements of Mathematical Logic*. Trad. para o inglês por O. Wojtasiewicz. Nova York, Macmillan, 1963.
- MACH, Ernst. *Space and Geometry*. Trad. para o inglês por T. J. McCormack. Chicago, Open Court, 1943.
- MANHEIM, J. H. *The Genesis of Point Set Topology*. Nova York, Macmillan, 1964.
- MAOR, Eli. *To Infinity and Beyond: A Cultural History of Infinity*. Boston, Birkhäuser, 1987.
- MAZIARZ, E. A. *The Philosophy of Mathematics*. Nova York, Philosophical Library, 1950.
- MESCHKOWSKI, Herbert. *Ways of Thought of Great Mathematicians*. Trad. para o inglês por John Dyer-Bennet. São Francisco, Holden-Day, 1964.
- . *Evolution of Mathematical Thought*. Trad. para o inglês por J. H. Gayl. São Francisco, Holden-Day, 1965.
- MONNA, A. F. *Methods, Concepts and Ideas in Mathematics: Aspects of an Evolution*. CWI Tract V. 23. Math Centrum, 1986.
- MOORE, Gregory. *Zermelo's Axiom of Choice: Its Origins, Development and Influence*. Nova York, Springer-Verlag, 1982.
- MORRISON, Philip e Emily. *Charles Babbage and His Calculating Engines (select writings of Charles Babbage and others)*. Nova York, Dover Publications, 1961.
- MOSTOWSKI, Andrzej. *Thirty Years of Foundational Studies*. Nova York, Barnes & Noble, 1966.
- NAGEL, Ernest e NEWMAN, J. R. *Gödel's Proof*. Nova York, New York University Press, 1958.
- NEWMAN, M. H. A. *Elements of the Topology of Plane Sets of Points*. Nova York, Cambridge University Press, 1939.
- NEWSOM, C. V. *Mathematical Discourses: The Heart of Mathematical Science*. Englewood Cliffs (N. J.), Prentice-Hall, 1964.
- NICOD, Jean. *Foundations of Geometry and Induction*. Nova York, The Humanities Press, 1950.
- POINCARÉ, Henri. *The Foundations of Science*. Trad. para o inglês por G. B. Halsted. Lancaster (Pa.), The Science Press, 1913.
- POLYA, George. *How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method*. Princeton (N. J.), Princeton University Press, 1945.
- . *Induction and Analogy in Mathematics*. Princeton (N. J.), Princeton University Press, 1954.
- POLYA, George. *Patterns of Plausible Inference*. Princeton (N. J.), Princeton University Press, 1954.
- . *Mathematical Discovery*. Nova York, John Wiley, 1962 e 1965, 2 vols.
- PRASAD, Ganesh. *Mathematical Research in the Last Twenty Years*. Berlim, Walter de Gruyter, 1923.

- QUINE, W. V. *Mathematical Logic*. Nova York, W. W. Norton, 1940.
- . *Methods of Logic*. Nova York, Holt, Rinehart and Winston, 1950.
- . *Elementary Logic*. Edição revisada. Cambridge (Mass.), Harvard University Press, 1980.
- RAMSEY, F. P. *The Foundations of Mathematics and Other Logical Essays*. Nova York, The Humanities Press, 1950.
- RASHEVSKY, N. *Looking at History Through Mathematics*. Cambridge (Mass.), M. I. T. Press, 1968.
- REICHENBACH, Hans. *The Theory of Probability: An Inquiry into the Logical and Mathematical Foundations of the Calculus of Probability*. Berkeley (Calif.), University of California Press, 1949.
- REID, Constance. *Hilbert*. Nova York, Springer-Verlag, 1970.
- . *Courant in Göttingen and New York. The Story of an Improbable Mathematician*. Nova York, Springer-Verlag, 1976.
- RESCHER, Nicholas. *Hypothetical Reasoning*. Amsterdam, North-Holland, 1964.
- ROBB, A. A. *A Theory of Time and Space*. Nova York, Cambridge University Press, 1914.
- ROBINSON, G. DE B. *The Foundations of Geometry*. 2ª ed. Toronto, University of Toronto Press, 1946.
- ROSENBLOOM, P. C. *The Elements of Mathematical Logic*. Nova York, Dover Publications, 1950.
- ROSSER, J. B. *Logic for Mathematicians*. Nova York, McGraw-Hill, 1953.
- e TURQUETTE, A. R. *Many-Valued Logics*. Amsterdam, North-Holland, 1951.
- RUSSELL, Bertrand. *Introduction to Mathematical Philosophy*. 2ª ed. Nova York, Macmillan, 1924.
- . *Mysticism and Logic*. Nova York, W. W. Norton, 1929.
- . *Principles of Mathematics*. 2ª ed. Nova York, W. W. Norton, 1937.
- . *An Essay on the Foundations of Geometry*. Nova York, Dover Publications, 1956.
- . *The Autobiography of Bertrand Russell*. Londres, George Allen and Unwin, Ltd., 1967-1969, 3 vols.
- SCHAAF, W. L. *Mathematics, Our Great Heritage: Essays on the Nature and Cultural Significance of Mathematics*. Edição revisada. Nova York, Collier Books, 1963.
- SCHOLZ, Heinrich. *Concise History of Logic*. Trad. para o inglês por K. F. Leidecker. Nova York, Philosophical Library, 1961.
- SIERPÍNSKI, Waclaw. *Introduction to General Topology*. Trad. para o inglês por C. C. Krieger. Toronto, University of Toronto Press, 1934.
- . *Cardinal and Ordinal Numbers*. 2ª ed. Varsóvia, Polish Scientific Publications, 1965.

- SINGH, Jagjit. *Great Ideas of Modern Mathematics: Their Nature and Use*. Nova York, Dover Publications, 1959.
- STABLER, E. R. *An Introduction to Mathematical Thought*. Reading (Mass.), Addison-Wesley, 1953.
- STEIN, Dorothy. *Ada: A life and a Legacy*. Cambridge (Mass.), M. I. T. Press, 1985.
- STIBITZ, G. R. e LARRIVEE, J. A. *Mathematics and Computers*. Nova York, McGraw-Hill, 1957.
- STOLL, R. R. *Sets, Logic and Axiomatic Theories*. São Francisco, W. H. Freeman, 1961.
- STYAZHKIN, N. I. *History of Mathematical Logic from Leibniz to Peano*. Cambridge (Mass.), M. I. T. Press, 1969.
- SUPPES, Patrick. *Axiomatic Set Theory*. Princeton (N. J.), Van Nostrand Reinhold, 1960.
- TARSKI, Alfred. *Introduction to Logic and to the Methodology of Deductive Sciences*. Trad. para o inglês por O. Helmer. Nova York, Oxford University Press, 1954.
- TEMPLE, George. *100 Years of Mathematics, A Personal Viewpoint*. Nova York, Springer-Verlag, 1981.
- VAN HEIJENOORT, Jean. *From Frege to Gödel*. Cambridge (Mass.), Harvard University Press, 1967.
- VON NEUMANN, John. *The Computer and the Brain*. New Haven, Yale University Press, 1959.
- WAISMANN, Friedrich. *Introduction to Mathematical Thinking*. Trad. para o inglês por T. J. Benac. Nova York, Frederick Ungar, 1951.
- WANG, Hoa. *A Survey of Mathematical Logic*. Amsterdam, North-Holland, 1963.
- WEDBERG, Anders. *Plato's Philosophy of Mathematics*. Estocolmo, Almqvist and Wiksell, 1955.
- WEYL, Hermann. *Philosophy of Mathematics and Natural Science*. Edição inglesa revisada e ampliada, com base em tradução de O. Helmer. Princeton (N. J.), Princeton University Press, 1949.
- WHITEHEAD, A. N. e RUSSELL, B. *Principia mathematica*. 2ª e d. Cambridge, Cambridge University Press, 1965, 3 vols.
- WIENER, Norbert. *I Am a Mathematician: The Later Life of a Prodigy*. Garden City (N. Y.), Doubleday, 1956.
- WILDER, R. L. *Introduction to the Foundations of Mathematics*. 2ª ed. Nova York, John Wiley, 1965.
- . *The Evolution of Mathematical Concepts: A Historical Approach*. Nova York, John Wiley, 1968.
- . *Mathematics as a Cultural System*. Nova York, Pergamon Press, 1981.
- WOLFF, Peter. *Breakthroughs in Mathematics*. Nova York, New American Library, 1963.
- WOODGER, J. H. *The Axiomatic Method in Biology*. Nova York, Cambridge University Press, 1937.

YOUNG, J. W. Lectures on Fundamental Concepts of Algebra and Geometry. Nova York, Macmillan, 1936.

YOUNG, J. W. A. (ed.). Monographs on Topics of Modern Mathematics Relevant to the Elementary Field. Nova York, Dover Publications, 1955.

ZUCKERMAN, Martin. Sets and Transfinite Numbers. Nova York, Macmillan, 1974.

Bibliografia geral

- ALBERS, D. J., ALEXANDERSON, G. L. e REID, Constance. *International Mathematical Congresses: An Illustrated History 1893-1986*. Nova York, Springer-Verlag, 1986.
- ALBERS, D. J. e ALEXANDERSON, G. L. (eds.). *Mathematical People: Profiles and Interviews*. Boston, Birkhäuser, 1987.
- ARCHIBALD, R. C. "Outline of the history of mathematics". *Herbert Ellsworth Slaught Memorial Paper*, nº 2. Buffalo (N. Y.), The Mathematical Association of America, 1949.
- BALL, W. W. R. *A Primer of the History of Mathematics*. 4ª ed. Nova York, Macmillan, 1895.
- . *A Short Account of the History of Mathematics*. 5ª ed. Nova York, Macmillan, 1912.
- BELL, E. T. *The Development of Mathematics*. 2ª ed. Nova York, McGraw-Hill, 1945.
- . *Mathematics, Queen and Servant of Science*. Nova York, McGraw-Hill, 1951. Reimpresso pela Mathematical Association of America, Washington, D.C., 1987.
- BOCHNER, Salomon. *The Role of Mathematics in the Rise of Science*. Princeton (N. J.), Princeton University Press, 1966.
- BOTTAZZINI, Umberto. *The Higher Calculus: A History of Real and Complex Analysis from Euler to Weierstrass*. Trad. para o inglês por W. Van Egmond. Nova York, Springer-Verlag, 1986.
- BOYER, C. B. *A History of Mathematics*. Nova York, John Wiley, 1968. Reimpresso pela Princeton University Press, 1985.
- BURTON, D. M. *The History of Mathematics, An Introduction*. Dubuque (Iowa), Wm.C. Brown Company Publishers, 1983.
- CAJORI, Florian. *The Teaching and History of Mathematics in the United States*. Washington, D.C., Government Printing Office, 1890. Reimpresso por Scholarly Press, 1974.
- . *A History of Elementary Mathematics*. 4ª ed. Nova York, Macmillan, 1924. Reimpresso por Chelsea, 1985.
- . *A History of Mathematics*. 4ª ed. Nova York, Macmillan, 1924. Reimpresso por Chelsea, 1985.
- . *A History of Mathematical Notations*. Chicago, Open Court, 1929, 2 vols.
- CALINGER, Ronald (ed.). *Classics of Mathematics*. Oak Park (Ill.), Moore Publishing Co., 1982.

- CAMPBELL, D. M. *The Whole Craft of Number*. Boston, Prindle, Weber & Schmidt, 1976.
- CAMPBELL, D. M. e HIGGINS, J. C. (eds.). *Mathematics: People, Problems, Results*. Pacific Grove (Calif.), Wadsworth & Brooks/Cole, 1984, 3 vols.
- CARRUCCIO, Ettore. *Mathematics and Logic in History and in Contemporary Thought*. Trad. para o inglês por Isabel Quigly. Chicago, Adline, 1964.
- DAUBEN, J. W. *The History of Mathematics from Antiquity to the Present: A Selected Bibliography*. Nova York, Gadland Publishing, 1985.
- DAVID, Philip e HERSH, Reuben. *The Mathematical Experience*. Boston, Birkhäuser, 1981.
- DEDRON, P. e ITARD, J. *Mathematics and Mathematicians*. Trad. para o inglês por J. V. Field. Londres, London Transworld Publications, 1973, 2 vols.
- DÖRRIE, Heinrich. *100 Great Problems of Elementary Mathematics: Their History and Solution*. Trad. para o inglês por D. Antin. Nova York, Dover Publications, 1965.
- DUBIN, J. R. *Mathematics: Its Spirit and Evolution*. Boston, Allyn and Bacon, 1973.
- EVES, Howard. *Great Moments in Mathematics (Before 1650)*. Washington, D.C., The Mathematical Association of America, 1981.
- . *Great Moments in Mathematics (After 1650)*. Washington, D.C., The Mathematical Association of America, 1982.
- . *Foundations and Fundamental Concepts of Mathematics*. 3ª ed. Boston, PSW-KENT Publishing Company, 1990.
- FAUVEL, John e GRAY, Jeremy (eds.). *The History of Mathematics: A Reader*. Londres, Macmillan, 1987.
- FINK, Carl. *A Brief History of Mathematics*. Trad. para o inglês por W. W. Beman e D. E. Smith. Chicago, Open Court, 1900.
- FREEBURY, H. A. *A History of Mathematics*. Nova York, Macmillan, 1961.
- GILLISPIE, C. C. (ed.). *Dictionary of Scientific Biography*. Nova York, Charles Scribner, 1970-1980, 16 vols.
- GITTLEMAN, Arthur. *History of Mathematics*. Columbus (Ohio), Charles E. Merrill, 1975.
- GRATTAN-GUINNESS, I. (ed.). *From the Calculus to Set Theory, 1630-1910*. Londres, Duckworth, 1980.
- GRINSTEIN, L. S. e CAMPBELL, P. J. (eds.). *Women of Mathematics: A Bibliographical Sourcebook*. Westport (Conn.), Greenwood Press, 1987.
- HOFMANN, J. E. *The History of Mathematics*. Nova York, Philosophical Library, 1957.
- . *Classical Mathematics, A Concise History of the Classical Era in Mathematics*. Nova York, Philosophical Library, 1959.
- HOGBEN, L. T. *Mathematics for the Millions*. Nova York, W. W. Norton, 1937.
- HOOPER, Alfred. *Makers of Mathematics*. Nova York, Random House, 1948.
- HOWSON, Geoffrey. *A History of Mathematics Education in England*. Cambridge, Cambridge University Press, 1982.

- ITÔ, Kiyosi (ed.). *Encyclopedic Dictionary of Mathematics*. 2^a ed. Cambridge (Mass.), M. I. T. Press, 1987, 4 vols.
- JAMES, Glenn e JAMES, R. C. *Mathematical Dictionary*. 2^a ed. Princeton (N. J.), Van Nostrand Reinhold, 1959.
- KITCHER, Philip. *The Nature of Mathematical Knowledge*. Nova York, Oxford University Press, 1983.
- KLINE, Morris. *Mathematics in Western Culture*. Nova York, Oxford University Press, 1953.
- . *Mathematics and the Physical World*. Nova York, Thomas Y. Crowell, 1959.
- . *Mathematics, a Cultural Approach*. Reading (Mass.), Addison-Wesley, 1962.
- . *Mathematics Thought from Ancient to Modern Times*. Nova York, Oxford University Press, 1972.
- . *Mathematics and the Search for Knowledge*. Nova York, Oxford University Press, 1985.
- KRAMER, E. E. *The Main Stream of Mathematics*. Greenwich (Conn.), Fawcett Publications, 1964.
- . *The Nature and Growth of Modern Mathematics*. Nova York, Hawthorn Books, 1970.
- KUZAWA, Sister Mary Grace. *Modern Mathematics, The Genesis of a School in Poland*. New Haven (Conn.), College & University Press, 1968.
- LARRETT, Denham. *The Story of Mathematics*. Nova York, Greenberg Publishers, 1926.
- LE LIONNAIS, F. (ed.). *Great Currents of Mathematical Thought*. Trad. para o inglês por S. Hatfield. Freeport (N. Y.), Books for Libraries Press, 1970.
- MAY, K. O. *Bibliography and Research Manual of the History of Mathematics*. Toronto, University of Toronto Press, 1973.
- MESCHKOWSKI, Herbert. *The Ways of Thought of Great Mathematicians*. São Francisco, Holden-Day, 1964.
- MIDONICK, H. O. *The Treasury of Mathematics*. Nova York, Philosophical Library, 1965.
- MORGAN, Bryan. *Men and Discoveries in Mathematics*. Londres, John Murray, 1972.
- MORITZ, R. E. *On Mathematics and Mathematicians*. Nova York, Dover Publications, 1958.
- NEWMAN, James (ed.). *The World of Mathematics*. Nova York, Simon and Schuster, 1956, 4 vols.
- OSEN, L. M. *Women in Mathematics*. Cambridge (Mass.), M. I. T. Press, 1974.
- PEARSON, E. S. *The History of Statistics in the 17th and 18th Centuries*. Nova York, Macmillan, 1978.
- PERI, Teri. *Math Equals: Biographies of Women Mathematicians + Related Activities*. Reading (Mass.), Addison-Wesley, 1978.
- PHILLIPS, E. R. (ed.). *Studies in the History of Mathematics*. MAA Studies in Mathematics, vol. 26. Washington, D.C., Mathematical Association of America, 1987.

- PLEDGE, H. T. *Science Since 1500: A Short History of Mathematics, Physics, Chemistry, and Biology*. Nova York, Harper Brothers, 1959.
- SANFORD, Vera. *A Short History of Mathematics*. Boston, Houghton Mifflin, 1930.
- SARTON, George. *The Study of the History of Mathematics*. Nova York, Dover Publications, 1954.
- SCOTT, F. *A History of Mathematics from Antiquity to the Beginning of the Nineteenth Century*. Londres, Taylor & Francis, 1958.
- SHARLAU, W. e OPALKA, H. *From Fermat to Minkowski: Lectures on the Theory of Numbers and Its Historical Development*. Nova York, Springer-Verlag, 1985.
- SMITH, D. E. *Mathematics*. Boston, Marshall Jones, 1923.
- . *History of Mathematics*. Boston, Ginn & Company, 1923-25, 2 vols. Reimpresso por Dover Publications, 1958.
- . *A Source Book in Mathematics*. Nova York, McGraw-Hill, 1929. Reimpresso por Dover Publications, 1959.
- SMITH, D. E. e GINSBURG, Jekuthiel. "A history of mathematics in America before 1900". *Carus Mathematical Monograph*, nº 5. Chicago, Open Court, 1934. Reimpresso por Arno Press, Nova York, 1980.
- SMITH, S. B. *The Great Mental Calculators*. Nova York, Columbia University Press, 1983.
- STRUICK, D. J. *A Source Book in Mathematics, 1200-1800*. Cambridge (Mass.), Harvard University Press, 1969. Reimpresso pela Princeton University Press, 1986.
- . *A Concise History of Mathematics*. Edição revisada. Nova York, Dover Publications, 1987.
- TARWATER, D. (ed.). *The Bicentennial Tribute to American Mathematics, 1776-1976*. Washington, D.C., The Mathematical Association of America, 1977.
- TIETZE, Heinrich. *Famous Problems of Mathematics*. Nova York, Graylock, 1965.
- TURNBULL, H. W. *The Great Mathematicians*. Nova York, New York University Press, 1969.
- WEIL, André. *Number Theory: An Approach Through History from Hammurabi to Legendre*. Boston, Birkhäuser, 1984.
- WILLERDING, Margaret. *Mathematical Concepts, A Historical Approach*. Boston, Prindle, Weber & Schmidt, 1967.
- YOUNG, L. C. *Mathematicians and Their Times*. Amsterdam, Holand, North-Holland, 1981.

É vasta a literatura da história da matemática em revistas. Para uma excelente iniciação, veja-se:

- READ, C. B. "The history of mathematics — a bibliography of articles in English appearing in six periodicals". *School Science and Mathematics*, fev., 1966, pp. 147-59. Trata-se de uma bibliografia de mais de 1000 artigos dedicados à história da matemática, todos publicados antes de 15 de setembro de 1965 nas seguintes revistas: *The American Mathematical Monthly*, *The Mathematical Gazette* (Série Nova), *The Mathematics Teacher*, *National Mathematics Magazine*

(os volumes 1-8 foram publicados com o título de *Mathematics News Letter*; a partir do volume 21 o título passou a ser *Mathematics Magazine*), *Scripta Mathematica* e *School Science and Mathematics*. Os artigos encontram-se classificados em cerca de 30 categorias convenientes.

Especialmente importante para os que fazem pesquisas ou trabalham mais a fundo em história da matemática é a revista internacional *Historia Mathematica*, publicada pela Academic Press, Orlando, Califórnia (o volume 1 é de maio de 1974).

Extremamente útil para qualquer professor de matemática é o livro *Historical Topics for the Mathematical Classroom* (31º livro do ano) do National Council of Teachers of Mathematics, Washington, D.C., 1969.

Para histórias e anedotas sobre a matemática e sobre matemáticos, vejam-se as seguintes coleções:

EVES, Howard. *In Mathematical Circles*. Boston, Prindle, Weber & Schmidt, 1969, 2 vols.

———. *Mathematical Circles Revisited*. Boston, Prindle, Weber & Schmidt, 1971.

———. *Mathematical Circles Squared*. Boston, Prindle, Weber & Schmidt, 1972.

———. *Mathematical Circles Adieu*. Boston, Prindle, Weber & Schmidt, 1977.

———. *Return to Mathematical Circles*. Boston, PWS and KENT, 1988.

Há alguns filmes e videoteipes envolvendo a história da matemática. Muitos deles podem ser encontrados no seguinte catálogo:

SCHNEIDER, D. I. *An Annotated Bibliography of Films and Videotapes for College Mathematics*. Washington, D.C., The Mathematical Association of America, 1980.

Quanto a calendários, registrem-se:

O *Mathematical Sciences Calendar*, publicado anualmente pela Roma Press, Inc., Crabtree Valley Station, Box 31451, Raleigh, N.C. 27632; e o excelente e copioso *A Calendar of Mathematical Dates*, elaborado por V. F. Riskey. (Produzido em computador para atualizações contínuas, este calendário pode ser obtido com o autor no Departamento de Matemática e Estatística da Universidade Estadual de Bowling Green, Bowling Green, Ohio 43403.)

*Tabela Cronológica**

Estima-se que o Sol tenha se originado há cerca de 5 trilhões de anos, a Terra há cerca de 5 bilhões de anos e o homem há cerca de 2 bilhões de anos.

- 50 000 Indícios de contagem.
- 25 000 Arte geométrica primitiva.
- 6000 Data aproximada do osso de Ishango.
- 4700 Início possível do calendário babilônico.
- 4228 Origem hipotética do calendário egípcio.
- 3500 Escrita; roda de oleiro.
- 3100 Data aproximada de um cetro real egípcio do museu de Oxford.
- 3000 Descoberta do bronze; uso de veículos com rodas.
- 2900 Construção da grande pirâmide de Gizeh.
- 2400 Tábulas babilônicas de Ur; notação posicional na Mesopotâmia.
- 2200 Data de muitas tábulas matemáticas encontradas em Nipur; data mítica do *lo-shu*, o exemplo de quadrado mágico mais antigo que se conhece.
- 1850 Papiro Moscou, ou Golenishev (25 problemas numéricos, “a maior pirâmide do Egito”); instrumento astronômico preservado mais antigo.
- 1750 Código de Hamurabi; *Plimpton 322*, em alguma data entre - 1900 e - 1600.
- 1700 Stonehenge na Inglaterra (?).
- 1650 Papiro Rhind, ou Ahmes (85 problemas numéricos).
- 1600 Data aproximada de muitas das tábulas babilônicas da coleção de Yale.
- 1500 Maior obelisco existente; mais antigo relógio de sol preservado.
- 1350 Alfabeto fenício; descoberta do ferro; relógios de água; data de tábulas matemáticas posteriores encontradas em Nipur; papiro Rollin (problemas elaborados sobre alimentos).
- 1200 Guerra de Troia.

* Com o sinal de menos indicam-se as datas a.C. Muitas das datas são aproximadas.

- 1167 Papiro Harris (lista da riqueza dos templos).
- 1105 Data possível do *Chóu-peï*, trabalho matemático chinês mais antigo.
- 776 Primeira Olimpíada.
- 753 Fundação de Roma.
- 740 Obras de Homero (?).
- 650 Introdução do papiro na Grécia (aprox.).
- 600 Tales (início da geometria demonstrativa).
- 540 Pitágoras (geometria, aritmética e música).
- 516 Execução, sob as ordens de Dario, o Grande, das inscrições do rochedo de Behistun.
- 500 Data possível dos *S'ulvasûtras* (escritos religiosos que revelam conhecimento de números pitagóricos e construções geométricas); numerais em barra na China.
- 480 Batalha de Termópilas.
- 461 Início da Era de Péricles.
- 460 Parménides (esfericidade da Terra).
- 450 Zenão (paradoxos sobre o movimento).
- 440 Hipócrates de Quio (redução do problema da duplicação, lunas, arranjo das proposições da geometria em forma científica); Anaxágoras (geometria).
- 430 Antífon (método de exaustão).
- 429 Peste em Atenas.
- 425 Hípias de Elis (trissecação com a quadratriz); Teodoro de Cirene (números irracionais); Sócrates.
- 410 Demócrito (teoria atomística).
- 404 Derrota de Atenas ante Esparta.
- 400 Arquitas (líder da escola pitagórica de Tarento, aplicações da matemática à mecânica).
- 399 Morte de Sócrates.
- 380 Platão (adestramento do espírito pela matemática, Academia de Platão).
- 375 Teeteto (incomensuráveis, sólidos regulares).
- 370 Eudoxo (incomensuráveis, método de exaustão, astronomia).
- 350 Menaecmo (cônicas); Dinostrato (quadratura com a quadratriz, irmão de Menaecmo); Xenócrates (história da geometria); Timaridas (solução de sistemas de equações simples).
- 340 Aristóteles (sistemizador da lógica dedutiva).
- 336 Alexandre, o Grande, começa seu reinado.
- 335 Eudemo (história da matemática).
- 332 Fundação de Alexandria.

- 323 Morte de Alexandre, o Grande.
- 320 Aristeu (cônicas, sólidos regulares).
- 306 Ptolomeu I (Soter) do Egito.
- 300 Euclides (*Elementos*, números perfeitos, óptica, dados).
- 280 Aristarco (sistema geocêntrico).
- 260 Cônon (astronomia, espiral de Arquimedes); Dositoeo (destinatário de vários trabalhos de Arquimedes).
- 250 Colunas de pedra do rei Açoka, com os espécimes preservados mais antigos dos símbolos numéricos atuais.
- 240 Nicomedes (trisseção com a conchoide).
- 230 Eratóstenes (crivo, medida da Terra).
- 225 Apolônio (secções cônicas, lugares planos, tangências, círculo de Apolônio); Arquimedes (maior matemático da Antiguidade, medida do círculo e da esfera, cálculo de π , área de um segmento parabólico, séries infinitas, método de equilíbrio, mecânica, hidrostática).
- 213 Queima de livros na China.
- 210 Iniciada a construção da Grande Muralha da China.
- 196 Gravação da Pedra de Roseta.
- 180 Hipsicles (astronomia, teoria dos números); Dioclés (duplicação com a cissoide).
- 140 Hiparco (trigonometria, astronomia, catálogo de estrelas).
- 100 Data provável dos entalhes nas paredes de uma caverna perto de Poona.
- 75 Cícero encontra o túmulo de Arquimedes.
- 50 Sun-tzī (equações indeterminadas).
- 44 Morte de Júlio César.
- 75 Época possível de Herão (máquinas, mensuração plana e sólida, extração de raízes, agrimensura).
- 100 Nicômaco (teoria dos números); Menelau (trigonometria esférica); Teodósio (geometria, astronomia); *Nove Capítulos sobre a Arte da Matemática*; Plutarco.
- 150 Ptolomeu (trigonometria, tábua de cordas, teoria planetária, catálogo de estrelas, geodésia, *Almagesto*).
- 200 Época provável das inscrições esculpidas nas cavernas de Nasik.
- 250 Época provável de Diofanto (teoria dos números, sincopação da álgebra).
- 265 Wang Fan (astronomia, $\pi = 142/45$); Liu Hui (comentário sobre os *Nove Capítulos*).
- 300 Pappus (*Coleção Matemática*, comentários, isoperimetria, invariância projetiva da razão dupla, problema de Castillon-Cramer, teorema do arbelos, generalização do Teorema de Pitágoras, teoremas do centroide, teorema de Pappus).

- 320 Jâmblico (teoria dos números).
- 390 Têon de Alexandria (comentador, editou os *Elementos* de Euclides).
- 410 Hipátia de Alexandria (comentadora, primeira mulher mencionada na história da matemática, filha de Têon de Alexandria).
- 460 Proclo (comentador).
- 476 Nascimento de Āryabhata; queda de Roma.
- 480 Tsu Ch'ung-chih (aproximação de π como 355/113).
- 500 Metrôdoro e a *Antologia Grega*.
- 505 Varāhamihira (astronomia hindu).
- 510 Boécio (escritos de geometria e aritmética que se tornam textos-padrão nas escolas monásticas); Āryabhata, o Velho (astronomia e aritmética).
- 529 Fechamento da Academia de Atenas.
- 530 Simplício (comentador).
- 560 Eutócio (comentador).
- 622 Fuga de Maomé para Meca.
- 625 Wang Hs'iao-t'ung (equações cúbicas).
- 628 Brahmagupta (álgebra, quadriláteros cíclicos).
- 641 Incendiada a última biblioteca de Alexandria.
- 710 Beda (calendário, cálculos com os dedos).
- 711 Os sarracenos invadem a Espanha.
- 766 Os trabalhos de Brahmagupta são levados a Bagdá.
- 775 Alcuíno é convidado a trabalhar na corte de Carlos Magno; tradução de textos hindus para o árabe.
- 790 Harun al-Rashid (califa patrono do saber).
- 820 Mohammed ibn Músâ al-Khowârizmî (escreveu influente tratado de álgebra e um livro sobre os numerais hindus, astronomia, "álgebra", "algoritmo"); Al-Mâmûn (califa patrono do saber).
- 850 Mahāvira (aritmética, álgebra).
- 870 Tâbit ibn Qorra (tradutor de obras gregas, cônicas, álgebra, quadrados mágicos, números amigáveis).
- 871 Alfredo, o Grande, começa seu reinado.
- 900 Abû Kâmil (álgebra).
- 920 Al-Battânî, ou Albategnius (astronomia).
- 950 *Manuscrito Bakhshâli* (data bastante incerta).
- 980 Abû'l-Wefâ (construções geométricas com compasso de abertura fixa, tábuas trigonométricas).

- 1000 Alhazen (óptica, álgebra geométrica); Gerbert, ou papa Silvestre II (aritmética, globos).
- 1020 Al-Karkhî (álgebra).
- 1042 Eduardo, o Confessor, torna-se rei.
- 1048 Morte de aAl-Biruni.
- 1066 Conquista da Inglaterra pelos normandos.
- 1095 Primeira Cruzada.
- 1100 Omar Khayyam (solução geométrica de equações cúbicas, calendário).
- 1115 Edição impressa importante dos *Nove Capítulos sobre a Arte da Matemática*.
- 1120 Platão de Tivoli (tradutor do árabe); Adelardo de Bath (tradutor do árabe).
- 1130 Jabir ibn Aflah, ou Gerber (trigonometria).
- 1140 Johannes Hispalensis (tradutor do árabe); Robert de Chester (tradutor do árabe).
- 1146 Segunda Cruzada.
- 1150 Gerardo de Cremona (tradutor do árabe); Bhāskara (álgebra, equações indeterminadas).
- 1170 Assassinato de Tomás Becket.
- 1202 Fibonacci (aritmética, álgebra, geometria, sequência de Fibonacci, *Liber abaci*).
- 1215 Magna Carta.
- 1225 Jordanus Nemorarius (álgebra).
- 1250 Sacrobosco (numerais indo-arábicos, esfera); Nasîr ed-dîn (trigonometria, postulado das paralelas); Roger Bacon (elogio da matemática); Ch'in Kiu-shao (equações indeterminadas, símbolo do zero, método de Horner); Li Yeh (notação para os números negativos); origem das universidades europeias.
- 1260 Campanus (tradução dos *Elementos* de Euclides, geometria); Yang Hui (frações decimais, exposição remanescente mais antiga do triângulo aritmético de Pascal); começa o reinado de Kublai Kahn.
- 1271 Marco Polo começa suas viagens.
- 1296 Invenção dos óculos (aproximadamente).
- 1303 Chu Shî-kié (álgebra, resolução numérica de equações, triângulo aritmético de Pascal).
- 1325 Thomas Bradwardine (aritmética, geometria, polígonos estrelados).
- 1349 A Peste Negra destrói grande parte da população da Europa.
- 1360 Nicole Oresme (coordenadas, expoentes fracionários).
- 1431 Joana D'Arc é queimada viva.
- 1435 Ulugh Beg (tábuas trigonométricas).
- 1450 Nicholas Cusa (geometria, reforma do calendário); imprensa de tipos móveis.

- 1453 Queda de Constantinopla.
- 1460 Georg von Peurbach (aritmética, astronomia, tábua de senos).
- 1470 Regiomontanus, ou Johann Müller (trigonometria).
- 1478 Primeira aritmética impressa, em Treviso, Itália.
- 1482 Primeira edição impressa dos *Elementos* de Euclides.
- 1484 Nicolas Chuquet (aritmética, álgebra); aritmética de Borghi.
- 1489 Johann Widman (aritmética, álgebra, sinais + e -).
- 1491 Aritmética de Calandri.
- 1492 Colombo descobre a América.
- 1494 Pacioli (*Suma*, aritmética, álgebra, escrituração mercantil de partidas dobradas).
- 1498 Execução de Savonarola.
- 1500 Leonardo da Vinci (óptica, geometria).
- 1506 Scipione del Ferro (equação cúbica); Antonio Maria Fior (equação cúbica).
- 1510 Albrecht Dürer (curvas, perspectiva, trissecção aproximada, modelos para dobraduras de poliedros regulares).
- 1514 Jakon Köbel (aritmética).
- 1517 Reforma Protestante.
- 1518 Adam Riese (aritmética).
- 1521 Excomunhão de Lutero.
- 1522 Aritmética de Tonstall.
- 1525 Rudolff (álgebra, decimais); Buteo (aritmética).
- 1530 Da Coi (equação cúbica); Copérnico (trigonometria, teoria planetária).
- 1544 Stifel: *Arithmetica integra*.
- 1545 Ferrari (equação quártica); Tartaglia (equação cúbica, aritmética, ciência da artilharia); Cardano (álgebra: *Ars magna*).
- 1550 Rhaeticus (tábuas de funções trigonométricas); Scheubel (álgebra); Commandino (tradutor, geometria).
- 1556 Primeiro trabalho de matemática impresso no Novo Mundo.
- 1557 Robert Record (aritmética, álgebra, geometria, sinal =).
- 1558 Elizabeth torna-se rainha da Inglaterra.
- 1564 Nascimento de Shakespeare; morte de Michelangelo.
- 1570 Billingsley e Dee (primeira tradução inglesa dos *Elementos*).
- 1572 Bombelli (álgebra, caso irreduzível das equações cúbicas).
- 1573 Valentin Otho encontra valor chinês antigo de π , a saber 355/113.
- 1575 Xilander, ou Wilhelm Holzmann (tradutor).

- 1580 François Viète, ou Vieta (álgebra, geometria, trigonometria, notação, solução numérica de equações, teoria das equações, produto infinito convergente para $2/\pi$).
- 1583 Clavius (aritmética, álgebra, geometria, calendário).
- 1584 Assassinato de William de Orange.
- 1588 Drake derrota a armada espanhola.
- 1590 Cataldi (frações contínuas); Stevin (frações decimais, tábua de juros compostos, estática, hidrostática).
- 1593 Adrianus Romanus (valor de π , problema de Apolônio).
- 1595 Pitiscus (trigonometria).
- 1598 Edito de Nantes.
- 1600 Thomas Harriot (álgebra, simbolismo); Jobst Bürgi (logaritmos); Galileu (queda dos corpos, pêndulo, projéteis, astronomia, telescópios, cicloide); Shakespeare.
- 1603 Fundação da Accademia dei Lincei (Roma).
- 1608 Invenção do telescópio.
- 1610 Kepler (leis do movimento planetário, volumes, poliedros estrelados, princípio de continuidade); Ludolf van Ceulen (cálculo de π).
- 1612 Bachet de Méziriac (recreações matemáticas, edição da *Arithmetica* de Diofanto).
- 1614 Napier (logaritmos, regra das partes circulares, barras de calcular).
- 1619 Criação da cátedra saviliana em Oxford.
- 1620 Gunter (escala logarítmica, cadeia de Gunter em agrimensura); Paul Guldin (teoremas do centroide de Pappus); Snell (geometria, trigonometria, refinamento do método clássico de cálculo de π , loxodroma); desembarque dos peregrinos.
- 1624 Henry Briggs (logaritmos comuns, tábuas).
- 1630 Mersenne (teoria dos números, números de Mersenne, câmara de compensação para ideias matemáticas); Oughtred (álgebra, simbolismo, régua de cálculo, primeira tábua de logaritmos naturais); Mydorge (óptica, geometria); Albert Girard (álgebra, geometria esférica).
- 1635 Fermat (teoria dos números, máximos e mínimos, probabilidade, geometria analítica, último “teorema” de Fermat); Cavalieri (método dos indivisíveis).
- 1635 Fundação do Harvard College.
- 1637 Descartes (geometria analítica, folium, ovais, regra de sinais).
- 1640 Desargues (geometria projetiva); de Beaune (geometria cartesiana); Torricelli (física, geometria, centro isogônico); Frénicle de Bessy (geometria); Roberval (geometria, tangentes, indivisíveis); De la Loubère (curvas, quadrados mágicos).
- 1643 Coroação de Luís XIV.
- 1649 Execução de Carlos I.

- 1650 Blaise Pascal (cônicas, cicloide, probabilidade, triângulo de Pascal, máquinas de calcular); John Wallis (álgebra, números imaginários, comprimento de arcos, expoentes, símbolo de infinito, produto infinito convergente para $\pi/2$, integração primitiva); Frans van Schooten (edição de Descartes e Viète); Grégoire de Saint-Vincent (quadrador do círculo, outras quadraturas); Wingate (aritmética); Nicolaus Mercator (trigonometria, astronomia, série para aproximação de logaritmos); John Pell (álgebra, atribuição incorreta do nome “equações de Pell”).
- 1660 Sluze (espirais, pontos de inflexão); Viviani (geometria); Brouncker (primeiro presidente da Royal Society, retificação da parábola e da cicloide, séries infinitas, frações contínuas); Restauração.
- 1662 Fundação da Royal Society (Londres).
- 1663 Criação da cátedra lucasiana em Cambridge.
- 1666 Fundação da Academia de Ciências da França.
- 1670 Barrow (tangentes, teorema fundamental do cálculo); James Gregory (óptica, teorema binomial, expansão de funções em séries, astronomia); Huygens (quadratura do círculo, probabilidade, evolutas, relógios de pêndulo, óptica); Sir Christopher Wren (arquitetura, astronomia, física, sistemas de retas geradoras de um hiperboloide de uma folha, comprimento de arco da cicloide).
- 1671 Giovanni Domenico Cassini (astronomia, curvas de Cassini).
- 1672 Mohr (construções geométricas com limitação de instrumentos).
- 1675 Fundação do Observatório de Greenwich.
- 1680 Sir Isaac Newton (fluxos, dinâmica, hidrostática, hidrodinâmica, gravitação, curvas cúbicas, séries, soluções numéricas de equações, problemas-desafio); Johann Hudde (teoria das equações); Robert Hooke (física, balanço de mola); Seki Kōwa (determinantes, cálculo).
- 1682 Leibniz (cálculo, determinantes, teorema multinomial, lógica simbólica, notação, máquinas de calcular); fundação da *Acta Eruditorum*.
- 1685 Kochanski (retificação aproximada da circunferência).
- 1690 Marquês de l'Hospital (cálculo aplicado, formas indeterminadas); Halley (astronomia, tábuas de mortalidade em seguro de vida, tradutor); Jakob (James, Jacques) Bernoulli (curvas isócronas, cicloide, espiral logarítmica, probabilidade); De la Hire (curvas, quadrados mágicos, mapas); Tschirnhausen (óptica, curvas, teoria das equações).
- 1691 Teorema de Rolle do cálculo.
- 1700 Johann (John, Jean) Bernoulli (cálculo aplicado); Giovanni Ceva (geometria); David Gregory (óptica, geometria); Parent (geometria analítica sólida).
- 1706 William Jones (primeiro uso de π como razão entre a circunferência e o diâmetro).
- 1715 Taylor (expansão em série, geometria).
- 1720 De Moivre (matemática atuarial, probabilidade, números complexos, fórmula de Stirling).

- 1731 Alexis Clairaut (geometria analítica sólida).
- 1733 Saccheri (precursor da geometria não euclidiana).
- 1734 Bispo Berkeley (ataque ao cálculo).
- 1740 Marquesa du Châtelet (tradução francesa dos *Principia* de Newton); Frederico, o Grande, torna-se rei da Prússia.
- 1743 Maclaurin (curvas planas superiores, física).
- 1748 Agnesi (geometria analítica, feiticeira de Agnesi).
- 1750 Euler (notação $e^{i\pi} = -1$, reta de Euler, $v - a + f = 2$, equação quártica, função Φ , funções beta e gama, matemática aplicada); regra de Cramer.
- 1770 Lambert (geometria não euclidiana, funções hiperbólicas, uso de projeções para mapas, irracionalidade de π).
- 1776 Independência dos Estados Unidos.
- 1777 Conde du Buffon (cálculo de π por probabilidade).
- 1780 Lagrange [cálculo de variações, equações diferenciais, mecânica, solução numérica de equações, tentativa de rigorização do cálculo (1797), teoria dos números].
- 1789 Revolução Francesa.
- 1790 Meusnier (superfícies).
- 1794 Fundação da Escola Politécnica e da Escola Normal (França); Monge (geometria descritiva, geometria diferencial de superfícies).
- 1797 Mascheroni (geometria do compasso); Wessel (representação geométrica dos números complexos).
- 1799 A França adota o sistema métrico decimal de pesos e medidas; é encontrada a Pedra de Roseta.
- 1800 Gauss (construção de polígonos, teoria dos números, geometria diferencial, geometria não euclidiana, teorema fundamental da álgebra, astronomia, geodésia).
- 1803 Carnot (geometria moderna).
- 1804 Napoleão é feito imperador.
- 1805 Laplace (mecânica celeste, probabilidade, equações diferenciais); Legendre [*Éléments de Géométrie* (1794), teoria dos números, funções elípticas, método dos mínimos quadrados, integrais].
- 1806 Argand (representação geométrica dos números complexos).
- 1810 Gergonne (geometria, editor de *Annales*).
- 1815 “The Analytical Society” de Cambridge; Batalha de Waterloo.
- 1816 Germain (teoria da elasticidade, curvatura média).
- 1819 Horner (solução numérica de equações).
- 1820 Poinot (geometria).

- 1822 Fourier (teoria matemática do calor, séries de Fourier); Poncelet (geometria projetiva; construções com régua apenas); teorema de Feuerbach.
- 1824 Thomas Carlyle (tradução inglesa da *Géométrie* de Legendre).
- 1826 *Journal de Crelle*; princípio de dualidade (Poncelet, Plücker, Gergonne); funções elípticas (Abel, Gauss, Jacobi).
- 1827 Cauchy (rigorização da análise, funções de variável complexa, séries infinitas, determinantes); Abel (álgebra, análise).
- 1828 Green (física matemática).
- 1829 Lobachevsky (geometria não euclidiana); Plücker (geometria analítica superior).
- 1830 Poisson (física-matemática, probabilidade); Peacock (álgebra); Bolzano (séries); Babbage (máquinas de computar); Jacobi (funções elípticas, determinantes).
- 1831 Somerville (exposição da *Mécanique Céleste* de Laplace).
- 1832 Bolyai (geometria não euclidiana); Galois (grupos, teoria das equações).
- 1834 Steiner (geometria sintética superior).
- 1836 *Journal de Liouville*.
- 1837 Demonstração da impossibilidade da trissecção do ângulo e da duplicação do cubo.
- 1839 *Cambridge Mathematical Journal*, que em 1855 tornou-se *Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics*.
- 1841 *Archiv der Mathematik und Physik*.
- 1842 *Nouvelles Annales de Mathématiques*.
- 1843 Hamilton (quatérnios).
- 1844 Grassmann (cálculo de extensões).
- 1846 Rawlinson decifra o rochedo de Behistun.
- 1847 Staudt (A geometria projetiva é libertada das bases métricas).
- 1849 Dirichlet (teoria dos números, série).
- 1850 Mannheim (padronização da régua de cálculo moderna).
- 1852 Chasles (geometria superior, história da geometria).
- 1854 Riemann (análise, geometria não euclidiana, geometria riemanniana); Boole (lógica).
- 1855 Zacharias Dase (calculador relâmpago).
- 1857 Cayley (matrizes, álgebra, geometrias de dimensão superior).
- 1865 Fundação da London Mathematical Society; *Proceedings of the London Mathematical Society*.
- 1872 Fundação da Société Mathématique de France; *Erlanger Programm* de Klein; Dedekind (números irracionais).

- 1873 Hermite demonstra que e é transcendente; Brocard (geometria do triângulo).
- 1874 Georg Cantor (teoria dos conjuntos, números irracionais, números transcendentos, números transfinitos).
- 1877 Sylvester (álgebra, teoria dos invariantes).
- 1878 *American Journal of Mathematics*.
- 1881 Gibbs (análise vetorial).
- 1882 Lindemann (transcendência de π , impossibilidade da quadratura do círculo).
- 1884 Fundação do Circolo Matematico di Palermo.
- 1887 *Rendiconti*.
- 1888 Lemoine (geometria do triângulo, geometrografia); fundação da American Mathematical Society (de início com um nome diferente; *Bulletin of the American Mathematical Society*); Kowalevsky (equações diferenciais parciais, integrais abelianas, Prêmio Bordin).
- 1889 Peano (axiomas para os números naturais).
- 1890 Weierstrass (aritimetização da análise); é organizada a Deutsche Mathematiker-Vereinigung.
- 1892 *Jahresbericht*.
- 1894 Scott (geometria de curvas); *The American Mathematical Monthly*.
- 1895 Poincaré (*Analysis situs*).
- 1896 O teorema dos números primos é demonstrado por Hadamard e de la Vallée Poussin.
- 1899 Hilbert (*Grundlagen der Geometrie*, formalismo).
- 1900 *Transactions of American Mathematical Society*.
- 1903 Integral de Lebesgue.
- 1906 Grace Young (primeira mulher a receber o doutorado na Alemanha mediante processo regular de exame, teoria dos conjuntos); Fréchet (análise funcional, espaços abstratos).
- 1907 Brouwer (intuicionismo).
- 1909 Russell e Whitehead (*Principia mathematica*, logicismo).
- 1914 Começa a Primeira Guerra Mundial.
- 1915 Fundação da Mathematical Association of America.
- 1916 Einstein (teoria geral da relatividade).
- 1917 Hardy e Ramanujan (teoria analítica dos números); Revolução Russa.
- 1922 E. Noether (álgebra abstrata, anéis, teoria dos ideais).
- 1923 Espaços de Banach.
- 1927 Lindberg atravessa o Atlântico em avião.
- 1931 Teorema de Gödel.

- 1933 Hitler torna-se chanceler da Alemanha; fundação do Instituto de Estudos Avançados de Princeton.
- 1934 Teorema de Gelfond.
- 1939 Começa o trabalho do grupo Bourbaki.
- 1941 Bombardeio de Pearl Harbor.
- 1944 IBM Automatic Sequence Controlled Calculator (ASCC).
- 1945 Eletronic Numerical Integrator and Computer (ENIAC); bombardeio de Hiroshima.
- 1948 É instalado no Campo de Provas da Marinha, em Dahlgren, Virgínia, um computador ASCC aprimorado.
- 1963 Trabalho de P. J. Cohen sobre a hipótese do contínuo; o presidente Kennedy é assassinado.
- 1971 É posta à venda no mercado a primeira calculadora portátil; é fundada a Association for Women in Mathematics.
- 1973 K. Appel e W. Haken comprovam a conjectura (ou problema) das quatro cores.
- 1985 Entram em uso os supercomputadores.
- 1987 Comprova-se a conjectura de Bieberbach.

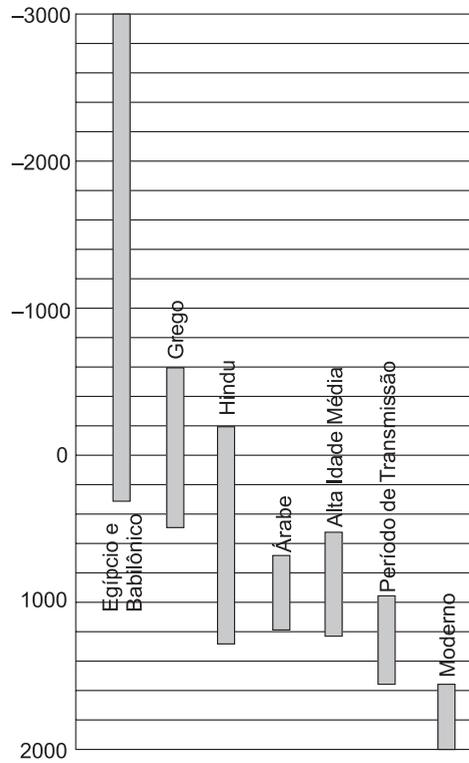


Figura 128
Períodos Matemáticos

Respostas e sugestões para a resolução de exercícios

Capítulo 1

- 1.1 (a) “um homem” = 20 (dez dedos das mãos mais dez dedos dos pés) etc.
(b) Se, para contar, dobram-se um a um os dedos de uma mão aberta, quando se atinge o 5 todos os dedos estão dobrados e “chegou-se a um fim” ou “morreu”.
(c) O dedo-máximo é o dedo médio, que indicará o 3 quando se contar nos dedos da mão, começando no dedo mínimo como 1.
(d) Neste caso temos palavras-número que se originaram de gestos usados anteriormente para expressar os números.
(e) O marido e a esposa dormem no mesmo colchão.
(f) Aqui a referência é aos nove meses da gravidez.
- 1.3 (a) 27, 3, 2.
(b) $5780 = \epsilon'\psi\pi$, $72803 = \zeta\mu\beta'\omega\gamma$, $450082 = \mu\text{M}\epsilon\text{M}\pi\beta$, $3257888 = \tau\text{M}\kappa\text{M}\epsilon\text{M}\zeta'\omega\pi\eta$.
- 1.4 (d) $360 = 2(5^3) + 4(5^2) + 2(5) = ((\)))^{**}$,
 $252 = 2(5^3) + 2(1) = ((//, 78 = 3(5^2) + 3(1) =))//$,
 $33 = 1(5^2) + 1(5) + 3(1) =)^{*}///$.
(e) $360 = *(#\$, $252 = *##*$, $78 =)\#$, $33 = //$.
- 1.5 (a) Note que $ab = [(a - 5) + (b - 5)]10 + (10 - a)(10 - b)$.
- 1.6 (b) Multiplique a fração decimal por b , depois a parte decimal desse produto por b e assim por diante.
(c) $(0,3012)_4 = 99/128 = 0,7734375$.
- 1.8 (a) Primeiro expresse na base 10, e depois na base 8.
(b) 9, 8, 7.
(c) não, sim, sim, não.
(d) No primeiro caso se tem $79 = b^2 + 4b + 2$.
(e) Denotando os dígitos por a, b, c , temos $49a + 7b + c = 81c + 9b + a$, onde a, b, c são menores que 7.
(f) Devemos ter $3b^2 + 1 = t^2$, t e b inteiros positivos, $b > 3$.

- 1.9 (a) Expresse w na base dois.
- 1.10 (a) Sejam t o algarismo das dezenas e u o algarismo das unidades. De acordo com as instruções temos $2(5t + 7) + u = (10t + u) + 14$, que é o resultado final anunciado. O truque agora torna-se óbvio.

Capítulo 2

- 2.1 (a) Suponha n regular. Então $1/n = a_0 + a_1/60 + \dots + a_r/60^r = (a_0 60^r + a_1 60^{r-1} + \dots + a_r)/60^r = m/60^r$, digamos. Segue-se que $mn = 60^r$ e n não pode ter outros fatores primos além dos de 60.
- (e) 3.
- 2.2 (a) Temos $(1, 2)^x = 2$, donde $x = (\log 2)/(\log 1,2)$.
- 2.4 (a) Temos $x^2 + y^2 = 1000, y = 2x/3 - 10$.
- (d) 20, 12.
- (e) altura do trapézio = 24
- (f) 0; 18.
- (g) Sim.
- 2.5 (c) 31; 15.
- (d) Denotando os segundos membros das equações dadas por a e b , respectivamente, obtém-se $x^8 + a^2 x^4 = b^2$.
- 2.6 (b) Faça $x = 2y$.
- (c) Elimine x e y , obtendo uma equação cúbica em z .
- (d) Tome a cúbica em x com coeficiente dominante unitário e submeta-a a uma transformação linear do tipo $x = y + m$. Determine m de modo que a cúbica em y resultante careça de termo linear.
- 2.8 (b) Expresse, na base binária, o fator que é sucessivamente meado.
- 2.9 (c) Tome $p = 1, 3, 9$.
- (e) Se $n = 3a$, a outra fração unitária é $1/2a$.
- (f) Se $n = 5a$, a outra fração unitária é $1/3a$.
- (h) Aplique a relação dada em (d).
- 2.10 (a) $2/7 = 1/4 + 1/28$.
- (b) $2/97 = 1/49 + 1/4753$.
- (c) Denote a fração dada por a/b , onde $a < b$, e seja $b/a = x + r/a, r < a$. Então $a/b = 1/(x + r/a), 0 < r/a < 1$. Mas $1/x > 1/(x + r/a) > 1/(x + 1)$.
- 2.11 (b) Sim.

- (c) $5 \frac{1}{2}$.
- (d) $(35)^2/13$ cúbitos.
- 2.12 (a) Por *fração Ahmes* entendia *fração unitária*. Só se escreviam os denominadores das frações unitárias.
- (c) Seja x a maior parte e d a razão da progressão aritmética. Obtemos então $5x - 10d = 100$ e $11x - 46d = 0$.
- 2.13 (a) $256/81$ ou, aproximadamente, 3,16.
- (c) Considere o triângulo retângulo T_1 de catetos a e b e outro triângulo qualquer T_2 de lados a e b . Ponha T_2 sobre T_1 de modo que um par de lados iguais coincida. Ou use a fórmula $K = (1/2)ab \operatorname{sen} C$.
- (d) Trace a diagonal DB e use (c).
- (e) $(a + c)(b + d)/4 = [(ad + bc)/2 + (ab + cd)/2]/2$. Agora use (d).
- (f) O corolário não está correto.
- 2.14 (b) Parta de $\sqrt{m} - \sqrt{n} \geq 0$.
- (c) Considere a pirâmide da qual o tronco dado é parte e expresse o volume deste último como diferença entre os volumes de toda a pirâmide obtida e o daquela que se acrescentou.
- 2.15 (a) 3, 4.
- (b) 4, 10.
- 2.16 Os 4 triângulos retângulos cujos catetos têm comprimentos 3 e 4, juntamente com o quadrado unitário menor, formam um quadrado de área 25. Segue-se que a hipotenusa do triângulo retângulo de catetos 3 e 4 é 5. Como um triângulo é determinado por seus três lados, conclui-se então que um triângulo 3, 4, 5 é um triângulo retângulo.

Capítulo 3

- 2.2 (a) Mostre que $2^m - 1$ é fator de $2^{mn} - 1$.
- (b) 8128.
- (c) Se a_1, a_2, \dots, a_n representam todos os divisores de N , então $N/a_1, N/a_2, \dots, N/a_n$ também representam todos os divisores de N .
- (d) A soma dos divisores próprios de p^n é $(p^n - 1)/(p - 1)$.
- (h) (1) Para $n = 7$ temos $2^6(2^7 - 1) = 2^{13} - 2^6 \approx 2^{13}$.
 $\operatorname{Log} 2^{13} = 13 \operatorname{log} 2 = 3,913\dots$. A resposta, portanto, é 4.
- (i) A cadeia social de cinco elos é 12496, 14288, 15472, 14536, 14264.
- (j) Os divisores de 120 são 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60, 120.
- (k) Sim.

- 3.3 (a) 1, 6, 15, 28.
 (b) Um número oblongo é da forma $a(a + 1)$.
 (d) Ver Figura 129.
 (g) $2^{n-1} (2^n - 1) = 2^n(2^n - 1)/2$.
 (h) $a = (m - 2)/2, b = (4 - m)/2$.
 (i) $a = 5/2, b = -3/2$.

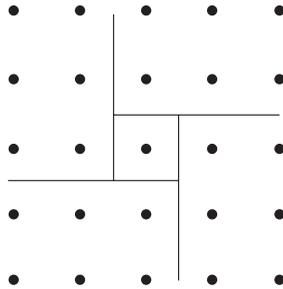


Figura 129

- 3.4 (a) Use o fato de que $(a - b)^2 \geq 0$.
 (c) Multiplique a primeira equação por b e a segunda por a e elimine então ab/n .
 (e) Um cubo tem 8 vértices, 12 arestas e 6 faces.
 (f) Faça $m = a/(b + c), n = c/(a + b)$. Usando o fato de que $b = 2ca(c + a)$, mostre que $2mn/(m + n) = b/(c + a)$.
- 3.6 (c) Se existisse um triângulo retângulo isósceles de lados inteiros, $\sqrt{2}$ seria um número racional.
 (d) Se existissem inteiros positivos a, b, c ($a \neq 1$) tais que $a^2 + b^2 = c^2$ e $b^2 = ac$, então a, b, c não poderiam ser primos entre si. Mas se há um terno pitagórico em que um dos termos é média proporcional dos outros dois, deve haver também um terno pitagórico primitivo da mesma espécie.
 (g) Mostre que $(3a + 2c + 1)^2 + (3a + 2c + 2)^2 = (4a + 3c + 2)^2$, se $a^2 + (a + 1)^2 = c^2$.
 (h) Use (g).
 (i) Como na representação paramétrica dos termos pitagóricos primitivos dada na Seção 2-6, u é par ou v é par, então o cateto a é múltiplo de 4. Se u é múltiplo de 3 ou v é múltiplo de 3, então o cateto a é múltiplo de 3. Se nenhum deles é múltiplo de 3, então u é da forma $3m \pm 1$ e v é da forma $3n \pm 1$, seguindo-se que $u^2 - v^2$ é múltiplo de 3 e, portanto, o cateto b é múltiplo de 3. Se u é múltiplo de 5 ou v é múltiplo de 5, então o cateto a é múltiplo de 5. Se nenhum deles é múltiplo de 5, então u é da forma $5m \pm 1$ ou $5m \pm 2$ e v é da forma $5n \pm 1$ ou $5n \pm 2$.

Se $u = 5m \pm 1$ e $v = 5n \pm 1$ ou se $u = 5m \pm 2$ e $v = 5n \pm 2$, então $u^2 - v^2$ é um múltiplo de 5. Se $u = 5m \pm 1$ e $v = 5n \pm 2$ ou se $u = 5m \pm 2$ e $v = 5n \pm 1$, então $u^2 + v^2$ é um múltiplo de 5. Segue-se então que ou o cateto b é múltiplo de 5 ou a hipotenusa c é múltiplo de 5.

- (j) Se n é ímpar e $n > 2$, $(n, (n^2 - 1)/2, (n^2 + 1)/2)$ é um terço pitagórico. Se n é par e $n > 2$, $(n, n^2/4 - 1, n^2/4 + 1)$ é um terço pitagórico.
- (k) Como $a^2 = (c - b)(c + b)$ segue-se que $b + c$ é fator de a^2 . Portanto $b < a^2$ e $c < a^2$, e o número de combinações dos números naturais b e c nessas condições é finito.
- 3.7 (a) Se a reta passasse pelo ponto (a, b) do reticulado das coordenadas, teríamos $\sqrt{2} = a/b$ (número racional).
- (c) Suponha $\sqrt{p} = a/b$, onde a e b são primos entre si.
- (d) Suponha $\log_{10} 2 = a/b$, onde a e b são inteiros. Daí então $10^a = 2^b$, o que é impossível.
- (f) Suponha (ver Figura 130) que AC e BC sejam comensuráveis, ambos múltiplos de AP . Mostre então que DE e DB também são comensuráveis, ambos múltiplos de AP , e assim por diante.

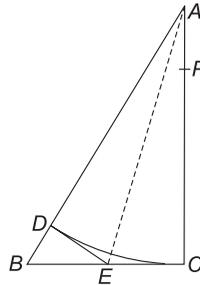


Figura 130

- 3.9 (b) ab é a quarta proporcional de 1, a , b .
- (c) a/b é a quarta proporcional de b , 1, a .
- (d) \sqrt{a} é uma média proporcional de 1 e a .
- (g) Construa a média proporcional de a e na .
- (h) Use o fato de que $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 + b^2 - ab)$.
- (i) Use o fato de que $a(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})^{1/2} = [a(a + a\sqrt{2} + a\sqrt{3})]^{1/2}$.
- (j) Use o fato de que $(abcd)^{1/4} = [(ab)^{1/2}(cd)^{1/2}]^{1/2}$.
- (k) 60° .
- 3.10 (a) Obtenha $\sqrt{12}$ como em 3.9(d).

- (c) Denote as partes por x e $a - x$.
Então $x^2 - (a - x)^2 = x(a - x)$ ou $x^2 + ax - a^2 = 0$.
- (e) Mostre que $OM + ON = g$ e $(OM)(ON) = b$.
- (g) Seja A o ponto $(0, 2)$ e suponha que RS corte o eixo x em L e a tangente à circunferência em A no ponto T . Temos então as seguintes equações: circunferência: $x^2 + y(y - 2) = 0$; reta AR : $2x + r(y - 2) = 0$; reta AS : $2x + s(y - 2) = 0$. Portanto $(\text{reta } AR)(\text{reta } AS) - 4(\text{circunferência}) = 0$ acarreta $(y - 2) [2x(r + s) + rs(y - 2) - 4y] = 0$, que é a equação de um par de retas sobre as intersecções da circunferência com as retas AR e AS . Segue-se então que o segundo fator, igualado a zero, representa a reta RS . Fazendo $y = 0$, obtém-se $OL = rs(r + s) = b/g$; fazendo $y = 2$, obtém-se $AT = 4/(r + s) = 4/g$.
- 3.11 (b) Primeiro trisseccione a diagonal BD por meio dos pontos E e F . Então as linhas quebradas AEC e AFC dividem a figura em três partes equivalentes. Transforme essas partes de modo a satisfazer as condições, traçando paralelas a AC por E e F .
- (d) Por B trace BD paralela a MN , cortando AC em D . Então, se $AB'C'$ é o triângulo desejado, AC' é média proporcional de AC e AD .
- (e) Seja ABC o triângulo dado. Trace por B a paralela a AC e seja B' a intersecção dessa paralela com a reta por A que forma com AC o ângulo do vértice dado. Agora use (d).
- 3.12 (a) Um ângulo poliédrico convexo deve conter pelo menos 3 faces e a soma dos ângulos de suas faces deve ser menor que 360° .
- (b) $V = e^3 \sqrt{2} / 3, A = 2e^2 \sqrt{3}$.
- 3.13 Este exercício constitui um bom projeto de iniciação científica para os alunos mais bem preparados, que poderiam ter o cuidado de procurar as fórmulas de mensuração dos poliedros regulares em, por exemplo, *CRC Standard Mathematical Tables*.
- 3.14 (a) Denote o maior dos segmentos por y e o menor por x . Então $(x + y):y = y:x$, ou $x^2 + xy - y^2 = 0$, ou $(x/y)^2 + x/y - 1 = 0$, ou $x/y = (\sqrt{5} - 1)/2$.
- (b) Na Figura 131, os triângulos isósceles DAC e DGC são semelhantes. Portanto $AD:DG = DC:GC$ e daí $DB:DG = DG:GB$.
- (c) $AG:AH = AG:GB = AB:AG = (AB - AG):(AG - AH) = GB:HG = AH:HG$.
- (d) Seja HG , na Figura 131, o lado dado. Construa o triângulo retângulo PQR com os catetos PR e QR iguais a HG e $HG/2$, respectivamente. Sobre o prolongamento de PQ marque $QT = QR$. Então $PT = GB = GC = HC$, e assim por diante.
- (e) Seja DB , na Figura 131, a diagonal dada. Construa o triângulo retângulo PQR com os catetos PR e QR iguais a $DB/2$ e DB , respectivamente. Sobre PQ marque $PT = PR$. Então $TQ = DG = DC$, e assim por diante.
- 3.16 Ver *The Mathematical Gardner* (Prindle, Weber & Schmidt, 1980), pp. 276-7.

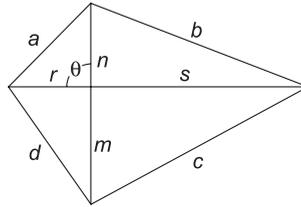


Figura 131

Capítulo 4

- 4.1 (b) Sejam A o ponto dado e BC o segmento de reta dado. Construa, usando Proposição 1, o triângulo equilátero ABD . Trace a circunferência $B(c)$ e seja G sua intersecção com a semirreta BD (origem B). Trace então a circunferência $D(g)$ e seja L sua intersecção com a semirreta DA (origem D). Então AL é o segmento procurado.
- (c) Use a Proposição 2 do Livro I.
- 4.2 (a) Ver T. L. Heath, *A Manual of Greek Mathematics*, pp. 155-7.
- (b) (1) Como equações das parábolas podem-se tomar $x^2 = sy$ e $y^2 = 2sx$, onde s e $2s$ são as cordas focais mínimas respectivas. (2) Como equações da parábola e da hipérbole podem-se tomar $x^2 = sy$ e $xy = 2s^2$, respectivamente.
- 4.3 (a) Seja M o ponto médio de OA e seja E o centro do retângulo $OADB$. Então, pela Proposição 6, Livro II (ver Seção 3-6), $(OA')(AA') + (MA)^2 = (MA')^2$. Somando $(ME)^2$ a ambos os membros, obtém-se: $(OA')(AA') + (EA)^2 = (EA')^2$. De maneira análoga se chega a $(OB')(BB') + (EB)^2 = (EB')^2$. Donde: $(OA')(AA') = (OB')(BB')$.
- 4.4 (a) Temos $r = P_1P_2 = AP_1 \operatorname{tg} \theta = 2a \operatorname{sen} \theta \operatorname{tg} \theta$. Segue-se então que $r = 2a(y/r)(y/x)$, ou $r^2x = 2ay^2$.
- (b) Denote as coordenadas de P por (x, y) . Então $(AQ)^3/(OA)^3 = y^3/x^3 = y/(2a - x) = RP/RA = OD/OA = n$, onde R é o pé da perpendicular baixada de P sobre OA .
- (c) Seja S o pé da perpendicular a MN por R e seja T o ponto médio de RS . Trace a circunferência $S(T)$, cortando TP em U . Então $SCPU$ é um paralelogramo. Seja V a intersecção de TP e MN . Indicando por Q o ponto diametralmente oposto a T , seja W a intersecção de TP com a tangente à circunferência $S(T)$ em Q . Os triângulos SUV e APV são congruentes e $UV = VP$. É fácil agora mostrar que $TP = UW$. Logo, P está na cissoide de $S(T)$ e QW para o polo T .

- 4.5 (a) A equação da hipérbole, tomando-se como eixos coordenados suas assíntotas, é $xy = ab$, onde $(b/2, a/2)$ é o centro do retângulo. A equação da circunferência circunscrita ao retângulo é $x^2 + y^2 - ay - bx = 0$. Excluído o ponto (b, a) , a intersecção da hipérbole e a circunferência é $(\sqrt[3]{a^2b}; \sqrt[3]{ab^2})$. Mas $\sqrt[3]{a^2b}$ e $\sqrt[3]{ab^2}$ são as médias proporcionais entre a e b .
- 4.6 (a) Denote AB por a , AC por b , BC por c e o ângulo ADB por θ . Então, pela lei dos senos, aplicada primeiro ao triângulo BCD e depois ao triângulo ABD , $\text{sen } 30^\circ / \text{sen } \theta = a/c$, $\text{sen } \theta / \text{sen } 120^\circ = a/(b+a)$. Portanto $1/\sqrt{3} = \text{tg } 30^\circ = a^2/c(b+a)$. Elevando ao quadrado ambos os membros e lembrando que $c^2 = b^2 - a^2$, obtemos $2a^3(2a+b) = b^3(2a+b)$, ou $b^3 = 2a^3$.
- (b) Trace CO e use o fato de que o ângulo externo de um triângulo é igual à soma dos internos não adjacentes.
- (a) Seja R o pé da perpendicular ao eixo x por Q . Se RQ corta c em S , então $OQ/RQ = PQ/SQ$.
- (b) Ver 4.6(a).
- (c) Ver 4.6(b).
- (d) Ver 4.4.
- 4.8 (a) Sejam Q e N os pés das perpendiculares a OA por P e M e seja S a intersecção de QP e OM . Como P e R estão na hipérbole, temos $(OQ)(QP) = (ON)(NR)$, ou $NR = (OQ)(NM)/ON$.
 Onde $SP = RM$. Mas, da semelhança dos triângulos OQS e ONM , $QS = (OQ)(NM)/ON$. Segue-se que $SRMP$ é um retângulo. Se T é o centro desse retângulo, $OP = PT = TM$.
- (b) Seja o raio $OA = 1$ e denote o ângulo AOB por 3θ . Tome P no arco AB de maneira que o ângulo $AOP = 1/3$ ângulo AOB e seja Q o pé da perpendicular a OC por P . Então $AP = 2\text{sen } \theta/2 = 2PQ$.
- 4.9 (a) Use o fato de que a soma da progressão geométrica infinita $1/2 - 1/4 + 1/8 - 1/16 + \dots$ é $1/3$. Para outra solução euclidiana assintótica do problema da trissecção, ver Problema 4134, *The American Mathematical Monthly*, dez., 1945, pp. 587-9.
- 4.10 (a) Temos ângulo $AOP = k\pi/2$, quando $OM = k(OA) = k$. Portanto, denotando-se as coordenadas de P por (x, y) , $y = k = x \text{tg}(k\pi/2) = x \text{tg}(\pi y/2)$.
- (c) Seja Q a intersecção da quadratriz com OA . Então $OQ = \lim_{y \rightarrow 0} [y/\text{tg}(\pi y/2)] = 2/\pi$, devido à regra de l'Hospital. Agora é fácil mostrar que $AC:OA = OA:OQ$.
- 4.11 (a) 3,1414.
 (b) 3,14153.

- (c) $GB/BA = EF/FA = (DE)^2/(DA)^2 = (DE)^2/[(BA)^2 + (BC)^2]$. Portanto, $GB = 4^2/(7^2 + 8^2) = 16/113 = 0,1415929\dots$. Isso leva a $355/113$ como aproximação de π .
- 4.13 (a) Sejam $\alpha = \arctg(1/5)$ e $\beta = \arctg(1/239)$. Mostre então que $4\alpha - \beta = \pi/4$, mostrando que $\operatorname{tg}(4\alpha - \beta) = 1$.
- (b) Considere um círculo de raio unitário. Então o lado de um quadrado inscrito é dado por $\sec \theta$, onde $\theta = 45^\circ$. A soma de 2 lados de um octógono regular inscrito é dada por $\sec \theta \sec \theta/2$; a soma de 4 lados de um hexadecágono regular inscrito é dada por $\sec \theta \sec \theta/2 \sec \theta/4$ e assim por diante. Segue-se então que $\sec \theta \sec \theta/2 \sec \theta/4 \dots \rightarrow \pi/2$, comprimento de um quadrante de circunferência do círculo. Portanto $2/\pi = \cos \theta \cos \theta/2 \cos \theta/4 \dots$. Use agora o fato de que $\cos \theta = \sqrt{2}/2$ e $\cos \theta/2 = [(1 + \cos \theta)/2]^{1/2}$, $\cos \theta/4 = [(1 + \cos \theta/2)/2]^{1/2}$ e assim por diante.
- (c) Faça $x = \sqrt{1/3}$ na série de Gregory.
- (f) Denote $\pi/2n$ por θ . Então $\sin \theta = s_{2n}/2R$, $\cos \theta = s_n/2s_{2n}$. Use agora o fato de que $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$.
- (g) Denote $\pi/2n$ por θ . Então $\operatorname{tg} 2\theta = S_n/2r$, $\operatorname{tg} \theta = S_{2n}/2r$. Use agora o fato de que $\operatorname{tg} 2\theta = (2\operatorname{tg} \theta)/(1 - \operatorname{tg}^2 \theta)$.
- (h) Mostre primeiro que $p_n = 2nR \sin(\pi/n)$, $P_n = 2nR \operatorname{tg}(\pi/n)$.
- (i) Mostre primeiro que $a_n = nR^2 \sin(\pi/n)\cos(\pi/n)$, $A_n = nR^2 \operatorname{tg}(\pi/n)$.
- 4.14 (a) $\operatorname{arc} AR = \pi/2$, $AT = 3/2$.
- (b) Seja M o pé da perpendicular a OA por P . Então $PM = \sin \theta$, $OM = \cos \theta$; donde $\operatorname{tg} \phi = \sin \theta/(2 + \cos \theta)$.
- (c) Seja N a outra intersecção de PS com a circunferência. Então, como $ON < SN$, ângulo $SON = \phi + \varepsilon$, onde $\varepsilon > 0$. Portanto, ângulo $ONP = 2\phi + \varepsilon$ e $\theta = 3\phi + \varepsilon$.
- 4.15 (a) A 32ª casa decimal da expansão de π é ocupada pelo 0.

Capítulo 5

- 5.1 (c) Suponha $a > b$. Então o algoritmo pode ser resumido da maneira seguinte:

$$a = q_1 b + r_1 \quad (0 < r_1 < b)$$

$$b = q_2 r_1 + r_2 \quad (0 < r_2 < r_1)$$

$$r_1 = q_3 r_2 + r_3 \quad (0 < r_3 < r_2)$$

.....

.....

$$r_{n-2} = q_n r_{n-1} + r_n \quad (0 < r_n < r_{n-1})$$

$$r_{n-1} = q_{n+1} r_n$$

Do último passo se deduz que r_n divide r_{n-1} . Esse fato, quando considerado juntamente com o penúltimo passo, permite concluir que r_n divide r_{n-2} , pois

divide r_n e divide $q_n r_{n-1}$. Analogamente, r_n divide r_{n-3} . Assim sucessivamente, r_n divide cada r_i e portanto divide a e b . Por outro lado, do primeiro passo segue-se que todo divisor c de a e b divide também r_1 . Dividindo b e r_1 , c também divide r_2 . Assim sucessivamente, c divide cada r_i . Logo, c divide r_n .

- (d) Usando o penúltimo passo do algoritmo, pode-se expressar r_n em termos de r_{n-1} e r_{n-2} . Substituindo na expressão de r_n assim obtida r_{n-1} tirado do antepenúltimo passo, pode-se obter r_n em termos de r_{n-2} e r_{n-3} . Continuando dessa maneira obter-se-á finalmente r_n em termos de a e b .
- 5.2 (a) Se p não divide u , então existem inteiros P e Q tais que $Pp + Qu = 1$, ou $Ppv + Quv = v$.
- (b) Suponha que pudessem existir duas decomposições em fatores primos do inteiro n . Se p é um dos fatores primos da primeira decomposição ele deve, em virtude de (a), dividir um dos fatores de segunda decomposição, isto é, coincide com um desses fatores.
- (c) Note que $273 = (13)(21)$. Ache [ver 5.1(e)] inteiros p e q tais que $13p + 21q = 1$. Dividindo por 273, obtém-se $p/21 + q/13 = 1/273$. Analogamente, determine inteiros r e s tais que $1/21 = r/3 + s/7$.
- 5.5 (c) Cada b_i de (b) pode assumir $a_i + 1$ valores.
- (f) Como b divide ac , temos $b_i \leq a_i + c_i$. Sendo a e b primos entre si, então $a_i = 0$ ou $b_i = 0$. Em ambos os casos, $b_i \leq c_i$.
- (h) Suponha $\sqrt{2} = a/b$, onde a e b são inteiros positivos. Então, como $a^2 = 2b^2$, temos $(2a_1, 2a_2, \dots) = (1 + 2b_1, 2b_2, \dots)$ e portanto $2a_1 = 1 + 2b_1$, o que é impossível.
- 5.6 (c) Seja ABC o triângulo dado e suponha que XY , paralela a BC , corte AB em X e AC em Y . Trace BY e CX . Mostre que $\triangle BXY : \triangle AXY = \triangle CXY : \triangle AXY$. Mas, por VII1, $\triangle BXY : \triangle AXY = BX : XA$ e $\triangle CXY : \triangle AXY = CY : YA$.
- 5.7 (c) Existem inteiros positivos p e q tais que $pr - qs = \pm 1$ [ver 5.1(f)]. Então, a diferença entre o ângulo subtendido no centro do s -ágono por p de seus lados e o ângulo subtendido no centro do r -ágono por q de seus lados é $p(360^\circ/s) - q(360^\circ/r) = (pr - qs)(360^\circ/rs) = (\pm 360^\circ)/(rs)$.
- (f) Para ver como Euclides provou essa proposição, consulte Heath, *The Thirteen Books of Euclid's Elements*. A seguir estão as linhas gerais de uma elegante demonstração trigonométrica. Seja $u = 18^\circ$. Então $\sin 4u = \cos u$ e $\cos 4u = \sin u$. Mostre que isso implica, respectivamente, $-8 \sin^4 u + 4 \sin^2 u = \sin u$ e $8 \sin^4 u - 8 \sin^2 u + 1 = \sin u$. Daí se obtém $-16 \sin^4 u + 12 \sin^2 u = 1$. Agora, se p e d representam os lados de um pentágono regular e de um decágono regular inscritos num círculo unitário, mostre que $p = 2 \sin 2u$ e $d = 2 \sin u$. Portanto $p^2 - d^2 = -16 \sin^4 u + 12 \sin^2 u = 1$, o que encerra a demonstração.

- (g) Mostre que $\operatorname{tg}(180^\circ/17)$ é aproximadamente igual a $3/16$.
- 5.12 (c) $h_c = b \operatorname{sen} A$.
- (f) $h_a = t_a \cos[(B - C)/2]$.
- (g) $4h_a^2 + (b_a - c_a)^2 = 4m_a^2$.
- (h) $b_a - c_a = 2R \operatorname{sen}(B - C)$.
- (i) $4R(r_a - r) = (r_a - r)^2 + a^2$. Se M e N são os pontos médios do lado BC e do arco BC , então $MN = (r_a - r)/2$; obviamente, dois quaisquer dos elementos R , a e MN determinam o terceiro.
- (j) $h_a = 2rr_a/(r_a - r)$.
- 5.13 (b) Ver Problema 3336, *The American Mathematical Monthly*, ago., 1929.
- (c) Ver Problema E 1447, *The American Mathematical Monthly*, set., 1961. A solução dada nessa referência é uma aplicação singularmente fina do método dos dados.
- 5.14 (b) Seja M o ponto médio de BC . A poligonal EMA bissecciona a área. Por M trace MN paralela a AE , cortando um lado do triângulo ABC em N . Então EN é a reta procurada.
- (c) Sejam a, b, h as bases e a altura do trapézio dado, c a reta paralela procurada, p a altura do trapézio de bases a e c e q a altura do trapézio de bases c e b . Temos então:
- $$(a + c)p = (c + b)q, p + q = h, (a + c)2p = (a + b)h.$$
- Eliminando p e q e resolvendo para c , obtemos
- $$c = [(a^2 + b^2)/2]^{1/2},$$
- média da raiz da média dos quadrados de a e b .

Capítulo 6

- 6.1 (a) $\sec[(29/30)90^\circ] = \sec 87^\circ = 19,11$.
- 6.2 (d-1) O volume do segmento é igual ao volume de um setor esférico menos o volume de um cone. Também, $a^2 = b(2R - b)$.
- (d-2) O segmento é a diferença entre 2 segmentos, cada um de uma base; indicando por u e v as alturas destes últimos, então $V = \pi R(u^2 - v^2) - [\pi(u^3 - v^3)]/3 = \pi b[(Ru + Rv) - (u^2 + uv + v^2)/3]$. Mas $u^2 + uv + v^2 = b^2 + 3uv$ e, também, $(2R - u)u = a^2$ e $(2R - v)v = b^2$. Portanto, $V = \pi b[(a^2 + b^2)/2 + (u^2 + v^2)/2 - b^3/3 - uv] = \pi b(a^2 + b^2)/2 + b^2/2 + uv - b^2/3 - uv$, e assim por diante.
- (f) Trace os dois planos perpendiculares a um diâmetro da superfície esférica pelos pontos que o trisseccionam.
- 6.4 (a) $(GC)^2 + (TW)^2 = 4r_1 r_2$.

- 6.5 (a) Prolongue CB até E , de modo que $BE = BA$. Prove que os triângulos MBA e MBE são congruentes. Para uma demonstração alternativa singularmente elegante, veja Solução I do Problema 466, *Crux mathematicorum*, jun.-jul., 1980, p. 189.
- 6.7 (b) Sejam A e B pontos e C uma reta. Prolongue AB , cortando C em S . Agora ache T na reta C de maneira que $(ST)^2 = (SA)(SB)$. Em geral são duas as soluções.
- (c) Determine o simétrico do ponto dado em relação a uma das bissetrizes do ângulo formado pelas retas dadas.
- (d) Determine o simétrico F' do ponto F em relação à reta m . Usando agora (b), ache os centros das circunferências por F e F' que tangenciam a diretriz dada.
- 6.8 (b) Para o problema (1) tome A e B no eixo x e simétricos entre si em relação à origem.
- (c) 1. Suponhamos que as bissetrizes interna e externa do ângulo APB cortem AB em M e N . Então M e N estão no lugar procurado e o ângulo MPN é reto. 2. Sejam A e B os pontos fixos, P o ponto móvel e O o ponto médio de AB . Some as expressões de $(PA)^2$ e $(PB)^2$ dadas pela lei dos cossenos aplicada aos triângulos PAO e PBO .
- 6.9 (a) Seja $ABCD$ o quadrilátero cíclico. Ache E na diagonal AC de modo que $\angle ABE = \angle DBC$. Sendo semelhantes os triângulos ABE e DBC , obtém-se que $(AB)(DC) = (AE)(BD)$. E da semelhança dos triângulos ABD e EBC , decorre que $(AD)(BC) = (EC)(BD)$.
- (b-1) Em (a) tome AC como um diâmetro, $BC = a$ e $CD = b$.
- (b-2) Em (a) tome AB como um diâmetro, $BD = a$ e $BC = b$.
- (b-3) Em (a) tome AC como um diâmetro, $BD = t$ e perpendicular a AC .
- (d-1) Considerando unitários os lados do triângulo, aplique o teorema de Ptolomeu ao quadrilátero $PACB$.
- (d-2) Considerando unitários os lados do quadrado, aplique o teorema de Ptolomeu aos quadriláteros $PBCD$ e $PCDA$.
- (d-3) Considerando unitários os lados do pentágono, aplique o teorema de Ptolomeu aos quadriláteros $PCDE$, $PCDA$ e $PBCD$.
- (d-4) Considerando unitários os lados do hexágono, aplique o teorema de Ptolomeu aos quadriláteros $PBCD$, $PEFA$, $PBCF$ e $PCFA$.
- 6.11 (b) Suponhamos que um raio de luz emane do ponto A , incida no espelho em M e que, depois da reflexão, passe por um ponto B . Se B' é a imagem de B no espelho, então o plano do espelho bissecta perpendicularmente BB' e então AMB' deve ser uma linha reta.
- (c) Aplique (b).
- 6.12 (b) Mostre, a partir de uma figura, que $ab = 2rs$ e $a + b = r + s$ e resolva então o sistema assim formado.

- 6.13 (a) 120 maçãs.
 (b) 60 anos de idade.
 (c) 900 talentos.
 (d) Cada Graça tinha $4n$ maçãs, deu $3n$ e ficou com n .
- 6.14 (a) $2/5$ de um dia.
 (b) $144/37$ horas.
 (c) 30,5 minae de ouro, 9,5 minae de cobre, 14,5 minae de estanho e 5,5 minae de ferro.
- 6.15 (a) 84 anos de idade.
 (b) 7,4,11,9.
 (c) Faça $CD = 3x$, $AC = 4x$, $AD = 5x$, $CB = 3y$. Então, como $AB/DB = AC/CD$, obtemos $AB = 4(y - x)$. O teorema de Pitágoras nos leva a $7y = 32x$. Donde, finalmente: $AB = 100$, $AD = 35$, $AC = 28$, $BD = 75$, $DC = 21$.
 (d) 1806.
- 6.16 (a) $481 = 20^2 + 9^2 = 16^2 + 15^2$.
 (b) Temos $5 = 2^2 + 1^2$, $13 = 3^2 + 2^2$, $17 = 4^2 + 1^2$. Usando as igualdades de (a), obtém-se: $(5)(13) = 8^2 + 1^2 = 7^2 + 4^2$, $(5)(17) = 9^2 + 2^2 = 7^2 + 6^2$, $(13)(17) = 14^2 + 5^2 = 11^2 + 10^2$. Usando de novo as igualdades de (a), obtém-se: $1105 = 33^2 + 4^2 = 32^2 + 9^2 = 31^2 + 12^2 = 24^2 + 23^2$.
- 6.17 (a) Da semelhança dos triângulos DFB e DBO decorre que $FD/DB = DB/DO$. Portanto $FD = (DB)^2/(OD) = 2(AB)(BC)/(AB + BC)$.
 (b) Por semelhança de triângulos, $OA/OB = AF/BD = AF/BE = AC/CB = (OC - OA)/(OB - OC)$. Obtenha agora OC .
 (c) Suponhamos que HA corte BC em R e LM em S , que LB corte DH em U e que MC corte FH em V . Então $\square ABDE = \square ABUH = \square BRSL$ e $\square ACFG = \square ACVH = \square RCMS$.
 (e) É fácil uma solução analítica, desde que nos lembremos de que as coordenadas do ponto que divide o segmento de reta de extremos (a, b) e (c, d) na razão m/n são $(ma + mc)/(m + n)$ e $(nb + md)/(m + n)$ e de que o centroide do triângulo determinado por (a, b) , (c, d) e (e, f) tem coordenadas $(a + c + e)/3$ e $(b + d + f)/3$. Não é fácil uma solução sintética. Uma, devida a Fuhrmann, encontra-se em *Modern Geometry* de R. A. Johnson (Seção 276, p. 175).
- 6.18 (a) $V = 2\pi^2 r^2 R$, $S = 4\pi^2 r R$.
 (b) O centroide de um arco semicircular encontra-se no raio bissetor do semicírculo, à distância $2r/\pi$ do diâmetro (r é o raio do semicírculo).
 (c) O centroide de uma área semicircular encontra-se no raio bissetor do semicírculo, à distância $4r/3\pi$ do diâmetro (r é o raio do semicírculo).

- 6.19 (a) Seja P o ponto (x, y) . Então, por semelhança de triângulos, $x^2/a^2 = (OB)^2/(AB)^2$ e $y^2/b^2 = (OA)^2/(AB)^2$, donde $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.
- (b) Há um elipsógrafo, baseado no compasso de construir elipses, manufaturado por Keuffel e a Esser Company.
- 6.20 Ver Howard Eves, *A Survey of Geometry*, vol. 1, Seção 2-3.
- 6.21 Este Exercício, juntamente com os Exercícios 2.14, 3.4, 4.13(h) e (i) e ainda 6.17(a) e (b), constituem um bom projeto de pesquisa, de dificuldade média, em nível de iniciação científica.

Capítulo 7

- 7.1 (d) $37/4$ dou, $17/4$ dou, $11/4$ dou.
- 7.2 (a) altura = 9,6 ch'ih, largura = 2,8 ch'ih.
(b) 12 pés.
- 7.3 (a) Constante mágica = $(1 + 2 + 3 + \dots + n^2)/n$.
(c) Denote os números do quadrado mágico por letras e então some as letras da linha do meio, da coluna do meio e das duas diagonais.
(d) Use (c) e um argumento indireto.
- 7.4 (a) $x = bd/(2b + d)$.
(b) 8 cúbitos e 10 cúbitos.
(c) 40.
- 7.5 (a) 8 dias.
(b) 18 mangas.
(c) Uma cidra custa 8 e uma maçã aromática custa 5.
(d) 36 camelos.
- 7.6 (a) 72 abelhas.
(b) 20 cúbitos.
(c) $22/7$ yojanas.
(d) $10!$, $4!$.
(e) 100 flechas.
- 7.7 (a) Suponha $\sqrt{a} = b + \sqrt{c}$. Então $\sqrt{c} = (a - b^2 - c)/2b$.
(b) Se $a + \sqrt{b} = c + \sqrt{d}$, então $\sqrt{b} = (c - a) + \sqrt{d}$. Agora use (a).
- 7.8 (b) É fácil mostrar que $x = x_1 + mb$ e $y = y_1 - ma$ constituem uma solução. Reciprocamente, assuma que x e y formam uma solução. Então $a(x - x_1) = b(y_1 - y)$, ou $x - x_1 = mb$ e $y_1 - y = ma$.

- (c) Dividindo por 7, encontramos $x + 2y + (2/7)y = 29 + (6/7)$. Portanto, existe um inteiro z tal que $(2/7)y + z = 6/7$, ou $2y + 7z = 6$. Esta última equação pode ser resolvida por tentativa, obtendo-se $z_1 = 0$ e $y_1 = 3$. Então $x_1 = 23$. A solução geral da equação dada é, então, devido a (b): $x = 23 + 16m$, $y = 3 - 7m$. Como se exige que $x > 0$ e $y > 0$, deve-se ter então $m \geq -1$ e $m \leq 0$. Logo, os únicos valores possíveis para m são 0 e -1 . Daí as duas soluções $x = 23, y = 3$ e $x = 7, y = 10$. Pode-se ainda, conforme 5.1(f), achar p e q de modo que $7p + 16q = 1$ e então tomar $x_1 = 209p$ e $y_1 = 209q$.
- (d) São 4 as soluções: $x = 124, y = 4$; $x = 87, y = 27$; $x = 50, y = 50$; $x = 13, y = 73$.
- (e) Seja x o número de dimes e seja y o número de quarters. Deve-se ter então $10x + 25y = 500$.
- (f) Seja x o número de frutas de um monte e seja y o número de frutas que cada viajero recebe. Então $63x + 7 = 23y$. O menor valor possível para x é 5.
- 7.9 (a) Trace, pelo vértice relativo à altura em jogo, o diâmetro do círculo circunscrito ao triângulo e use semelhança de triângulos.
- (b) Aplique (a) aos triângulos DAB e DCB .
- (c) Use o resultado de (b) junto com a relação de Ptolomeu, $mn = ac + bd$.
- (d) Neste caso, $\theta = 0^\circ$ e $\cos \theta = 1$. Use agora (b) e (c).
- 7.10 (b) Como o quadrilátero admite um círculo inscrito, então $a + c = b + d = s$. Logo, $s - a = c$, $s - b = d$, $s - c = a$, $s - d = b$.
- (c) Na Figura 132 se tem $a^2 + c^2 = r^2 + s^2 + m^2 + n^2 - 2(rm + sm) \cos \theta$ e $b^2 + d^2 = r^2 + s^2 + m^2 + n^2 + 2(sn + rm) \cos \theta$. Portanto $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$ se, e somente se, $\cos \theta = 0$, $\theta = 90^\circ$.
- (d) Use (c).
- (d) Os lados consecutivos do quadrilátero são 39, 60, 52, 25; as diagonais são 56 e 63; O diâmetro do círculo circunscrito é 65; a área é 1764.

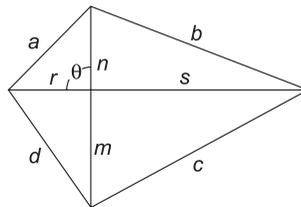


Figura 132

- 7.11 (c) Ver T. L. Heath, *A Manual of Greek Mathematics*, pp. 340-2.
- 7.12 (a) Esboçaremos a demonstração para um número N de quatro algarismos, a, b, c, d , respectivamente dos milhares, das centenas, das dezenas e das uni-

dades; a generalização é fácil. Com as suposições feitas, $N = 1000a + 100b + 10c + d$. Seja $S = a + b + c + d$. Então $N = 999a + 99b + 9c + S = 9(111a + 11b + c) + S$. A conclusão agora é imediata.

- (b) Sejam M e N dois números quaisquer cujos excessos sejam e e f . Existem então inteiros m e n tais que $M = 9m + e$ e $N = 9n + f$. Daí $M + N = 9(m + n) + (e + f)$ e $MN = 9(9mn + ne + mf) + ef$ e assim por diante.
- (d) Seja M o número dado e seja N o número obtido por alguma permutação dos algarismos de M . Como M e N são formados pelos mesmos algarismos, então [devido a (a)] eles têm o mesmo excesso e . Logo, $M = 9m + e$, $N = 9n + e$ e $M - N = 9(m - n)$.
- (e) Devido a (d) o produto final deve ser divisível por 9; donde, por (a), o excesso para a soma dos algarismos do produto deve ser 0.
- (f) Substitua 9 por $(b - 1)$.
- 7.14 (b) $x = 2,3696$.
- (c) $x = 4,4934$.
- 7.15 (a) Ache z tal que $b/a = a/z$ e depois m tal que $n/z = a/m$.
- (c) As raízes positivas são 2 e 4; a raiz negativa é -1 .
- 7.16 (a) As raízes reais são dadas pelas abscissas dos pontos de intersecção da reta $ay + bx + c = 0$ com a curva cúbica $y = x^3$.
- (b) $x = 1,7$ (por excesso).
- (c) $x = -3,5; 1; 2,5$.
- (e) $x = -6, -2, -1$.
- 7.17 (a) Trace uma circunferência qualquer Σ sobre a superfície da esfera e sobre ela marque 3 pontos A, B, C . Construa sobre um plano um triângulo congruente a ABC e obtenha o raio de Σ através do círculo circunscrito a esse triângulo. Com esse raio como cateto e com a corda polar de Σ como hipotenusa, construa um triângulo retângulo. Agora é fácil achar o diâmetro da esfera dada.
- (b) Se d é o diâmetro da esfera e e é a aresta do cubo inscrito, então $e = (d\sqrt{3})/3$; donde, e é um terço da altura de um triângulo equilátero de lado $2d$.
- (c) Seja d o diâmetro da esfera e e a aresta do tetraedro regular inscrito; então $e = (d\sqrt{6})/3$ e portanto e é a hipotenusa de um triângulo retângulo isósceles de catetos iguais às arestas do cubo inscrito. Ver (b).

Capítulo 8

- 8.1 (a) Sejam x, y, z , respectivamente, o número de homens, mulheres e crianças. Então $6x + 4y + z = 200$ e $x + y + z = 100$, ou $5x + 3y = 100$. Segue-se

então que y deve ser um múltiplo de 5, digamos, $5n$. Logo, $x = 20 - 3n$ e $z = 80 - 2n$. Assim, os únicos valores possíveis de n são 1, 2, 3, 4, 5, 6. A solução dada na coleção de Alcuíno corresponde a $n = 3$ — a saber, 11 homens, 15 mulheres e 74 crianças.

- (b) Pode-se mostrar sem dificuldade que cada filho deve receber o mesmo número de frascos inteiramente vazios e de frascos cheios. Há muitas soluções.
- (c) Seja x o número de saltos necessários. Então $9x - 7x = 150$.
- (d) Ache duas soluções. Para outros problemas deste tipo veja Maurice Kraitichik, *Mathematical Recreations*, pp. 214-22.
- (e) Que tal 5/27 para a mãe, 15/27 para o filho e 7/27 para a filha?
- (f) Sejam $a, b, c, K(a \geq b)$, respectivamente, os catetos, a hipotenusa e área do triângulo. Então $a^2 + b^2 = c^2$, $ab = 2K$. Resolvendo para a e b obtemos

$$a = (\sqrt{c^2 + 4K} + \sqrt{c^2 - 4K}) / 2 \text{ e}$$

$$b = (\sqrt{c^2 + 4K} - \sqrt{c^2 - 4K}) / 2$$

- 8.2 (b-1) Use indução matemática. Assuma a relação verdadeira para $n = k$. Então $u_{k+2}u_k = (u_{k+1} + u_k)u_k = u_{k+1}u_k + u_k^2 = u_{k+1}u_k + u_{k+1}u_{k-1} - (-1)^k = u_{k+1}(u_k + u_{k-1}) + (-1)^{k+1} = u_{k+1}^2 + (-1)^{k+1}$ e assim por diante. Ou use a expressão de u_n dada em (b-2).
- (b-2) Faça $v = [(1 + \sqrt{5})^n - (1 - \sqrt{5})^n] / 2^n \sqrt{5}$. Mostre que $v_n + v_{n+1} = v_{n+2}$ e que $v_1 = v_2 = 1$. Então $v_n = u_n$.
- (b-3) Use a expressão de u_n dada em (b-2).
- (b-4) use a relação dada em (b-1).

- 8.3 (a) A tem 121/17 denários e B tem 167/17 denários.
- (b) 33 dias.
- (c) Seja x o valor dos bens e seja y a quantia recebida por cada um dos filhos. Então o primeiro filho recebe $1 + (x - 1)/7$ e o segundo recebe

$$2 = \frac{x - \left(1 + \frac{x-1}{7}\right) - 2}{7}$$

Igualando essas expressões obtém-se $x = 36$, $y = 6$ e o número de filhos era $36/6 = 6$.

- 8.4 (b) A solução que se segue é, essencialmente, a que foi dada por Fibonacci. Sejam s a soma original e $3x$ a soma total reposta. Antes de cada um dos homens receber um terço da soma reposta, o que cada um tinha consigo era $s/2 - x$, $s/3 - x$, $s/6 - x$. Mas essas eram as somas com que estavam após repor 1/2, 1/3, 1/6 do que haviam retirado inicialmente; assim, as quantidades inicialmente retiradas eram $2(s/2 - x)$, $(3/2)(s/3 - x)$, $(6/5)(s/6 - x)$. Usando o fato de que a soma delas deve ser s , obtém-se $7s = 47x$ e o pro-

blema é indeterminado. Fibonacci tomou $s = 47$ e $x = 7$. Donde, a somas retiradas do monte original pelos homens foram 33, 13, 1.

- (c) 382 maçãs.
- 8.6 (a) Denote o ângulo dado por y e o ângulo AOF por x . Como OF é igual e paralelo a DE , então $OFED$ é um paralelogramo. Segue-se que $FE = OD = FO$ e o triângulo OFE é isósceles. Agora, ângulo $OFE =$ ângulo $ODE =$ ângulo $OAE = x$. Portanto, somando-se os 3 ângulos do triângulo OFE , $2(90 - y + x) + x = 180$ e daí $x = 2y/3$.
- (b) Chamando as duas partes de x e y , temos $x + y = 10$, $x^2 + y^2 = 58$. Portanto, tomamos $x = 7, y = 3$.
- 8.8 (a) A solução que se segue é, essencialmente, aquela dada por Regiomontanus. Os dados do problema (ver Figura 133) são $p = b - c, h, q = m - n$. Temos $b^2 - m^2 = h^2 = c^2 - n^2$, ou $b^2 - c^2 = m^2 - n^2$, ou $b + c = qa/p$. Logo, $b = (qa + p^2)/(2p)$ e $m = (a + q)/2$. Substituindo essas expressões na relação $b^2 - m^2 = h^2$, obtém-se uma equação quadrática na incógnita a .
- (b) A solução que se segue é, essencialmente, aquela dada por Regiomontanus. Neste caso os dados são (ver Figura 133) $a, b, k = c/b$. Faça-se $2x = m - n$. Então $4n^2 = (a - 2x)^2, 4c^2 = 4b^2 + (a - 2x)^2, 4m^2 = (a + 2x)^2, 4b^2 = 4b^2 + (a + 2x)^2$. Então, $k^2[4b^2 + (a + 2x)^2] = 4b^2 + (a - 2x)^2$. Resolvendo essa equação quadrática, obtém-se x e depois b e c . Usando um círculo de Apolônio, facilmente se constrói o triângulo. Ver Exercício 6.8(b).

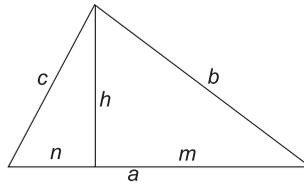


Figura 133

- (c) Sobre o prolongamento do segmento AD (ver Figura 134) tome $DE = bc/a$, a quarta proporcional dos segmentos dados a, b, c . Então os triângulos DCE e BAC são semelhantes e $CA/CE = a/c$. Assim, c se localiza na intersecção de dois lugares, uma circunferência de Apolônio e uma circunferência de centro D e raio c .
- 8.9 (a) \$29.
- (b) 180/11 dias.
- (c) O preço de cada barril é 120 francos e a taxa aduaneira por barril é 10 francos.
- (d) Suponha $a/c < b/d$. Então $ad < bc, ac + ad < ac + bc, a(c + d) < c(a + b), a/c < (a + b)/(c + d)$ e assim por diante.

- (b) $(BP)^2 = (VC)^2 = (AV)(VB)$. Estabelecendo-se um sistema de coordenadas retangulares com origem em V e eixo x ao longo de VW , se as coordenadas de P são dadas por (x, y) , então $y^2 = px$.

Capítulo 9

- 9.1 (a) Consulte um livro qualquer de trigonometria do curso colegial.
- (b) 1. Faça $y = \log_b N$, $z = \log_a N$, $w = \log_a b$. Então $b^y = N$, $a^z = N$, $a^w = b$ e daí $a = b^{1/w}$, ou $a^z = b^{z/w} = b^y$. Logo, $y = z/w$.
2. Faça $y = \log_b N$ e $z = \log_N b$. Então $b^y = N$, $N^z = b$ e daí $N = b^{1/z} = b^y$. Logo, $y = 1/z$.
3. Faça $y = \log_N b$ e $z = \log_{1/N} (1/b)$. Então $N^y = b$, $(1/N)^z = 1/b$ e daí $N = b^{1/z} = b^{1/y}$. Logo, $y = z$.
- (c) $\log 4,26 = 1/2 + 1/8 + 1/256 + \dots = 0,6294\dots$
- 9.2 (b) $\cos c = \cos a \cos b$.
- (c) (1) $A = 122^\circ 39'$, $C = 83^\circ 5'$, $b = 109^\circ 22'$.
- (2) $A = 105^\circ 36'$, $b = 44^\circ 0'$, $c = 78^\circ 46'$.
- 9.3 Palitos de picolé se transformam em excelentes barras.
- 9.5 (a) A aceleração é a variação de velocidade durante um período unitário de tempo.
- 9.6 (a) Abra o compasso de modo que o segmento AA' dado tenha suas extremidades nos graus 100 das duas escalas simples dos braços do compasso (ver Figura 135). Então a distância entre os graus 20 dessas escalas é $1/5$ do segmento dado. Como se resolveria esse problema se o segmento dado fosse tão grande que os braços do compasso não pudessem compreendê-lo?

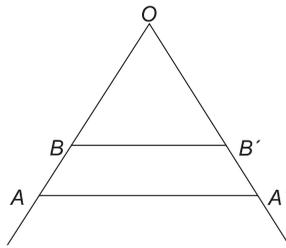


Figura 135

- (b) Abra o compasso de modo que AA'/OA seja a razão desejada entre as escalas. Então BB' é o novo comprimento a ser associado ao antigo OB .

- (c) Trace um segmento ligando o a de um dos braços com o b do outro. A partir de c , no primeiro braço, passe uma paralela ao segmento traçado. O Ponto onde essa paralela corta o segundo braço é a quarta proporcional procurada.
- (d) Abra o compasso de modo que a distância entre os graus 106 seja igual a 150. Então a distância entre os graus 100 representa a importância que se deveria investir um ano atrás para que o montante fosse hoje 150 escudos. Efetuando 5 vezes essa operação chega-se à importância pretendida.
- 9.7 (b) Mostre que $(HG)^2 = (HB)^2 = (BF)^2 - (HF)^2 = (HE)^2 - (HF)^2$ e assim por diante.
- (c) Diz-se que dois conjuntos são *equipotentes* ou que têm a mesma *cardinalidade* se é possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre eles. Numa festa de jovens, por exemplo, se para cada moço há uma, e uma só moça, e vice-versa, então pode-se dizer que o total de moços é igual ao total de moças. A diferença entre conjunto finito e conjunto infinito é que um qualquer destes é equipotente a uma sua parte própria.
- 9.8 (c) 1000 anos.
- (d) 25 U.A.
- (f) Uma hora e 24 minutos.
- 9.10 (a) Escolha como π' o plano determinado pelo ponto O e pela reta l .
- (c) Projete a reta OU no infinito.
- (d) Projete a reta LMN no infinito e use o fato elementar de que se dois triângulos são semelhantes e se encontram semelhantemente situados, então as retas pelos vértices correspondentes concorrem num ponto.
- (e) Escolha um plano π' paralelo ao eixo menor da elipse de modo que o ângulo θ entre π' e o plano da elipse satisfaça a relação $\cos \theta = b/a$, onde a e b são os semieixos maior e menor da elipse. A seguir projete ortogonalmente a elipse sobre π' .
- (g) Seja c uma reta qualquer pela intersecção de a e b (ver Figura 136). Seja Q a intersecção de PA e c e M' a intersecção de MP e QP .
- 9.12 (a) Suponha os pontos 1 e 6 coincidentes, o que transforma a reta 16 numa tangente à cônica no ponto 1.
- (b) use (a).
- (c) Sejam 1, 2, 3, 4 os quatro pontos e 45 a reta tangente em $4 \equiv 5$ e suponhamos que 12 corte 45 em P . Por 1 trace uma reta 16 qualquer, cortando 34 em R , e a seguir trace a reta de Pascal PR , cortando 23 em Q . Então $5Q$ corta 16 num ponto 6 da cônica.
- (d) Tome $1 \equiv 6$ e $3 \equiv 4$ e então tome $2 \equiv 3$ e $5 \equiv 6$.
- (e) tome $1 \equiv 2$, $3 \equiv 4$, $5 \equiv 6$.
- (f) Use (e).

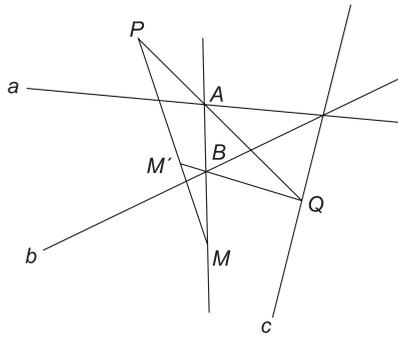


Figura 136

- 9.13 (a) Decorre da definição de triângulo aritmético conforme consta da Seção 9-9.
 (b) Por sucessivas aplicações de (a).
 (c) Use indução matemática e (a).
 (d) Por (c).
 (e) Por (a).
 (f) Por (e).
 (g) Por (c).

Capítulo 10

- 10.1 (a) Ver Figura 137.
 (c) Em virtude de (a) e (b) e 3.9(c).
 (d) Temos $r + s = g$ e $rs = b$.
 (e) Temos $-r + s = -g$ e $-rs = -b$.

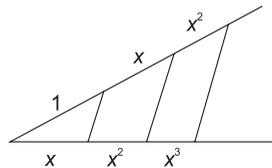


Figura 137

- 10.2 (a) $x^2 - 2ax^2 - a^2x + 2a^3 = axy$.
 (b) Ver 10.1(c).
 (c) Considere as equações de L_1, L_2, L_3, L_4 na forma *normal*, por exemplo. Então facilmente se conclui que a equação do lugar é quadrática.

- (d) Achamos $x_2 - x_1 = m$.
- 10.4 (b) $r = (3a \operatorname{sen} \theta \cos \theta) / (\operatorname{sen}^3 \theta + \cos^3 \theta)$.
- (c) $x = 3at / (1 + t^3), y = 3at^2 / (1 + t^3)$; laço $(0, \infty)$, ramo inferior $(-\infty, -1)$ e ramo superior $(-1, 0)$.
- (d) $y = \pm x \sqrt{(3 - x\sqrt{2}) / (3x\sqrt{2} + 3)}$.
- (e) Obtemos $b + m - k^2 = -2, k(m - b) = 8, mb = -3$. Tirando m e b em função de k , através das duas primeiras equações, e substituindo as relações obtidas na terceira equação, obtém-se $k^6 - 4k^4 + 16k^2 - 64 = 0$, que é uma cúbica em k^2 .
- 10.5 (a) $\varphi(n)$, para $n = 2, \dots, 12$, é igual a 1, 2, 2, 4, 2, 6, 4, 6, 4, 10, 4.
- (b) Os únicos números inteiros positivos que não excedem p^n e não são primos com p^a são os p^{a-1} múltiplos de p : $p, 2p, \dots, p^{a-1}p$.
- (c) Seja $n = ab$. Se $x^n + y^n = z^n$, então $(x^a)^b + (y^a)^b = (z^a)^b$.
- (f) Suponha que o ponto $(a/b, c/d)$, onde a, b, c, d são inteiros, esteja na curva. Então $(ad)^n + (bc)^n = (bd)^n$.
- (g) Considere o triângulo retângulo cujos lados têm as seguintes expressões: $a = 2mn, b = m^2 - n^2, c = m^2 + n^2$. A área do triângulo é, então, $A = (1/2)ab = mn(m^2 - n^2)$. Tomando $m = x^2$ e $n = y^2$ e fazendo $x^4 - y^4 = z^2$, achamos: $A = x^2 y^2 (x^4 - y^4) = x^2 y^2 z^2$. Portanto, se $x^4 - y^4 = z^2$ tem uma solução constituída de inteiros x, y, z , então existe um triângulo retângulo de lados inteiros cuja área é um quadrado. Finalmente, se $x^4 + v^4 = z^4$, então $z^4 - v^4 = (x^2)^2$.
- (h) Suponha $\sqrt{3} = a/b$, onde a e b são inteiros positivos. Como $\sqrt{3} + 1 = 2/(\sqrt{3} - 1)$, então $\sqrt{3} = (3b - a)/(a - b)$. Levando em conta que $3/2 < a/b < 2$, segue-se que $3b - a$ e $a - b$ são inteiros positivos tais que $3b - a < a$ e $a - b < b$.
- 10.6 (a) 15:1.
- (b) 21:11.
- 10.8 (c) Pois, por definição de cissoide (ver Exercício 4.4), $r = OP = AB$. Aplicando a lei dos senos ao triângulo OBC (ver Figura 138), obtém-se $\operatorname{sen} \alpha / [(a\sqrt{2})/2] = \operatorname{sen} \theta / (a/2)$ e daí $r = AB = a \cos \alpha = a\sqrt{1 - 2\operatorname{sen}^2 \theta}$ e $r^2 = a^2 \cos 2\theta$.
- 10.9 (b) Seja x o número escolhido. Então $x = 3a' + a = 4b' + b = 5c' + c$. Daí $(40a + 45b + 36c)/60 = 2(x - 3a')/3 + 3(x - 4b')/4 + 3(x - 5c')/5 = 2x - (2a' + 3b' + 3c') + x/60$.
- (c) No caso geral, B termina com $q(p + 1)$ fichas.

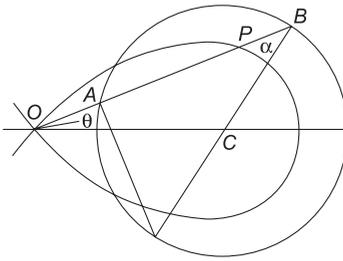


Figura 138

- 10.10 (a) No caso da elipse, considere um ponto da curva movendo-se no sentido de um foco para o outro; no caso da hipérbole, considere um ponto da curva movendo-se no sentido dos focos ou de maneira a se afastar dos focos. Assim, no primeiro caso, a soma dos raios focais do ponto móvel é constante, ao passo que no segundo caso a diferença dos raios focais do ponto móvel é constante.
- (b) Um *fuso* é uma porção da superfície da esfera limitada por duas semicircunferências de círculos máximos; o *ângulo* do fuso é o ângulo formado pelas duas semicircunferências.
- (c) Prolongue os lados do triângulo ABC dado até completar os círculos máximos; sejam A', B', C' os pontos antípodas de A, B, C , respectivamente. Os triângulos $A'BC$ e $AB'C'$ são simétricos e, portanto, são equivalentes. Segue-se que $\Delta ABC + \Delta AB'C' = \text{fuso } ABA'C'$. Também: $\Delta ABC + \Delta AB'C' = \text{fuso } BAB'C'$ e $\Delta ABC + \Delta ABC' = \text{fuso } CAC'B'$. Porém, $ABC + AB'C' + AB'C + ABC' = 360$ graus esféricos e $ABA'C' + BAB'C' + CAC'B' = 2(A + B + C)$ graus esféricos. Portanto $2ABC + 360$ graus esféricos $= 2(A + B + C)$ graus esféricos.
- (d) Seja S a área da superfície da esfera. Então $A : S = E : 720$. Mas $S = 4\pi r^2$.
- (e) 98π polegadas quadradas.
- 10.11 (a) $\ln 2 = 0,69315$.
- (b) $\ln 3 = 1,09861$.
- (c) $\ln 4 = 2 \ln 2 = 1,3863$.

Capítulo 11

- 11.1 (a) Seja M a grandeza dada e fixemos uma grandeza m , da mesma espécie, menor que M . Pelo axioma de Arquimedes, existe um inteiro $n \geq 2$ tal que $nm > M$. Como $n \geq 2$, então $n/2 \leq n - 1$. Seja M_1 a diferença entre M e uma parte de M não menor que sua metade. Então, $M_1 \leq M/2 < (nm)/2 \leq (n - 1)m$. Continuando com esse processo se chegará finalmente a $M_{n-1} < m$.
- (b) Na Figura 139, $HA = HB < HD$. Portanto, $\Delta HBD > \Delta HBA$, ou $\Delta HKD > (1/2)(ABCD)$.

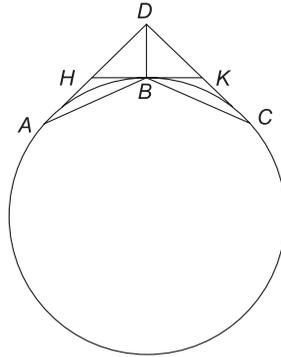


Figura 139

- 11.2 (a) Temos $(OM)(AO) = (OP)(AC)$. Somando, achamos (área do segmento) $(HK) = (\Delta AFC)KC/3$.
- 11.3 (a) $2\pi rh$.
 (b) Consulte um livro de cálculo.
 (c) $V = 2r^2h/3$, r = raio do cilindro e h = altura da cunha.
 (d) $V = 16r^3/3$.
- 11.4 (a) (1) Considere o prisma triangular $ABC - A'B'C'$. Decomponha o prisma por meio dos planos $B'AC$ e $B'A'C$.
 (c) $V = 2r^2h/3$.
 (d) $V = \pi b^3/6$.
 (e) Ver (d).
 (g) $V = 2\pi^2 cr^2$.
 (h) $A = \pi a^2$.
 (i) Cordas igualmente espaçadas entre 2 lados de um polígono variam de comprimento de maneira uniforme, o que não ocorre com cordas igualmente espaçadas de um círculo.
- 11.5 (b) Seja O um ponto qualquer da secção média. Remova do prismatoide as pirâmides P_U e P_L cujas bases são a base superior e a base inferior e cujo vértice é O . Então os volumes de P_U e P_L são dados por $hU/6$ e $hL/6$. Trace agora, se necessário, diagonais nas faces de modo que todas as faces laterais do prismatoide venham a ser triângulos e faça passar planos por O e pelas arestas laterais, dividindo a parte restante do prismatoide num conjunto de pirâmides, cada uma delas tendo como vértice o ponto O e como base oposta uma face lateral triangular do prismatoide. Se S é a área da secção média do prismatoide incluída numa dessas pirâmides, mostre que o volume dessa pirâmide é $4hS/6$.

- (c) Sendo uma função quadrática da distância a uma das bases, uma secção qualquer é igual à soma algébrica da área de uma secção (constante) de um prisma, da área de uma secção (proporcional à distância à base) de uma cunha e da área de uma secção (proporcional ao quadrado da distância à base) de uma pirâmide. Assim, o prismatoide é igual à soma algébrica dos volumes de um paralelepípedo, uma cunha e uma pirâmide. Agora aplique (a).
- (d) Seja $A(x) = ax^2 + bx + c$. Mostre que
- $$V = \int_0^h A(x)dx = \frac{h}{6} [A(0) + 4A\left(\frac{h}{2}\right) + A(h)].$$
- 11.6 (b) Use indução matemática.
- 11.8 (b) Faça $x = y + b$. Então, devido a (a), $f(x) \equiv f(y + b) \equiv f(b) + f'(b)y + \dots + f^{(n)}(b)(y^n/n!)$. Se b é tal que $f(b), f'(b), \dots, f^{(n)}(b)$ são todos positivos, então a equação $f(y + b) = 0$ em y não pode ter nenhuma raiz positiva. Isto é, $f(x) = 0$ não tem nenhuma raiz maior que b , e b é um limite superior do conjunto das raízes de $f(x)$.
- (c) Temos
- $$f^{(n-k)}(a + b) \equiv f^{(n-k)}(a) + f^{(n-k+1)}(a)b + \dots + f^{(n)}(a)(b^k/k!),$$
- o que mostra que se $f^{(n-k)}(a), f^{(n-k+1)}(a), \dots, f^{(n)}(a)$ são todos positivos, e b também é positivo, então $f^{(n-k)}(a + b)$ deve ser positivo. Analogamente, as outras funções também são positivas para $x = a + b$.
- (d) A maior raiz situa-se entre 3 e 4.
- 11.9 (a) Considere os quatro casos ilustrados na Figura 140.
- (b) 2,0945514 (valor correto até a sétima casa decimal).
- (c) 4,4934.
- (h) Ver, por exemplo, W. V. Lovitt, *Elementary Theory of Equations*, p. 144.

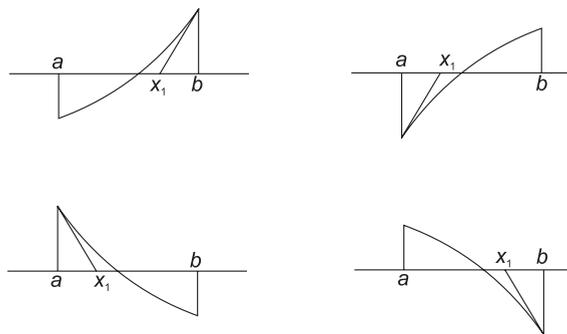


Figura 140

Capítulo 12

- 12.1 (a) $B_1 = 1/6, B_2 = 1/30, B_3 = 1/42, B_4 = 1/30, B_5 = 5/66.$
 (b) $7709321041217 - 37(208360028141).$
 (c) $B_4 = -1 + 1/2 + 1/3 + 1/5; B_8 = 6 + 1/2 + 1/3 + 1/5 + 1/17.$
- 12.2 (a) Use indução matemática.
 (b) $\cos 4x = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1, \sin 4x = 4\sin x \cos^3 x - 8\sin^3 x \cos x.$
 (c) $(-1 - i)^{15} = 2^{15/2} (\cos 225^\circ + i \sin 225^\circ)^{15} = 2^{15/2} (\cos 3375^\circ + i \sin 3375^\circ)$
 $= 2^{15/2} (\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ) = 2^7(-1 + i).$
 (d) $\cos(n\pi/2) + i \sin(n\pi/2) = [\cos(\pi/2) + i \sin(\pi/2)]^n = i^n.$
 (e) $\pm 1, \pm(\sqrt{2} + i\sqrt{2})/2, \pm i, \pm(\sqrt{2} - i\sqrt{2})/2.$
- 12.3 (c) 2,996 caras por lançamento.
 (d) 2 caras por lançamento.
 (e) 3 caras por lançamento.
 (f) A renda média sobe grandemente; a mediana pode subir um pouco; a moda permanece a mesma.
 (g) A moda.
 (h) São todas iguais.
- 12.4 (a) $\sin z = z - z^3/3! + z^5/5! - z^7/7! + \dots;$
 $\cos z = 1 - z^2/2! + z^4/4! - z^6/6! + \dots;$
 $e^z = 1 + z + z^2/2! + z^3/3! - z^4/4! + \dots;$
- 12.7 Ver, por exemplo, Cadwell, *Topics in Recreational Mathematics*, Capítulo 15.
- 12.8 Ver, por exemplo, Ball, *Mathematical Recreations and Essays*, 11ª ed., pp. 242-54.
- 12.10 (b) Temos $du = xdy - ydx$. Para a circunferência isso se torna
 $du = xd(1 - x^2)^{1/2} - (1 - x^2)^{1/2} dx = -dx/(1 - x^2)^{1/2}$
 e daí $u = \int_1^x \frac{-dx}{(1 - x^2)^{1/2}} = \operatorname{arctg} x.$

Para a hipérbole temos $du = xd(x^2 - 1)^{1/2} - (x^2 - 1)^{1/2} dx = dx/(x^2 - 1)^{1/2}$ e portanto

$$u = \int_1^x \frac{dx}{(x^2 - 1)^{1/2}} = \ln[x + (x^2 - 1)^{1/2}].$$

- 12.16 Para abordagens sintéticas de (b), (c), (d), (f) ver, respectivamente, as Seções 228, 232, 233, 299 de Altshiller-Court, *Modern Pure Solid Geometry*, 2ª ed., Nova York, Chelsea, 1964. Uma abordagem analítica das várias partes deste Exercício constitui um bom projeto de iniciação científica em geometria analítica espacial.

- 12.17 (a) Considere os três casos: (1) C está entre A e B , (2) B está entre A e C , (3) A está entre C e B .
- (b) Use (a).
- (c) Devido a (b) temos, para o primeiro membro: $AD(DC - DB) + BD(DA - DC) + CD(DB - DA)$.
- (d) Comece com $AM = MB$ e depois insira uma origem em P .
- (e) Insira uma origem em P .
- (f) Faça $AA' = OA' - OA = (O'A' - O'O) - OA$ etc.
- (g) Introduza uma origem O e indique por M e N pontos médios de CR e PQ . Então $4OM = 2OR + 2OC = OA + OB + 2OC = OB + OC + 2OQ = 2OP + 2OQ = 4ON$.
- 12.18 (a) Se os lados BC, CA, AB de um triângulo ABC são cortados por uma curva algébrica de grau n em $P_1, P_2, \dots, P_n; Q_1, Q_2, \dots, Q_n; R_1, R_2, \dots, R_n$, então $(AR_1)(AR_2) \dots (AR_n)(BP_1)(BP_2) \dots (BP_n)(CQ_1)(CQ_2) \dots (CQ_n) = (AQ_1)(AQ_2) \dots (AQ_n)(BR_1)(BR_2) \dots (BR_n)(CP_1)(CP_2) \dots (CP_n)$.
- (b) Se os lados AB, BC, CD, \dots de um polígono são cortados por uma cônica em A_1 e A_2, B_1 e B_2, C_1 e C_2, \dots , então $(AA_1)(AA_2)(BB_1)(BB_2)(CC_1)(CC_2) \dots = (BA_1)(BA_2)(CB_1)(CB_2)(DC_1)(DC_2) \dots$.
- (c) Mostre que, por uma translação que leva a origem para o ponto (x_0, y_0) , o termo constante de um polinômio $f(x, y)$ torna-se $f(x_0, y_0)$, ao passo que os coeficientes dos termos de grau superior não se alteram.
- (d) Por um ponto O do plano do polígono trace retas paralelas aos lados do polígono. A seguir, aplique (c) a cada par de lados adjacentes do polígono.

Capítulo 13

- 13.1 (a) Temos as duas retas $x \pm y = 0$ e a hipérbole $xy = 2$.
- (b) Temos as duas hipérbolas $x^2 - y^2 - 2y = 0$ e $2xy + 2x + 1 = 0$.
- 13.2 Ver, por exemplo, D. M. Burton, *Elementary Number Theory*, edição revisada, Capítulo 4.
- 13.3 (a) $n(a + l)/2$.
- (c) Sejam $p = 4m + 3, q = 4n + 3$. Então $P = (p - 1)/2$ e $Q = (q - 1)/2$ são ambos ímpares e daí $(-1)^{PQ} = -1$.
- 13.4 (a) (1) convergente, (2) absolutamente convergente, (3) divergente.
- (b) (1) convergente, (2) divergente.
- (c) (1) convergente, (2) divergente.

- 13.6 (a) Devido a G3 existe c^{-1} . De $a * c = b * c$, segue-se então que $(a * c) * c^{-1} = (b * c) * c^{-1}$ e então, por G1, $a * (c * c^{-1}) = b * (c * c^{-1})$. Empregando G3, obtém-se $a * i = b * i$ e portanto, em virtude de G2, $a = b$.
- (b) Devido a G3 existe a^{-1} . Então, aplicando-se sucessivamente G1, G3, G2, G3, temos $(i * a) * a^{-1} = i * (a * a^{-1}) = i * i = i = a * a^{-1}$. Como, por (a), $i * a = a$ e por G2, $a * i = a$, segue-se que $i * a = a * i$.
- (c) Sejam i e j elementos neutros do grupo. Então, aplicando-se G2 ao elemento neutro j , $i * j = i$. Também, devido a (b), $i * j = j * i$. Mas, aplicando-se G2 ao elemento neutro i , $j * i = j$. Logo, $i = j$.
- (d) Aplicando-se sucessivamente G1, G3 e (b), $(a^{-1} * a) * a^{-1} = a^{-1} * (a * a^{-1}) = a^{-1} * i = i * a^{-1}$. Então, devido a (a), $a^{-1} * a = i$. Mas, por G3, $a * a^{-1} = i$. Segue-se que $a^{-1} * a = a * a^{-1}$.
- 13.8 Os de (a), (b), (c), (d), (e).
- 13.9 (a) Seja M o ponto médio da base AB . Trace DM e CM .
- (c) Trace uma perpendicular pelo vértice do triângulo à reta pelos pontos médios dos dois lados do triângulo.
- 13.15 (a) $*$ não é nem comutativa nem associativa; $|$ é comutativa e associativa; vale a propriedade distributiva.
- (b) Nenhuma das propriedades se verifica.
- (c) Apenas as duas propriedades comutativas se verificam.
- (d) $|$ é associativa e vale a propriedade distributiva.
- 13.18 (f) a não existência de divisores do zero; a lei do cancelamento à esquerda para a multiplicação.
- (g) Mostre que $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^2$ implica:
- (1) $b(a + d) = 1$, (2) $c(a + d) = 0$, (3) $a^2 + bc = 0$, (4) $cb + d^2 = 0$. De (1) segue-se que $a + d \neq 0$. Esse fato e (2) implicam $c = 0$. Logo, de (3) e (4), $a = d = 0$. Absurdo, pois $a + d \neq 0$.
- 13.19 Ver, por exemplo, H. Eves, *Elementary Matrix Theory*, Seções 1-7A e 6-7.
- 13.20 (c) Pode-se provar de várias maneiras essa propriedade, mas todas elas envolvem artifícios. Procure uma demonstração num livro qualquer de análise vetorial.

Capítulo 14

- 14.2 (b) Ver, por exemplo, Altshiller-Court, *Modern Pure Solid Geometry*, 2ª ed. Seção 170, p. 57.

- (c) Ver *op. cit.*, Seção 172, p. 58.
- (d) Ver *op. cit.*, Seção 176-1, p. 59.
- 14.3 Somente no caso em que cada aresta do tetraedro é ortogonal à aresta que lhe é oposta. (Os tetraedros com essa propriedade chamam-se *tetraedros ortocêntricos*.)
- 14.5 (c) Em vez de retas conjugadas isogonais de um ângulo plano, considere *planos conjugados isogonais* de um ângulo diedro.
- 14.6 (a) $\cos \theta = \cos(2\theta/3 + \theta/3)$.
- (b) O ângulo central de um eneágono regular mede $40^\circ = (2/3)60^\circ$.
- (d) Seja $7\theta = 360^\circ$. Então $\cos 3\theta = \cos 4\theta$, ou, fazendo $x = \cos \theta$, $8x^3 + 4x^2 - 4x - 1 = 0$.
- (f) $m^3 = 2s^3$.
- (h) Seja c a circunferência de um círculo de raio unitário. Então $c = 2\pi$.
- (i) Tome $AOB = 90^\circ$ e sejam M e N os pés das perpendiculares baixadas de P sobre OA e OB . Seja R o centro do retângulo OMP . Agora, se CD é a reta de Filon associada ao ângulo AOB e ao ponto P , mostre que $RE = RP$ e daí que $RD = RC$. Temos agora a solução de Apolônio do problema da duplicação (ver Exercício 4.3).
- 14.7 (c), (d) Ver R. C. Yates, *The Trisection Problem*.
- 14.8 Ver Howard Eves, *A Survey of Geometry*, vol. 1, Seção 4-4.
- 14.9 Ver A. E. Hallerberg, "The geometry of the fixed-compass", *The Mathematics Teacher*, abr., 1959, pp. 230-44 e A. E. Hallerberg, "Georg Mohr and Euclid's curiosi", *The Mathematics Teacher*, fev., 1960, pp. 127-32.
- 14.10 (a) Simplicidade 13, precisão 8.
- (b) Simplicidade 9, precisão 6.
- (c) Simplicidade 9, precisão 5.
- (d) Simplicidade 9, precisão 5.
- (c) Simplicidade 8, precisão 5.
- 14.11 (g) O teorema é autodual.
- 14.14 (a) (1) $\alpha = \beta$, (2) $a + \beta = k$.
- (b) $x = a(\cotg \alpha - \cotg \beta) / 2(\cotg \alpha + \cotg \beta)$,
 $y = a / (\cotg \alpha + \cotg \beta)$,
 $\alpha = \text{arcctg}[(a + 2x)/2y]$, $\beta = \text{arcctg}[(a - 2x)/2y]$, onde $a = AB$.
- (c) (1) Uma elipse, (2) Uma reta vertical, (3) Uma reta.
- (d) (1) $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$, (2) $x^2 + y^2 + ax = a\sqrt{x^2 + y^2}$.
- (f) $x = r \cos \phi \cos \theta$, $y = r \cos \phi \sin \theta$, $z = r \sin \phi$.
- 14.16 (f) 2;

- (g) 2;
 (h) 2;
 (i) 4;
 (j) 3;
 (k) 3;
 (l) 6;
 (m) 4;
 (n) 3;
 (o) 2;
- 14.17 Ver, por exemplo, H. Eves, *A Survey of Geometry*, vol. 2, Seção 9-2.
- 14.18 (b) $(b, -a, 0)$.
 (d) $2x + y + k = 0$.
 (e) $x^2 + y^2 + 2fyz + 2gxz + cz^2 = 0$.
 (g) Ver, por exemplo, H. Eves, *A Survey of Geometry*, vol. 2, Teorema 10.3.9 (p. 83).
- 14.20 (a) O conjunto dos pontos z tais que $z_i = (1 - t)x_i + ty_i$, onde t é um número real arbitrário.
 (b) O n -uplo de números $(y_i - x_i)/d$, $i = 1, \dots, n$, onde d é a distância entre os dois pontos.
 (c) Limite t em (a) ao intervalo $0 < t < 1$.
 (d) O ponto z tal que $z_i = (x_i + y_i)/2$.
 (f) (1), (2) e (3) são praticamente imediatas. A validade de (4) pode ser provada usando-se o fato de que a distância entre dois pontos não se altera por uma translação. Ora, uma translação que leva y na origem, transforma (4) em $[\sum (x_i - z_i)^2]^{1/2} \leq (\sum x_i^2)^{1/2} + (\sum z_i^2)^{1/2}$, desigualdade que se pode provar por meios algébricos elementares.
- 14.22 (a) Use as relações do Exercício 12.10.
 (c) Consequência imediata de (a) e (b).
 (e) $K = -(1/QP)(1/QT) = -1(QF)^2 = -1/k^2$.
- 14.26 (a) $\log(1/2) < 0$.
 (c) Se duas frações são iguais e têm numeradores *não nulos* iguais, então seus denominadores também são iguais.
 (d) Examine o passo 2 para $k = 2$.
 (e) Examine o passo 2 para $a = 1$ ou $b = 1$.
- 14.27 (a) A integral é imprópria, visto que a função integranda é descontínua em $x = 0$.
 (b) Examine a possibilidade de máximos e mínimos nos pontos extremos.
 (c) Mesma sugestão de (b).

- (d) Não esqueça da constante de integração.
- 14.28 Ver, por exemplo, Howard Eves, *A Survey of Geometry*, vol. 2, Seção 13-4.
- 14.29 (b) Não. Por exemplo, $\sqrt{2}$ é algébrico, pois é raiz de $x^2 - 2 = 0$.
- (c) Algébrico. É raiz de $x^2 + 1 = 0$.
- (d) Se $\pi/2$ fosse raiz de uma equação polinomial $f(x) = 0$, então π seria raiz da equação polinomial $f(x/2) = 0$.
- (e) Se $\pi + 1$ fosse raiz da equação polinomial $f(x) = 0$, então π seria raiz da equação polinomial $f(x + 1) = 0$.
- (f) Se $\sqrt{\pi}$ fosse raiz da equação polinomial $f(x) = 0$, então π seria raiz da equação $f(\sqrt{x}) = 0$. Resolva para \sqrt{x} .
- 14.30 (d) Considere o conjunto N de todos os números da forma $-x$, onde x pertence a M .
- (g) supremo = 2, ínfimo = -2 ; supremo = $3/2$, ínfimo = -1 .
- (h) Não.
- (i) Não.
- 14.31 (b) Se p é composto, então $p = ab$, onde $a \leq b$ e, conseqüentemente, $a^2 \leq p$.
- (c) Para $n = 10^9$ temos $(A_n \log_e n)/n = 1,053\dots$
- (d) Considere $(n + 1)! + 2, (n + 1)! + 3, \dots, (n + 1)! + (n + 1)$.

Capítulo 15

- 15.4 A verificação dos 4 primeiros postulados quase não oferece dificuldades. Para verificar o quinto postulado, basta mostrar que duas retas concorrentes comuns, cada uma delas determinada por um par de pontos restritos, se cortam num ponto restrito. Isso pode ser conseguido mostrando-se que a equação de uma reta determinada por dois pontos de coordenadas racionais tem coeficientes racionais e que duas dessas retas, quando concorrentes, têm como intersecção um ponto de coordenadas racionais. Para a última parte do problema, considere a circunferência unitária, de centro na origem, e a reta pela origem e de inclinação um.
- 15.6 (a) Suponhamos que uma reta entre num triângulo pelo vértice A . Tome um ponto U da reta, no interior do triângulo. Seja V um ponto qualquer do segmento AC e trace a reta UV . Pelo postulado de Pasch, a reta UV (1) cortará AB , ou (2) cortará BC , ou (3) passará por B . Para a primeira hipótese denote por W o ponto de intersecção e trace WC ; aplique então o postulado de Pasch sucessivamente aos triângulos VWC e BWC . Se UV corta BC , denote o ponto de intersecção por R ; aplique então o postulado de Pasch ao triângulo VRC . Se UV passa por B , aplique o postulado de Pasch ao triângulo VBC .

15.7 *T1* Suponhamos que se tivesse $R(a, b)$ e, também, $R(b, a)$. Então, por P3, se teria $R(a, a)$. Mas isso é impossível, em virtude de P2. Fica provado, pois, o teorema, por *reductio ad absurdum*.

T2 Como $c \neq a$ temos, por P1, $R(a, c)$ ou $R(c, a)$. Se tivéssemos $R(c, a)$, como por hipótese temos também $R(a, b)$, então, por P3, $R(c, b)$. Isso prova o teorema.

T3 Suponhamos o teorema falso, e seja a um elemento de K . Existe então um elemento b de K tal que $R(a, b)$. Por P2, $a \neq b$. Assim, a e b são elementos de K distintos um do outro. Devido à suposição que fizemos, existe um elemento c em K tal que $R(b, c)$. Por P2, $b \neq c$. Por P3, temos também $R(a, c)$. Por P2, $a \neq c$. Assim, a, b, c são elementos de K , distintos entre si. Devido à nossa suposição, existe um elemento d em K tal que $R(c, d)$. Por P2, $c \neq d$. Por P3, temos também $R(b, d)$ e $R(a, d)$. Por P2, $b \neq d$ e $a \neq d$. Assim, a, b, c, d são elementos de K , distintos entre si. Devido à nossa suposição, existe um elemento e em K tal que $R(d, e)$. Por P2, $d \neq e$. Por P3, temos também $R(c, e)$, $R(b, e)$, $R(a, e)$. Por P2, $c \neq e$, $b \neq e$ e $a \neq e$. Assim, a, b, c, d, e são elementos de K , distintos entre si, o que contraria P4. Logo, por *reductio ad absurdum*, o teorema está provado.

T4 Por P3 existe pelo menos um desses elementos em K , digamos a . Seja $b \neq a$ outro elemento de K . Por P1, temos $R(a, b)$ ou $R(b, a)$. Mas, por hipótese, a primeira dessas alternativas não se verifica. Logo, devemos ter $R(b, a)$ e o teorema está demonstrado.

T5 Pela Definição 1, temos $R(b, a)$ e $R(c, b)$. Por P3, temos então $R(c, a)$ o que significa, pela Definição 1, que $D(a, c)$.

T6 Suponhamos $a \neq b$. Então, por P1, temos $R(a, b)$ ou $R(b, a)$. Suponhamos que se tenha $R(a, b)$. Como, por hipótese, temos $F(b, c)$, então temos também, pela Definição 2, $R(b, c)$. Mas isso é impossível, uma vez que por hipótese temos $F(a, c)$. Suponhamos que se tenha $R(b, a)$. Como, por hipótese, temos $F(a, c)$, temos também, pela Definição 2, $R(a, c)$. Mas isso é impossível, uma vez que, por hipótese, temos $F(b, c)$. Assim, como ambos os casos levam a uma contradição, o teorema está provado por *reductio ad absurdum*.

T7 Pois, por definição, temos $R(a, b)$ e $R(b, c)$. Onde, pela Definição 2, não podemos ter $F(a, c)$.

15.8 (b) *T1*: Se a é um antepassado de b , então b não é antepassado de a .

T2: Se a é um antepassado de b e se c é um terceiro membro de K , distinto de a e b , então ou a é antepassado de c ou c é antepassado de b .

T3: Existe algum homem em K que não é antepassado de nenhum membro de K .

T4: Existe apenas um homem em K que não é antepassado de nenhum membro de K . *Definição 1*: Se b é um antepassado de a , dizemos que a é um descendente de b .

T5: Se a é um descendente de b e b é um descendente de c , então a é um descendente de c . *Definição 2*: Se a é um antepassado de b e não existe

nenhum membro c de K tal que a é antepassado de c e c é antepassado de b , então dizemos que a é pai de b .

T6: Um homem de K tem no máximo um pai em K .

T7: Se a é pai de b e b é pai de c , então a não é pai de c .

Definição 3: Se a é pai de b e b é pai de c , então dizemos que a é avô de c .

(d) Uma vez que se deduziu T1 de P1, P2, P3, P4, tudo o que resta é deduzir P2 de P1, T1, P3, P4.

- 15.9 (b) A recíproca de “Se A , então B ” é “Se B , então A ”.
- (c) A contrária de “Se A , então B ” é “Se não A , então não B ”.
- 15.10 (a) 48 milhas por hora.
- (b) 2,4 dias.
- (d) 67 1/2 centavos.
- (e) O segundo.
- (f) Ao fim de 59 segundos.
- (g) Um salário muito bom.
- (h) 11 segundos.
- (i) Cinco centavos.
- (j) O volume é o mesmo.
- (k) A pilha final terá uma altura superior a 17 000 000 de milhas.
- (l) Não.
- (m) Um terço.
- (n) Sim.
- 15.13 (a) Seja um sistema de coordenadas cartesianas retangulares de um plano. Interprete S como o conjunto formado por esse sistema mais todos os que lhe são paralelos, não podendo dois sistemas de S ter eixos comuns. Defina então F assim: bFa se, e somente se, a origem do sistema b está no primeiro quadrante do sistema a . Outra possibilidade é interpretar S como o conjunto de todos os pares ordenados (m, n) de números reais e definir F por: $(m, n) F(u, v)$ se, e somente se, $m > u$ e $n > v$.
- 15.14 (a) Interprete as abelhas como 6 pessoas, A, B, C, D, E, F e as 4 colmeias como as 4 comissões $(A, B, C), (A, D, E), (B, F, E)$ e (C, F, D) . Ou interprete as abelhas e as colmeias como 6 árvores e 4 fileiras de árvores, formando, respectivamente, os vértices e os lados de um quadrilátero completo.
- (b) Para mostrar a independência de P2, interprete as abelhas e as colmeias como 4 árvores e 4 fileiras de árvores, formando os vértices e os lados de um quadrado. Para mostrar a independência de P3, interprete as abelhas como 4 árvores localizadas nos vértices e no pé de uma das alturas de um triângulo equilátero e as colmeias como as 4 fileiras de árvores ao longo dos lados e da altura do triângulo. Para mostrar a independência de P4, interprete as

abelhas e as colmeias como 3 árvores, e 3 fileiras de árvores formando os vértices e os lados de um triângulo.

- (c) Denote as 4 colmeias por a, b, c, d e as abelhas pelos números naturais 1, 2, 3, Os postulados implicam, necessariamente, o esquema da Figura 141, na qual o número natural de uma cela qualquer indica a única abelha comum às duas colmeias que encabeçam a linha e a coluna cuja intersecção é essa cela. Agora todos os três teoremas se tornam evidentes a partir do esquema.
- 15.15 (e) Por $M1'$ temos $d(x, y) \leq d(y, z) + d(z, x)$ e, permutando x e y , $d(y, x) \leq d(x, z) + d(z, y)$. Fazendo $z = x$ na primeira dessas relações e $z = y$ na segunda, e levando em conta $M2$, obtemos $d(x, y) \leq d(y, x) \leq d(x, y)$. Segue-se que $d(x, y) = d(y, x)$. Em $d(x, z) \leq d(z, y) + d(y, x)$ façamos $z = x$. Então, como $0 = d(x, x)$ (devido a $M2$), $0 \leq d(x, y) + d(y, x) = 2d(x, y)$ (devido à conclusão anterior). Logo, $d(x, y) \geq 0$. E assim por diante.
- (g-3) Apenas a verificação da desigualdade triangular oferece alguma dificuldade. Denote $d(y, z), d(z, x), d(x, y)$ por a, b, c , respectivamente. Temos então: $b/(1 + b) = 1/(1/b + 1) \leq 1/[1/(c + a) + 1] = (c + a)/(1 + c + a) = c/(1 + c + a) + a/(1 + c + a) \leq c/(1 + c) + a/(1 + a)$.
- (h) Por (c), uma *esfera* é um quadrado de centro c cujas diagonais são paralelas aos eixos coordenados e têm medida igual a $2r$.

		a	b	c	d
a			1	2	3
b		1		4	5
c		2	4		6
d		3	5	6	

Figura 141

- 15.16 (a) Sejam M_1 o ponto médio de AB , M_2 o ponto médio de M_1B , M_3 o ponto médio de M_2B e assim por diante. Denote por E o conjunto dos pontos de $[AB]$, exceto os pontos $A, B, M_1, M_2, M_3, \dots$. Temos então
 - $[AB] = E, A, B, M_1, M_2, M_3, \dots,$
 - $(AB) = E, B, M_1, M_2, M_3, \dots,$
 - $[AB) = E, A, M_1, M_2, M_3, \dots,$
 - $(AB) = E, M_1, M_2, M_3, \dots$
 Torna-se assim evidente que podemos pôr os pontos de cada um dos 4 segmentos em correspondência biunívoca com os pontos de qualquer um desses segmentos.

- (b) Inicie com a Figura 142.
- 15.17 (b) Use a ideia empregada na demonstração do Teorema 1 da Seção 15-4.
- (c) Use argumentação indireta, juntamente com (a) do Teorema 1 da Seção 15-4.
- (d) Use argumentação indireta, juntamente com (a) do Teorema 2 da Seção 15-4.

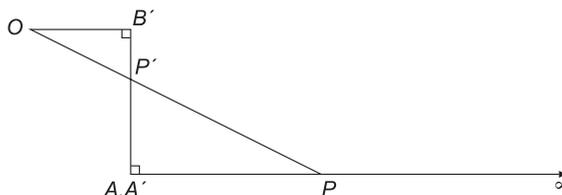


Figura 142

- 15.21 (a) Ver Problema E832, *The American Mathematical Monthly*, nº 56, 1949, p. 407.
- (c) Não, pois numa reta ou numa circunferência há c pontos, ao passo que há apenas d números racionais e d números algébricos.
- (d) Estabeleça sobre a reta um sistema de abscissas. Em cada intervalo escolha um ponto de abscissa racional. Esses pontos são todos distintos entre si e portanto estão em correspondência biunívoca com os intervalos. Como constituem um subconjunto infinito do conjunto de todos os números racionais (que é enumerável), então o conjunto desses pontos é enumerável, valendo o mesmo, portanto, para o conjunto de intervalos.
- 15.23 (b) A superfície formada por uma tira de papel torcida de 540° e depois colada pelas pontas.
- (c) Ver Figura 143. Essa superfície foi descoberta por F. Frankl e L. S. Pontryagin em 1930.
- (d) Um disco circular.
- 15.25 (b) Um tetraedro tem seis arestas e uma pirâmide de base quadrada tem oito arestas. Suponha que pudesse existir um poliedro fechado simples de sete arestas. Observe uma face particular do poliedro e suponha que ela tenha n arestas. Como de cada vértice dessa face saem pelo menos três arestas, temos $2n \leq 7$, ou $n < 4$. Segue-se então que todas as faces do poliedro devem ser triângulos e daí $3f = 2a = 14$. Mas isso é impossível, pois f é inteiro.
- 15.26 (a) As relações (1) e (2) são óbvias. As relações (3) e (4) decorrem de que cada aresta pertence exatamente a duas faces e cada aresta sai de exatamente dois vértices. Para obter (5) note que $v - a + f = 2$, ou $2v + 2f = 4 + 2a$. Substituin-

do (1), (2) e (3) nesta igualdade, obtém-se $2(v_3 + v_4 + \dots) + 2(f_3 + f_4 + \dots) = 4 + 3f_3 + 4f_4 + 5f_5 + \dots$, ou $2(v_3 + v_4 + \dots) = 4 + f_3 + 2f_4 + 3f_5 + 4f_6 + \dots$. Para obter (6) substitui-se igualmente (1), (2), (3) em $2v + 2f = 4 + 2a$. Somando o dobro de (6) com (5), obtém-se $4(f_3 + f_4 + \dots) + 2(v_3 + v_4 + \dots) = 8 + (2v_3 + 4v_4 + 6v_5 + 8v_6 + \dots) + 4 + (f_3 + 2f_4 + 3f_5 + 4f_6 + \dots)$ ou $3f_3 + 2f_4 + f_5 = 12 + (2v_4 + 4v_5 + 6v_6 + \dots) + (f_7 + 2f_8 + 3f_9 + \dots)$, que é (7).

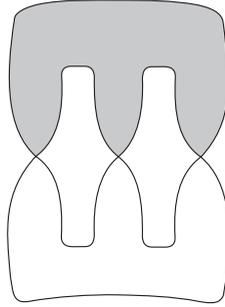


Figura 143

- (b) Trata-se de consequências fáceis de tirar de (7) de (a).
- (c) Por (1), a relação (7) de (a) se reduz a $f_5 = 12$; por (2), ela se reduz a $2f_4 = 12$, ou $f_4 = 6$; por (3), ela se reduz a $3f_3 = 12$, ou $f_3 = 4$.
- 15.27 (e) As verificações de H1 e H2 são imediatas e por isso deixamos de fazê-las. Para verificar H3, seja y um ponto da bola aberta $B(x, r)$ de centro x e raio r . Como $d(x, y) < r$, então $R = r - d(x, y) > 0$. Mostremos que $B(y, R)$ está contida em $B(x, r)$. Se z pertence a $B(y, R)$, então $d(y, z) < R$. A desigualdade triangular nos garante então que $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < r - R + R = r$ (pois $d(x, y) = r - R$ e $d(y, z) < R$). Se $d(x, z) < r$, então z pertence efetivamente a $B(x, r)$. Para verificar H4, sejam x e y pontos do espaço, $x \neq y$. Então $r = d(x, y) > 0$ e facilmente se prova que $B(x, r/3)$ e $B(y, r/3)$ não têm pontos comuns.
- (f) Como x é um ponto de acumulação de S , toda vizinhança N_x de x contém um ponto y_1 de S , $y_1 \neq x$. Por H4 existem então vizinhanças disjuntas N_{y_1} e N'_x de y_1 e x . Por H2, existe uma vizinhança N''_x de x contida em N_x e em N'_x . Logo, y_1 não está em N''_x . Mas, como x é um ponto de acumulação de S , N''_x , e portanto N_x , contém um ponto y_2 de S , ponto esse distinto de x e y_1 . Prosseguindo com esse raciocínio, concluiremos que N_x contém uma sequência infinita y_1, y_2, \dots de pontos de S , distintos entre si, o que prova o teorema.

- 15.29 (a) Denote os três valores lógicos possíveis por V (verdadeiro), F (falso), $?$ (outro). A tabela-verdade da conjunção pode ser construída como se indica na Figura 144, na qual, conforme nossa convenção sobre o significado de “ p e q ” a cela superior esquerda da tabela deve ser a única a conter V . Como há mais oito celas e cada uma pode ser preenchida de duas maneiras possíveis (com um F ou um $?$), então há ao todo $2^8 = 256$ maneiras possíveis de preencher essas 8 celas.

		q		
	^	V	?	F
P	V	V		
	?			
	F			

Figura 144

- (b) A tabela-verdade da negação pode ser construída como se indica na Figura 145, havendo duas maneiras de preencher a cela superior (F ou $?$), três maneiras de preencher a cela do meio (V , F ou $?$) e duas maneiras de preencher a cela inferior (V ou $?$) da coluna de não p .
- (c) $(256)(12) = 3072$.
- (d) $m^{m-2} (m-1)^{m^2+1}$
- 15.33 (a) Ver, por exemplo, Howard Eves, *Mathematical Circles Squared*, Boston, Prindle, Weber & Schmidt, 1972, pp. 53-5.
- (b) Ver, por exemplo, Ball-Coxeter, *Mathematical Recreations and Essays*. Nova York, Macmillan, 1939, pp. 165-70.

p	$n\tilde{a}o-p$
v	
?	
F	

Figura 145

Índice remissivo

A

- Aarão, o Justo (ver Harun al Rashid)
- Abacistas, 40-1
- Ábaco, 39-40, 242, 262, 290, 685
- Abbas e Dabbas, 704
- Abel, N. H. (1802-1829), 306, 532-4
citação, 438
comparação com Galois, 533
contribuição ao *Journal de Crelle*, 533, 590
equação integral, 534
equação química, 305-6, 533
funções elípticas, 533-4, 536
retrato de, 533
teorema binomial, 438, 534
teoremas, 534
teste de convergência, 534
- Abelhas e colmeias, 210, 705
- Abraham bar Hiyya (c. 1120), 291
Geometria Prática, 291
- Abscissa, 263, 385, 388
- Abû Kamil (c. 900), 261, 293
- Abû'l Wefâ (940-998), 261-2
compasso enferrujado, 264, 588
equações quárticas, 263
tábuas de senos e tangentes, 261
- Academia Ateniense da Pérsia, 213
- Academia de Ciências da França, 144, 362, 475, 477, 527, 531, 535, 564, 596, 619, 691
declina de examinar mais soluções do problema da quadratura, 144
sistema métrico, 493-4
- Academia de Ciências de Göttingen, 392
- Academia Nacional de Ciências dos Estados Unidos, 555-6
- Academia Russa ou de S. Petersburgo, 465, 471, 475
- Académie des Sciences (ver Academia de Ciências da França)
- Accademia dei Lincei, 564
- “Achatador da Terra”, 475
- Ackermann, W. (1896-1962), 608
em Göttingen, 608
formalismo, 682
- Acta creditorum*, 443, 463
- Açoka, rei (c. 250 a.C.), 4, 248
colunas de, 248
- Adams, J. C. (1819-1892), 526
- “Adão da matemática”, 562
- Adelardo de Bath (ca. 1075-1160), 291
polígonos estrelados, 317
tradução dos *Elementos* de Euclides, 168, 291
- Adição (hindu), 253, 256
- Adjetivos autológicos, 713
- Adjetivos heterológicos, 713
- Adler, A. (1863-1923), 588
- Agnesi, M. G. (1718-1799), 389, 479-81
Analytical Institutions de Colson, 480
curva (feiticeira) de Agnesi, 389, 504-5
Instituzione Analitiche, 480
Plêiades Matemáticas, 622
Propositiones philosophicae, 479-80
retrato de, 480
sonambulismo, 481
- Agnesi, M. T. (1724-1780), 480
- Ahmes (c. 1650 a.C.), 69, 76
- Al-Banna (1256-1321), 99
números amigáveis, 99
- Albategnius (ver Al-Battâni)
- Al-Battâni (c. 850-929), 265, 291
- Albert, A. A. (1946), 577
álgebra de Jordan, 577
- Al-Biruni (973-1048), 194, 217
Índia, 260

- Alcuíno de York (735-804), 99, 289-90, 314
Propositiones ad acuendos juvenes, 314
- Alef zero, 662n
- Alexander, J. W. (1888-1971), 668
 topologia, 668
- Alexandre, o Grande (356-323 a.C.), 162, 166-7, 248
- Alexandria, 161-4, 166-7, 191
 Universidade de, 161, 163, 166-7, 191-2, 212-3
- Álgebra(s), abstrata, 547, 553, 621
 árabe, 263-4, 266
 aritmética, 207, 546
 babilônica, 61-3
 booleana, 557-8, 592, 669
 de Boole-Schröder, 670
 de classes (ver cálculo com classes)
 de Jordan, 553, 576-7
 de Lie, 553, 576-7
 de pontos, 579
 dos quatérnios, 550-1, 555
 egípcia, 74, 83-4
 etimologia, 266
 geométrica, 122, 169, 207, 405-6
 grega, 206-7
 hindu, 206, 256
 libertação da, 548-53
 matricial, 552-3, 560, 563, 575-6
 não associativas, 553
 não comutativas, 549-53, 576-7
 paradoxos em, 640-3
 retórica, 206-7, 264, 293
 simbólica (ver simbólica, álgebra)
 sincopada, 206, 256, 298
 teorema fundamental da, 477, 520, 520n, 566
- Algebra* (Bombelli), 328
- Algebra* (Wallis), 451
- Algebrista, 266
- Algorista, 40-1
- Algoritmo, etimologia, 266
 da galera, 323-4
 da gelosia, 254, 323
 da grade para a multiplicação, 323
 da raiz quadrada, 298
 das riscas, 323-4
 euclidiano, 173, 181-3
 origem de, 254
- Algoritmo euclidiano, aplicações, 182
- Al-Haitam (Alhazen) (ca. 965-1039), 264
Óptica, 264
 problema de, 264
- Al-Karkhî (c. 1092), 261-2, 264
Fakhrî, 261, 275
- Al-Kashi (m. c. 1436), aproximação de π , 142, 245, 262
 teorema binomial, 262
- Al-Khowârizmî (c. 825), 40, 261, 263, 266, 291, 293
 aritmética, 263
Hisâb al-jabr w'al-muqâ-balab, 266, 291, 293
- Allaire, F. (1977), 689
- Almagesto* (Ptolomeu), 142, 204, 210, 265, 295
 comentário de Têon, 212
 etimologia, 204, 266
 tradução de Cusa-Peurbach, 296
 tradução de Gerardo de Cremona, 291
 tradução para o árabe, 142, 261, 265
- Al-Mâmûn, califa (c. 820), 261
- Al-Mansûr, califa (712-744 ou 745), 261
- Alta Idade Média, 246, 289
 problemas da, 314-5
- Altar de Apolo, 135
- Altura de um polinômio, 664, 707
- Amém, 325
- American Journal of Mathematics*, 561, 565, 621
- American Mathematical Society, 565, 621
- Amos Dettonville (pseudônimo de Pascal), 366
- Analísadores diferenciais, 688
- Análise, 180
 fundamentos da, 462
 parte fundamental da matemática, 666
- Análise espectral, 599
- Análise harmônica, 528
- Análise numérica, 688
- Análise submatemática, 295
- Analysis aequationum universalis* (Raphson), 451
- Analysis per Series, Fluxiones etc.* (Newton), 438
- Analysis situs, 667
- Analysis situs* (Poincaré), 668

- Analytica posteriora* (Aristóteles), 132
Analytical Institutions (Agnesi-Colson), 480
 Analytical Society, 444
 Análogos no espaço, 626-7
Analytisch-geometrische Entwicklungen (Plücker), 598
 Anaxágoras (c. 500-c. 488 a.C.), 130
 quadratura do círculo, 140
 Anderson, A. (1582-c. 1620), 201
 restauração de uma obra de Apolônio, 201
 Anel esférico, 447
 Anéis, 553, 621
 Anéis chineses, 48
 Anéis de divisão, 553
Annales de Mathématiques (Gergonne), 522
Annuities upon Lives (De Moivre), 467
 Anthoniszoon, A. (c. 1543-1620), 143
 valor de π , 143
 Antinomias da teoria dos conjuntos, 673-7
 Antífon, o Sofista (c. 430 a.C.), 133, 213, 418
 método de exaustão, 133, 418
 quadratura do círculo, 213
 Antiprisma, 358
Antologia Grega, 206-7, 225
 problemas de, 224
 Apêndice à adição de Wright da *Descriptio* de Napier (Oughtred), 352
Aperçu Historique sur l'Origine et le Développement des Méthodes en Géométrie (Chasles), 594
 Aplicações de áreas, 110
 Apolônio de Perga (c. 262-c. 190 a.C.), 167, 181, 197, 198-202, 209, 296, 400
 alcunha, 197
 círculo de, 201
 duplicação do cubo, 135, 150
 figuras evanescentes, 602
 geometria analítica, 199, 382
 Inclinações, 200, 219
 lugar relativo a 3 ou 4 retas, 210
 Lugares planos, 200-1, 219
 método para escrever números grandes, 210
 “o Grande Geômetra”, 198
 Problema de, 201, 219, 308
 Problemas de, 200, 219
 Secções cônicas (ver *Secções, Cônicas*)
 Sobre secções determinadas, 200
 Sobre secções espaciais, 200
 Sobre secções proporcionais, 200
 Tangências, 200-1, 219, 311
 Appel, K. (1976), 689
Application d'Algèbre à la Géométrie (Monge e Hachette), 490
Application de l'Analyse à la Géométrie (Monge), 490
 Aquino, T. (1226-1274), 295
 Arago, F. (1786-1853), 474-5
 tributo a Euler, 474-5
 Arbelos, 210, 216-7
 propriedades do, 216-7
 Arca de Noé, 99
 Arcebispo dom Raimundo (ca. 1085), 291
 Archibald, R. C. (1950), 168n
Archiv der Mathematik und Physik, 565
 Arco, de um grafo, 501
 Área, arco cicloidal, 366, 396
 calota esférica, 194, 214-5
 círculo, 75, 84, 424, 446
 elipse, 426-7
 esfera, 194, 214-5
 espiral de Arquimedes, 194
 quadrilátero, 75, 84
 quadrilátero cíclico, 257
 segmento circular, 243
 segmento parabólico, 194, 421
 triângulo em função dos lados, 194, 205, 222, 257, 274
 triângulo em função das coordenadas dos vértices, 505
 triângulo esférico, 402, 412
 zona esférica, 195, 214-5
 Argand, J. R. (1768-1822), 522
 Arianos, 247
 Aristarco de Samos (c. 310-230 a.C.), 195, 213-4
 “Copérnico da Antiguidade”, 213
 hipótese heliocêntrica, 195, 213
 Sobre os tamanhos e distâncias do Sol e da Lua, 214

- Aristeu (c. 320 a.C.), 198
Lugares Sólidos, 210
- Aristóteles (384-322 a.C.), 106, 115, 179, 213, 295, 353
- Analytica posteriora*, 132
- Metafísica*, 175
- retrato de, 133
- roda de, 373
- Aritmética, árabe, 262-3
 babilônica, 60
 egípcia, 72-4
 hindu, 252-5
 italiana (Renascimento), 299-301
 pitagórica, 98-103
 simbólica, 546, 546n
- Aritmética* (Boécio), 289
- Aritmética* (Diofanto), 207-9, 225, 390
 comentário por Hipátia, 212
 problemas de, 208-9, 225
 sincopação da álgebra, 208-9
 tradução de Xilander-Méziriac, 400
- Aritmética de Treviso*, 299-300, 324
- Aritméticas antigas, 299-301
- Aritmética *versus* Teoria dos Números, 98
- Arithmetica infinitorum* (Wallis), 431-2, 436
- Arithmetica integra* (Stifel), 301
- Arithmetica logarithmica* (Briggs), 346
- Arithmetica universalis* (Newton), 438, 440, 554
- Aritmetização da análise, 530, 609-11, 674
- Aritmetização da geometria, 384
- Aritmografia, 302, 324-5
- Arquimedes, 62, 192-6, 198, 209, 215-6, 261, 263, 296, 308, 421, 424, 435, 465, 519
A medida de um círculo, 142, 156, 194, 213
A quadratura da parábola, 194
 arbelos, 210, 216-7
 área de um segmento parabólico, 421
 área de um triângulo em função dos lados, 194
 axioma de, 445
 bomba de água de, 196-7
 citações sobre, 194
 equação cúbica, 194-5
 espiral de, 140-1, 194, 210, 632
 figuras evanescentes, 602
 fórmula de Euler-Descartes, 124
 inspiração para Germain, 525
 integração, 421
 lei das alavancas, 347n
Liber assumptorum, 194, 217
Loculos Archimedi, 196
 método clássico de calcular π , 142-3, 194
 método de equilíbrio, 422-4, 446
 método de exaustão, 419-21, 445-6
 morte de, 192-4
O contador de grãos de areia, 195
O método, 196, 422, 423
 planetário, 196
 poliedros semirregulares, 195, 210
 problema da coroa, 193, 215-6
 problema do gado, 195
 quadratura da parábola, 194
 quadratura do círculo, 140
 quadratura do segmento parabólico, 195, 422-4, 446
 retrato de, 192
 salinon, 217
Sobre a construção de esferas, 196
Sobre a esfera e o cilindro, 194-5, 213, 214-5
Sobre alavancas, 196
Sobre as espirais, 194
Sobre o calendário, 196
Sobre os cones e os esferoides, 194, 195
Sobre os corpos flutuantes, 195-6, 215
Sobre o equilíbrio das figuras planas, 195-6, 213
Sobre o heptágono num círculo, 274-5
 teorema da corda quebrada, 195, 217
 trisseção do ângulo, 141, 152
 túmulo de, 193
 volume da esfera, 422-3
- Arquitas (428-347 a.C.), 107, 117, 131
 duplicação do cubo, 135, 149
- Ars conjectandi* (Jakob Bernoulli), 394, 464, 467
- Ars magna* (Cardano), 303, 307
- Artifício nas hipóteses, 638, 639
- Artis analyticae praxis* (Harriot), 348
- Árvore da Matemática, 655, 692-4
- Āryabhata, o Velho (c. 475-c. 550), 250-1, 256
Aryabhatiya, 251
 etimologia do seno, 267
 valor de π , 142

- volume da esfera, 258
 volume da pirâmide, 258
 Āryabhatas, os, 250
As mil e uma noites, 261
 ASCC, 687
 Association for Women in Mathematics, 622
 Association Française pour l'Avancement des Sciences, 627
 Aubry (1896), 153
Ausdehnungslehre (Grassmann), 551, 555
 Axioma da redutibilidade, 678
 Axioma de Arquimedes, 445
 Axiomas, 179
 da teoria dos grupos, 569
 de Euclides, 179
 dos espaços de Hausdorff, 711-2
 dos espaços métricos, 705-7
 Axiomas e postulados, 179
 diferença entre, 179-80
 Axiomática, 179, 655, 657-9, 673, 682, 701-2
 formal, 682
 material, 682
- B**
- Babbage, C. (1792-1871), 444, 686-7
 Analytical Society, 444
 máquina analítica, 687
 máquina diferencial, 686
 retrato de, 687
 sonho que se tornou realidade, 688
 Babilônica(s), geometria, 60
 matemática (comercial e agrária), 60
 matemática (fontes), 58-60
 milha-tempo, 61
 tábulas, 58-60
 Plimpton 322, 63-6
 Bach, J. S. (1685-1750), 485
 Bachet de Méziriac (1581-1638), 207
 Aritmética de Diofanto, 390, 400
 problemas de, 411-2
 Problèmes Plaisants et Délectables, 400, 411-2
 Bacon, R. (1214-1294), 295
 Bailey, D. H. (1986), cálculo de π , 147, 688
 Baker, *The Well Spring of Science*, 322
 Bakshshālī, manuscrito, 270-1
 Baldwin, F. S. (1838-1925), 685
 máquina de calcular, 685
 Bali, W. W. R. (1850-1925), citação, 486
 Ball-Coxeter, *Mathematical Recreations and Essays*, 411, 580
 Bania, como árvore da matemática, 694
 Barras (ou ossos) de Napier, 342, 369-70
 Barrow, I. (1630-1677), 144, 433-5, 438
 comparação com Wallis, 532
 diferenciação, 434-5
 Euclid, 169, 174
 Lectiones opticae et geometricae, 434
 método dos indivisíveis, 428
 primeiro professor lucasiano, 348
 renúncia, 436
 retrato de, 433
 tangente a curvas, 434
 teorema fundamental do cálculo, 435
 triângulo diferencial, 434
 Base(s), arbitrárias, 42-4
 binárias, 48
 duodecimal, 28
 numéricas, 27-9
 quinárias, 28
 sexagesimal, 29
 vigesimal, 28-9
 Beaune, F. de (1601-1652), 388
 Beda, o Venerável, 289-90
 contagem com os dedos, 290
 tratado sobre o calendário, 290
 Beethoven, L. von (1770-1827), 472, 485
Begriffsschrift (Frege), 670
 Behistun, baixo relevo de, 59
 Bell, E. T. (1883-1960), 75, 295
 citação, 545
 The Development of Mathematics, 461, 545n
 The Magic of Numbers, 540n
 Beltrami, E. (1835-1900), 540
 geometria diferencial, 602
 independência do postulado das paralelas, 543
 Bento XIV, papa (1675-1758), 480
Bequest of the Greeks, The (Dantzig), 155n
 Berkeley, bispo George (1685-1753), 470, 638
 ataque ao cálculo, 470, 638

- Berlim (ou da Prússia), Academia de Ciências de, 443, 466, 475, 477, 479
- Bernays, P. (1888-1977), 670
 formalismo, 682
 teoria restrita dos conjuntos, 676
- Bernoulli, árvore genealógica, 467
- Bernoulli, Christoph (1782-1863), 466
- Bernoulli, Daniel (1700-1782), 465-6
 cordas vibrantes, 466
 equações diferenciais parciais, 466
 esperança moral, 466
Hydrodynamica, 466
 princípio da hidrodinâmica, 466
 probabilidade, 394
- Bernoulli, Daniel II (1751-1834), 466
- Bernoulli, família, 463-7
- Bernoulli, Jakob (1654-1705), 410n, 463-5, 466
Ars conjectandi, 394, 464, 467
 cálculo de variações, 464
 catenária, 464
 coordenadas polares, 464, 595
 distribuição de, 464
 equação de Riccati, 476
 equação diferencial de, 464, 502-3
 figuras isoperimétricas, 464
 isócrona (curva), 464
 lemniscata, 401, 410, 464, 632
 probabilidade matemática, 464
 nefroide, 411
 números de, 464, 495-6
 polinômios de, 464
 raio de curvatura, 464
 retrato de, 464
 somas de séries infinitas, 498
 teorema de estatística, 464
 túmulo de, 465
- Bernoulli, Jakob II (1759-1789), 466
- Bernoulli, Johann (1667-1748), 463-6, 471, 596
 acordo com l'Hospital, 444
 cálculo, 465
calculus integralis, 465-6
 citação, 639
 conceito de função, 660
 postulado de, 639
 problema da braquistócrona, 465
 retrato de, 466
 trajetórias ortogonais, 465
 trigonometria analítica, 465
- Bernoulli, Johann II (1710-1790), 465-6
- Bernoulli, Johann III (1744-1807), 466
 decimais recorrentes, 466
 doutrina do acaso, 466
 equações indeterminadas, 466
- Bernoulli, Johann Gustav (1811-1863), 466
- Bernoulli, Nicolaus (1687-1759), 466
- Bernoulli, Nicolaus (1695-1726), 466, 471
 paradoxo de S. Petersburgo, 465
- Bernoulli, Nicolaus (sobrinho de Jakob e Johann), 476
- Bertelsen, N. P. (1893), 623
- Bertrand, J. (1822-1900), curvas de, 602
- BESK, números perfeitos, 99
- Bessy (ver Frénicle de Bessy, B.)
- Bestificação, 302, 302n, 325
- Beta, funções, 473, 488
- Betti, grupos de, 668
- Bhāskara (1114-c. 1185), 250, 251
 identidades de, 256, 272
Lilāvati, 251, 251n, 253, 323
 problemas de, 271-2
 regra de três, 263
Siddhānta Siromani, 251, 251n
 teorema de Pitágoras, 258
 valores de π , 142
Vijaganita, 251, 251n
- Bíblia, 44, 167
- Apocalipse*, 302
- Bibliography of Non-Euclidean Geometry, Including the Theory of Parallels, the Foundations of Geometry, and Space of n Dimensions* (Sommerville), 600
- Bibliothèque Nationale, 364
- Billingsley, Sir H. (m. 1606), 168
Euclid, 168, 172
- Binária, base, 48
- Binomial, teorema, 262
 generalizado, 436
 na China, 246
 Newton, 438, 449
- Binormal a uma curva do espaço, 602
- Birkhoff, Garret (n. 1911), 672
- Birkhoff, G. D. (1884-1944), 657
 postulados para a geometria euclidiana, 657

- Bitangentes, 599
- Biunívoca, correspondência, 26, 662
- Blumenthal, L. M., postulados para a geometria de Euclides, 657
- Bobalek, J. F. (1975), 325
- Bobillier, É. (1798-1840), 597
geometria analítica, 599
- Bôcher, prêmio, 605
- Bodenmiller, sequência de Euclides, 585
- Boécio (c. 475-524), 289-90
Aritmética, 289
Geometria, 289
polígonos estrelados, 317
- Bois-Reymond, P. du (1831-1889), 612, 619
- Boltzmanm, L. (1844-1906), 347n
equação dos gases, 347n
- Bolyai, Janos ou Johann (1802-1860), 542-4
citação, 542
desafio ao postulado das paralelas, 672
geometria não euclidiana, 542-4
libertação da geometria, 548
- Bolzano, B. (1781-1848), 529-30, 612
função contínua não diferenciável, 530
“O Pai da Aritmetização”, 530
prescrições para uma doença, 530
teorema de, 530
- Bolzano-Weierstrass, teorema de, 530
- Bomba de água (Arquimedes), 196-7
- Bomba atômica, 695-6
- Bombelli, R. (c. 1526-1573), 308
Álgebra, 328
cúbicas irredutíveis, 308
equações quinticas, 533
notação algébrica, 308, 326
- Bongus, padre, 302
- Bonnet, O. (1819-1892),
geometria diferencial, 602
- Bonola, *Non-Euclidean Geometry*, 542n
- Boole, G. (1815-1864), 442, 557-8
An Investigation into the Laws of Thought, on Which Are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probability, 557, 669
germes da teoria dos invariantes, 560
lógica, 669
The Mathematical Analysis of Logic, Being an Essay towards a Calculus of Deductive Reasoning, 557, 669
Treatise on Differential Equations, 557
Treatise on the Calculus of Finite Differences, 557
- Booleana, álgebra, 553, 557, 670
princípio de dualidade, 592
- Booleanos, anéis, 553
- Boole-Schröder, álgebra de, 669
- Borel, É. (1871-1956), 148n
- Borghi, P. (c. 1484), 299
- Borwein, J. M. e P. D. (1986), 147
algoritmo, 147
- Bouelles, C. de (1470-1533), 317
polígonos estrelados, 317
- Bourbaki, general C. D. S. (1816-1897), 692
- Bourbaki, N. (fictício), 691-692
concepção da matemática atual, 692
Éléments de Mathématique, 691
membros, 691
- Bowditch, N. (1733-1838), 486
citação, 486
tradução do *Traité de mécanique* de Laplace, 486
- Bowmar Instrument Corporation, 690
- Boyer, C. B. (n. 1906), 461, 595n
História da Matemática, 461
- Bradwardine, T. (1290-1349), 295-6
polígonos estrelados, 317
- Brahe, T. (1546-1601), 288
- Brahmagupta, (c. 628), 250, 251, 256
área de um quadrilátero cíclico, 257-8
- Brahma-sphuta-sidd'hānta*, 251
problemas de, 270-1
quadriláteros, 257-8, 274
regra de três, 263
trabalhos levados a Bagdá, 261
trapézio de, 258
- Brahma-sphuta-sidd'hānta* (Brahmagupta), 251
- Braquistócrona, 465
- Brehmer, F. (1877), 522
- Brianchon, C. J. (1785-1864), 361, 592
geometria projetiva, 361, 591
teoremas sobre cônicas, 592
- Briggs, H. (1561-1631), 345-6
Arithmetica logarithmica, 346
primeiro professor saviliano, 345
termo “característica”, 346
termo “mantissa”, 346

- Briggsianos, logaritmos, 345-6
 Bring, E. S. (1736-1798), 306
 equações quinticas, 402
 British Association, 566, 580
 Brocard, H. (1845-1922), sequência de Euclides, 585
 pontos de, 585
 Broglie, R. R. L. V. de (n. 1892), 347n
 equação onda-matéria, 347n
Brouillon projet (Desargues), 359n
 Brouncker, Lord W. (1620-1684), 403
 equações de Pell, 256n
 expressão para π , 403
 frações contínuas, 403
 retificação da cicloide, 403
 retificação da parábola, 403
 Brouwer, L. E. J. (1881-1961), 679
 biografia, 681-2
 intuicionismo, 616
 teorema do ponto fixo, 681
 teorema da invariância, 681
 topologia, 668
 Buda, (568-488 a.C.), 248, 694
Budget of Paradoxes, A (De Morgan), 325, 558
 Buffon, conde de (1707-1788), 145, 468
 problema de agulha, 145, 468, 505-6
Bulletin de la Societé Mathématique de France, 565
Bulletin of the American Mathematical Society, 565, 689
 Burali-Forti, C. (1861-1931), 674
 paradoxo na teoria dos conjuntos, 674
 Burckhardt, J. C. (1773-1825), 624
 tábua de primos, 624
 Bureau International de Pesos e Medidas, 494
 Bureau of Standards in Washington, D.C., 494
 Burgess, E. (1860), 251
 Bürgi, J. (1552-1632), 346
 invenção dos logaritmos, 345-6
 Buteo, J. (c. 1489-c. 1566), 321-2
 problemas de, 321-2
- C**
- Cadeia simples (grafos), 501
 Cadeia social de números, 116
 círculo social, 116
 Cadeias de Markov, 148
 Cadeira de noiva, 182
 Cairo, papiro matemático de, 87-8
 Cáiser Guilherme (1859-1941), 302
 Cáiser Rodolfo II (1552-1612), 356
 Cajori, F. (1859-1930), 418n, 451n, 522n
 A History of Mathematics, 630
 Calandri, F. (1491), 299
 Calculadoras portáteis, 689-90
 HP, 285, 690
 Cálculo, 462, 463-5, 468, 470, 497
 ataque de Berkeley, 470, 638
 fórmulas de diferenciação, 443-4
 misticismo no cálculo primitivo, 638-9
 paradoxos, 639-40, 643-4, 673-4
 primeiro texto de, 465
 rigorização do, por Lagrange, 484, 610, 613
 teorema fundamental do, 435, 443
 Cálculo com classes, 443
 Cálculo de diferenças finitas, 557
 Euler, 473
 Cálculo de extensões, 556, 578
 Cálculo de variações, 444, 464, 473, 494, 536, 594, 684
 Lagrange, 484
 Cálculo integral, 194, 358, 417, 421, 423-4, 428, 432, 443, 462, 531-2, 613-4
 Cálculo proposicional, como fundamento da matemática, 611, 678
 princípio de dualidade, 592
 Calculus integralis, 465
 Calculus summatorius, 464
 Calendário babilônico, 60
 cristão, 289
 reforma do, 262, 297, 312
 Califa Hakim (985-1021), 264
Cambridge and Dublin Mathematical Journal, 565
Cambridge Mathematical Journal, 565
 Campanus, J. (c. 1260), 168, 295
 polígonos estrelados, 317
 tradução dos *Elementos* de Euclides, 168, 295, 328-9
 trisseccção do ângulo, 328-9
 Campo de definição, 661
 Campo de valores, 661

- Campo de Provas de Aberdeen, 687
 Campo de Provas Navais, 687
Canon mathematicus seu ad triangula, (Viète), 309, 327
 Cantor, G. (1845-1918), 177, 615-6
 aforismo, 673
 citação, 545
 definição de conjunto, 676
 enumerabilidade do conjunto dos números algébricos, 664
 enumerabilidade do conjunto dos números racionais, 663-4
 Journal für Mathematik, 662
 fundamentos da matemática, 611
 Mathematische Annalen, 662
 não enumerabilidade do conjunto dos números reais, 664-65
 números irracionais, 615
 números transfinitos, 615, 661-66, 674
 paradoxos na teoria dos conjuntos, 674
 processo de diagonalização, 664
 retrato de, 616
 séries trigonométricas, 615
 teoria dos conjuntos, 615-6, 659
 teoria geral dos conjuntos, 674
 Cantor, M. (1829-1920), 76, 461
 Carathéodory, C. (1873-1950), 608
 Cardano, G. (1501-1576), 303, 306-7, 326, 365
 Ars magna, 303, 307
 equação quártica, 303
 nomes alternativos, 303n
 probabilidade, 307
 problema dos pontos, 365
 retrato de, 306
 solução das cúbicas, 303
 Cardano-Tartaglia, fórmula de, 303, 308, 325
 Cardioide, 411, 652
 Caritat, A. N. (ver Condorcet, marquês de)
 Carlyle, T. (1795-1881), 123, 487
 resolução geométrica de equações quadráticas, 123
 tradução dos *Éléments de Géométrie* de Legendre, 487
 Carnap, R. (1931), logicismo, 678
 Carnot, Adolphe [filho de L. Hippolyte Carnot], 492
 Carnot, H. (1848), 492
 Carnot, L. Hippolyte [segundo filho de L. N. M. Carnot] (1801-1888), 491
 Carnot, L. N. M. (1753-1823), 463, 489, 491-4
 comparação com Monge, 533
 como pioneiro da geometria projetiva, 590
 Essai sur la Théorie des Transversals, 491
 Géométrie de position, 491, 509, 585
 “O Organizador da Vitória”, 491
 retrato de, 492
 teorema de, 491, 510
 volume do tetraedro em função das arestas, 492
 Carnot, M. F. Sadi [filho de L. Hippolyte Carnot] (1837-1894), 492
 Carnot, N. L. Sadi [primeiro filho de L. N. M. Carnot] (1796-1832), 492
 Carrinho de mão, 366
 Cartan, É. (1869-1951), 607
 Cartesiana, oval, 386n
 Cartesiana, parábola (Newton), 389
 Cartesianas, parábolas, 389
 Casey, J. (1820-1891), sequência de Euclides, 585
 Cassini, C. F. (1756), 401
 Cassini, G. D. (1625-1712), 401, 475
 Cassini, J. (1677-1756), 401, 475
 Cassini, J. D. (1748-1845), 401
 Cassini, oval de, 401, 410
 Castillon (n. 1704), 211
 Castillon-Cramer, problema de, 211
Castle of Knowledge, The (Recordé), 301
 Catacústicas, curvas, 401
 de uma cardioide, 411
 de uma circunferência, 411
 Cataldi, P. A. (1548-1626), 312
 números perfeitos, 312
 Catarina, a Grande (1729-1796), 471, 477
 Cátedra, lucasiana, 347, 433, 436, 480, 686
 sadleriana, 559
 saviliana, 347, 404, 431, 561
 Catenária, 399, 464, 636
Catóptrica (Herão), 206, 222
 Cauchy, A. L. (1789-1857), 435, 530-2
 citação, 532, 600
 comparação com Gauss, 531
 conversão de Hermite, 563

- definição de derivada, 531, 610
- determinantes, 531, 536
- desigualdade (teoria das funções de variáveis complexas), 531
- equação característica de uma matriz, 532
- fórmula integral para a teoria das funções complexas, 531
- geometria diferencial, 602
- método dos limites, 674
- produto de duas séries, 531
- retrato de, 531
- rigorização do cálculo, 610
- segundo matemático em produção, 559
- teorema integral da teoria das funções complexas, 531
- teste da integral, 568
- teste da razão, 531, 568
- teste da raiz, 568
- Cauchy-Riemann, equações diferenciais de, 531, 613
- Cavalieri, B. (1598-1647), 346, 425-8, 431
Geometria indivisibilibus, 425-6
 método dos indivisíveis, 358, 395, 420, 425-8, 431, 447-8
 princípios de, 425-6, 447-8
 retrato de, 426
- Cayley, A. (1821-1895), 552-3, 559-62
 “A geometria projetiva compreendendo todas as geometrias”, 607
 álgebra matricial, 552-3, 560
Collected Mathematical Papers, 560
 comparação com Sylvester, 562
 desafio à lei comutativa da multiplicação, 672
 geometria de dimensão superior, 560, 599
 grupos, 536
 “o matemático dos matemáticos”, 560
 origem da álgebra abstrata, 553
 problema das quatro cores, 667
 produto de matrizes, 553, 576-7
 professor sadleriano, 559
 reta de, 377
 retrato de, 559
 teoria dos invariantes, 560
 terceiro matemático em produção, 559
- CDC 6600, 147
- CDC 7600, 147
- Cellini, Benvenuto (1500-1571), 302
- Ceres (planetoide), 521
- Ceva, G. (1648-1734), 375-6
 teorema de, 375-6, 585
- Champollion, J. F. (1790-1832), 71
- Característica de um logaritmo, 346
- Característica de uma superfície, 425n
- Carlos Magno, (742-814), 285-6
- Carlos II (1630-1685), 349, 433
- Characteristica generalis* (Leibniz), 442-3
- Chartres, R. (1904), 145
- Chasles, M. (1793-1880), 359, 594
Aperçu Historique sur l'Origine et le Développement des Méthodes en Géométrie, 594
 geometria projetiva, 360-1, 591
Traité des sections coniques, 594
 Chave-mestra da matemática, 553
- Chernac, L. (c. 1811), 624
 tábua de primos, 624
- Chevalier de Méré (1645), 365
- Chevalley, C. (contemporâneo) membro do grupo Bourbaki, 691
- Ch'in Kiu-shao (c. 1247), 245-6
 equações indeterminadas, 245
 método de Horner, 245-6
 símbolo do zero, 245
- Chisholm, G. E. (ver Young, Grace Chisholm)
Chóu-peï, 86, 244
- Christoffel, E. B. (1829-1901), 602
 geometria diferencial, 602
- Chuquet, N. (1445 ?-1500?), 297-8, 315
 problemas de, 320-1
 regle des nombres moyens, 321
Triparty en la science des nombres, 297-8, 320
- Church, A., citação, 671
- Chu Shī-kié (c. 1303), 245-6
 métodos matriciais, 246
 triângulo aritmético de Pascal, 246, 250
- Chwistek, E. (1924), 678
 logicismo, 678
- Cícero (106-43 a.C.), 193
- Cicloide, 362, 366, 389, 404, 430, 465
 área sob um arco, 366, 395, 396
 braquistócrona, 465

- evoluta de, 398, 409-10
 Galileu, 366, 396
 isócrona (propriedade), 398
 pomo da discórdia, 366
 retificação por Brounckner, 403
 retificação por Wren, 404
 superfícies e volumes de revolução associados, 366
 tangentes a, 366, 389, 396, 401, 430
 Ciência dos tiros de artilharia, 308
 Cifra, etimologia de, 41
Circles of Proportion, The (Oughtred), 350
 Circolo Matematico di Palermo, 565
 Círculo de Apolônio, 201
 Círculo(s), cosseno, 590
 de Euler, 625
 de Feuerbach, 625
 de Lemoine, 590
 de Lemoine (segundo), 590
 de Monge, 490-1
 dos nove pontos, 585, 625
 ortocentroidal, 626
 osculador, 444
 Círculo Vicioso, princípio do (Russell), 676
 Cirilo de Alexandria (c. 400), 212
 Cissoide, geral, 151, 430
 de Dioclés, 135, 151, 399
 retificação por Huygens, 399
 tangentes a, 430
 Cízico, escola de, 132
 Clairaut, A. C. (1713-1765), 463, 475-6, 596
 equação diferencial, 475, 503
 tradução de du Châtelet dos *Principia* de Newton, 483
 retrato de, 476.
 Théorie de la figure de la Terre, 475
 Théorie de la Lune, 475
 Clairaut, J. B. (m. pouco depois de 1765), 475
 Clairaut, le cadet (1716-1732), 475
 Classe vazia, 443
 Classes infinitas, 355
Clavis mathematica (Oughtred), 349-50, 436
 Clavius, C. (1537-1612), 312
 Elementos de Euclides, 312
 problemas de, 322, 328
 reforma do calendário, 312
 retrato de, 312
 Clebsch, R. F. A. (1833-1872), 599
 Clifford, W.K. (1845-1879), geometria de dimensão superior, 599
 Codazzi, D. (1824-1875), geometria diferencial, 602
 Coeficientes binominais, triângulo aritmético de Pascal, 365
 Stifel, 301
Cogitata phisico-mathematicae (Mersenne), 400
 Cohen, P. J. (n. 1934),
 hipótese do contínuo, 666
 Colburn, Z. (1804-1840), 554
Coleção Matemática (Papus), 210-2, 217, 226-7
Coleção Matemática [Ptolomeu] (ver *Almagesto*)
 Colebrooke, H. T. (1765-1837), 251
Collected Mathematical Papers (Cayley), 560
Collected Works (Gauss), 522
 Colmar, T. de (1890), máquina de calcular, 685
 Colosso de Ramsés II, 70
 Colson, J. (m. 1760), 438, 480
 Colunas de pedra do rei Açoka, 248
Comentário sobre Euclides, Livro I, (Proclo), 97, 213
 Commandino, F. (1509-1575), teorema de, 585
 Comissão de Energia Atômica (França), 147
 Comissão de Pesos e Medidas, 494
 Compasso(s), compostos, 138
 construções com, 587-8, 629-30
 de traçar elipses, 228
 de setores, 371-2
 desmontável, 134
 enferrujado, 264, 588
 moderno, 134, 149
 Compasso de setores, 355, 371-2
 linha de áreas, 372
 linha de metais, 372
 linha de volumes, 372
 Compasso euclidiano *versus* compasso moderno, 149
Compendium Euclidis curiosi (Mohr), 588, 630
 Complemento de um conjunto, 452
Comptes rendus, 531, 560, 691
 Computadores (ver Máquinas de calcular)
 Computadorite, 688
 Computação primitiva, 37-40, 252-4
 Conceitos primitivos, 656, 658

- Conchoide, geral, 152-3
 de Nicomedes, 138, 152-3, 210
 tangentes à, 430
- Condorcet, marquês de (1743-1794), 468
- Conforme, representação, 221
- Congresso Internacional de Matemática, 590, 684
- Congruência na teoria dos números, 520, 566-7
- Congruência por adição, 118
- Congruência por subtração, 118
- Cônicas* (Euclides), 181
- Conicoides n -dimensionais, 601
- Conjunto(s), densos, 662
 enumeráveis, 662, 707
 equivalentes, 662
 infinitos, 662
 limites, 646-7
 na “matemática moderna”, 691
 não enumeráveis, 664-5, 707
 número cardinal de um, 662
 parcialmente ordenados, 592
 vazio, 573
- Conjunto infinito, definição de Dedekind, 662
- Conjunto vazio, 573
- Conjuntos harmônicos, 360
- Cônon (c. 260 a.C.), 192
- Conselho de Matemática da China, 444
- Conservatório de Artes e Ofícios (França), 362, 685
- Consistência da matemática, 611, 670, 682-4
- Consistência de um conjunto de postulados, 657-8
 absoluta, 658
 relativa, 658
- Constantino, o Grande (272-337), 191
- Construções (ver Euclidianas, construções)
- Construções sobre uma superfície esférica, 279
- Contagem com os dedos, 29-30, 290
- Contagem primitiva, 25-7
- Continuidade, postulado de Dedekind da, 656, 698-9
- Continuidade, princípio de, 358, 360, 591, 592
- Contínuo, hipótese do, 666
 teorema de Cohen, 666
 conjectura de Gödel, 666
- Contrapositiva, proposição, 712
- Contrária, proposição, 712
- Coolidge, J. L. (1873-1954), 695
- Coordenadas, 388
- Coordenadas esféricas, 632
- Coordenadas homogêneas, 598, 635
- Coordenadas lineares, 595, 633
- Coordenadas polares, 464, 595, 632
- Copernicana, teoria, 195, 301, 354, 356
- Copérnico, N. (1473-1543), 204, 313, 673
 contestação da teoria geocêntrica, 673
 retrato de, 313
 teoria do sistema solar, (ver teoria copernicana)
 trigonometria, 313
- “Copérnico da Antiguidade”, 213
- Cordas vibrantes, 466, 477
- Corpos, 553
- Cossecante, origem do nome, 266
- Cosseno, origem do nome, 267, 346
- Cosroês I, rei (m. 579), 213
- Cotangente, origem do nome, 266, 346
- Courant e Robbins, *What is Mathematics?*, 136n, 397n
- Cramer, G. (1704-1752), 211
- Introduction à l'Analyse des Lignes Courbes Algébriques*, 470
 regra de, 470
- Cray-Z (supercomputadores), 147, 688
- Cray X-MP (supercomputador), números perfeitos, 100
- Crelle, A. L. (1780-1855), 565, 593
 tábua de primos, 624
- Crelle, Journal de*, 533, 565, 590, 593
- Cremona, L. (1830-1903), geometria projetiva, 591
- Crises nos fundamentos da matemática, 176, 673-4
 primeira crise, 176, 673
 segunda crise, 673-4
 terceira crise, 674
- Crivo de Eratóstenes, 198, 623, 647
- Cronologia de π (ver π , cronologia de)
- Crotona, escola de (ver pitagórica, escola)
- Crux mathematicorum*, 624
- Cubic Curves* (Newton), 438, 440
- Cúbito, 493

- Cuboetaedro, 124, 358
 Cunha cilíndrica (ou casco), 447
 Curva(s),
 braquistócrona, 465
 cardioide, 411, 632
 catacústica, 401
 catacústica de uma cardioide, 411
 catacústica de uma circunferência, 411
 catenária, 399, 464, 636
 cicloide, (ver Cicloide)
 círculo osculador, 444
 cissoide de Dioclés, 135, 151, 399
 cissoide geral, 151, 430
 classificação de Descartes, 385
 conchoide de Nicomedes, 138, 152-3, 210
 conchoide geral, 152-3
 cúbica de Tschirnhausen, 402, 411
 de frequência normal, 467, 497
 de largura constante, 474, 499-500
 de Koch, 645
 de Lamé, 434
 do floco de neve, 645
 envoltórias, 200, 398, 401, 444
 epicicloide, 411
 de duas cúspides, 411
 de uma cúspide, 411
 espirais de Fermat, 389
 espiral de Arquimedes, 138, 140, 194, 210, 632
 espiral equiangular, 465, 632
 espiral hiperbólica, 632
 espiral logarítmica, 315, 397
 espiral sinusoidal, 402, 411
 evolutas, 398, 602
 evolventes, 398
 feiticeira de Agnesi, 389, 482, 504-5
 folium de Descartes, 389, 407, 430, 434
 Helena da geometria, 366
 hipérbole de Fermat, 389
 isócrona, 464
 kappa, 434
 la galande, 434
 lemniscata de Bernoulli, 410-1, 464, 632
 limaçon de Pascal, 152, 363
 logarítmica, 399
 loxodroma, 402
 método das tangentes de Descartes, 385-6
 nefroide, 411
 orbiformes (ver orbiformes, curvas)
 ovais cartesianas, 386n
 oval de Cassini, 401, 410
 parábola cartesiana (Newton), 389
 parábolas de Fermat, 389
 parábolas de ordem superior, 389
 parábolas semicúbicas, 389, 464
 pedal, 594
 pérolas de Sluze, 402
 pomo da discórdia, 366
 pseudofeiticeira, 505
 quadratriz, 138, 430, 434
 quadratriz de Hípias e Dinostrato, 140, 210
 reversa, 475, 597
 rosácea de quatro folhas, 632
 roulettes, 594
 secções cônicas (ver Secções cônicas)
 tangente, 434
 tautócrona, 465
 tratriz, 637
 trajetórias ortogonais, 465
 transcendentes, 138, 154
 triângulo de Reuleaux, 499
 tridente, 406
 Curvatura, de uma curva, 439, 602
 gaussiana (ou total), 636
 média (ou de Germain), 524
 principal, 636
 Curvaturas principais de uma superfície, 603-4
 Cusa, N. (1401-1464), 296
 retificação aproximada de uma circunferência,
 317-8
- D**
- Da Coi, Zuanne de Tonini (1540), 303, 326
 Dado, 180, 187
 dados, Os (Euclides), 180, 210
 D'Alembert, Jean-le-Rond (1717-1783), 463, 476-
 8, 494
 citação, 478, 486
 equações diferenciais parciais, 477
 Encyclopédie, 477
 logaritmos de números negativos, 477
 precessão dos equinócios, 477
 princípio de, 477

- retrato de, 478
 teorema fundamental da aritmética, 477
 teoria dos limites, 477, 610
Traité de Dynamique, 477
- Dandelin, G. (1794-1847), 218
- Dantzig, *The Bequest of the Greeks*, 155n
- Darboux, J. D. (1842-1917), geometria diferencial, 602
- Dario, o Grande (reinou 522-486 a.C.), 59, 129, 248
- Darwin, C. R. (1809-1882), teoria da evolução, 355
- Dase, Z. (1824-1861), cálculo de π , 145
 tábuas de primos, 624
- Davies, C. (1798-1897), 487
- Dayoub, I. M. (1977), 153n
- De aequationum recognitione et emendatione* (Viète), 309, 310-1
- De algebra tractatus; historicus & practicus* (Wallis), 433
- De arte combinatoria* (Leibniz), 669
- Decimais recorrentes, 466
- Dedekind, R. (1831-1916), 107, 608
 cortes, 608
 definição de conjunto infinito, 662
 fundamentos da matemática, 611
 números irracionais, 173, 615, 673
 postulado de continuidade, 656, 698-9
 precursor do logicismo, 678
- De divina proportione* (Pacioli), 298
- Deficiência de um triângulo, 570-1
- Definições, explícitas *versus* implícitas, 656
 impredicativas, 676, 678
- De Gelder (1849), retificação aproximada da circunferência, 155
- Dehn, M. (1878-1952), 120, 684
- Deísmo, 444
- De Lagny, T. F. (1660-1734), cálculo de π , 144
- De la Loubère, S. (1687), 269
 quadrados mágicos, 269-70
- Delamain, R. (c. 1630), 350
 régua de cálculo circular, 350
- Deliano, problema (ver duplicação do cubo)
- Delsarte, J. (contemporâneo), membro do grupo Bourbaki, 691
- Demétrio Faleiros (c. 300 a.C.), 167
- Demócrito (c. 410 a.C.), teoria atomística, 133, 420
 precursor do método dos indivisíveis, 425
 volume de uma pirâmide, 420
- De Moivre A. (1667-1754), 463, 467-8
Annuities upon Lives, 467
 curvas de frequência normal, 467
Doctrine of chances, 467
 fórmula de, 468, 496
 fórmula de Stirling, 467
Miscellanea analytica, 467
 probabilidade, 394, 467
 probabilidade (uso de integral), 467
- De Morgan, A. (1806-1871), 349, 547, 557-8
A Budget of Paradoxes, 325, 558
 adivinhação, 225, 558
Formal Logic; or, the Calculus, of Inference, Necessary and Probable, 669
 leis de, 558
 problema das quatro cores, 667
 retrato de, 558
- De Morgan, medalha, 679
- Demóstenes (384-322 a.C.), 166
- Denso, conjunto de números, 662
- De numerosa potestatum resolutione* (Viète), 309-10
- Der barycentrische Calcul* (Möbius), 491
- Desargues, G. (1591-c. 1662), 340, 359-61, 363
Brouillon projet, 359n
 geometria projetiva, 359-61, 382
 pioneiro da geometria projetiva, 590
 pontos no infinito, 598
 projeção central, 360
 teorema dos dois triângulos, 360, 375, 598, 631
- Descartes, R. (1596-1650), 201, 295, 340, 348, 359, 383-9, 431
 classificação das curvas, 385
- Discours de la Méthode pour Bien Conduire sa Raison et Chercher la Vérité dans les Sciences*, 383-4, 389
 duplicação do cubo, 151
 folium de, 389, 407, 430, 434
 forma da Terra, 475
 fórmula de Euler-Descartes, ($v - a + f = 2$), 389, 473, 667

- geometria analítica, 382, 389
 geometria analítica sólida, 596
 “La dioptrique”, 384
 “La géométrie”, 384-8, 402, 406, 436
 “Le monde”, 383
 “Les météores”, 384
 lugar relativo a três ou quatro retas, 210
Meditationes, 384
 método das tangentes, 385-6, 406
 notação algébrica, 309
 números amigáveis, 99
Principia philosophiae, 384
 problemas de, 407-8
 regra de sinais, 307, 348, 388, 407, 440
 retificação da espiral logarítmica, 397
 retrato de, 384
 simbolismo para potências, 388
 solução da equação quártica, 305, 407
 sonhos, 388-9
 Descida infinita, método da, 392-3, 409
Descriptio (Napier) (ver *Mirifici logarithmorum canonis descriptio*)
 Desenvolvimento sintético, 180
 Desigualdade triangular, 706
 De Sua, F. (1956), citação, 683n
 Determinante(s), 536, 560, 561
 contribuições de Cauchy, 531, 536
 contribuições de Jacobi, 536, 578
 definição postulacional, 612
 expansão de Laplace, 486
 Leibniz e Seki Kōwa, 444
 teorema de Jacobi, 578
De triangulis (Jordanus), 317
De triangulis omnimodis (Regiomontanus), 296-7, 319
 Deutsche Mathematiker-Vereinigung, 565
Development of Mathematics, The (Bell), 461, 545n
Development of Mathematics in China and Japan, The (Mikami), 241
 Diagonalização, processo de (Cantor), 664
 Dicotomia, A., 418
 Diderot, D. (1713-1784), 477
Die Coss (Rudolff), 301
Die Theorie der Parallelinien (Lambert), 479, 541
 Dieudonné, J. (contemporâneo) membro do grupo Bourbaki, 691
 Diez, J. (1556), primeiro trabalho de matemática impresso no Novo Mundo, 314
 Diferenciais 443, 531
 Diferenciação, 417, 428-31, 448-9, 462
 Barrow, 434, 435
 Fermat, 429, 448-9
 Leibniz, 443
 Newton, 439
 regra de Leibniz, 449
 regras, 443
Differential Equations (Phillips), 425n
 Dígito(s), 29, 35
 Dilemas, 713-4
 Dimensão, teoria da, 462, 595, 659, 681, 708
 Dimensionalidade de uma variedade, 596, 633-4
 Dinâmica, 355
 Dinocrates (c. 325 a.C.), 166
 Dinostrato (c. 350 a.C.), 132
 quadratriz, 138, 140, 154, 210
 quadratura do círculo, 140
 Dioclés (c. 180 a.C.), cissoide, 135, 151, 399, 430
 duplicação do cubo, 135, 151
 Diofantinos, problemas, 208
 Diofanto (c. 250), 206, 207-9, 256, 261, 293, 391
 Aritmética, 207-8, 225-6, 390, 400
 Aritmética, comentário de Hipátia, 212
 Porismas, 207, 208
 problemas, 208, 225-6
 sincopação da álgebra, 206, 209
 Sobre números poligonais, 207
 traduções de, 207, 261
Diophantus of Alexandria (Heath), 208n
Dioptra (Herão), 206
 Dirichlet, P. G. L. (1805-1859), 392, 537-9, 607, 615-6
 comparação com Jacobi, 537
 definição de função, 537, 661
 função, 537
 genro de Abraham Mendelssohn, 538
 princípio de, 538
 problema de, 684
 retrato de, 538
 série de, 538
 séries de Fourier, 537

- teorema sobre primos, 624
 último “teorema” de Fermat, 392
Vorlesungen über Zahlentheorie, 537
Discorsi e Dimostrazioni Matematiche Intorno a Due Nuove Scienze (Galileu), 355, 372-3
Discussão das Dificuldades de Euclides (Khayyam), 264
Disquisitiones arithmeticae (Gauss), 520, 538, 566
Disquisitiones generales circa superficies curvas (Gauss), 521, 603
 Distância, fórmula da, 600
 Distribuições, 496-7
Divisão de figuras (Euclides), 180-1, 188
 Divisor próprio, 98n
 Divisores elementares, 613
 D’Ocagne, M. (1862-1938), 628
Doctrine of Chances (De Moivre), 467
 Dodecaedro rômico, 358
 Domínio de racionalidade, 134
 Domínios de integridade, 553
 Donnay, J. D. H. (1945), *Spherical Trigonometry after the Cesaro Method*, 221
 Dositeo (c. 260 a.C.), 192
 Douglas, J. (1897-1965), 605
 problema de Plateau, 605
 Doutrina do acaso, 466
 Droz-Farny, A. (c. 1894), sequência de Euclides, 585
 Dualidade, princípio de (ver Princípio de Dualidade)
 Du Châtelet, marquesa [Gabrielle Émilie Tonnelier de Breteuil] (1706-1749), 482-3, 495
Institutions de physique, 483
 retrato de, 483
 tradução dos *Principia* de Newton, 483
 Dudeney, H. E. (1857-1930), 118
 Dupin, C. (1784-1873), geometria
 diferencial, 490, 602-3
 geometria projetiva, 361
 indicatriz, 602
 famílias de superfícies triplamente ortogonais, 603
 teorema de, 602
 Dupla pesagem, 231
 Duplation e mediation, 81-2
 Duplicação do cubo, 133, 135-6
 Apolônio, 135, 150
 Arquitas, 135, 149
 com a cissoide de Dioclés, 135, 151
 Descartes, 151
 Dioclés, 135, 151
 Eratóstenes, 135, 150, 197
 Eudoxo, 135
 Hipócrates (redução de), 135
 Huygens, 151
 impossibilidade com os instrumentos euclidianos, 586
 Menaecmo, 135, 149
 Newton, 151, 152
 Nicomedes, 135
 Platão, 135-6
 Saint-Vincent, 151
 Viète, 152
 Dürer, A. (1471-1528), 152
 construção aproximada do eneágono regular, 328
Melancholia, A, 318, 320
 quadrados mágicos, 318-9
 trisseção aproximada de um ângulo, 139
- E**
- “*Eadem mutata resurgo*”, 465
 Edinburgh Mathematical Society, 565
 Edington, W. E. (1935), 148n
 Edison, T. A. (1847-1931), 356
 Edito de Nantes, 467
 EDSAC, 623
 Eduardo VI (1537-1553), 301
 EDVAC, 687
 Egípcia, álgebra, 74, 83-4
 área de um círculo, 75, 84
 área de um quadrilátero, 75, 84
 aritmética, 72-4, 81-2
 geometria, 75, 84
 quadratura do círculo, 75, 140-1
 matemática (fontes e datas), 66-71
 multiplicação e divisão, 72-3
 Egípcio(s), cetro real, 67
 fio de prumo e colimador, 69-70

- mais e menos, 74
 numerais e sistema de numeração, 30-1
 relógio de sol (mais antigo, existente), 69-70
 Einstein, A. (1879-1955), 682
 cálculo tensorial, 603
 contestação de um axioma da física, 672
 consciência, 696
 equação massa-energia, $E = mc^2$, 347n
 teoria da relatividade, 440, 485, 601, 618, 660, 672, 684, 704-5
 teoria geral da relatividade, 607, 614
 tributo a Noether, 621
 Eixo polar, 626
 Eleática, escola, 130
 Electronic Numerical Integrator and Computer (ENIAC), 146, 148, 687, 688
Elementary Principles of Statistical Mechanics (Gibbs), 578
Elementos (Euclides), 129, 132
 Abraham Lincoln e os, 183
 álgebra de Euclides, 169-70
 algoritmo, 181-2
 apreciação de Cayley e Sylvester, 562
 aspectos formais dos, 178-80
 axioma de Arquimedes, 445
 comentário de Pappus, 210
 comentário de Simplicio, 213
 Comentário sobre Euclides, Livro I de Proclo, 97, 213
 comparação com o *Treatise on Algebra*, de Peacock, 546
 comprado por Somerville, 525-6
 conceitos primitivos, 656
 conjunto de postulados para, 657
 construção de polígonos regulares, 178
 construções, 134, 588
 conteúdo, 169-76
 deficiências lógicas dos, 655-7
 edição de Clavius, 312
 edição de Mercator, 403
 equivalência dos compassos
 euclidiano e moderno, 149
 geometria sólida, 428
 grandeza de, 96
 história, 167-9
 identidades algébricas, 79, 107-9, 122
 identidades de Bhāskara, 256
 infinitude dos primos, 175, 623, 624
 leitura por Newton, 436
 método de exaustão, 445-6
 na *Geometria* de Boécio, 289
 no *Tesouro da Análise*, 210
 números perfeitos, 99
 origem dos Livros X e XIII, 132
 Pascal, B., 361
 poliedros regulares, 114-5
 postulado das paralelas (ver postulados)
 primeira edição impressa em grego (1533), 300
 primeiras três proposições do Livro I, 149
 resumo de Recorde, 301
 revisão de Legendre, 487, 541
 revisão de Têon, 212
 sequência de, 585, 590
 solução geométrica de equações quadráticas, 110-3
 Stifel e o Livro X, 301
 suposições tácitas feitas por Euclides, 655-6, 696
 teoria eudoxiana das proporções, 530, 673
 tradução de Adelardo, 291
 tradução de Gerardo, 291
 tradução latina de Campanus, 295, 328-9
 tradução para o árabe, 261
 tradução para o chinês, 247
 transformação de áreas, 113
 tratamento dos incomensuráveis, 107
 volume do tetraedro, 428
 Elementos (significado de), 175-6, 187
Elementos de Música (Euclides), 181
Éléments de Géométrie (Legendre), 487, 488, 541
Éléments de Mathématique (Bourbaki), 691
Elements of Conics (Werner), 328
Elements of Geometry (Leslie), 123
Elements of Quaternions (Hamilton), 555
 Elipse, aproximação do perímetro (Kepler), 358
 origem do nome, 199
 Elipsógrafo, 228
 Elípticas, funções, 402, 536, 560, 563, 616
 Abel, 533
 Legendre, 488, 533
 periodicidade dupla, 520

- Elizabeth, princesa da Boêmia, problema de Apolônio, 201
- Empedoclianos, elementos primordiais, 114
- Enciclopédias matemáticas, 565
- Encyclopédie*, 477
- Encyklopädie*, 607
- Eneágono regular, construção aproximada de Dürer, 328
- ENIAC, 146, 148, 687, 688
 π até 2035 casas, 146
 no Smithsonian Institution, 147
- Epicicloide, 411
 de duas cúspides, 411
 de uma cúspide, 411
- Epiménides (séc. V a.C.), paradoxo, 675
- Epsilon (alunha de Apolônio), 197
- Equação dos gases (Boltzmann), 347n
- Enumerável(is), conjunto(s), 662, 707
- Envoltórias, 200, 398, 401, 444
- Equação(ões),
 biquadradas (ver equações quárticas)
 característica de uma matriz, 532
 cúbica (ver equações cúbicas)
 de Pell, 256
 de Plücker, 598, 635
 diferencial(is) (ver equação(ões), diferencial(is))
 Hamilton-Cayley, de, 555
 indeterminadas, 466
 indeterminadas de primeiro grau, 272-3
 Laplace, 486
 método de Lagrange de aproximação de raízes, 484
 método de Newton de aproximação de raízes, 450-1
 método de Taylor de aproximação de raízes, 469
 método de Viète de aproximação de raízes, 310-1, 327
 quárticas (ver equações quárticas)
 simultâneas, 61, 73, 79, 80, 206, 224, 243, 444
 simultâneas lineares, 224
 teoria das (ver Teoria das equações)
- Equações cúbicas, 80, 263, 302-3, 325-6
 Arquimedes, 194-5
 caso irredutível, 308
 na Babilônia antiga, 61-2, 80
 na China antiga, 245
 solução de Cardano, 303
 solução geométrica, 261, 4
 solução de Khayyam, 261, 263-4, 277-9
 solução de Viète, 305, 309-11, 326
- Equações diferenciais, 486, 528
 de Bernoulli, 465, 502-3
 de Cauchy-Riemann, 531, 613
 de Clairaut, 475, 503
 de Euler, 473, 476, 503
 de Hamilton-Jacobi, 555
 de Lagrange, 484
 de Legendre, 488
 de Riccati, 476, 503
 fator integrante, 473
 linear com coeficientes constantes, 473
 método de Runge-Kutta, 608
 parciais, 466, 477, 484, 494, 528, 619
 variação de parâmetros, 484
- Equações indeterminadas (ver Indeterminadas, equações)
- Equações quadráticas, 208, 271, 298
 abordagem árabe, 263
 método hindu, 256
 solução babilônica, 61-3
 solução geométrica de Carlyle, 123
 solução geométrica de Staudt, 123
 solução geométrica pitagórica, 110-3, 123
- Equações quárticas (ver Quárticas, equações),
- Equações quárticas, 402, 555, 563
 Abel, 305-6, 533
 descoberta de Ruffini, 305
 solução de Hermite com funções elípticas, 306, 563
 tentativa de solução de Euler, 305
 tentativa de solução de Lagrange, 305
- Equivalentes, conjuntos de postulados, 658-9
- Equivalentes, segmentos, 707
- Eratóstenes (c. 230 a.C.), 161-3, 192, 196-8
 alunha, 197
 Beta, 197
 crivo, 198
 “descobridor de médias”, 150
 duplicação do cubo, 135, 150, 197

- estádio, 214
- mapa do mundo, 197
- medida da Terra, 197, 214
- Sobre médias*, 210
- Erlanger Programm (Klein), 605-7, 637-8, 667
 - definição de geometria, 660
 - inclusão de geometrias, 637-8
- Escala(s) musicais, 103
- Escola de Alexandria, 131, 167, 191, 213
- Escola de Atenas, 213
- Escola de Cízico, 132
- Escola de tradutores, 291
- Escolástica medieval, 289-90
- Escrituração mercantil em partidas dobradas, 298
- Esfera(s), diretora, de Monge, 490-1
 - geometrias de, 606
- Esférica* (Teodósio), 291
- Esopo (séc. VII-VI a.C.), 95
- Espaço(s), 462
 - abstratos, 607, 659-60
 - aritmético n -dimensional, 600
 - ponto de um, 600
 - conceito, evolução histórica do, 659-60
 - euclidiano, 614
 - de Hausdorff (ver Espaços de Hausdorff)
 - de Hilbert, 682-4
 - dos táxis, 706
 - estrutura dos, 660
 - métricas (ver Espaços métricos)
 - riemannianos, 614
 - topológicos, 668
 - vetoriais, 553
- Espaços de Hausdorff, 668, 711-2
 - ponto de acumulação, 711
 - postulados, 711-2
 - vizinhanças, 711
- Espaços métricos, 705-7
 - esfera, 707
 - desigualdade triangular, 706
 - métrica, 706
 - propriedades, 705-6
- Esperança matemática, 398, 409
- Esperança moral, 466
- Espirais de Fermat, 389
- Espiral de Arquimedes, 140-1, 194, 210, 632
 - trisseção do ângulo, 141, 152
- Espiral equiangular, 465, 632
- Espiral hiperbólica, 632
- Espiral logarítmica, 315, 397
- Espiral sinusoidal, 402, 411
 - casos particulares, 402
- Ésquilo (525?-456 a.C.), 194
- Essay pour les Coniques* (Pascal), 363
- Essai sur la Théorie des Nombres*, (Legendre), 488
- Essai sur la Théorie des Transversals* (Carnot),
- Estatística, 467
 - curva de frequência normal, 467, 497
 - mediana, 497
 - moda, 497
 - teorema de Bernoulli, 464
- Estruturas algébricas, 545-7, 573
 - lei associativa da adição, 546
 - lei associativa da multiplicação, 546
 - lei comutativa da adição, 546
 - lei comutativa da multiplicação, 546
 - lei distributiva da multiplicação em relação à adição, 546
- Etimologia, álgebra, 266
 - algebrista, 266
 - algoritmo, 266
 - Almagesto*, 204, 266
 - característica, 346
 - cifra, 41
 - elipse, parábola, hipérbole, 199
 - funções trigonométricas, 266-7
 - logaritmo, 346
 - mantissa, 346
 - nomes das estrelas, 265
 - nomes dos números, 27-8
 - seno, 266-7
 - telescópio, 354
 - zero, 40-1
- Eubúlides (séc. IV a.C.), paradoxo de, 675
- Euclid* (Barrow), 169, 174
- Euclid* (Billingsley), 172
- Euclides, 116, 198, 200, 209, 308
 - álgebra grega, 207
 - biografia, 167
 - dados*, *Os*, 180, 210
 - Divisão de figuras*, 180-1, 188
 - Elementos* (ver *Elementos*) (Euclides)
 - Elementos de música*, 181

- fenômenos, Os*, 181
 fórmula para os números perfeitos, 99, 116, 175
 infinitude dos primos, 175, 622-3
Lugares de superfície, 181, 210
Óptica, 181
 outras obras, 180-1
Porismas, 181, 210
 postulado das paralelas, 479
 postulados, interpretação com coordenadas, 699
 postulados, interpretação esférica, 700
Pseudaria, 181
Seções cônicas, 181, 198
 sequência de, 585, 590
 “Euclides da álgebra”, 546
 Euclidianas, construções
 aproximadas, 154-5, 628
 assintóticas, 153-4
 compasso apenas, 586-7, 629-30
 compasso enferrujado, 264, 588, 630
 geometrografia, 589
 impossíveis, 586-7, 629-30
 quadriláteros cíclicos, 296
 precisão, 590
 régua apenas, 588
 régua e compasso enferrujado, 630
 símbolo de, 589
 simplicidade de uma, 590
Euclides ab omni naevo vindicatus (Saccheri), 540
Euclides danicus (Mohr), 588
 Euclidiano, algoritmo, 173, 181-2
 aplicações, 181-2
 Euclidiano, ou desmontável,
 compasso, 134, 149
 Euclidianos, instrumentos, 134, 149, 384, 586
 Eudemo de Rodas (c. 335 a.C.), 97
 História da Geometria, 213
 Eudoxo (408-c. 355 a.C.), 107, 132
 duplicação do cubo, 135
 método de exaustão, 418-21
 teoria das proporções, 107, 173, 176-8, 184, 530, 673
 Euler, J. A. (1734-1800), 475
 Euler, L. (1707-1783), 208, 315, 463, 471-5, 479, 483, 531, 625
 adoção do símbolo π , 144
 álgebra, 305, 317
 aplicações da série de Taylor, 469
 cálculo de diferenças finitas, 473
 cegueira, 472
 círculo de, 625
 comparação com Lagrange, 485
 conceito de função, 661
 conjetura, 498
 curvas orbiformes, 474, 499-500
 diagramas de, 474
 equação de Riccati, 476
 equações diferenciais, 473, 476, 503
 equação diofantina $xy = ax + by + c$, 256
 equação quártica, 305
 fator integrante, 473
 formalismo de, 474
 fórmula, 473
 fórmula de Euler-Descartes $v - a + f = 2$, 124, 389, 473, 667, 710
 frações contínuas, 473
 função (ϕ), 317, 408, 473
 funções beta e gama, 473
 geometria, 585
 geometria diferencial, 473
 grafos unicursais e multicursais, 474
 Institutiones calculi differentialis, 474
 Institutiones calculi integralis, 474, 589
 interesses não matemáticos, 474
 Integral, Cálculus, 589
 Introductio in analysin infinitorum, 474, 499
 logaritmos de números negativos, 473, 477, 498
 maior produção matemática, 472, 559
 matemática aplicada, 474
 notação, 472
 números amigáveis, 99
 paradoxo, 498
 paradoxos com séries infinitas, 639-40
 pequeno teorema de Fermat, 391
 π , 144
 primos de Fermat, 392
 probabilidade, 394
 problema das pontes de Königsberg, 474, 500, 667
 problema de Apolônio, 201

- problema de Castillon-Cramer, 211
 quadrados greco-romanos, 474
 relação poliedral $v - a + f = 2$, 473
 resolução das quárticas, 473
 reta de um tetraedro, 509
 reta de um triângulo, 473, 585, 625
 retrato de, 472
 sequência de Euclides, 585
 série de Taylor, 469
 somas de séries infinitas, 498-9
 superfícies de segundo grau, 360
 tautócrona, 465
 teorema fundamental da álgebra, 520
 teorema sobre funções homogêneas, 473
 teoremas sobre grafos, 500-1
 teorema sobre quatro pontos colineares, 509
 teoria dos números, 99, 207, 291, 473
 tributos a, 474
 último "teorema" de Fermat, 392
 Eulerianas, integrais, 488
 Eurípedes (c. 480-406 a.C.), 135
 Eutócio (c. 560), 136, 195, 212, 213
 Evectantes, 563
 Eves, *A Survey of Geometry*, 140n, 586n, 587n
 Eves, *An Introduction to the Foundations and Fundamental Concepts of Mathematics*, 544n, 657n, 683n
 Evolutas, 398, 602
 Evolventes, 398
 Excesso esférico, 402, 412
Exercices du Calcul Intégral (Legendre), 488
 Excesso esférico, 402, 412
 Existência matemática, 563-4, 665, 680
 Expoentes, Descartes, 388
 Wallis, 431-2
 Exposição Internacional de Londres, 590
- F**
- Faca de sapateiro (ver Arbelos)
 "Faça assim e assim" (instrução), 58
 FACOM M-200, 147
 Fagnano, G. C. (1682-1766), retificação da lemniscata de Bernoulli, 410n
 Fakhr al-Mulk (c. 1020), 275
Fakhari (Al-Karkhi), 261, 275
 Falácias geométricas, 181
 Falsa posição, 73, 207, 255, 263, 293, 298
 Falsa posição dupla, 263, 277
 na China, 244
 Farrar, J. (1779-1853), 487
 tradução de *Éléments de Géométrie* de Legendre, 487
 Fator integrante, 473
 Fatores, tábuas de, 624
 Fatorial n, 365n
 Feira Mundial de Chicago, 590
 Feiticeira de Agnesi, 389, 482, 504-5
 Felkel, A. (n. 1740), 624
 tábua de fatores, 624
 Felton (1958), cálculo de π , 688
 fenômenos, Os (Euclides), 181
 Ferguson, D. F. (1948), 146
 cálculo de π , 146
 fórmula de, 146
 Fermat, C. S. (c. 1660), 389-90
 Fermat, P. (1601?-1665), 207, 293, 340, 389-94, 403
 centro isogônico, 397
 como inventor da geometria analítica, 382
 diferenciação, 429, 448-9
 espirais de, 389
 feiticeira de Agnesi, 389, 482
 geometria analítica, 382, 389
 hipérbolas de, 389
 imprecisão da data de nascimento, 389-90
 Isogoge ad locus planos et solidos, 389
 máximos e mínimos, 394, 399, 429
 método da descida infinita, 392-393, 409
 método dos indivisíveis, 428
 nota marginal famosa, 391, 400
 números amigáveis, 99
 parábolas de, 389
 pequeno teorema de, 391, 408
 primos, 392, 624, 625
 probabilidade, 362, 365-6, 393-4, 398, 467
 problema dos pontos, 362, 362n, 393, 394, 409
 restauração de um trabalho de Apolônio, 202
 retrato de, 390
 subtangentes, 430

- tangentes, 430
 teoria dos números, 340, 390-2
 último “teorema” de, 263-4, 392, 408-9, 496, 524, 614
- Ferrari, L. (1522-1565), 311
 solução da equação quártica, 303, 314, 326
- Ferro, S. del (1465-1526), 302, 303
- Feuerbach, K. W. (1800-1834), 585, 625
 círculo de, 625
 configuração de, 625-6
 pontos de, 625
 teorema de, 625
- Fialkowski (1860), 154
- Fibonacci, L. (c. 1175-1250), 76, 261, 292-5
Flos, 294
Liber abaci, 76, 226, 292-3, 298, 315-6, 322
Liber quadratorum, 293-4
Practica geometricae, 293
 problemas de, 315-6, 322
 problemas de torneios, 293-4, 316
 retrato de, 293
 sequência de, 293, 315
- Fields, medalha, 605
- Filipe, rei da Macedônia (382-336 a.C.), 162, 166
- Filipe II, rei (1527-1598), 308
- Filolau (c. 425 a.C.), 118
- Filon, reta de, 628
- Filosofia da matemática, 132, 608, 659, 677-84
 escolas de, 655, 677, 678, 679, 682, 683
- Filotaxia, 315
- Fior, A. M. (c. 1500), 302-3
- Fischer, E. (1875-1959), 620
- Flecha, A., 418
- Flor de Timaridas, 224
Flos (Fibonacci), 294
- Fluente, 439
 momento de um, 439
- Fluido, pressão, 424
- Fluidos, movimento dos, 397
- Fluxo, 436, 439, 440, 469
 principal, 439
- Foco, 358
- Foco-diretriz, propriedade, 200, 212, 218-9
- Folium de Descartes, 389, 407, 430, 434
- Fontana, N. (ver Tartaglia)
- Forma da Terra, Descartes, 475
- Huygens, 475
- Newton, 475
- Forma indeterminada, 464
- Formal, axiomática, 682
- Formal Logic; or, the Calculus of Inference, Necessary and Probable* (De Morgan), 669
- Formalismo, 682-4
- Formalismo, do século XVIII, 474
- Formalista, escola, 616, 677, 682
- Formas quadráticas, 226, 613
- Fórmula prismoidal, 448
- Formulaire de Mathématiques* (Peano), 670
- Fórmulas fornecendo primos, 623-4, 647
- Fotogrametria, 469
- Fourier, J. (1768-1830), 489, 526-8, 661
 citação, 528
 comparação com Poisson, 533
 raízes de uma equação polinomial, 528
 retrato de, 527
 séries de, 527, 537, 567-8, 578, 661
 teorema de, 451, 527-8
Théorie analytique de la chaleur, 527
- Frações, representação posicional, 46-7
- Frações contínuas, 312, 403, 484, 563
 Euler, 473
 expressões para π , 143
- Frações decimais, 46-7, 313, 341
 na China, 246
- Frações unitárias (ver Unitárias, frações)
- Fraenkel, A. A. (1891-1965), teoria restrita dos conjuntos, 675
- Francesa, *Encyclopédie*, 477
- Francesa, Revolução, 468, 484, 486, 489, 491, 494, 526, 528, 535-6
- Franciscano, capelo, 182
- Frank, E. (n. 1883), 96n
- Fréchet, M. (1878-1973), 660, 668
 espaços abstratos, 660
 espaços métricos, 705
 topologia, 668
- Frederico II (1194-1250), 291, 293
- Frederico V da Boêmia (1596-1632), 201
- Frederico, o Grande (1712-1786), 471, 474, 477, 483
- Frege, G. (1848-1925), 675, 678
Begriffsschrift, 670

- citação, 675
Grundgesetze der Arithmetik, 670
 lógica simbólica, 670
 precursor do logicismo, 678
 Frenet, F. (1816-1888), 602
 fórmula de Frenet-Serret, 602
 Frénicle de Bessy, B. (c. 1602-1675), 391
 Fresnel, A. J. (1788-1827), teoria óptica, 561
 superfícies de ondas, 599
 Friberg, J. (1981), 59n
 Friden, calculadoras de mesa de, 685-6
 Frobenius, G. (1848-1917), grupos de, 536
 Fuchsianas, funções, 306, 563, 617
 Fuhrmann, W. (1833-1904), sequência de Euclides, 585
 Função, conceito de, 462, 537
 de Bernoulli, 660
 de Euler, 660
 campo de definição, 661
 campo de valores, 661
 correspondência biunívoca, 661
 definição de Dirichlet, 537, 661
 definição pela teoria dos conjuntos, 661
 evolução histórica, 660-1
 gama, 473
 imagem de, 661
 métrica, 614, 705
 variável dependente, 661
 variável independente, 661
 Função contínua não diferenciável,
 Bolzano, 530
 Weierstrass, 530
 Função, hamiltoniana, 555
 Legendre, 488
 Funcional, notação, 472
 Funções abelianas, 534, 560, 563
 Funções automorfas, 617
 Funções de variável complexa, 612
 equações de Cauchy-Riemann, 531
 fórmula de Cauchy, 531
 desigualdade de Cauchy, 531
 teorema de Cauchy, 531
 Funções gama, 473, 488
 Funções inteiras, 612
 Fundamentos da análise, 444, 462, 484, 609, 611, 615
 Fundamentos da geometria, 611, 656, 667, 684
 Fundamentos da lógica, 677
 Fundamentos da matemática, 462, 463, 494, 609, 655, 658, 662, 678
 crises nos, 673-4
 na teoria dos conjuntos, 611, 678, 690-1
 no cálculo proposicional, 611
 no sistema dos números naturais, 611, 678-9
 no sistema dos números reais, 611, 678
 Fuss, N. (c. 1780), problema de Castillon-Cramer, 211
- G**
- Galera, algoritmo da (para a divisão), 323-4
 Galileu Galilei (1564-1643), 340, 352-6, 396, 436, 466
 área sob um arco cicloidal, 396
 cicloide, 366
 citação, 355
 compasso de setores, 355, 371-2
 conjuntos infinitos, 355, 662
 condenação pela Igreja, 354-5, 383
 contestação à lei da queda dos corpos de Aristóteles, 673
 dinâmica, 355
 Discorsi e Dimostrazioni Matematiche Intorno a Due Nuove Scienze, 355, 372-3
 Inquisição, 354-5, 383
 lei da queda dos corpos, 544
 queda dos corpos, 353, 355, 371
 microscópio, 355
 paradoxos, 372-3, 530
 período de um pêndulo, 353, 353n
 religião, 355
 retrato de, 353
 telescópio, 354
 trajetória de um projétil, 355
 Galois, É. (1811-1832), 306, 534-6, 535n
 comparação com Abel, 533
 retrato de, 535
 teoria das equações, 535
 teoria dos grupos, 484, 535
 testamento científico, 535
 Gandz, S. (1926), 266n

- Garfield, Abram (1831-1881), 183
 prova do teorema de Pitágoras, 183
- Gauss, C. F. (1777-1855), 479, 485, 519-22, 525, 607, 615
 citação, 521
 comparação com Cauchy, 531
 diário matemático, 520
Disquisitiones arithmeticae, 520, 538, 566
Disquisitiones generales circa superficies curvas, 521, 603
 formas quadráticas, 226
 formas quadráticas aritméticas, 225-6
 funções elípticas de periodicidade dupla, 520
 geometria diferencial, 602-3, 636
 geometria não euclidiana, 521, 541, 545
 germes da teoria dos invariantes, 560
 histórias envolvendo Dirichlet, 537-8
 heliógrafo, 521
 lei da reciprocidade quadrática, 520
 lemas, 521, 618
 medalha, 522
 método dos mínimos quadrados, 519
 números complexos, 522
Obras reunidas, 522
 órbita de Ceres, 521
 plano de, 522
 polígonos regulares, 178, 519, 520
 precocidade matemática, 519
 príncipe dos matemáticos, 522
 retrato de, 521
 rigorização da análise, 530
 sequência de Euclides, 585
 séries hipergeométricas, 521, 610
 telégrafo eletromagnético, 521
 teorema da curvatura, 636
 teorema dos números primos, 624
 teorema fundamental da álgebra, 520, 566, 665
 teoria das congruências, 520
 teoria dos nós, 667
 teoria dos números, 520
therema egregium, 604
- Gaussiana (ou total), curvatura, 603, 636
- Gaussianos, inteiros, 573
- Geber (c. 1130), 265
 teorema de, 265
- Gelão (filho do rei Hierão), 195
- Gelfond, A. O. (1906-1968), teorema de, 666
- Gelosia, algoritmo da (para a multiplicação), 254, 323
- Gematria (ver Aritmografia)
- Gêmeino (c. 77 a.C.), 213
Teoria das Ciências Matemáticas, 213
- General trattato* (Tartaglia), 322
- Genouys, F. (1958-1959), cálculo de π , 147, 688
- Geodésia, 486
- Geometria* (Boécio), 289
- Geometria* (Gerbert), 315
- Geometria, afim, 637
 algébrica, 61, 79, 384
 analítica (ver Geometria analítica)
 árabe, 264-5
 babilônica, 60-1, 79
 centro afim (plana), 637-8
 científica ou experimental, 693
 de circunferências, 606
 definição de (Klein), 607
 demonstrativa, 693
 descritiva (ver Geometria descritiva)
 diferencial (ver Geometria diferencial)
 dimensionalidade, 462, 595, 596, 633-4, 659, 681, 708
 egípcia, 60-1, 83, 84-8, 140-1
 elíptica, 544
 Erlanger Programm, 605-7, 637-8, 660, 667
 esférica (ver Geometria esférica)
 euclidiana, 594, 611, 614
 experimental, 693
 extrínseca, 490, 603
 finita, 594, 631-2, 689, 694
 fundamentos da, 611, 656, 668, 684
 hindu, 257-9
 hiperbólica, 544, 571-2
 história da (antiga), 213
 inclusão de, 638
 integral, 602
 intrínseca, 603
 kleiniana, 607, 667
 libertação da, 544-5, 548
 linear, 606
 lobachevskiana, 543, 544-5
 métrica euclidiana, 606

- não euclidiana (ver Não euclidiana geometria)
- não riemanniana, 603
- n -dimensional (ver Geometria n -dimensional)
- parabólica, 544
- paradoxos em, 696-8
- plana afim, 637
- plana de semelhança, 606
- plana euclidiana métrica, 606
- plana projetiva, 606
- pontual, 606
- projetiva (ver Geometria projetiva)
- riemanniana, 603, 614
- sólida, 175, 490, 596
- subconsciente, 693
- topologia (ver Topologia)
- Geometria analítica, 462, 594-9
 - área do triângulo, 505
 - Descartes, 382, 389
 - espacial, 490-1
 - Fermat, 382, 389
 - ideia essencial da, 382
 - invenção da, 382-3
 - período de ouro, 596
 - princípio fundamental da, 389
 - sólida, 490, 596
 - volume do tetraedro, 505
- Géométrie de position* (Carnot), 491, 509, 585
- Geometria del compasso* (Mascheroni), 588
- Geometrie der Lage* (Staudt), 594
- Geometria descritiva, 489
 - na China, 247
- Géométrie Descriptive* (Monge), 247n
- Geometria diferencial, 590, 601-5
 - binormal a uma curva do espaço, 602
 - curvatura de uma superfície, 603
 - curvatura gaussiana ou total, 603-4, 636
 - curvatura germainiana ou média, 524, 604
 - curvaturas principais de uma superfície, 603-4
 - curvas reversas, 475
 - Euler, 473
 - extrínseca, 490, 603
 - família de superfícies triplamente ortogonais, 603
 - fórmulas de Frenet-Serret, 602
 - global, 602, 604
 - intrínseca, 521, 603
 - linhas de curvatura, 490
 - local, 602, 604
 - primeiro período da, 602
 - propriedades absolutas de uma superfície, 603
 - propriedades relativas de uma superfície, 603
 - segundo período, 602-3
 - superfícies aplicáveis, 604
 - superfícies mínimas, 604
 - teorema de Dupin, 602
 - teorema de Meusnier, 602
 - terceiro período, 603
 - teorema egregium de Gauss, 604
- Geometria elíptica, 544
- Geometria esférica, 181
 - princípio de dualidade, 592
- Geometria experimental, 693
- Geometria extrínseca, 490, 603
- Geometria integral, 602
- Geometria intrínseca, 521, 603
- Geometria indivisibilis* (Cavalieri), 425-6
- Geometria moderna, 201, 203, 211, 585
- Geometria n -dimensional, 560, 599-601, 635-6
 - cosseno de um ângulo, 601
 - distância entre 2 pontos, 600
 - esfera, 600
 - espaço aritmético de dimensão n , 600
 - números diretores, 601
 - perpendicularidade, 601
 - segmento de reta, 600-1
 - translação, 601
- Geometria orgânica* (Maclaurin), 470
- Geometria Pratica* (Abraham bar Hiyya), 291
- Geometria projetiva, 363, 382, 590-4
 - analítica, 594
 - conjunto autodual de postulados, 631-2
 - conjuntos harmônicos, 360, 594
 - de dimensão superior, 599, 601
 - demonstração de teoremas por projeção, 375-7
 - Desargues, 359-61, 382
 - fileiras e feixes homotéticos, 594
 - finita, 594, 631-2, 689, 694
 - “grande período” da, 590
 - homologia, 360
 - involução, 359
 - perspectiva, 360, 469

- polos e polares, 199, 360, 592, 601
 princípio de dualidade (ver Princípio de dualidade na geometria projetiva)
 projeção central, 360, 375, 440
 razão dupla ou anarmônica, 211, 606
 reciprocação, 594
 teorema do “hexagrama místico” de Pascal, 363-4, 377-8, 592, 594, 597
 teorema fundamental da, 211
 Geometria riemanniana, 603, 614
 Geometria situs, 667
Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien (Lobachevsky), 543
 Geometrografia, 589, 630-1
 Gerardo de Cremona (1114-1187), 291
 etimologia de seno, 267
 tradução da álgebra de Al-Khowârizmî, 291
 tradução do *Almagesto* de Ptolomeu, 291
 tradução dos *Elementos* de Euclides, 291
 Gerbert (c. 950-1003), 289-90
Geometria,
 Gergonne, J. D. (1771-1859), 522, 591, 592
 Annales de Mathématiques, 522
 demonstração do princípio de dualidade, 592
 geometria analítica, 599
 geometria projetiva, 361
 problema de Apolônio, 201
 Germain, S. (1776-1831), 495, 524-5
 citação, 525
 curvatura média, 524, 604
 Hipátia do século XIX, 525
 Plêiades matemáticas, 622
 retrato de, 524
 teoria matemática da elasticidade, 524
 último “teorema” de Fermat, 524
 Ghaligai, F. (m. 1536), 322
 problema de, 322
 Ghetaldi, M. (1566-1626 ou 1627), 201
 restauração de uma obra de Apolônio, 201
 Gibbs, J. W. (1839-1903), 555, 578
 análise vetorial, 555
 Elementary Principles of Statistical Mechanics, 578
 fenômeno de, 578
 Vector Analysis, 578
 Gilberta (irmã de Blaise Pascal), 361
 Gillings, R. J. (1953), 64n
 Giordano (c. 1785), generalização do problema de Castillon-Cramer, 211
 Girard, A. (1595-1632), 402
 abreviações para o seno e tangente, 402
 área do triângulo esférico, 402
 Glaisher, J. W. L. (1848-1928), 298n
 tábua de primos, 624
 Glauco, filho do rei Minos, 135
 Gödel, K. (1906-1978), axiomática, 659
 hipótese do contínuo, 666
 teoremas de, 683
 Goldbach, C. (1690-1764), 625
 hipótese, 625, 647
 Gordan, P. (1837-1912), 620
 Gounoud, C. F. (1818-1892), 562
 Gow, J. (c. 1884), 197
 Grafos Lineares, 668
 Grande Esfinge, 70
 Grande Incêndio de Londres, 404
 Grande Pirâmide de Quéops ou Gizeh, 67, 83
 Grandezas orientadas, 491, 509-10
 Grandi, G. (1672-1742), 482
Graphic Algebra (Schultze), 279
 Grafos, arco, 501
 cadeia simples, 502
 grau, 501
 multicursais, 500-1
 teorema de Euler, 500-1
 unicursais, 500-1
 vértices, 501
 Grassmann, H. [filho de H. G. Grassmann] (n. 1859), 557
 Grassmann, H. G. (1809-1877), 556-7
 Ausdehnungslehre, 551, 555
 Cálculo, 578
 cálculo de extensões, 556
 geometria de dimensão superior, 599
 libertação da álgebra, 547
 números hipercomplexos, 551
 origem da álgebra abstrata, 553
 retrato de, 556
 visão dos quatérnios, 555
 Grau esférico, 412
 Green, G. (1793-1841), 599
 citação, 599-600

- Gregory, D. (1661-1708), 144, 404
 professor sabiliano, 404
- Gregory, D. F. (1813-1844), 547
- Gregory, J. (1638-1675), 403-4
 quadratura do círculo, 404
 séries, 144, 145, 403
- Grenville, Sir R. (1542-1591), 348
- Gresham, Sir T. (1519-1591), 347
- Grienberger (1630), cálculo de π , 143
- Grimaldi, Presidente do Conselho de Matemática da China, comunicação de Leibniz, 444
- Grotenfeld, G. F. (1775-1853), 59
- Ground of Artes, The* (Recorde), 301
- Grupoides, 553
- Grundgesetze der Arithmetik* (Frege), 670
- Grundlagen der Geometrie* (Hilbert), 682
- Grundlagen der Mathematik* (Hilbert e Bernays), 670, 682
- Grundzüge der Mengenlehre* (Hausdorff), 668
- Grupo(s), 134, 536, 553, 569
 abelianos, 534, 570
 axiomas, ou postulados, 569
 contínuos, 577
 da razão dupla, 570
 de Betti, 668
 definição, 569
 de substituições, 536
 de transformações, 605
 elemento neutro, 569
 elemento inverso, 569
 exemplos de, 569-70
 não abelianos, 579-80
 Poincaré, 536, 617
 teorema de Lagrange, 484-5
 teoremas sobre, 569
- Guarda-livros, teste do, 276
- Guerra do Peloponeso, 130
- Guerra dos Cem Anos (1337-1445), 295
- Guerra dos 7 anos (1756-1763), 474
- Guerra nas Estrelas, 696
- Guilloud, M. J. (1966, 1967, 1973), 147
 cálculo de π até 250 000 casas, 147
 cálculo de π até 500 000 casas, 147
 cálculo de π até 1 000 000 casas, 147
- Guldin, P. (1577-1642), 210, 428
 teoremas do centroide, 210, 227-8
- Gunter, E. (1581-1626), 346
 batismo de “cosseno” e “cotangente”, 346
 cadeia de, 346
 escala logarítmica, 350
- Gupta, dinastia, 248
 mapa relativo ao período, 248
- Guthrie, F. (c. 1850), 667
 problema das quatro cores, 667
- ## H
- Hachette, J. N. P. (1769-1834), 490
Application d'Algèbre à la Géométrie, 490
- Hadamard, J. (1865-1963), 624
 teorema dos números primos, 624
- Hagge (c. 1908), sequência de Euclides, 585
- Haken, W. (1976), conjectura das quatro cores, 689
- Hakim, califa (985-1021), 264
- Hallerberg, A. E. (1977), 148n, 588n
- Halley, E. (1656-1742), cometa de, 475
Principia de Newton, 438
 professor sabiliano, 348, 404
 restauração do Livro VIII das *Secções cônicas* de Apolônio, 405
 restauração de obras de Apolônio, 201
 tábuas de mortalidade, 405
- Halphen, G. H. (1844-1889),
 geometria analítica, 599
- Hamilton, Sir W. R. (1805-1865), 484, 548, 551, 553-6, 559
 Astrônomo Real da Irlanda, 554
 citação, 194
 desafio à lei comutativa da multiplicação, 672
 Diretor do Observatório de Dunsink, 554
Elements of Quaternions, 555
 libertação da álgebra, 547
 números complexos, 548-9, 555, 574
 origem da álgebra abstrata, 553
 quatérnios, 550-1, 555, 578
 refração cônica, 554
 retrato de, 554
Treatise on Quaternions, 555
- Hamilton-Cayley, equação de, 555
- Hamilton-Cayley, polinômio de, 555

- Hamilton-Cayley, teorema de, 555
- Hamiltoniana, função, 555
- Hamiltoniano, jogo, 555, 580
- Hamilton-Jacobi, equações diferenciais de, 555
- Hamurabi, rei (1792-1750 a.C.), 60, 103
- Hankel, H. (1839-1873), 252, 253, 547
- Hardy, G. H. (1877-1947), 251
 - citação, 194
 - hipótese de Riemann, 614
 - matemática pura *versus* matemática aplicada, 695
- Harmonia dos mundos*, (Kepler), 357
- Harmonia geométrica, 118
- Harriot, T. (1560-1621), 340, 348-9
 - Artis analytical praxis*, 348
 - comparação com Oughtred, 532
 - retrato de, 349
 - sinais de maior e menor, 348
 - teoria das equações, 348
- Harris, papiro, 70
- Harrison, Benjamin (1726-1791), 494
- Hart, H. (1848-1920), sequência de Euclides, 585
- Hartley, M. C., *Patterns of Polyhedrons*, 124n, 195n, 358n
- Harun al-Rashid, califa (763?-809), 261
- Hausdorff, F. (1868-1942), 711
 - Grundzüge der Mengenlehre*, 668
- Hausdorff, espaços de (ver Espaços de Hausdorff)
- Heath, T. L. (1861-1940), 96n, 115
 - Diophantus of Alexandria*, 208n
 - History of Greek Mathematics*, 153n
 - Manual of Greek Mathematics, A*, 138n
 - Thirteen Books of Euclid's Elements*, 696
- Heaviside, O. (1850-1925), cálculo operacional, 486
- Hegel, G. W. F. (1770-1831), 672n
- Heiberg, J. L. (1854-1928), 96n, 196, 422
- Heifetz, J. (n. 1901), 485
- Helena da geometria, 366
- Heliógrafo, 521
- Helmholz, H. (1821-1894), 619, 668
- Henrique IV, rei (1553-1610), 308
- Hensel, S. (sobrinho de Dirichlet), 538
- Heptadecágono, 178, 185, 519
- Heptágono, 221, 263, 274-5, 628
- Herão (c. 75), 205-7, 224, 296, 340
 - aproximação de raízes quadradas, 205, 450
 - área de um triângulo em função dos lados, 194, 205, 222, 257, 274
 - Catoptrica*, 206, 222
 - construção aproximada de um heptágono regular, 221-2
 - Dioptra*, 206
 - média de, 85, 229
 - métrica, A*, 205, 221, 223
 - Pneumatica*, 206
 - problemas de, 221-3
 - traduções de, 296
- Hermes, professor (c. 1894), 178
- Hermite, C. (1822-1901), 562-4
 - citação, 534, 560
 - retrato de, 564
 - solução das equações químicas através de funções elípticas, 306, 563
 - transcendência de e , 563, 665
- Hesse, L. O. (1811-1874), geometria analítica 599
- Heyting, A. (c. 1930), 672
 - lógica simbólica intuicionista, 681
- Hidrodinâmica, princípio de Bernoulli da, 4
- Hidrostatica, 193, 195, 215, 313
- Hierão, rei (307?-216 a.C.), 192-3
 - coroa de, 193
- Hierônimos (331-440), 115
- Hilbert, D. (1862-1943), 608, 620, 670
 - axiomática, 659
 - biografia, 683-4
 - citação, 96, 621
 - cálculo de variações, 684
 - conjunto de postulados para a geometria euclidiana, 657-8
 - consistência da matemática, 658, 682-3
 - espaço de, 682-4
 - formalismo, 616, 682-4
 - Grundlagen der Geometrie*, 682
 - número ($2^{\sqrt{2}}$), 666
 - predecessor de Weyl, 682
 - problemas de Paris, 120, 608, 615, 684
 - retrato de, 684
 - teoria da demonstração, 683

- Hilbert e Bernays, *Grundlagen der Mathematik*, 670, 682
- Hindu, álgebra, 256
aritmética, 252-5
geometria, 257-9
método de resolução de quadráticas, 256
trigonometria, 248, 259
- Hindu *versus* grega, comparação das matemáticas, 259-60
- Hiparco (c. 180-c. 125 a.C.), 202-3
astronomia, 202
tábua de cordas, 203
trigonometria, 203
- Hipaso (c. 470 a.C.), 107, 117
- Hipátia (m. 415), 212
morte de, 212-3
Plêiades Matemáticas, 622
- Hipátia do século XIX, 525
- Hipérbole (origem do nome), 199
- Hipérbolas de Fermat, 389
- Hipérbólica, geometria, 544
modelo euclidiano, 571-2
- Hipérbólicas, funções, 478, 503-4
- Hiperboloide de uma folha (sistemas de retas geradoras), 404
- Hiperespaço, 599
- Hípias de Elis (n. c. 460 a.C.),
quadratriz, 138, 140, 154
quadratura do círculo, 140
trisseção do ângulo, 140
- Hipócrates de Cos (406-357 a.C.), 130n
- Hipócrates de Quio (c. 440 a.C.), 93, 133, 168
duplicação do cubo, 135
lunas, 140, 155, 155n, 213
redução de, 135
- Hipótese do ângulo agudo, 264, 540-1, 570-1
- Hipótese do ângulo obtuso, 264, 540-1
- Hipótese do ângulo reto, 264, 540-1
- Hipótese nebular, 486
- Hipotético-dedutivo, estudo, 546
- Hipsicles (c. 180 a.C.), 202
- Hisâb al-jabr w'al-muqâ-balab* (al-Khowârizmî), 266, 291, 293
- História da Geometria* (Eudemo), 213
- História da Matemática* (Boyer), 461
- História da Matemática (Wallis), 433
- History of Greek Mathematics* (Heath), 153n
- History of Mathematics, A* (Cajori), 630
- History of Science, The* (Sarton), 213n
- Hitler, A. (1889-1945), 302, 609
- Hjelmslev, J. (1873-1950), 588
- Hobson, E. W. (1856-1933), *A Treatise on Plane Trigonometry*, 257n
- Hodógrafo, 555
- Hölder, O. (1859-1937), grupos, 536
- Holzmann, W. (1532-1576), 207
- Homeomorfas, figuras, 667, 709
- Homero (c. 850 a.C.), 194
- Homologia, 360
- Homológica, teoria, 668
- Homotéticos, fileiras e feixes, 594
- Hooke, R. (1635-1703), 405, 438
lei da gravitação, 405
lei relacionando deformação e tensões, 405
pêndulo cônico, 405
relógios, 405
- Horner, W. G. (1786-1837), 246
- Horner, método de, 245-6
na China, 245-6
- Horologium oscillatorium* (Huygens), 398-9
- Horsley, S. (1733-1806), restauração de obra de Apolônio, 201
- Hsü Kuang-ching (1562-1634), 247
- Hudde, J. (1633-1704), raízes múltiplas de um polinômio, 402
- Huntington, E. V. (1874-1952), 657
axiomática, 659
postulados para a geometria euclidiana, 657
- Huygens, C. (1629-1695), 340, 392, 397-400, 402, 442
curvatura, 602
duplicação do cubo, 151
esperança matemática, 398, 409
evolutas e evolventes, 398, 602
forma da Terra, 475
força centrífuga num movimento circular, 399
Horologium oscillatorium, 398-9
isocronia da cicloide, 398
ocular acromática, 399
pêndulo cicloidal, 398

- precursor do sistema métrico, 493
 problemas de, 409-10
 prova do refinamento de Snell, 143, 398
 refração dupla, 399
 relógio de pêndulo, 398
 relógio com mola de compensação, 399, 405
 retificação da cissoide de Dioclés, 399
 retrato de, 399
 tautócrona, 465
 teoria da probabilidade, 340, 394, 467
 teoria ondulatória da luz, 399
Hydrodynamica (Daniel Bernoulli), 466
Hypatia, or New Foes with an Old Face (Kingsley), 212n
- I**
- IBM Automatic Sequence Controlled Calculator (ACC), 687
 IBM 704, cálculo de π até 16 167 casas, 147, 688
 IBM 7090, cálculo de π até 100 265 casas, 147, 688
 números perfeitos, 99
I-Ching, ou *Livro sobre Mutações*, 242-3
 Identidades algébricas, 107-9, 122, 170
 Iluminismo, 468
 Imprensa, invenção da, na Europa Ocidental, 296
 na China, 245
In artem analyticam isagoge (Viète), 309
Inclinações (Apolônio), 200, 219
 Incomensuráveis, segmentos de reta, 106, 673
 Independência de um conjunto de postulados, 658
 Independência de um postulado, 658
 Indeterminadas, equações (ou indeterminada, análise), 293, 466, 615
 de primeiro grau, 272-3
 em Arquimedes, 195
 na *Antologia Grega*, 206
 na China antiga, 244
 na Índia antiga, 256, 263-4
 Índex (livros proibidos), 355
India (Al-Biruni), 260
 Indian Mathematical Society, 251
 Indicador, 408
 Indivisíveis, 425-8, 443
 Indução matemática, 365, 422
 paradoxos, 641-2
 Infinitésimos, 424
 Infinito, símbolo de, 432, 662
 Infinitude dos primos, 175, 623-4
 Infinitude de uma reta *versus* não limitação de uma reta, 544, 655
 Inquisição, 354-5, 383
 Instituto de Estudos Avançados de Princeton, 621, 682, 690
Institutiones calculi differentialis (Euler), 474
Institutiones calculi integralis (Euler), 474, 589
Institutions de physiques (du Châtelet), 483
Instituzione Analitiche (Agnesi), 480
 Instrumento astronômico existente mais antigo, 69
 Integral, primeiro aparecimento do nome, 463
 Integrais abelianas, 533, 619
 Integrais hiperelípticas, 612
Integral, Calculus (Euler), 589
 Integral, sinal de, 443
 International Business Machines Corporation, 687
 Interpolação, processo de, 432
 Intersecção de conjuntos, 451
Introductio in analysin infinitorum (Euler), 474, 499
Introduction à l'Analyse des lignes Courbes Algébriques (Cramer), 470
Introductory Account of Certain Modern Ideas and Methods in Plane Analytic Geometry, An (Scott), 621
 Intuição *versus* demonstração, 702-3
 Intuicionismo, 679-82
 Intuicionista, escola, 616, 672, 677, 679-82
 Invariantes e covariantes, 560, 561, 563, 620, 684
 problema básico de, 560
 Inversão, método hindu de, 255
Investigation into the Laws of Thought, on Which Are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probability, An (Boole), 557, 669
 Involução, 359
 Irracionais cúbicos, 272

Irracionais quadráticos, 272
 Irredutível, caso (cúbicas), 308-9
Isogoge ad locus planos et solidos (Fermat), 389
 Ishango, osso de, 26
 Isócrona, 464
 Isogonais, pontos e retas conjugados, 627
 Isogônico, centro, 397
 Isoperimetria, 210, 464

J

Jabir ibn Aflah (ver Geber)
 Jacobi, C. G. J. (1804-1851), 535, 536-7, 593, 616
 citação, 537, 696
 comparação com Dirichlet, 537
 determinantes, 536, 578
 funções elípticas, 533, 537
 geometria diferencial, 602
 identidade de, 577
 professor brilhante, 536-7
 retrato de, 537
 Jacobiano, 537
 Jaime I, rei (1566-1625), 341
Jahresbericht, 565
 Jámblico (m. c. 330), 98
 Jardim du Roi, 468
 Jeenel (1954), cálculo de π , 688
 Jefferson, Thomas (1743-1826), 183
 precursor do sistema métrico, 493
 Jerrard, G. B. (m. 1863), 306
 transformação de Tschirnhausen, 402
 João de Halifax (ver Sacrobosco)
 João de Palermo (c. 1230), 294
 João de Sevilha (c. 1140), 291
 João Paulo, papa, 355n
 Johnson, *Modern Geometry*, 257n, 397n
 Joly, C. J. (1864-1906), 555
 Jones, W. (1675-1749), 144
 Jônica, escola, 129-130
 Jordan, álgebras de, 553, 576-7
 Jordan, C. (1838-1922), 306, 535
 Traité des Substitutions, 535
 Jordan, P. (1933), 577
 Jordanus Nemorarius (c. 1225), 294
 De triangulis, 317

Tractatus de numeris datis, 317
 trissecção do ângulo, 317
 Jordanus Saxus (m. 1237), 294
 Jorge V, rei de Hanover, 522
Journal de l'Ecole Polytechnique, 490, 565
Journal de Mathématiques Pures et Appliquées,
 535, 565
Journal für die reine und angewandte Mathematik,
 533, 565
Journal für Mathematik, 662
Journal of the Indian Mathematical Society, 251
Journal of Symbolic Logic, 670
 Juros compostos, 60, 77, 255
 Juros simples, 60, 255
 Justiniano, imperador (483-565), 213
 Juvenal (55?-125?), 46

K

Kamayura, tribo da América do Sul, 44
 Kant, E. (1724-1804), 545
 Kappa, curva, 434
 Karachi (Paquistão), 247
Kasan Bulletin, 543
 Kazuhira Nakayama e K. Miyoshi (1981),
 cálculo de π até 2 000 000 casas, 147
 Keilhau, M. (1829), 534
 Kelvin, Lord [Sir William Thomson] (1824-
 1907), 528, 668
 Kennedy, J. G. (1981), 38n
 Kenschaft, P. C. (1987), 621n
 Kepler, J. (1571-1630), 200, 204, 340, 346, 352,
 356-9, 401, 436
 área da elipse, 427
 áreas e volumes, 425
 cálculo, 356-7, 424
 citação, 358
 doutrina da continuidade, 360
 Harmonia dos Mundos, 357
 leis dos movimentos planetários, 355, 357,
 373-4, 437
 máximos e mínimos, 428
 perímetro aproximado da elipse, 358
 poliedros, 114
 polígonos estrelados, 317

- pontos ideais no infinito, 358, 598
 princípio de continuidade, 358
Stereometria doliorum vinorum, 358
 retrato de, 357
 Kepler-Poinsot, sólidos de, 358
 Khayyam, Omar (1050-1123), 261
Discussão das Dificuldades de Euclides, 264
 reforma do calendário, 261
 resolução geométrica das cúbicas, 261, 263, 264, 277-9
Rubaiyat, 261
 Kingsley, C. (1819-1875), 212
Hypatia, or New Foes with an Old Face, 212n
 Kirchoff, G. R. (1824-1887), 619, 668
 Kirkman, pontos de, 377
 Klein, F. (1849-1925), 530, 605-9
 aplicações dos grupos à geometria, 535
 definição de geometria, 607, 660
Erlangen Programm, 605-7, 637-8, 667
 independência do postulado das paralelas, 543
 modelo de geometria hiperbólica, 571-3
 retrato de, 608
 Kleiniana, geometria, 607, 667
 Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, 461
 Knox, J. (1515?-1572), 341
 Köbel, J. (1470-1533), 299
 Koch, Helge von (1870-1924), 645
 curva de, 645
 Kochanski, A. A. (1685), 155
 Königsberg, L. (1837-1921), 619
 Königsberg, problema das pontes de (ver Problema das pontes de Königsberg)
 Kopf (1919), 628
 Korvin-Krukovsky, S. (ver Kovalevsky, S.)
 Kovalevsky, S. (1850-1891), 618-20
 ganhadora do prêmio Bordin, 619
 lema, 620
 Pléiades Matemáticas, 622
 pupila favorita de Weierstrass, 619
 retrato de, 619
 Kovalevsky, V. O. (1889), 619
 Kōwa, Seki (ver Seki Kōwa)
 Kramer, *The Nature and Growth of Modern Mathematics*, 695n
 Kramp, C. (1760-1826), 365n
 Kronecker, L. (1823-1891), 615-6
 frase, 616
 precursor do intuicionismo, 679
 retrato de, 617
 Kublai Khan (1216-1294), 242
K'ui-ch'ang Suan-shu (ver *Nove capítulos sobre a arte da matemática*)
 Kulik, J. P. (1773-1863), 624
 tábua de primos, 624
 Kummer, E. E. (1810-1893), 616
 teoria dos ideais, 392
 último "teorema" de Fermat, 392, 496
 Kutta, W. M. (1901), método de Runge-Kutta, 608

L
 Laboratório de Pesquisas Balísticas, 687
 La Condamine, C. M. de (1701-1774),
 precursor do sistema métrico, 493
La Dioptrique (Descartes), 384
 La galande, 434
La géométrie (Descartes), 384-8, 402, 406
 leitura por Newton, 436
 Lagrange, J. L. (1736-1813), 208, 463, 483-5, 494, 527, 528, 530
 aplicação de série de Taylor, 469
 aproximação de raízes de equações, 484
 cálculo de variações, 484
 citação, 484
 comparação com Euler, 485
 comparação com Laplace, 486-7
 coordenadas esféricas, 632
 equação química, 305
 equações de, 484
 equações de Pell, 256
 geometria analítica, 505
 germe da teoria dos invariantes, 560
Mécanique analytique, 484
 probabilidade, 394
 problema de Castillon-Cramer, 211
 prognóstico, 695
 retrato de, 485
 rigorização de análise, 530

- série de Taylor com resto, 469, 610
 Sophie Germain, 524
 superfícies mínimas, 604
 tautócrona, 465
 tentativa de rigorização do cálculo, 610, 613
 teorema fundamental da álgebra, 520
 teorema sobre grupos, 484-5
 teoria dos números, 391, 484
Théorie des Fonctions Analytiques Contenant les Principes du Calcul Différential, 484, 610
Traité de Résolution des Equations Numériques de Tous Degrés, 484
 tributo a Newton, 441
 variação de parâmetros, 484
- La Hire, P. de (1640-1718), 359, 360, 376, 596
 projeção globular, 400-1
 quadrados mágicos, 400
 secções cônicas, 400
- Lambert, J. H. (1728-1777), 463, 478-9, 494, 541, 624
Die Theorie der Parallellinien, 479, 541
 funções hiperbólicas, 478
 geometria não euclidiana, 541
 hipóteses do ângulo agudo, ângulo reto e ângulo obtuso, 541
 irracionalidade de π , 144, 478
 lógica matemática, 478
 mapas por projeções, 478
 quadriláteros de, 541, 570
 retrato de, 479
- Lamé, G. (1795-1870), 597
 curva de, 434
 geometria analítica, 599
 notação abreviada, 597
 último “teorema” de Fermat, 392
- Landau, E. (1877-1938), 608
 citação, 621
- Lander, L. J. (1966), 498
- Lane, *Metric Differential Geometry of Curves and Surfaces*, 425n
- Langer, R. E. (1941), 166n
- Langford, C. H. (1927), logicismo, 678
- Laplace, P. S. (1749-1827), 463, 486-7, 527, 528, 530
 citação, 346, 487
 Comissão de Pesos e Medidas, 494
 comparação com Lagrange, 486-7
 equação de, 486
 expansão de um determinante, 486
 extensão do problema da agulha de Buffon, 506
 hipótese nebular, 486
 “Newton da França”, 486
 pesquisa sobre os anéis de Saturno, 619
 probabilidade, 394, 617
 retrato de, 487
Théorie Analytique des Probabilités, 486, 506
Traité de Mécanique Céleste, 486, 525, 554
 transformada de, 486
- Latitude e longitude, 632
- Latitudo, 382
- Lavoisier, A. L. (1743-1794), 484, 494
- Laws of Verse, The* (Sylvester), 562
- Lazzerini (1901), 145
- Leão X, papa (1475-1521), 302
- Lebesgue, H. (1875-1941), integral de, 614
- Leblanc, M. (pseudônimo assumido por Sophie Germain), 524
- Leclerc, G. L. (ver Buffon, conde de)
Lectiones opticae (Newton), 438
Lectiones opticae et geometricae (Barrow), 434
- Lefschetz, S. (1884-1972), 668
 topologia, 668
- Legendre, A. M. (1752-1833), 463, 486, 487-8, 527, 535
 Comissão de Pesos e Medidas, 494
 equação diferencial de, 488
Éléments de Géométrie, 487-8, 541
Essai sur la Théorie des Nombres, 488
Exercices du Calcul Intégral, 488
 funções de, 488
 funções elípticas, 488, 533
 geometria não euclidiana, 541
 integrais eulerianas, 488
 irracionalidade de π^2 , 145
 medida do meridiano terrestre, 494
 método dos mínimos quadrados, 487, 519
 polinômios de, 488
 postulado das paralelas, 487
 retrato de, 488
 símbolo de, 488, 520
 tábuas matemáticas, 488
 teoria dos números, 487

- Traité des Fonctions Elliptiques et, des Integrals Eulériennes*, 488
- triangulação da França, 488
- último “teorema” de Fermat, 392
- Lehmer, D. H. (n. 1905), 623, 624n
- Lehmer, D. N. (1867-1938), 624, 624n
- tábua de primos, 624
- Lei(s), algébricas, 545-6, 552-3, 574, 671-2, 691
- associativas, 546, 691
- comutativas, 546-7, 691
- da contradição, 681
- da dupla negação, 672
- da gravitação, 347n, 405, 437n, 485
- da hidrostática, 193, 195, 215
- da queda livre dos corpos (Galileu), 353, 355, 371, 544
- da reciprocidade quadrada, 520, 567
- da reflexão e refração, 399, 465
- das alavancas, 347n
- das deformações e tensões, 405
- de De Morgan, 558
- distributiva, 546-7, 691
- do terceiro excluído, 672, 680-1
- dos cossenos, 170, 184
- para triângulos esféricos, 265
- dos movimentos planetários, 355, 357, 373-4, 424, 437
- que regem os choques, 404
- Leibniz, G. W. (1646-1716), 340, 341, 350, 363, 401, 417, 442-5, 463, 483
- Acta eruditorum*, 443, 463
- cálculo com classes, 443
- calculus integralis, 464
- calculus summatorius, 464
- characteristica generalis*, 442-3
- círculo osculador, 444
- citação, 441
- De arte combinatoria*, 669
- determinantes, 444
- diferenciação, 443
- filosofia, 443
- fórmulas para o cálculo, 435, 443
- geometria situs, 667
- invenção do cálculo, 673
- lógica matemática, 478-9
- máquina de calcular, 442, 685
- moderno sinal de integral, 443
- o termo função, 660
- os termos coordenadas, abscissa e ordenada, 388
- precursor do logicismo, 677
- regra de, 443, 449
- retrato de, 442
- sâncrito, 443
- séries, 144, 498
- teorema fundamental do cálculo, 443
- teorema multinomial, 444
- trajetórias ortogonais, 441
- Lemniscata de Bernoulli, 410, 411, 464, 632
- Lemoine, É. (1840-1912), 589, 627
- círculos de, 590
- geometrografia, 589
- plano de, 590
- pontos de, 590, 627
- tetraedro de, 590
- Le Monde* (Descartes), 383
- Lemonnier, P. C. (1715-1799), 484
- Leonardo da Vinci (1452-1519), 118
- ilustrador de um trabalho de Pacioli, 298
- Leonardo de Pisa, (ver Fibonacci)
- Leonardo Pisano (ver Fibonacci)
- Leslie, Sir John (1766-1832), 123
- Elements of Geometry*, 123
- Les Météores* (Descartes), 384
- Leurechon, *Récréations Mathématiques*, 400
- Levi-Civita, T. (1873-1941), cálculo tensorial, 603
- Lexell (1780), problema de Castillon-Cramer, 211
- L’Hospital, G. F. A. de (1661-1704), 444
- primeiro texto de cálculo, 465
- regra de, 444, 465
- retrato de, 445
- L’Huiller, S. A. J. (1750-1840), problema de Castillon-Cramer, 211
- Liang I* ou os dois princípios, 243
- Liber abaci* (Fibonacci), 76, 226, 292-3, 298, 315-6, 322
- problemas de, 315-6
- Liber assumptorum* (Arquimedes), 194, 217
- Liber quadratorum* (Fibonacci), 293-4
- Libertação da álgebra, 494, 548-53, 609
- Libertação da geometria, 544-5, 548, 609
- Lie, M. S. (1842-1899), 536, 576-7, 605

- álgebras de, 553, 576-7
 aplicação dos grupos à geometria, 536
 Liga Hanseática, 299
 Lilāvati [filha de Bhāskara] (c. 1150), 255
Lilāvati (Bhāskara), 251, 251n, 253, 255-6, 323
 Limaçon de Pascal, 152, 363
 Limão, o, 358
 Limite, conceito de (ver Teoria dos limites)
 Lincoln, Abraham (1809-1865), 183
 Lindemann, C. L. F. (1852-1939),
 transcendência de π , 146, 563, 586, 645, 665
 Linear, transformação, 552
 Linhas,
 de áreas, 372
 de curvatura, 490
 de metais, 372
 de volumes, 372
L'Intermédiaire des Mathématicques, 590
 Liouville, J. (1809-1882), 565
 Journal de Mathématique, 535, 565
 Lippershey, H. (c. 1607), 354
 Listing, J. B. (1808-1882), corolário de, 502
 Vorstudien zur Topologie, 667
Literary Digest, 146
 Liu Hui (século III), 245
 Manual de Matemática da Ilha Marítima, 245
 Li Yeh (1192-1279), notação para os números
 negativos, 245-6
 Linhas de áreas (compasso de setores),
 Linhas de metais (compasso de setores),
 Linhas de volumes (compasso de setores),
 Linhas de curvatura, 490
Livro das Mutações (ou I-Ching), 242
Livro dos Lemas (ver *Liber assumptorum*)
 Lobachevsky, N. I. (1793-1856), 543
 contestação do postulado das paralelas, 672
 geometria não euclidiana, 541-2
 *Geometrische Untersuchungen zur Theorie der
 Parallellinien*, 543
 libertação da geometria, 544-5, 548
 Pangéometrie, 543
 retrato de, 543
Locus Archimedeus, 196
 Logarítmica, curva, 399
 Logarítmica, escala, 350, 370-1
 Logarítmica, espiral, 315, 397
 Logaritmos, 301, 342-7, 366-8, 425
 cálculo pelo método da raiz, 352, 367
 cálculo por séries, 403, 413
 característica, 346
 comuns, 345-6
 de números negativos, 477
 etimologia, 346
 frase de Laplace sobre, 346
 mantissa, 346
 neperianos, 344-5
 paradoxo sobre, 498
 propriedade dos, 366-7
 Lógica(s), aristotélica, 669, 670, 672
 bivalentes, 672
 de relações, 669
 infinito-valentes, 672
 lei da contradição, 681
 lei da dupla negação, 672
 lei do terceiro excluído, 672, 680-1
 matemática, ou simbólica, 442-3, 478, 557-8,
 608, 655, 659, 668-73, 684, 694
 multivalentes, 672
 m-valentes, 672
 não aristotélicas, 672
 trivalentes, 672, 672n, 676, 712-3
Lógica demonstrativa (Saccheri), 540
 Logicismo, 677-9
 Logística, 98
 London Mathematical Society, 565
 Longitudo, 382
 Loomis, E. S. (1940), *The Pythagorean Proposition*,
 104
 Lord Kelvin (William Thomson, 1824-1907),
 528, 668
 Lo-shu, 268
 Lott, W. (1977), 153n
 Lovis de Montalte (pseudônimo assumido por
 Blaise Pascal), 366
 Loxodroma, 402
 Lucas, F. E. A. (1842-1891), 623
 Lucas, H. (m. 1663), 348
 Lucasiana, cátedra, 347, 433, 436, 480, 686
 Ludolphiano, número, 143
 Lugar relativo a três ou quatro retas, 210

- Lugares de Superfície* (Euclides), 181, 210
Lugares Planos (Apolônio), 200-1, 219
Lugares Sólidos (Aristeu), 210
 Luís Filipe (1773-1850), 532
 Luís XIV (1638-1715), 269, 398, 401
 Luís XVI (1754-1793), 491, 492
 Lukaszewics, J. (1921, 1930), 672
 contestação da lei do terceiro excluído, 672
 Lunas de Hipócrates, 140, 155, 213
 quadráveis, 155n
 Lutero, M. (1480-1546), 301-2
 Luz, teoria ondulatória, 399, 437, 466
- M**
- Maçã, a, 358
 MacColl, H. (1896), 672n
 Macfarlane, A. (1851-1913), 555
 Machadinho, 138, 139
 Machin, J. (1680-1751), fórmula de, 144-6, 155
 Maclaurin, C. (1698-1746), 463, 468-70
 comparação com Taylor, 532
 espiral sinusoidal, 402
 expansão, 468-9, 498-9
 Geometria orgânica, 470
 prodígio matemático, 470
 regra de Cramer, 470
 retrato de, 470
 teoria das marés, 470
 Treatise of Algebra, 470
 Treatise of Fluxions, 469-70
Magic of Numbers, The (Bell), 540n
 Mahavira, (c. 850), 250-1
 área de um quadrilátero cíclico, 257
 problema de, 271, 273
 Mainardi, G. (1800-1879), geometria diferencial, 602
 “Maior geômetra desde Apolônio”, 593
 “Maior pirâmide do Egito”, 67-8, 75, 223
 “Maior promessa matemática”, 363
 Malfatti, problema de, 594
 Malinké, tribo do Sudão Ocidental, 44
 Malus, E. L. (1775-1812), geometria diferencial, 602
 Mandingo, tribo da África Ocidental, 44
 Manfredo (c. 1231-1266), 291
 MANIAC, 687, 689
 Mannheim, A. (1831-1906), régua de cálculo, 350
 teorema de, 509
 Mantissa, 346
Manual de Matemática da Ilha Marítima, 245
Manual of Greek Mathematics, A (Heath), 138n
 Maomé, 260
 Mapa do mundo (Eratóstenes), 197
 Mapas (via projeções), 204, 221, 478
 Máquinas de calcular, 463, 684-90
 ábaco, 39-40, 242, 262, 290, 685
 analítica (Babbage), 687
 analísadores diferenciais, 688
 ASCC, 687
 barras (ou ossos) de Napier, 342, 369-70
 BESK, 99
 CDC 6600, 147
 CDC 7600, 147
 compasso de setores de Galileu, 371-2
 Cray-2 (supercomputador), 147, 688
 de Baldwin, 685
 de Colmar, 685
 de Friden (calculadora de mesa), 685-6
 de Leibniz, 442, 685
 de Marchant (calculadora de mesa), 685-6
 de Monroe (calculadora de mesa), 685-6
 de Morland, 685
 de Odhner, 685
 de Pascal, 362, 685
 diferencial (Babbage), 686
 EDSAC, 623
 EDVAC, 687
 Electronic Discrete Variable Calculator, 687
 Electronic Integrator and Computer, 687
 ENIAC, 146, 148, 687-8
 FACOM M-200, 147
 IBM, Automatic Sequence Controlled Calculator, 687
 IBM 704, 147, 688
 IBM 7090, 99, 147, 688
 MANIAC, 687, 689
 NEC SX-2 (supercomputador), 147
 NORC, 688
 PDP - 11/45, 624

- Pegasus, 688
portáteis, 689-90
réguas de cálculo (ver Régua de cálculo)
Selective Sequence Electronic Calculator, 687
SSEC, 687
STRETCH, 147
SWAC, 99
UNIVAC, 687
Universal Automatic Computer, 687
- Marcelo, M. C. (266-208 a.C.), 192
- Marchant, calculadora de mesa de, 685-6
- Marco Polo (1254?-1324?), 242
- Maria, rainha da Escócia (1542-1587), 301
- Martin, G. E. (1979), 150n
- Mascheroni, L. (1750-1800), 588-9
Geometria del Compasso, 588
retrato de, 589
teorema de construção, 588-9, 629-30
- Massa-energia, equação ($E = cm^2$) (Einstein), 347n
- Matemática, início da, 57
- Matemática “aplicada”, 463
- Matemática atuarial, 467, 494
- Matemática chinesa, fontes e períodos, 241-2
- Matemática comercial, 60, 77, 299
babilônica, 60
problemas antigos, 321-3
- Matemática finita, 694
- Matemática moderna, 690-1
- Matemática “pura”, 463
- Matemática recreativa, 48, 276, 411-2, 689, 714
- “Matemático dos Matemáticos”, 560
- Matemáticos em selos postais, 534n
- Matéria-onda, equação (de Broglie), 347n
- Material de escrita, casca de árvore e bambu, 241-2, 252-3
papel, 38
papel pergaminho, 38
papiro, 38
pergaminho, 38
tábulas de argila, 38
tabuleiro de areia, 38-9
- Mathematical Analysis of Logic, Being an Essay towards a Calculus of Deductive Reasoning, The* (Boole), 557, 669
- Mathematical Recreations and Essays* (Ball-Coe-ter), 411, 580
- Mathematical Reviews*, 566
- Mathematical Thought from Ancient to Modern Times* (Kline), 461
- Mathematische Annalen*, 185, 607, 662, 681, 684
- Matriz(es), álgebra das, 552-3, 560, 563, 575-6
antissimétrica, 578
produto de Cayley, 553, 576-7
produto de Jordan, 576-7
produto de Lie, 577
teoria das, 243, 532, 552-3, 555, 560-1, 563
trasposta de uma, 578
- Maupertuis, P. L. M. de (1698-1759), 475
“achatador da Terra”, 475
- MAURIA, Império, 248
mapa do, 248
- Maurício de Nassau, príncipe de Orange (1567-1625), 354, 383
- Máximos e mínimos, 394, 399, 402, 417, 428, 439, 594
método de Fermat, 429
- Maxwell, J. C. (1831-1879), 347n, 528, 668
citação, 528
equações da eletricidade e magnetismo, 347n
- McCay, W. S. (c. 1850), sequência de Euclides, 585
- Mecânica celeste, 357, 404, 437, 474, 486
- Mécanique Analytique* (Lagrange), 484
- Mécanique Celeste* (Laplace), 554
- Mechanisms of the Heavens, The* (Somerville), 525-6
- Medalha Copley, 594
- Média(s), aritmética, 85, 117-8, 226, 229-31
centroidal, 229-31
com pesos, 230
contra-harmônica, 229-31
geométrica, 85, 117-8, 226, 229-31
harmônica, 85, 117-8, 226, 229-31
heroniana, 85, 229
pitagórica, 117
raiz da média dos quadrados, 229
subcontrária, 117
- Mediana de uma coleção de números, 497
- Mediana de um tetraedro, 626
- Medida angular, 60-1

- medida de um círculo, A* (Arquimedes), 142, 156, 194, 213
- Meditationes* (Descartes), 384
- Meissel, E. (1826-1895), 623
- Mémoires* (Academia de Ciências da França), 527
- Menaecmo (c. 350 a.C.), 132, 167, 198
 duplicação do cubo, 135, 149-50
 inventor da geometria analítica?, 382
 secções cônicas, 135, 198, 382
- Mencke, O. (c. 1682), 443
- Mendelssohn, Abraham (filho de Moses Mendelssohn, pai de Felix, Mendelssohn, sogro de Dirichlet), 538
- Mendelssohn, Félix (1809-1847), 538
- Mendelssohn, Moses (1728-1786), 538
- Menelau de Alexandria (c. 100), 203-4
 ponto de, 228
Sphaerica, 203, 229
 teorema de, 203-4, 228-9, 376, 491
 tratado sobre cordas, 203
- Menger, K. (n. 1902), 631
- Mercator, G. (1512-1594), 403
 projeção de, 403
- Mercator, N. (c. 1626-1687), 403
 série de, 403, 413
- Méré, Chevalier (c. 1645), 366
- Mersenne, M. (1588-1648), 383, 391, 400
Cogitata physico-mathematica, 400
 primos de, 400
- Messier, C. (1730-1817), 493
- Metafisica* (Aristóteles), 175
- Method of Fluxions and Infinite Series, The* (Newton), 438-9, 451
- Methodus differentialis* (Newton), 438
- Método, O* (Arquimedes), 196, 422-3
- Método axiomático, 656, 673
 analogia com a lei do paralelogramo de forças, 670-1
- Método clássico de cálculo de π , 142
- Método da descida infinita, 392-3, 409
- Método da notação abreviada, 597, 634-5
- Método da raiz para o cálculo de logaritmos, 352, 367
- Método das proporções, 110
- Método das tangentes, Descartes, 385-6
- Roberval, 395-6, 412
- Toricelli, 395-6
- Método de aplicação de áreas, 110
- Método de equilíbrio (Arquimedes), 422-4, 446
 ilustrado, 422-4
- Método de exaustão, 133, 175, 418-21, 423, 445-6
 ilustração, 419-20
 proposição básica do, 175, 418-9
- Método de Newton-Raphson, 451
- Método dos fluxos, 436, 470
- Método dos indivisíveis, 358, 447-8, 602
 Cavalieri, 395, 420, 425
 Roberval, 395
- Método dos Limites (ver Teoria dos Limites)
- Método dos Mínimos Quadrados, 507-8
 Legendre, 487, 507-8, 519
- Método dos modelos, 544, 657-8
- Método indireto (ver *Reductio ad absurdum*)
- Métodos de cálculo antigos, 253-4
- Métodos matriciais na China, 246
- Metric Differential Geometry of Curves and Surfaces* (Lane), 425n
- Metrica, A* (Herão), 205, 221, 223
- Métrica de um espaço, 614, 705
- Métricos, espaços (ver Espaços métricos)
- Métrico, sistema, 493-4
 adoção pela França em 1799, 494
- Metródoro (c. 500), 206
- Meusnier, J. B. (1754-1793), geometria diferencial, 602
 teorema de, 602
- Michalski, K. (1936), 672n
- Microcomputadores, 688
- Microscópio, 355
- Midonick, *The Treasury of Mathematics*, 270n
- Migrações de matemáticos, 696
- Mikami, *The Development of Mathematics in China and Japan*, 241
- Miller, Sir J. (1790), precursor do sistema métrico, 493
- Mills, W. H. (1947), 623
- Ming, período (1368-1644), 246
- Minkowski, H. (1864-1909), 608
 sólido de largura constante, 500
 teoria geométrica dos números, 608

- Minos, lendário rei de Creta, 135
- Miquel, A. (c. 1838), sequência de Euclides, 585
- Miriade, 32, 45
- Mirifici logarithmorum canonicis descriptio* (Napier), 345, 352
- apêndice de Oughtred, 352
- edição inglesa de Wright, 352
- Miscellanea analytica* (De Moivre), 467
- Miyoshi, Kazunori, 147
- Mnemônicas para π , 146, 157-9
- regra das partes circulares, 342
- Möbius, A. F. (1790-1868), 594
- Der Barycentrische Calcul*, 491
- 2- complexos, 668
- faixa de, 668, 709
- geometria analítica, 599
- Moda de uma coleção de números, 497
- Modelo concreto de um conjunto de postulados, 658
- Modelo ideal de um conjunto de postulados, 658
- Modern Geometry* (Johnson), 257n, 397n
- Mohenjo Daro, 247
- Mohr, G. (1640-1697), 588
- Compendium Euclidis curiosi*, 588, 630
- Euclidis danicus*, 588
- Momento de um fluente, 439
- Momento de um volume, 422n
- Monge, G. (1746-1818), 463, 489-91, 493-4, 526, 597
- Application d'Algèbre à la Géométrie*, 490
- círculo de, 490-1
- Comissão de Pesos e Medidas, 494
- comparação com Carnot, 533
- esfera de, ou esfera diretora, 490-1
- geometria descritiva, 489-90
- Géométrie Descriptive*, 247n
- geometria diferencial, 490, 602
- linhas de curvatura, 490
- pai da geometria diferencial, 490, 602
- pioneiro da geometria projetiva, 590
- ponto de, 490, 509
- retrato de, 489
- revolucionário, 492
- teorema da quádrlica central, 490-1
- teoremas de, 490-1
- Monoides, 553
- Monroe, calculadoras de mesa de, 685-6
- Montalte, Lovis de (ver Lovis de Montalte)
- Monte Cario, método de, 148
- Montucla, J. E. (1725-1799), 144
- Morbus cyclometricus*, o quadrador de círculos, doença, 147
- Morland, Sir S. (1625-1695), máquina de calcular, 685
- Morley, F. (1860-1937), sequência de Euclides, 585
- Mosaicos, 374-5
- Mouton, G. (1670), precursor do sistema métrico, 493
- Movimentos planetários, leis dos, 355, 357, 373-4, 424, 437
- Müller, J. (ver Regiomontanus)
- Multicursais, grafos, 500-2
- Multiplicação, método da gelosia, 323-4
- método da grade, 323-4
- método do diagrama em rede, 254
- método egípcio, 72-3 método hindu, 253-4
- Multissecação de um ângulo, aproximação com o refinamento de Snell, 157
- com a espiral de Arquimedes, 138, 141
- Mydorge, C. (1585-1647), 383, 400
- N**
- Nabucodonosor (605-562 a.C.), 60
- "Nach Adam Riese", 299
- Nagel, C. H. (1803-1882), sequência de Euclides, 585
- Nakayama, Kazuhika, 147
- Não euclidiana, geometria, 521, 539-44, 544-5, 590
- consistência, 543-4
- contribuições de Poincaré, 572, 617
- deficiência de um triângulo, 571
- e o espaço físico, 572-3
- independência do postulado das paralelas, 543, 658-9
- modelo de, 571-2
- pesquisas de Bolyai, 542-4
- pesquisas de Gauss, 521, 541, 545
- pesquisas de Legendre, 541

- pesquisas de Lobachevsky, 543
 pesquisas de Riemann, 544
 quadrilátero de Lambert, 541, 570
 quadrilátero de Saccheri, 570
 sobre uma superfície de curvatura total constante não nula, 604
 soma dos ângulos de um triângulo, 570-1
 Napier, J. (1550-1617), 340, 341-2
 analogias de, 342, 368
 barras, ou ossos, de, 342, 369-70
 bestificação do papa, 302
 escritor de ficção científica, 342
 logaritmos, 302, 341-7
 Mirifici logarithmorum canonis descriptio, 345, 352
 Plaine discovery of the Whole Reuelation of Saint John, A, 341
 Rabdologiae, 369
 regra das partes circulares, 342, 368-9
 retrato de, 341
 trigonometria esférica, 368-9
 Napoleão Bonaparte (1796-1861), 70, 168, 492-3, 589
 amigo de Monge e Fourier, 489
 campanha na Rússia, 590
 campanha no Egito, 526
 citação, 485
 e Laplace, 486
 geômetra amador, 589
 problema de, 630
 Nasîr ed-din (1201-1274), postulado das paralelas, 261-2, 264
 teorema de, 275
 teorema de Pitágoras, 264
 Naturais, logaritmos, 344-5
 Nauck, F. (1850), problema das 8 rainhas, 714
 Nazistas, 682
 n -dimensional, esfera, 600
 n -dimensional, espaço, 600, 603
 n -dimensional, geometria (ver Geometria n -dimensional)
 n -dimensional, quádrlica, 601
 n -dimensional, variedade, 600
 NEC SX-2, supercomputador, 147
 Needham, *Science and Civilization in China*, 241
 n -fora, tirar os, 275
 Nefroide, 411
 catacústica de uma cardioide, 411
 Negócios de seguros, 468
 Nemorarius, Jordanus (ver Jordanus Nemorarius)
 Neperianos, logaritmos, 302, 341, 342-7
 Nero (37-68), 302
 Nesselmann, G. H. F. (1842), 206
 Neuberg, J. (1840-1926), sequência de Euclides, 585
 Neugebauer, O. (n. 1899), 60, 62-3, 80, 94n
 Neusis, problemas de, 219
New England Journal of Education, 183
 Newton, I. (1642-1727), 340-1, 355, 399, 417, 431, 436-41, 467, 476, 486, 519
 Analysis per series, pluxions, etc., 438
 Arithmetica universalis, 438, 440, 554
 aversão a polêmicas, 436
 cálculo, 340-1, 417, 436, 443, 673
 cartas a Oldenberg, 438
 citação, 441
 classificação das cúbicas, 440
 construção da cissoide de Dioclés, 151
 Cubic Curves, 438, 440
 diretor da Casa da Moeda, 438
 duplicação do cubo, 151
 fluente, 439
 fluxo, 439-0, 469
 fluxo principal, 439,
 forma da Terra, 475
 história da queda da maçã, 389
 inspetor da Casa da Moeda, 438
 intervenção por Maclaurin, 470
 invenção do cálculo, 673
 Lectiones opticae, 438
 lei da gravitação, 347n, 405, 437, 485
 limites superiores para as raízes de uma equação polinomial, 440
 Methodus differentialis, 438
 método de aproximação de raízes de equações, 440, 450-1
 método de diferenciação, 448-9
 método dos fluxos, 438
 momento de um fluente, 439
 noções de limites, 440
 notação fluxional, 443-4
 Opticks, 438, 440

- Philosophiae naturalis principia mathematica*, 438, 440-1, 483, 554, 556
 problema de Apolônio, 201
 problemas-desafio, 438, 441
 professor lucasiano, 348, 436
Quadrature of Curves, 638
Quadrature and Rectification of Curves by the Use of Infinite Series, 438
 reta de, 440
 retrato de, 437
 sucessor de Barrow, 434
 tautócrona, 465
 teorema binomial, 449
 teorema binomial generalizado, 438, 449
 teorema fundamental da álgebra, 520
 teoremas sobre cônicas, 199-200, 440
 teoria da gravitação, 437
 teoria das cores, 436
 teoria das emissões (da luz), 399
 teoria das equações, 437, 440
 teoria dos limites, 440
The Method of Fluxions and Infinites Series, 438-9, 451
 tradução dos *Principia* por du Châtelet, 483
 trajetórias ortogonais, 441
 tributos a, 441
 trilho para a régua de cálculo, 350
 trisseção do ângulo, 152
 “Newton da França”, 486
 Newton-Leibniz, polêmica, 436-7, 443-4
New York Tribune, 147
 Nicholson (1954), cálculo de π , 688
 Nicolo de Brescia (ver Tartaglia)
 Nicômaco (c. 100), 289
 Nicodemes (c. 240 a.C.), 152-3
 conchoide, 138, 152-3, 210
 duplicação do cubo, 135, 152-3
 trisseção do ângulo, 138
 Nightingale, F. (1820-1910), 562
 Nim, 48
 Noether, A. E. (1882-1935), 608, 620-1
 álgebra abstrata, 62 conténario de nascimento, 621
 Plêiades Matemáticas, 622
 retrato de, 620
 Noether, Max (1844-1921), 620
 Nomes dos números, etimologia, 27-8
 Non-Euclidean Geometry (Bonola), 542n
 NORC, 688
 Northrop, *Riddles in Mathematics*, 315
 Notação abreviada, 262, 597, 634-5
 Notação algébrica, 209, 309, 326
 de Bombelli, 308
 de Viète, 309-10
Nouvelles Annales de Mathématiques, 563, 565
Nove capítulos sobre a arte da matemática, 243-6
 área de um segmento circular, 243
 conteúdo de, 243-4
 problema do bambu quebrado, 244, 268
 problemas de, 243, 267-8
 teorema de Pitágoras, 244, 268
 Noves fora, 263, 275-6
 Numerais, 29
 chineses-japoneses, 34, 242
 circulares babilônicos, 45
 cuneiformes babilônicos, 31-2, 36
 egípcios demóticos, 30-1
 egípcios hieráticos, 30-1
 egípcios hieroglíficos, 30
 gregos alfabéticos (ou jônicos), 35, 262
 gregos áticos (ou herodiânicos), 32
 romanos, 32
 Número da besta, 301-2, 302n
 Número(s), abundantes, 99, 116
 algébricos (ver Números algébricos)
 artificiais, 346
 amigáveis (ver Números Amigáveis)
 cadeia social de, 116
 círculo social de, 116
 composto, 99n
 de Bernoulli, 464, 495-6
 digitais, 29-30, 46, 290
 diretores, 601
 cardinais (ver Números cardinais)
 complexos (ver Números complexos)
 deficientes, 99, 116
 de Hilbert ($2^{\sqrt{2}}$), 666
 figurados, 100, 117
 hipercomplexos, 551
 inteiros de Gauss, 573
 irracionais (ver Números irracionais)
 m-gonais, 117

- múltiplo perfeito de ordem k , 100
 - normais, 148
 - oblongos, 117
 - palindrômicos, 647
 - pentagonais, 100-2, 117
 - perfeitos, 99, 116
 - fórmula de Euclides, 99, 116, 175
 - tratado de Cataldi sobre, 312 π (ver π)
 - práticos, 100
 - primos (ver Números primos)
 - primos entre si, 105n
 - quadrados, 100-2, 117
 - quase-perfeitos, 100
 - racionais, 104-7, 208
 - reais, 550, 610-1
 - regulares, 66, 77
 - regulares sexagesimais, 66
 - 666 (número da besta), 302, 302n
 - semiperfeitos, 100
 - simplesmente normais, 148
 - sobrenaturais, 100
 - superabundantes, 100, 116
 - transcendentes (ver Números transcendentos)
 - transfinitos (ver Números transfinitos)
 - triangulares, 100-2, 117, 520, 567
 - triplamente perfeitos, 116
 - Números algébricos, 134, 146, 645-6
 - definição de, 664
 - enumerabilidade, 664
 - Números amigáveis, 98-9, 261, 274
 - par de Paganini, 116
 - Tâbit ibn Qorra, 99, 264, 274
 - Número(s) cardinal(ais), 662
 - comparação de, 663n
 - do conjunto dos números algébricos, 664
 - do conjunto dos números naturais, 662
 - do conjunto dos números racionais, 662-3
 - do contínuo, 666
 - Números complexos, imersão no conjunto dos quatérnios, 550
 - representação gráfica dos, 522, 524
 - tratamento de Hamilton, 548-9, 554-5, 574
 - Números irracionais, 121, 256
 - abordagem de Cantor, 615
 - definição de, 105
 - $\sqrt{2}$, 105-7, 392-3
 - tratamento nos *Elementos*, 175
 - Números primos, 614, 622-5, 647, 689
 - conjeturas não provadas, 625, 647
 - crivo de Eratóstenes, 198, 623, 647
 - de Fermat, 392, 624-5
 - definição de, 99n
 - de Mersenne, 400
 - densidade de, 624
 - gêmeos, 625
 - grandes, 623
 - infinitude do conjunto dos, 175, 623
 - irregulares, 496
 - número de primos abaixo de n , 623
 - palindrômicos, 624, 647
 - regulares, 496
 - tábuas de fatores, 624
 - teorema de Dirichlet, 624
 - Números reais, não enumerabilidade, 664
 - Números, teoria dos, 98
 - algoritmo euclidiano, 173, 181-2
 - Euler, 473
 - geométrica, 608
 - infinitude dos primos, 175, 623-4
 - Lagrange, 484
 - Legendre, 488
 - lei da reciprocidade quadrática, 520
 - pequeno teorema de Fermat, 391, 408
 - teorema de Dirichlet, 624
 - teorema do número primo, 624
 - teoria dos limites dos, 646-7
 - último “teorema” de Fermat, 263-4, 392, 408-9, 496, 524, 614
 - Números transcendentos, 146, 645-6, 664
 - e , 563, 665
 - existência de, 665
 - número de Hilbert ($2^{\sqrt{2}}$), 665
 - π , 146, 563, 586, 646, 665
 - teorema de Gelfond, 665
 - Números transfinitos, 462, 615, 661-6, 708
 - definição de, 662
 - mínimo, 662
- O**
- Obelisco, maior existente (egípcio), 70
 - Occam, William of (1270?-1349?), 672n

- Ocular acromática, 399
- Odhner, W. T. (1878), máquina de calcular, 685
- Oldenburg, H. (c. 1615-1677), 438, 442
soma de uma série infinita, 498
- Omar Khayyam (ver Khayyam, Omar)
- Om Directionens analytiske Betregning* (Wessel), 523
- Ondas de choque, 614
- Ônibus, 366
- Ontogenia (“A ontogenia recapitula a filogenia”), 693
- Onzes fora, 276-7
- Óptica* (Alhazen), 264
- Óptica* (Euclides), 181
- Opticks* (Newton), 438, 440
- Orbiformes, curvas (curvas de largura constante), 474, 499-500
pontos opostos, 500
pontos ordinários, 500
teorema de Barbier, 500
triângulo de Reuleaux, 500
- Ordem do mérito, 679
- Ordenada, 388
- Oresme, N. (c. 1323-1382), 295
expoentes fracionários, 295
geometria de coordenadas, 295
inventor da geometria analítica?, 382-3
- “O Organizador da Vitória”, 491
- Oriente antigo, 57-8, 247
- Orr, A. C. (1906), 146
- Ortogonal, Trajetórias, 441, 465
- Otho, V. (c. 1550-1605), 143
- Oughtred, W. (1574-1660), 144, 340, 349-52, 431
apêndice à *Descriptio* de Napier, 352
Circles of Proportions, 350
Clavis mathematicae, 349-50, 436
comparação com Harriot, 532
réguas de cálculo, 350
retrato de, 350
simbolismo algébrico, 349-50
Trigonometrie, 350
volumes de barris, 352
- Ouyang Jiang (1989), 241n, 247
- P**
- Pacioli, L. (c. 1445-1509), 298, 308
De divina proportione, 298
problemas de, 298
sincopação da álgebra, 298
Sūma, 298-9, 321, 365
- Paganini, N. (1782-1840), famoso violinista italiano, 99n
- Paganini, N. (1866), números amigáveis, 99, 116
- “Pai da análise moderna”, 613
- “Pai da aritmetização”, 530
- “Pai da geometria diferencial”, 602
- Pa-kua*, 243
- Palas (planetoide), 521
- Palimpsestos, 38, 422
- Pañca Siddhāntika* (Varāhamihira), 248
- Pangéométrie* (Lobachevsky), 543
- Panini (c. 500 a.C.), 248
- Papel, 38
- Papel pergaminho, 38
- Papiro, 38
Cairo, 87-8
Harris, 70
Golenishev (ver Papiro Moscou)
Kahun, 74
Moscou (ver Papiro Moscou)
Rhind, ou Ahmes (ver Rhind, papiro),
Rollin, 70
- Papiro Moscou, 69, 72-3, 75, 84-5
problemas do, 72-5, 84-6
problema 14, 84-6
volume do tronco de pirâmide, 75
- Papu, junco, 38
- Papus (c. 300), 167, 195, 200, 209-12, 217, 227
arbelos, 210
Coleção Matemática, 210-12, 217, 226-7
extensão do teorema de Pitágoras, 210, 264
isoperimetria, 210
lugar relativo a três ou quatro retas, 210
O Tesouro de Análise, 210
problemas de, 226-7
razão dupla, 211
sobre médias, 226-7
teorema de Stewart, 211

- teoremas do centroide, 210, 227
 trisseção do ângulo, 138, 153
 Parábola, origem do nome, 199
 Parábola semicúbica, 398, 464
 Parábolas de Fermat, 389
 Parábolas de ordem superior, 389
 Paradoxo(s),
 A Dicotomia, 418
 com indução matemática, 642
 com logaritmos, 498
 com séries infinitas, 639-40
 da roda (de Aristóteles), 373
 da tinta, 413
 de Burali-Forti na teoria dos conjuntos, 674
 de Cantor na teoria dos conjuntos, 674
 de Epiménides, 675
 de Eubúlides, 675
 de Galileu, 372-3, 530
 de Russell, 713
 de S. Petersburgo, 465
 de Zenão, 133, 417-8, 615, 673n
 do barbeiro (Russell), 674-6
 geométricos, 696-8
 na álgebra elementar, 640-3
 na lógica, 675
 na teoria dos conjuntos, 615-6, 655, 674-5, 678, 680-2
 no cálculo, 643-4, 673-4
Paradoxien des Unendlichen (Bolzano), 530
 Paradrômicos, anéis, 710
 Parcialmente ordenados, conjuntos,
 princípio de dualidade, 592
 Parent, A. (1666-1716), geometria analítica sólida, 596
 Paris, problemas de (Hilbert), 120, 608, 615, 684
 Parkin, T. R. (1966), 498
 Parménides de Eleia (c. 450 a.C.), 130
 Parte alíquota, 98n
 Partes circulares, 368
 Partidas dobradas, 298
 Pascal, Blaise (1623-1662), 152, 340, 360, 361-6
 carrinho de mão, 366
Cartas Provinciais, 363
 cicloide, 362, 366, 432
 demonstrações juvenis empíricas, 361, 377
 esperança matemática, 398
Essay pour les Coniques, 363
 geometria projetiva, 340, 382
 indução matemática, 365
 maior “promessa” matemática, 363
 máquina de somar, 362, 685
 método dos indivisíveis, 428
 ônibus, 366
Pensamentos, 363, 398
 princípio da hidrodinâmica, 362
 probabilidade, 362, 365, 394, 398, 467
 problema dos pontos, 365, 366n, 393-4, 409
 problemas-desafio, 432
 pseudônimos, 366
 reta de, 377
 retrato de, 363
 secções cônicas, 363-4, 377-8
 teorema do “hexagrama místico”, 363-4, 377-8, 592, 594
Traité du Triangle Arithmétique, 362, 364
 triângulo aritmético, 246, 250, 364-5, 378-9
 Pascal, É. (1588-1640), 152, 363
 limaçon, 152, 363
 Pascal-Fermat, correspondência, 362, 365, 365n, 393-4, 398
 Pasch, M. (1843-1930), postulado de, 656, 700
 conjunto de postulados para a geometria euclidiana, 657
Pathwaie to Knowledge, The (Recorde), 301
Patterns of Polyhedrons (Hartley), 124n, 195n, 358n
 “*Pauca sed matura*” (lema de Gauss), 521, 618
 Pauli, W. (1900-1958), variáveis spin, 555
 PDP-11/45, 624
 Peacock, G. (1791-1858), 546-7
 “O Euclides da Álgebra”, 546
 princípio da permanência das formas equivalentes, 547
Treatise on Algebra, 546
 Peano, G. (1858-1932), axiomática, 659
 conjunto de postulados para a geometria euclidiana, 657
Formulaire de Mathématiques, 670
 fundamentos da matemática, 611
 lógica simbólica, 670
 precursor do logicismo, 678

- Peaucellier, A. (1832-1913), sequência de Euclides, 585
- Pedal, curvas, 594
- Pedro, o Grande (1672-1725), 471
- Pegasus, 688
- Peirce, B. (1809-1880), 669
- Peirce, C. S. (1839-1914), 669
lógica, 669
- Pell, J. (1611-1685), equações de, 256, 256n
tábua de primos, 624
- Pêndulo, 353, 529
cicloidal, 398
composto, 398
cônico, 405
período de, 353, 353n
relógios de, 398-9, 465
- Pensamentos* (Pascal), 363, 398
- Pentagrama, 125
- Pentaminós, 689, 689n, 714
- Pentatlo (alcunha de Eratóstenes), 197
- Pequeno teorema de Fermat, 391, 408
- Pergaminho, 38
- Péricles (490?-429 a.C.), 130
- Perier, madame (ver Gilberta)
- Periga, H. (1873), 118
- Periódicos e revistas, 462, 564-6
- Período de transmissão, 290-2
- Períodos chineses, 241-2
Shang (c. 1500-1027 a.C.), 241-2
Chin (221-206 a.C.), 242
Chou (1027-256 a.C.), 242
Han (206 a.C.-222 d.C.), 242
Ming (1368-1644), 246
Pós-Han (222-c. 600), 245
das cinco dinastias (907-960), 242
Sung (960-1279), 245
Tang (618-906), 243, 246
Yüan (1279-1368), 246
- Períodos matemáticos, 741
- Permutações, 271
- Pérolas de Sluze, 402
- Perron, O. (c. 1929), 628
- Perspectiva, 361, 469
- Pestalozzi, J. H. (1748-1827), 593
- Peste Negra, 295
- Peurbach, G. von (1423-1461), 296
- Peyrard, F. (1808), 168
Philosophiae naturalis principia mathematica (Newton), 438, 440-1, 483, 554, 556
tradução de du Châtelet, 483
- π , cálculo de Arquimedes, 141-2
cálculo de Bailey, 147, 688
cálculo de Dase, 145
cálculo de De Lagni, 144
cálculo de Felton, 688
cálculo de Ferguson, 146
cálculo de Genuys, 147, 688
cálculo de Grienberger, 143
cálculo de Guilloud, 147
cálculo de K. Miyoshi e K. Nakayama, 147
cálculo de Nicholson e Jeanel, 688
cálculo de Ptolomeu, 142
cálculo de Romanus, 143
cálculo de Shanks, 146, 148
cálculo de Shanks e Wrench, 688
cálculo de Sharp, 144
cálculo de van Ceulen, 143
cálculo de Wrench, 146
cálculo de Wrench-Shanks, 147
cálculo de Y. Kanada, 147
- Cray, supercomputador (cálculo com o), 688
- cronologia de, 141-8
- ENIAC, cálculo com o, 146, 688
- expressão de Brouncker, 144
- expressão de Wallis, 143, 432
- expressão em produto infinito, de Viète, 143-4, 155, 311
- fórmula de Machin, 144, 146-7, 155
- fórmula de Rutherford, 145
- fórmula japonesa, 147
- IBM 704, cálculo com o, 147, 688
- IBM 7090, cálculo com o, 147, 688
- irracionalidade de, 144, 148, 478
- irracionalidade de π^2 , 145
- método clássico de cálculo de, 142, 194
- métodos probabilísticos de aproximação, 143, 145, 468, 506
- mnemônicas para, 146, 157-9
- NORC, cálculo com o, 688
- normalidade ou não normalidade de, 148
- número ludolphiano, 143
- Pegasus, cálculo com o, 688

- problema da agulha de Buffon, 145, 468, 505-7
 razão chinesa antiga, 143, 245
 razões para cálculos extensivos de, 148
 refinamento de Snell, 143, 156-7, 398
 série de Gregory, 144, 145, 404
 símbolo para, 144
 transcendência de, 146, 563, 586, 645, 665
 valor bíblico, 141n
 valor de Al-Kashi, 142
 valor de Anthonizoon, 143
 valor de Āryabhata, 142
 valor egípcio antigo, 141
 valores babilônicos, 61, 80
 valores de Bhāskara, 142
- Picard, E. (1856-1941), 563
 Picard, J. (1620-1682), precursor do sistema métrico, 493
 Pieri, M. (1860-1904), axiomática, 659
 conjunto de postulados para a geometria euclidiana, 657
 Pirâmide de Quéops (Gizeh), a Grande, 67, 83
 Pitágoras (c. 585-c. 500 a.C.), 93, 97, 129, 169, 564, 616, 673
 existência em matemática, 564
 retrato de, 98
 Pitágoras, teorema de, 61, 87, 169-70, 182-3, 257, 268, 271
 antiga demonstração chinesa, 244
 caso particular da lei dos cossenos, 184
 demonstração de Bhāskara, 258-9
 demonstração de Euclides, 169, 182
 demonstração de Garfield, 183
 demonstração de Leonardo da Vinci, 118
 demonstração de Nasir ed-din, 264
 demonstração de Pitágoras (?), 103-4
 demonstração de Wallis, 258-9
 demonstração dinâmica, 182
 demonstrações por decomposição, 118-20
 em selos postais nicaraguenses, 347, 347n
 extensões do, 170, 210, 227, 264, 274, 368, 490
 generalização de Pappus, 210, 227, 264
 generalização de Tābit ibn Qorra, 274
 para triângulos esféricos retos, 368
 Pitagórica, aritmética, 98-103
 Pitagórica, aplicação de áreas, 110-3, 199
 Pitagórica, escola, 96, 317
 em Crotona, 129
 em Tarento, 131
 Pitagórica, filosofia, 97
 Pitagórica, irmandade, 132
 álgebra geométrica, 107-13
 descoberta das grandezas incomensuráveis, 104-7
 distintivo (pentagrama), 125
 intervalos musicais, 103
 números figurados, 100
 sólidos regulares, 114-5
 Pitagórica, teoria das proporções, 107, 173, 176, 673
 Pitagóricas, médias, 117-8
 Pitagóricos, ternos, 64, 104, 120-1, 175, 208, 248
 Pitagóricos, ternos primitivos, 64, 120-1
 Pitiscus, B. (1561-1613), 314
 trigonometria, 314
Plaine Discovery of the Whole Reuelation of Saint Iohn, A (Napier), 341
 Planetário de Arquimedes, 196
Planisfério (Ptolomeu), 210, 221
 Platão (427-347 a.C.), 92, 104, 131-2, 168, 206, 537
 duplicação do cubo, 135, 136
 existência em matemática, 25
 Repubblica (comentário de Proclo), 213
 retrato de, 132
 ternos pitagóricos, 104
 Timeu, 114
 Platão de Tivoli (c. 1120), 291
 Plateaux, J. (1801-1833), 602
 problema de, 604
 superfícies mínimas, 602
 Platônica, Academia, 130, 135, 167, 168, 419
 lema da, 130
 Platônicos, sólidos (ver Poliedros regulares)
 Playfair, J. (1748-1819), 539
 postulado das paralelas, 539, 541
 Plêiades Matemáticas, As, 622
 Plimpton, G. A. (1855-1936), 63
Plimpton 322, 63-6, 104, 202
 Plücker, J. (1801-1868), 597-9, 607
 Analytisch-geometrische, Entwicklungen, 598
 coordenadas lineares, 595, 633

- demonstração do princípio de dualidade, 595
 equações de, 598, 635
 geometria analítica, 594
 geometria projetiva, 591
 notação abreviada, 597
 números de, 635
 retas de, 377
 retrato de, 598
System der analytischen Geometrie, 598
Theorie der algebraischen Curven, 598
- Plutarco (46?-120?), 115, 420
- Pneumatica* (Herão), 206
- Poincaré, H. (1854-1912), 615-8
Analysis situs, 668
 antinomias na teoria dos conjuntos, 676
 divulgador da matemática, 617
 geometrias não euclidianas, 543, 572, 617
 grupos, 536, 617
 independência do postulado das paralelas, 543
 precursor do intuicionismo, 679
 retrato de, 618
 topologia, 668
 último universalista, 616-8
- Poincaré, R. (1860-1934), 616
- Poinsot, L. (1777-1859), 358
- Poisson, S. D. (1781-1840), 526, 528-9
 citação, 529
 colchetes de (em equações diferenciais), 529
 comparação com Fourier, 533
 constante de (em eletricidade), 529
 equação de (na teoria do potencial), 529
 integral de (na teoria do potencial), 529
 leis de (na teoria da probabilidade), 529
 razão de (em elasticidade), 529
Recherches sur la Probabilité des Jugements, 529
 retrato de, 529
Théorie Mathématique de la Chaleur, 529
Théorie Nouvelle de l'Action Capillaire, 529
Traité de Mécanique, 529
- Polícrates (m. 522 a.C.), 97
- Poliedros, 710-1
 arquimedianos ou semirregulares, 195, 210
 cuboctaedro, 124
 de Kepler-Poinsot, 358
 estrelados, 358
 fórmula de Euler-Descartes, 124, 389, 473, 667, 710
 regulares, 114-5, 124, 125, 175, 205, 210, 298, 555
 triedrais, 711
- Polígonos, eneágono, 328
 estrelados, 125, 317
 heptadecágonos, 178, 185, 519
 heptágonos, 221, 263, 274-5, 628
 regulares, 156, 173, 178, 185-6, 205, 317, 419, 519, 520
- Polos e polares, 199, 360, 596, 601
- Pomo da discórdia, 366
- Poncelet, J. V. (1788-1867), 40, 358, 361, 490, 588, 598
 demonstração do princípio de dualidade, 592
 extensão do problema de Castillon-Cramer, 211
 geometria projetiva, 361, 490, 590
 pontos no infinito, 598
 princípio de continuidade, 358, 591, 592
 princípio de dualidade, 591-2
 retrato de, 591
Traité des Propriétés Projectives des Figures, 590
- Poncelet-Steiner, teorema de construção de, 588
- Pons asinorum*, 169
- Ponto(s), álgebra de, 579
 circular no infinito, 635
 conjugado isogonal, 627
 de acumulação, 712
 de Brocard, 585
 de Feuerbach, 625
 de inflexão, 402, 439-40, 599
 de Kirkman, 377
 de Lemoine, 590, 627
 de Monge, 490, 509
 de Salmon, 377
 de Steiner, 377
 equação de um, 592
 geometria de (pontual), 606
 no infinito, 358, 591, 598
- Pope, A. (1688-1744), sobre Newton, 441
- Porisma, 181n
- Porismas* (Diofanto), 207-8
- Porismas* (Euclides), 181, 210
- Post, E. L. (c. 1925), 672
 contestação da lei do terceiro excluído, 672
- Postulacional, ou matemático, método, 115, 179

- Postulado(s), 179
- abbas e dabbas, 704
- abelhas e colmeias, 705
- da continuidade (de Dedekind), 698-9
- da definição de grupo, 569
- da teoria da relatividade, 704-5
- das paralelas (ver Postulado das paralelas)
- das relações sequenciais, 701
- de Birkhoff, 657
- de Euclides, 179-80, 548, 656, 662, 700
- de Hilbert, 657-8
- de Huntington, 657
- de Pasch, 657, 700
- de Pieri, 657
- de Veblen, 657
- de Zermelo, 608
- diferença entre axioma e postulado, 179-80
- dos espaços de Hausdorff, 711
- dos espaços métricos, 705-6
- Postulados, conjunto de, consistência de, 657-9
- equivalentes, 659
- independência de, 658-9
- modelo de, 658
- autodual para a geometria projetiva plana, 631-2
- Postulado das paralelas, 204, 487, 544
- alternativas, 539
- Euclides, 179, 479
- forma de Playfair, 539, 541
- independência, 543, 658
- lobachevskiano, 573
- pesquisas de Bolyai, 542-3, 672
- pesquisas de Lambert, 479, 541
- pesquisas de Legendre, 487, 541
- pesquisas de Lobachevsky, 542-3
- pesquisas de Nasir ed-din, 261-2, 264
- pesquisas de Ptolomeu, 204
- pesquisas de Saccheri, 540
- Pothenot (m. 1733), problema de, 204
- “Poucos, porém maduros” (lema de Gauss)
- Poulet, P., cadeia social de números, 116
- Practica geometriae* (Fibonacci), 293
- Precessão dos equinócios, 477
- Preliminary Dissertation on the Mechanisms of the Heavens* (Somerville), 525
- Prêmio Bordin, 619
- Prêmio Nobel de Literatura (Russell), 679
- Principia* (Newton) [ver *Philosophiae naturalis principia mathematica* (Newton)]
- Principia mathematica* (Whitehead e Russel), 442, 670, 678-9, 681
- Principia philosophiae* (Descartes), 384
- Príncipe dos matemáticos, 522
- Princípio da descoberta, 672-3
- Princípios da hidrodinâmica, 466
- Princípio da permanência das formas equivalentes, 547
- Princípio da superposição, 656
- Princípio de continuidade, 358, 360, 591-2
- Princípio de dualidade, da álgebra booleana, 592
- da geometria esférica, 592
- da geometria projetiva plana, 592, 595, 631
- da geometria projetiva sólida, 592
- da teoria dos conjuntos, 558
- da teoria das identidades trigonométricas, 592, 632
- demonstração de Plücker, 595
- do cálculo proposicional, 592
- dos conjuntos parcialmente ordenados, 592
- Princípio de identidade dos polinômios, 388, 408
- Princípio de inserção, 137, 152, 329
- Prismatoide, 223, 448
- volume do, 223
- Prismoide, 448
- generalizado, 448
- Probabilidade, 467, 486, 562, 617
- Bernoulli, Daniel, 394
- correspondência Pascal-Fermat, 362, 365, 365n, 393-4, 398
- definição de, 145n
- De Moivre, 394
- esperança matemática, 398
- esperança moral, 466
- Euler, 394
- geométrica, 145, 506-7
- Huygens, 394
- integral, 467
- Lagrange, 394
- Laplace, 394
- matemática, 145n, 362, 366, 464, 672
- paradoxo de S. Petersburgo, 465

- Probabilité des jugements*, 468
- Problema, da coroa, 215-216
 da rã no poço, 321
 de Apolônio, 201, 219, 308
 de Malfatti, 594
 de Napoleão, 630
 de Plateau, 604
 de Pothenot, 204
 de Snell, 204
 do bambu quebrado, 244, 268
 do gado (Arquimedes), 195
 dos pontos, 362, 362n, 365, 393-4, 409
- Problema(s), de Castillon-Cramer, 211
 com equações cúbicas, 325-6
 com equações quárticas, 326
 com sólidos regulares, 124
 comerciais antigos, 321-3
 da agulha, 145, 468, 505-6
 das 8 rainhas, 714
 das pontes de Königsberg, 474, 500, 667
 das quatro cores, 667, 667n, 689
 de Dirichlet, 684
 de Hilbert (Paris), 608
 de neusis, 137, 219
 desafio, 362, 366, 391, 432, 438, 441
 de Steiner-Lehmus, 702
 diofantinos, 208
 dos três pontos, 204
 hindus antigos, 255
- Problemas de, *Antologia Grega*, 206-7
 Alta Idade Média, 314
 Apolônio, 219
Aritmética (Diofanto), 208-9, 225
Aritmética de Treviso, 299-300, 324
 Arquimedes, 215-6
 Bachet, 411-2
 Baker, 322
 Bhāskara, 271-2
 Brahmagupta, 270-1
 Buteo, 321-2
 Chuquet, 320-1
 Clavius, 322, 328
 Descartes, 407-8
 Diofanto, 207-8, 225
 Fibonacci, 315-6, 322
 Ghaligai, 322
 Herão, 221-3
 Huygens, 409-10
Liber abaci, 292-3, 322
 Mahāvira, 271, 273
Nove capítulos sobre a arte da matemática, 243, 267-8
 Pacioli, 321
 papiro Moscou, 72-5, 84-6
 papiro Rhind, 70, 72-6, 83-4, 202, 206
 Pappus, 226-7
 Regiomontanus, 319
 Tales, 115-6
 Tartaglia, 322
 Viète, 311, 327
- Problèmes Plaisants et Délectables* (Bachet), 400, 411-2
- Proceedings of the American Mathematical Society*, 565
- Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, 565
- Proceedings of the Indiana Academy of Science*, 148n
- Proceedings of the London Mathematical Society*, 565
- Proceedings of the St. Petersburg Academy*, 472
- Proclo (410-485), 96, 212, 228
Comentário sobre Euclides, Livro I, 97, 213
 postulado das paralelas, 539
Sumário Eudemiano, 97, 104, 167-8
- Produto de conjuntos, 451
 Produto de transformações, 605
 Produtos infinitos, 143, 612
 Prognósticos, 694-6
 Progressão aritmética, 74, 102n, 208, 229, 255, 271, 301, 343-4, 468
 soma de, 102n, 255, 567
 Progressão geométrica, 74, 173, 194, 255, 301, 421
 Progressão harmônica, 229
 Projeção, central, 360, 375, 440
 de Lambert, 478
 de Mercator, 403
 estereográfica, 221, 401
 globular, 401
 Projeção de uma reta no infinito, 375

- Projéteis, teoria dos, 354, 397
 Projétil, trajetória de, 355
 Proporção musical, 117
 Proporções (ver teoria das proporções)
 Proporções contínuas, 173
 Proposição contrapositiva, 712
 Proposição contrária, 712
 Proposição recíproca, 712
Propositiones ad acuendos juvenes (Alcuíno), 314
Propositiones philosophicae (Agnesi), 479-80
 Propriedades absolutas de uma superfície, 603
 Propriedades relativas de uma superfície, 603
 Propriedades topológicas intrínsecas, 667
 Propriedades topológicas extrínsecas, 667
 Prostaferese, 343
Pseudaria (Euclides), 181
 Pseudoesfera, 636-7
 Pseudofeiteiceira, 505
 Ptolomeu, C. (c. 85-c. 165), 203-4, 261, 357
 Almagesto, 142, 210, 291, 296
 comentário por Têon, 212
 tradução para o árabe, 261
 Planisfério, 210, 221
 postulado das paralelas, 204
 problema dos 3 pontos, 204
 projeção estereográfica, 204, 221, 401
 projeções de mapas, 204, 221, 401
 Sintaxe Matemática (ver *Almagesto*)
 tábua de cordas, 203-4, 220, 248
 teorema de, 204, 220, 257-8
 traduções do *Almagesto*, 261
 valor de π , 142, 204
 Ptolomeu Hefesto, 197
 Ptolomeu Soter (m. 283 a.C.), 162
 Ptolomeu III (m. 222 a.C.), 196
 Puiseux, V. (1820-1883), geometria diferencial, 602
Pythagorean Proposition, The (Loomis), 104
- Q**
- Quadrados greco-romanos, 474
 Quadrados mágicos, 261, 268-70
 constante mágica, 269
 construção de de la Loubère, 269-70
 de Dürer, 318-9
 de la Hire, 400
 de ordem n , 269
 de ordem $4n$, 318-9
 lo shu, 268
 na China, 243, 268
 normais, 269, 689
 Quadrados, orifícios, 499
 Quadratriz de Hípias e Dinostrato, 138, 140, 154, 210, 434
 tangentes à, 430
 Quadratura do círculo, 134, 140-1, 392
 Anaxágoras, 140
 aproximação com o refinamento de Snell, 157
 aproximação egípcia, 75, 140
 aproximação hindu, 257
 com a espiral de Arquimedes, 138, 140
 com a quadratriz, 138, 140
 Hípias de Elis, 140
 impossibilidade com os instrumentos euclidianos, 144, 404, 586
 morbus cyclometricus, 147
 pela retificação da circunferência, 154
 Saint-Vincent, 398, 402
 solução assintótica, 153-4
 tentativa de Antífon, 213, 418
 tentativa de Cusa, 296
Quadratura da Parábola, A (Arquimedes), 194
Quadrature and Rectification of Curves by the Use of Infinite Series (Newton), 438, 638
 Quadriláteros, 257-8
 de Brahmagupta, 274
 cíclicos (ver Quadriláteros cíclicos)
 de Lambert, 541, 570
 de Saccheri, 541, 570
 Quadriláteros cíclicos, 273-4
 área dos, 257
 construção de, 297
 teorema de Ptolomeu, 204, 220, 257-8
 teoremas de Brahmagupta, 257
 trapézio de Brahmagupta, 258
 Quadrivium, 97
Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics, 565
 Quárticas, equações, 62, 263, 303, 305, 326
 Abu'l-Wefâ, 263
 problemas sobre, 326

- solução de Euler, 473
 solução de Descartes, 305, 407
 solução de Viète, 305, 311, 326
 Quase-grupos, 553
 Quatro cores, conjectura (ou problema) das, 667, 667n
 resolução de Appel e Haken, 689
 resolução de Allaire, 689
 Queda dos corpos, lei da, 353, 355, 371
 Quetelet, L. A. J. (1796-1874), 218
 Quilograma-padrão, 494
 Quine, W. V. (1940), logicismo, 678
 Quintissecção de um ângulo, 139
 Quipo (peruano), 27
- R**
- Rabdologiae* (Napier), 369
 Radiolário, 115
 Radix universalis, 308
 Rahn, J. H. (1622-1676), 349
 tábua de primos, 624
 Rainha Maria (1516-1558), 301
 Raio de curvatura, 464
 Raiz, 301
 Raiz quadrada, 63, 81, 205, 263, 293, 298
 método de aproximação de Herão, 450
 Raleigh, Sir W. (1552-1618), 348
 Ramanujan, Srinivasa (1887-1920), 251
 Ramsés II, III, IV (datas incertas), 70
 Ramsey, F. P. (1926), logicismo, 678
 Rangâcârya, M. (1912), 251
 Raphson, J. (1648-1715), 451
 Analysis aequationum universalis, 451
 Rawlinson, Sir H. C. (1810-1895), 59
 Razão anarmônica (ver razão dupla)
 Razão áurea, 125
 Razão dupla, 211, 606
 Real Academia Dinamarquesa de Ciências, 522
 Rechenmeister, 299
Recherches sur la Probabilité des Jugements (Poisson), 529
 Reciprocção, 594
 Recorde, R. (c. 1510-1558), 300-1
 sinal de igual, 301
 The Castle of Knowledge, 301
 The Ground of Artes, 301
 The Pathwaie to Knowledge, 301
 The Whetstone of Witte, 301, 304
Recreations Mathématiques (Leurechon), 400
Reductio ad absurdum, 169-70, 175, 420-1, 424, 681
 e a geometria não euclidiana, 540
 Reflexão, 399, 465
 Refração, 399, 465
 cônica, 554
 dupla, 399
 Regiomontanus (1436-1476), 207, 296, 424
 De triangulis omnimodis, 296-7, 319
 polígonos estrelados, 317
 problemas de, 319
 retrato de, 297
 tábua de tangentes, 297
 Regle des nombres moyens, 321
 Regra da falsa posição dupla, 263, 277
 na China, 246-7
 Regra de falsa posição, 73, 207, 263, 293, 298
 Regras da corda, 248
 Regras das partes circulares (Napier), 342, 368-9
 Régua de cálculo, 370-1
 circular, 350
 moderna, 350
 Regula duorum falsorum (ver Regra da falsa posição dupla)
 Reichenbach (1932), lógicas infinito-valente, 672
Rei Lear (Shakespeare), 521-2
 Reitweisner, G. W. (1949), cálculo de π , 688
 Relógio de sol, mais antigo existente, 69-70
 Relógio regulado por mola de compensação, 399, 405
Rendiconti, 565
República (Platão) comentário de Proclo, 213
 Reta(s), conjugada isogonal, 627
 de Cayley, 377
 de Euler (de um tetraedro), 509
 de Euler (de um triângulo), 473, 585, 625
 de Fílon, 628
 de Lemoine, 590
 de Newton, 440
 de Pascal, 377
 de Plücker, 377

- geometrias de, 606
 no infinito, 591, 598, 637
- Reticulados, 553
- Retificação, da circunferência (aproximada), 154-5
 da cicloide, 403-4
 da lemniscata, 410n
 da parábola, 403
 de Cusa (aproximada, da circunferência), 317-8
 de de Gelder (aproximada, da circunferência), 155
 de Kochanski (aproximada, da circunferência), 154-5
- Retratos de, Abel, 533
 Agnesi, 480
 Aristóteles, 133
 Arquimedes, 192
 Babbage, 687
 Barrow, 433
 Bernoulli, Jakob, 464
 Bernoulli, Johann, 466
 Cantor, 616
 Cardano, 306
 Carnot, 492
 Cauchy, 531
 Cavalieri, 426
 Cayley, 559
 Clairaut, 476
 Clavius, 312
 Copérnico, 313
 D'Alembert, 478
 De Morgan, 558
 Descartes, 384
 Dirichlet, 538
 Du Châtelet, 483
 Euler, 472
 Fermat, 390
 Fibonacci, 293
 Fourier, 527
 Galileu, 353
 Galois, 535
 Gauss, 521
 Germain, 524
 Grassmann, 556
 Hamilton, 554
 Harriot, 349
 Hermite, 564
 Hilbert, 684
 Huygens, 399
 Jacobi, 537
 Kepler, 357
 Klein, 608
 Kovalevsky, 619
 Kronecker, 617
 Lagrange, 485
 Lambert, 479
 Laplace, 487
 Legendre, 488
 Leibniz, 442
 L'Hospital, 445
 Lobachevsky, 543
 Maclaurin, 470
 Mascheroni, 589
 Monge, 489
 Napier, 341
 Newton, 437
 Noether, 620
 Oughtred, 350
 Pascal, 363
 Pitágoras, 98
 Platão, 132
 Plücker, 598
 Poincaré, 618
 Poisson, 529
 Poncelet, 591
 Regiomontanus, 297
 Riemann, 613
 Russell, 680
 Scott, 622
 Somerville, 525
 Steiner, 593
 Sylvester, 561
 Tartaglia, 307
 Taylor, 469
 Torricelli, 397
 Viète, 309
 Wallis, 432
 Weierstrass, 612
 Wren, 404
 Revolução Industrial, 463

- Reye, K. T. (1837-1919), geometria projetiva, 591
- Rhaeticus, G. J. (1514-1576), 143, 312, 313-4
tábuas trigonométricas, 313-4
- Rhind, A. H. (1833-1863), 69
- Rhind, ou Ahmes, papiro, 69-70, 72, 82
área de um círculo, 75, 84
frações unitárias, 70
problemas do, 70, 72-6, 83-4, 202, 206
Problema Número 56, 83
Problema Número 57, 83
Problema Número 79, 75, 293
- Riccati, F. (1718-1791), 476
- Riccati, Giacomo (1676-1754), 476
equação diferencial de, 476, 503
- Riccati, Giordano (1709-1790), 476
- Riccati, V. (1707-1775), 476
- Ricci-Curbastro, G. (1853-1925), 603
cálculo tensorial, 603
- Ricci, Matteo (1552-1610), tradução de Euclides para o chinês, 247
- Richard, L. P. E. (1795-1849), 563
- Richelot, F. J. (1808-1875), polígono regular de 257 lados, 178
- Richmond, H. W. (1909), construção de um heptadecágono regular, 185
- Riddles in Mathematics* (Northrop), 315
- Riemann, G. F. B. (1826-1866), 608, 613-5
conceitos topológicos, 667
equações diferenciais de Cauchy-Riemann, 613
função abnormal, 610
função zeta, 614
geometria diferencial, 603
geometria não euclidiana, 544
hipótese de, 614
integral de, 614
retrato de, 613
superfície de, 613, 667
tese de doutorado, 667
Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen, conferência probatória de 1854, 600, 614, 655, 660, 667
- Riese, A. (c. 1489-1559), 299
- Rigorização da análise, 484, 530
- Rig-Veda, 556
- Robbins e Courant, *What is Mathematics?*, 136n, 397n Robert de Chester (c. 1140), 291
- Roberval, G. P. de (1602-1675), 389, 394-5
área sob um arco de cicloide, 395
método das tangentes, 395, 412
método dos indivisíveis, 395, 428
- Roda de Aristóteles, 373
- Rodolfo II, cáiser (1552-1612), 356
- Rodrigues, O. (1794-1851), geometria diferencial, 602
- Rolle, M. (1652-1719), 471
crítica do cálculo, 471
teorema de, 471
- Rollin, papiro, 70
- Romanus, A. (1561-1615), 308
valor de π , 143
- Rome, A. (n. 1889), 96n
- Rosácea de 4 folhas, 632
- Roseta, Pedra de, 70-1
- Rothman, T. (1982), 535n
- Roulettes, 594
- Royal Society of London, 398, 403-4, 433, 436-8, 442, 469, 526, 564, 594, 679
- Rubaiyat* (Omar Khayyam), 261
- Rudolf, C. (ca. 1500-ca. 1545), 301
Die Coss, 301
- Ruffini, P. (1765-1822), 305
equação quintica, 305
- Runge, C. (1856-1927), 608
método de Runge-Kutta, 608
- Russell, B. (1872-1970), 670, 679
axiomática, 659
fundamentação da matemática na lógica, 611
logicismo, 677
paradoxo do barbeiro, 674-6
paradoxos na teoria dos conjuntos, 675-6, 713
princípio do círculo vicioso, 676
retrato de, 680
- Russell e Whitehead, *Principia mathematica*, 442, 670, 678-9, 681
- Rutherford, W. (1841, 1853), cálculo de π , 145-6
- S
- Saccheri, G. (1667-1733), 261, 264, 540-1
Euclides ab omni naevo vindicatus, 540
geometria não euclidiana, 540

- hipóteses do ângulo agudo, reto e obtuso, 264, 540
Lógica demonstrativa, 540
 quadrilátero de, 541, 570
- Sachs, A. J. (n. 1914), 63
- Sacrobosco (c. 1200-1256), 295
- Sadleriara, cátedra, 559
- Saint-Venant, B. de (1796-1886), 602
- Saint-Vincent, G. de (1584-1667), 402
 duplicação do cubo, 151
 método dos indivisíveis, 428
 quadratura do círculo, 398, 402
- Saleiro (ver Salinon)
- Salinon* de Arquimedes, 217
- Salmon, G. (1819-1904), 562
 pontos de, 377
- Sankhyā*, 251
- Sânscrito, 247
 renascimento, 248
- Sarton, *The History of Science*, 213n
- Sauvé, L. (1980), 624
- Savasorda (ver Abraham bar Hiyya)
- Savile, Sir H. (1549-1622), 347
- Saviliana, cátedra, 347, 404, 431, 561
- Schepler, H. C. (1950), 141n
- Schläfli, L. (1814-1895), geometria de dimensão superior, 599
- Schlegel, V. (1843-1905), geometria de dimensão superior, 599
- Schnirelmann, L. G. (1905-1935), 625
- Schöne, R. (1896), 205
- Schooten, F. van, o filho (1615-1660 ou 1661), 388, 398, 596
 editor de *La Géométrie* de Descartes, 402
- Schooten, F. van, o pai (1581-1646), 402
- Schooten, P. van (1643-1679), 402
- Schoute, P. H. (1846-1913), 585
- Schröder, E. (1841-1902), álgebra de Boole-Schröder, 670
Vorlesungen über die Algebra der logic, 670
- Schultze, *Graphic Algebra*, 279
- Schwedt, princesa P. von (c. 1760), 474
- Science and Civilization in China* (Needhan), 241
- Scientific American Supplement*, 146
- Scott, C. A. (1858-1931), 621
- An Introductory Account of Certain Modern Ideas and Methods in Plane Analytic Geometric*, 621
- retrato de, 622
- Scott, D. S. (1958), 689
- Scrap-Book of Elementary Mathematics*, A (White), 302n
- Secante (função trigonométrica), 266
- Secção áurea, 123, 125, 220
- Secções cônicas, definição de Steiner, 594
 duplicação de cubo, 133
 invenção das, 132
 nomes, 199
 obtenção mediante cones de revolução, 199
- Pascal, 363-4, 377-8
- propriedade foco diretriz, 200, 211, 218-9
- teorema de Newton, 200
- trissecação do ângulo, 141
- Secções cônicas*, (Apolônio), 198-200, 210, 360, 405, 435
 comentário de Eutócio, 213
 comentário de Hipátia, 212
 edição de Barrow, 435
 tradução árabe, 198-9, 261
- Segmento esférico, 215
- Seguro de vida, 405, 462
- Seidenberg, A. (1962), 57n
- 666, número da besta, 302, 302n, 324-5
- Seki Kowa (1642-1708), 444
- Selective Sequence Electronic Calculator (SSEC), 687
- Selos postais nicaraguenses, 347
- Semigrupos, 553
- Seno, etimologia, 267
 tábuas de, 241
- Seqt de uma pirâmide, 83
- Sequência de Euclides, 585, 590
- Séries de potências, 612
- Séries hipergeométricas, 521, 610
- Séries infinitas, 476, 534, 590, 610
 convergência uniforme, 612
 de potências, 612
 dificuldades iniciais com, 639-40
- Dirichlet, 538
- Euler, 498-9
- Fourier, 527, 537, 567-8, 578, 615, 661

- Gregory, 144, 145, 403
 hipergeométricas, 521, 610
 Maclaurin, 470, 497, 498
 Mercator, 403, 413
 paradoxos, 639-40
 Taylor, 469, 484, 497, 610
 teste de Cauchy da integral, 568
 teste de Cauchy da raiz, 568
 teste de Cauchy da razão, 531, 568
 trigonométricas (ver séries infinitas de Fourier)
- Serret, J. A. (1819-1885), geometria diferencial, 602
- Servois, F. J. (1767-1847), 592
- Sete sábios da Antiguidade, 64n
- Severi, F. (1904), construções com régua, 588
- Shakespeare, *Rei Lear*, 521-2
- Shanks, D. (1961, 1962), cálculo de π , 146-7, 688
- Solved and Unsolved Problems in Number Theory*, 103n
- Shanks, W. (1812-1882), cálculo de π , 146-8
- Sharp, A. (1651-1742), cálculo de π , 144
- Shen Kangshi (1987), história da matemática chinesa, 241
- Shenton, W. F. (1928), 168n
- Shǐ Huang-ti, imperador (c. 213 a.C.), 241
- Shi-Xue*, ou Desenho em Perspectiva (Xi-yao), 247n
- Siddānta Siromani* (Bhāskara), 251, 251n
- Silvestre II, papa (ver Gerbert)
- Simbólica, álgebra, 206, 256, 301, 314
 - Bombelli, 308, 326
 - Descartes, 309
 - Harriot, 348
 - Oughtred, 349-50
 - Pacioli, 298
 - Recorde, 301
 - Rudolff, 301
 - Viète, 310, 326
- Símbolos, adição e subtração egípcios, 74
 - base dos logaritmos naturais (e), 472
 - cálculo, 439, 443, 484
 - circunraio de um triângulo (R), 473
 - complemento de um conjunto ($'$), 452
 - congruente (\approx), 350
 - de Legendre [$(c|p)$], 488
 - derivada de y em relação a x , (dy/dx), 443
 - diferença, (\sim), 349
 - diferencial de x (dx), 443
 - divisão (\div), 349
 - expoentes, 388
 - fatorial de n ($n!$), 365n
 - fluente de y (y), 439
 - fluxo de y (y), 439
 - fluxo de y (y), 439função [$f(x)$], 472
 - funções hiperbólicas (senh etc.), 478
 - igual ($=$), 301, 310
 - igual, numa proporção ($::$), 349
 - infinito (∞), 432
 - inraio de um triângulo (r), 473
 - intersecção de conjuntos (\cap), 349, 451
 - lados de um triângulo (a, b, c), 472
 - maior que ($>$), 348
 - mais (+), 298
 - menor que ($<$), 348
 - menos ($-$), 298
 - moderno sinal de integral (\int), 443
 - multiplicação (\times), 349, 352
 - multiplicação (\cdot), 349
 - multiplicação (\cap), 349
 - número de combinações de n objetos tomados r de cada vez [$C(n, r)$], 378-9
 - produto de conjuntos (\cap), 349, 451
 - radical ($\sqrt{\quad}$), 301
 - semelhança (\sim), 350
 - semiperímetro de um triângulo (s), 472
 - soma de conjuntos (\cup), 451
 - somatório (Σ), 473
 - subtração babilônica, 32
 - união (\cup), 451
 - unidade imaginária (i), 473
 - zero na matemática chinesa, 243, 245
- Simplicidade de uma construção euclidiana, 590
- Simplício (c. 530), 212-3
- Simson, R. (1687-1786), 211, 585
 - edição dos *Elementos* de Euclides, 168
 - restauração de um trabalho de Apolônio, 201-2
- Sinésio de Cirene (c. 400), 212
- Sintaxe Matemática* (ver *Almagesto*)
- Sistemas articulados, 561
- Sistemas de agrupamentos multiplicativos, 33-4

- Sistemas de coordenadas, bipolares, 632
 cartesianas, 594
 de Plücker (lineares), 595, 633
 esféricas, 632
 homogêneas, 598, 635
 latitudes e longitudes, 632
 polares, 464, 595, 632
- Sistema(s) de numeração, babilônico, 45
 chinês científico (ou em barras), 34, 242, 246
 cifrado, 34, 38, 262
 de agrupamentos simples, 30-3
 tradicional chinês-japonês, 34, 242
 de agrupamentos multiplicativos, 33-4
 duodecimal, 28
 egípcio, 35
 grego alfabético, 35, 262
 indo-arábico, 35, 40-1, 252, 262, 290, 293, 314, 341
 maia, 37
 posicional (ver Sistema de numeração posicional)
 quinário, 28
 romano, 32-3
- Sistema de numeração posicional, 35-7
 babilônico cuneiforme, 36-7
 indo-arábico, 36
 maia, 37
- Sistema dos números naturais,
 como fundamento da matemática, 611
- Sistema dos números reais, como fundamento da matemática, 611
 imersão no sistema dos números complexos, 549
- Sistemas matemáticos abstratos, 700-1
- Sisto IV, papa (1414-1484), 297
- Skolem, T. (n. 1887), teoria restrita dos conjuntos, 675
- Sluze, R. F. W. de (1622-1685), 402, 430
 pérolas de, 402
- Smith, D. E. (1860-1944), 348
A Source Book in Mathematics, 365n, 520n, 542n
- Smith, E. (m. 1906), egiptologista americano, 70
- Smith, H. J. S. (1826-1883), 613
- Smith, prêmio, 559
- Smithsonian Institution, 147, 687
- Snell, W. (1580 ou 1581-1626), loxodroma, 402
 problema de, 204
 refinamento de, 143, 156-7, 398
- Sociedade para Difusão do Conhecimento Útil, 525
- Sociedades Matemáticas, 565-6
- Société Mathématique de France, 565
- Sócrates (469-399 a.C.), 131, 418
- Sobre alavancas* (Arquimedes), 196
- Sobre a construção de esferas* (Arquimedes), 196
- Sobre a esfera e o cilindro* (Arquimedes), 194-5, 213-5
- Sobre as espirais* (Arquimedes), 194
- Sobre médias* (Eratóstenes), 210
- Sobre números poligonais* (Diofanto), 207
- Sobre o calendário* (Arquimedes), 196
- Sobre o equilíbrio das figuras planas* (Arquimedes), 195-6
 comentário de Eutócio, 213
- Sobre o heptágono num círculo* (Arquimedes), 274-5
- Sobre os cones e os esferóides* (Arquimedes), 194-5
- Sobre os corpos flutuantes* (Arquimedes), 195-6, 215
- Sobre secções espaciais* (Apolônio), 200
- Sobre secções determinadas* (Apolônio), 200
- Sobre secções proporcionais* (Apolônio), 200
- Sobre os tamanhos e distâncias do Sol e da Lua* (Aristarco), 214
- Sociedade Matemática de Nova York, 621
- Sociedade Suíça de Ciências Naturais, 472
- Sociedade Real de Göttingen, 522
- Sofistas, 173
- Sólido de largura constante, 499
- Sólon (c. 638-c. 559 a.C.), 92
- Soluções aproximadas de equações, Cardano, 303
 Lagrange, 484
 método de Horner, 245-6
 Newton-Raphson, 451
 Viète, 308, 310
- Solved and Unsolved Problems in Number Theory* (Shanks), 103n
- Soma de conjuntos, 451
- Somerville, M. F. (1780-1872), 495, 524-6
A Preliminary Dissertation on the Mechanisms of the Heavens, 525
- Plêiades Matemáticas, 622
- retrato de, 525

- The Mechanisms Of The Heavens*, 525-6
- Somerville, *Bibliography on Non-Euclidean Geometry, Including the Theory of Parallels, The Foundations of Geometry and Space of N-Dimensions*, 600
- Source Book in Mathematics*, A (Smith), 365n, 520n, 542n
- Sphaerica* (Menelau), 203, 229
- Spherical Trigonometry after the Cesaro Method* (Donnay), 221
- Spieker (c. 1870), sequência de Euclides, 585
- SSEC, 687
- Staudt, K. G. C. von (1798-1867), 594
- Geometrie Der Lage*, 594
- geometria projetiva, 591
- resolução geométrica de equações quadráticas, 123
- teorema de, 496
- Steiner, J. (1796-1863), 585, 588, 593-4, 616
- cadeias de, 594
- centro isogônico, 397
- geometria projetiva, 361, 591
- “maior geômetra desde Apolônio”, 593
- pontos de, 377
- porisma de, 594
- retrato de, 593
- Systematische Entwicklungen*, 594
- teorema de construção de Poncelet-Steiner, 588
- Steiner-Lehmus, problema de, 702
- Stereometria doliiorum vinorum* (Kepler), 358
- Stevin, S. (1548-1620), 196, 313
- estática e hidrostática, 313
- frações decimais, 313
- integração primitiva, 424
- pressão de um líquido, 424
- Stewart, M. (1717-1785), teorema de, 211
- Stifel, M. (1486-1567), 301-2
- Arithmetica integra*, 301
- bestificação, 301-2
- Stirling, J. (1692-1770), 469
- fórmula, 468-469, 497
- Stobaeus (séc. V), 167
- STRETCH, 147
- Struik, D. J. (1963), 241n
- Stukeley, W. (1687-1765), 441
- Sturm, J. C. F. (1803-1855), teorema de, 561
- Suan pan, 242
- Subnormal, 406
- Subtangente, 430
- Subtração, símbolo de, babilônico, 32
- egípcio, 74
- moderno, 298
- Sûlvasûtras*, 248
- relação pitagórica, 257
- Suma*, (Pacioli), 298-9, 321
- problema dos pontos, 365
- Sumario eudemiano* (Proclo), 97, 104, 167, 168
- Sun-tzi (séc. III), 244-5
- problema de, 244
- Superfícies aplicáveis, 604
- Superfícies de segundo grau, 360
- Superfícies mínimas, 604
- Superposição, 656
- Supplementum Geometriae* (Viète), 309
- Supremo, 646
- Survey of geometry*, A. (Eves), 140n, 586-7n
- Surya Siddhânta, 248
- tradução de E. Burgess (1860), 251
- Susa, tábulas de, 80
- SWAC, números perfeitos, 99
- Sylow, L. (1832-1918), grupos, 536
- Sylvester, J. J. (1814-1897), 246, 559, 560-2
- “Adão da matemática”, 562
- citação, 562
- comparação com Cayley, 562
- determinante jacobiano, 537
- divisores elementares de λ -matrizes, 613
- frações unitárias, 82-3
- fundador do *American Journal of Mathematics*, 565, 621
- geometria de dimensão superior, 599
- poema Rosalind, 562
- professor saviliano, 561
- retrato de, 561
- teoria dos invariantes, 560
- The Laws of Verse*, 562
- Sylvester, processo de, 82-3
- Symbolic Logic* (Venn), 451n
- System der analytischen Geometrie* (Plücker), 598
- Systematische Entwicklungen* (Steiner), 594

T

- Tâbit ibn Qorra (826-901), 118n, 261
 extensão do teorema de Pitágoras, 274
 heptágono regular, 274-5
 números amigáveis, 99, 264, 274
 traduções feitas por, 261
- Tábua de multiplicação de quatérnios, 550-1
- Tábuas, de cordas, 203, 220, 248
 de fatores, 624
 de Legendre, 488
 de logaritmos, 346
 de mortalidade, 405
 de números primos, 624
 $\phi(n)$, 408
 trigonométricas, 248, 259, 261
 de Rhaeticus, 313
 hindu, 265
- Tabuleiro de areia, 38-9
- Tait, P. G. (1831-1901), 555
- Tales (c. 546 a.C.), pai da geometria demonstrativa, 25, 94-7, 115, 129
 problemas de, 115-6
- Tangências* (Apolônio), 200-1, 219, 311
- Tangente, a uma curva, 434
 origem do nome, 266
- Tannery, P. (1843-1904), 38, 96n
- Tarento, escola de, 131
- Tarry, G. (1843-1913), sequência de Euclides, 585
- Tarski, A. (1902-1983), 672
- Tartaglia (c. 1499-1557), 302, 307-8
General Trattato, 308, 322-3
 problemas de, 322
 problema dos pontos, 365
 retrato de, 307
- Tartalea, 302n
- Tautócrona, 465
- Taylor, B. (1685-1731), 463, 468-9, 471, 475
 comparação com Maclaurin, 532
 expansão, ou série, de, 469, 484, 497, 610
 retrato de, 469
 soluções aproximadas de equações, 469
 teoria da perspectiva, 469
- Taylor, H. M. (1842-1927), sequência de Euclides, 585
- Teeteto (c. 415-c. 369 a.C.), 115, 132, 168, 175
- Telégrafo eletromagnético, 521
- Telescópio, 354
 etimologia, 354
- Templo de Amon-Re em Karnak, 70
- Tensorial, cálculo, 603
- Teodoro de Cirene (n. c. 470-a.C.), 131-3, 261
 construção de \sqrt{n} , 126
 números irracionais, 107
- Teodósio de Tripoli (c. 100), 261, 291, 435
Esférica, 291
- Têon de Alexandria (c. 390), 168, 196, 203, 212
 revisão de, 168, 212
- Teorema chinês dos restos, 244, 246
- Teorema da corda quebrada, 217
- Teorema da invariância de Brouwer, 681
- Teorema de Ceva, 375-6
- Teorema de Menelau, 203-4, 228-9, 376
 extensão de Carnot, 491
- Teorema de Newton, 199-200
- Teorema de Pitágoras (ver Pitágoras, teorema de)
- Teorema de Ptolomeu, 204
- Teorema do “Hexagrama místico”, 363-4, 377, 592, 594, 597
- Teorema dos números primos, 624, 647
- Teorema do ponto fixo de Brouwer, 681
- Teorema do valor intermediário, 530
- Teorema do valor médio, 471
- Teorema dos dois triângulos de Desargues, 360, 375, 598, 631
- Teorema fundamental da álgebra, 477, 520, 566, 665, 667
 Gauss, 520, 566, 665
- Teorema fundamental da aritmética, 175, 622
 aplicações, 184
- Teorema fundamental da geometria projetiva, 211
- Teorema fundamental do cálculo, 435
 Leibniz, 442-3
- Teorema multinomial, 444
- Teoremas de existência, 617
- Teoremas do centroide de Guldin, 210, 227-8
- Teoria atomística, 133, 418, 420, 425
- Teoria cinética dos gases, 601
- Teoria copernicana, 195, 301, 354, 356
- Teoria da demonstração de Hilbert, 683

- Teoria da eliminação, 561
 Teoria da evolução, 355
 Teoria da gravitação, 437
 Teoria da luz, 399, 437, 466
 Teoria da medida, 659, 708
 Teoria da partição, 560, 561
 Teoria da probabilidade (ver Probabilidade)
 Teoria da propagação do calor, 466, 526-9
 Teoria da relatividade, 440, 485, 601, 618, 660, 672, 684
 postulados para a, 704-5
 Teoria da relatividade geral, 607, 614
 Teoria das classes, 678
 Teoria das cores (Newton), 436
 Teoria das equações, 297, 348, 473, 528
 cúbicas (ver Equações cúbicas)
 Galois, 535
 limite superior para as raízes, 440, 449-50
 método de Horner, 245-6
 método de Lagrange, 484
 método de Newton, 440, 451
 método de Taylor, 469
 método de Viète, 310, 311
 quadráticas (ver Equações quadráticas)
 quárticas (ver Equações quárticas)
 quínticas (ver Equações quinticas)
 raízes imaginárias, 440, 449
 raízes múltiplas, 402
 regra de sinais do Descartes, 307, 348, 388, 407, 440
 teorema de Fourier, 451
 transformação de Tschirnhausen, 402
 Teoria das marés, 470
 Teoria das probabilidades (ver Probabilidade)
 Teoria das proporções, 107, 176-7, 184
 eudoxiana, 107, 173, 176-7, 184, 673
 moderna, 176-7, 184
 pitagórica, 107, 176
 Teoria do potencial, 486, 529, 618
 Teoria dos conjuntos, 355, 451-2, 462, 558, 615, 659, 660-1
 antinomias ou paradoxos, 615, 655, 673-7, 680-2
 como fundamento da matemática, 611, 678, 691
 geral, de Cantor, 674
 paradoxo de Burali-Forti, 674
 paradoxo de Cantor, 674
 paradoxo de Russell, 674-6
 restrita, 675
 Teoria dos grupos (ver Grupos)
 Teoria dos ideais, 392
 Teoria dos invariantes (ver Invariantes e covariantes)
 Teoria dos jogos, 690
 Teoria dos limites, 421, 424, 435, 439-40, 462, 484, 531, 610, 674
 como fundamento da análise, 477
 de Newton, 440
 Teoria dos nós, 667
 Teoria dos números (ver Números, teoria dos)
 Teoria dos operadores, 690
 Teoria dos tipos, 678
 ramificada, 678
 Teoria espectral, 684
 Teoria matemática da elasticidade, 524
 Teoria matemática do calor, 528
 Teoria quântica, 576, 618, 672, 690
 Termodinâmica, 528, 618
Tesouro da Análise, O (Papus), 210
 Tetraedro anticomplementar, 626
 Tetraedro isósceles, 509
 Teúdio de Magnésia (c. 360 a.C.), 168
 Textos modernos de geometria superior, 201, 203, 209, 585
Théorie analytique de la chaleur (Fourier), 527
Théorie analytique des probabilités (Laplace), 486, 506
Théorie de la figure de la Terre (Clairaut), 475
Théorie de la Lune (Clairaut), 475
Theorie der algebraischen Curven (Plücker), 598
Théorie des fonctions analytiques contenant les principes du calcul différentiel (Lagrange), 484, 610
Théorie mathématique de la chaleur (Poisson), 529
Théorie nouvelle de l'action capillaire (Poisson), 529
Theory of Sets of Points, The (Young e Young), 608

- Therema egregium* de Gauss, 604
- Thirteen Books of Euclid's Elements, The* (Heath), 696
- Timeu (Platão), 114
- Timeu de Locri (?), 114
- Tonstall, C. (1474-1559), 300
- Topologia, 616-7, 655, 666-8, 681, 689
- algébrica, 668
 - analysis situs, 667
 - combinatória, 617, 668
 - conjuntiva, 668
 - divisão fundamental da matemática, 666
 - 2-complexos, 668
 - fórmula de Euler-Descartes, 667
 - grupos de Betti, 668
 - origem do nome, 667
 - problema das quatro cores, 667, 689
 - teorema fundamental da álgebra, 667
 - teoria da homologia, 668
 - teoria dos nós, 667
 - uma geometria kleiniana, 667
- Topológica, equivalência, 667
- Topologicamente equivalentes, figuras, 709
- Topológicas, propriedades, 667
- extrínsecas, 667
 - intrínsecas, 667
- Topológicas, transformações, 666
- Topológicos, espaços, 668
- Toro, 401, 447
- Torricelli, E. (1608-1647), 394, 396-7
- área sob um arco cicloidal, 396
 - centro isogônico, 397
 - contribuições à física, 397
 - método das tangentes, 396
 - método dos indivisíveis, 428
 - pressão atmosférica, 362, 397
 - retificação da espiral logarítmica, 397
 - retrato de, 397
- Tractatus de numeris datis* (Jordanus), 317
- Traité de Dynamique* (d'Alembert), 477
- Traité de Résolution des Équations Numeriques de tous Degrés* (Lagrange), 484
- Traité de Mécanique* (Poisson), 529
- Traité de Mécanique Celeste* (Laplace), 486, 525, 564
- Traité des Fonctions Elliptiques et des Intégrals Euleriennes* (Legendre), 488
- Traité des Propriétés Projectives des Figures* (Poncelet), 590
- Traité des Sections Coniques* (Charles), 594
- Traité des Substitutions* (Jordan), 535
- Traité du Triangle Arithmétique* (Pascal), 362, 364
- Transactions of the American Mathematical Society*, 565
- Transactions of the Royal Danish Academy of Sciences*, 522
- Transformação de áreas, 113, 124, 170
- Transformação idêntica, 605
- Transformação inversa, 605
- Transformações, grupos de, 605, 666
- de um conjunto sobre ele próprio, 605
 - identidade, inversa, 605
 - lineares, 552
 - produto de, 605
 - topológicas, 666
- Transformações, teoria das, 560, 561, 605
- Transversal, 571
- Tratriz, 637
- Treasury of Mathematics, the* (Midonick), 270n
- Treatise of Algebra* (Maclaurin), 470
- Treatise of Fluxions* (Maclaurin), 469-70
- Treatise on Algebra* (Peacock), 546
- Treatise on the Calculus of Finite differences* (Boole), 557
- Treatise on Differential Équations* (Boole), 557
- Treatise on Plane Trigonometry*, A. (Hobson), 257n
- Treatise on Quaternions* (Hamilton), 555
- Triacntraedro rômico, 358
- Triângulo aritmético de Pascal, 246, 250, 364-5, 378-9
- na China, 246, 250
 - problema dos pontos, 365, 366n, 393-4, 409
 - relações no, 365, 378-9
- Triângulo de Reuleaux, 499
- Triângulo diferencial, 434
- Triângulo esférico, 203-4, 309, 342, 368
- área de um, 402, 412
- Triângulo esférico polar, 402
- Triedrais, superfícies poliédricas, 710
- Tridente, 406

- Trigonometria, 218, 220, 293, 296, 314, 402, 494
 analítica, 465, 467-8
 árabe, 261, 265
 Clavius, 312
 Copérnico, 313
 esférica (ver Trigonometria, esférica)
 grega, 202-4, 259
 hindu, 248, 259
 Pitiscus, 314
 Regiomontanus, 297
 Rhaeticus, 313-4
 tábuas (ver Tábuas, trigonométricas)
- Trigonometria esférica, 202, 261, 265, 296, 342, 368, 402
 analogias de Napier, 368-9
 relação pitagórica, 368
- Trigonométricas, funções, abreviações para os nomes das, 350, 402
 como razões num triângulo retângulo, 313
 etimologia, 266-7
- Trigonométricas, identidades, princípio de dualidade, 592
- Trigonométricas, séries, 527, 615, 661
- Trigonometrie* (Oughtred), 350
- Triparty en la Science des Nombres* (Chuquet), 297-8, 320
- Triplamente ortogonais, famílias de superfícies, 603
- Trisection Problem, The* (Yates), 138n
- Trisseção do ângulo, 134, 136-40, 392, 628
 aproximação com o refinamento de Snell, 156-7
 com a conchoide, 138
 com a espiral de Arquimedes, 141
 com a quadratriz, 138
 com a trissetriz, 153
 com cônicas, 153, 401
 com o cone, 138, 153
 com o machadinho, 138
 com o refinamento de Snell, 143, 156-7
 de Arquimedes, 138, 152
 de Campanus, 328-9
 de Cusa, 296
 de d'Ocagne, 628
 de Dürer, 139
 de Hípias de Elis, 140
 de Jordanus, 317
 de Kopf, 628
 de Nicomedes, 138
 de Pappus, 138, 153
 de Perron, 628
 de Viviani, 401
 redução a um problema de neusis, 137
 solução assintótica, 153-4
 usando o princípio de inserção, 137
- Trissetriz, 153
- Trivium, 97
- Truques numéricos, 48-9, 276, 411-2
- Tschirnhausen, E. W. von (1651-1708), 306, 401
 curvas catacústicas, 401
 cúbicas, 402, 411
 transformação de, 402
- Tsiolkovskii, K. E. (1857-1935),
 equação dos foguetes, 347n
- Tsu Ch'ung-chih (430-501), 245
 aproximação decimal de π , 245
 aproximação racional $335/113$ de π , 142, 245
- Tucker, R. (1832-1905), sequência de Euclides, 588
- ## U
- Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde Liegen* (Conferência probatória de Riemann-1854), 600, 614, 655, 660, 667
- Ulugh Beg (1393-1449), 142
 tábuas de tangentes, 262
- Unicursais e multicursais, grafos, 474, 500-1
 arco, 501
 cadeia simples, 502
 corolário de Listing, 502
 grau de um vértice, 501
 problema das pontes de Königsberg, 474, 501
 teorema de Euler, 500-1
 vértices, 501
- Unidade astronômica, 374
- Unidade imaginária, 473
- Unidades quaternárias, 550

- Uniforme, convergência, 612
 União de conjuntos, 451
 Unitárias, frações, 73, 82
 na matemática egípcia, 82
 processo de Sylvester, 82
 Universal Automatic Computer (UNIVAC), 687
 Universidade de Alexandria, 161, 163, 166-7,
 191-2, 212-3
- V**
- Valério, L. (c. 1552-1618), 424
 Vallée Poussin, C. J. de la (1866-1962), 624
 teorema do número primo, 624
 Van Amringe, J. H. (1835-1915), 487
 Van Ceulen, L. (1540-1610), 143
 cálculo de π , 143
 Vander Hoecke, G. (1514), 298
 Van Roomen, A. (ver Romanus, A.)
 Van Schooten, F. (ver Schooten, F. van)
 Van Schooten, P. (ver Schooten, P. van)
 Varāhamihira (séc. VI), 248
 Pānca Siddhāntiāa, 248
 Variação de parâmetros, 484
 Variável dependente, 661
 Variável independente, 661
 Variáveis Spin, 555
 Variedade, 603, 606, 668
 Veblen, O. (1880-1960), 607
 axiomática, 659
 conjunto de postulados para a geometria eu-
 clidiana, 657
 topologia, 668
 Venn, J. (1834-1923), diagrama de, 451-2
 Symbolic Logic, 451n
 Vértice de um grafo, 501, 502
Vector analysis (Gibbs), 578
 Vetores, 578
 Vetorial, análise, 555, 578
 Vetorial, espaço, 553
 Vetorial, produto, 578
 Vieta, F. (ver Viète, F.)
 Viète, F. (1540-1603), 208, 308-12, 325, 348, 436
 Canon mathematicus seu ad triangula, 309,
 327
 De aequationum recognitione et emendatione,
 309, 310-1
 De numerosa potestatum resolutione, 309-10
 duplicação do cubo, 152
 equação quártica, 533
 In artem analyticam isagoge, 309
 notação algébrica, 309-10, 326, 388-9, 429
 problemas de, 327
 produto infinito para π , 143-4, 155, 311
 restauração de um trabalho de,
 Apolônio, 201
 retrato de, 309
 solução das cúbicas, 305, 309-11
 solução das quárticas, 305, 309, 311
 soluções aproximadas de equações, 310-11,
 327
 Supplementum geometriae, 309
 teoria das equações, 310-11
 triângulos esféricos polares, 402
 Vigesimal, base, 28-9
Vijaganita (Bhāskara), 251, 251n
 Vinogradoff, I. M. (n. 1891), 625
 Viviani, V. (1662-1703), centro,
 isogónico, 396-7
 tangente a uma cicloide, 401
 trisseção do ângulo, 401
 Vlacq, A. (1600-1666), 346
 Voltaire [François Marie Arouet] (1694-1778),
 483
 citação, 194
 Volume de, cunha cilíndrica (ou casco), 447
 esfera, 195, 215, 258, 422-3, 427-8
 segmento esférico de duas bases, 194, 215
 segmento esférico de uma base, 215
 pirâmide, 258
 prismatoide, 223
 quádras de revolução, 195
 setor esférico, 215
 tetraedro, 428
 tetraedro (em função das arestas), 492
 tetraedro (em função das coordenadas dos
 vértices), 505
 toro, 447
 tronco de pirâmide, 75, 84-5
 Volumes de barris, 352

- Von Humbolt, A. (1769-1859), 593
- Von Neumann, J. (1903-1957), 672, 690
 formalismo, 682
 teoria restrita dos conjuntos, 676
 teoria dos jogos, 690
- Vorlesungen über die Algebra der Logic* (Schröder), 670
- Vorlesungen über Zahlentheorie* (Dirichlet), 537
- Vorstudien zur Topologie* (Listing), 667
- W**
- Wallis, J. (1616-1703), 262, 349, 403, 431-3, 522n
Arithmetica infinitorum, 431-2, 436
 comparação com Barrow, 532
De algebra tractatus; historicus & praticus, 433, 451
 demonstração do teorema de Pitágoras, 257
 elemento de arco de curva, 432-3
 expoentes, 431-2
 expressões para π , 143
 funções beta e gama, 473
 história da matemática, 433
 interpretação das raízes complexas, 433
 processo de interpolação, 432
 professor saviliano, 348
 retrato de, 432
 símbolo para o infinito, 432
- Wang Fan (século III), valor de π , 245
- Wang Hs'iao-t'ung (c. 625), 245
- Ward, S. (c. 1650), 349
- Washington, G. (1732-1799), 183
- Weber, W. (1804-1891),
 telégrafo eletromagnético, 521
- Weil, A., membro Bourbaki, 691
- Weierstrass, K. T. M. (1815-1897), 173, 611-3, 615-6
 aritmetização da análise, 610-2, 674
 convergência uniforme, 612
 definição postulacional de determinante, 612
 e Kovalevsky, 619
 função contínua não diferenciável
 em nenhum ponto, 530, 610, 612
 retrato de, 612
- “rigor weierstrassiano”, 613
- teoria das funções complexas, 612
- Well Spring of Sciences, The* (Baker), 322
- Werner, J. (1468-1528), *Elements of Conics*, 328
 fórmulas, 343
- Wessel, C. (1745-1818), 522-3
Om Directionens Analytiske Betregning, 523
 plano de, 522
- Weyl, H. (1885-1955), 608, 682
 citação, 621
 definições impredicativas (evitando), 676
- What Is Mathematics?* (Courant e Robbins), 136n
- Whetstone of Witte, The*, (Recorde), 301, 304
- Whewell, W. (1794-1866), citação, 357
- White, *A Scrap-Book of Elementary mathematics*, 302n
- Whitehead, A. N. (1861-1947), 670, 679
 axiomática, 659
 citação, 194
 fundamentação lógica da matemática, 611
 logicismo, 678
- Whitehead e Russell, *Principia Mathematica*, 442, 670, 678-9, 681
- Widman, J. (n. c. 1460), 298-9
 sinais + e -, 298
- Wiener, N. (1894-1965), carta famosa, 695
- Wingate, E. (1596-1656), 346
- Wittgenstein, L. (1889-1951), logicismo, 678
- Wolfskehl, F. P. (1908), 392
- Wön-wang (1182-1135 a.C.), 242
- Wordsworth, W. (1770-1850), 554
 citação, 522
- Wren, Sir C. (1632-1723), 349
 epitáfio, 404-5
 hiperboloide de uma folha (descrição), 404
 precursor do sistema métrico, 493
 professor saviliano, 348, 404
 retificação da cicloide, 404
 retrato de, 404
- Wrench, J. W. Jr. (1947, 1948, 1961)
 cálculo de π , 146, 688
- Wright, E. (c. 1558-1615), edição inglesa da *Descriptio* de Napier, 352

X

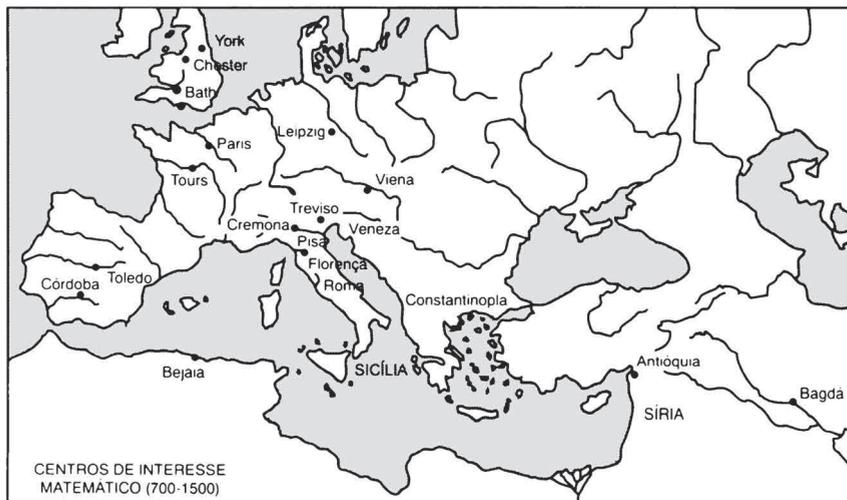
- Xenófanes (c. 571-c. 480 a.C.), 129
 Xerxes I (519?-465 a.C.), 130
 Xilander, G. (ver Holzmann, W.), 207
 Xi-yao (c. 1729), *Shi Xue*, ou *Desenho em Perspectiva*, 247n

Y

- Yang Hui (c. 1720), 245-6
 frações decimais, 246
 problema do bambu quebrado, 248, 268
 triângulo aritmético de Pascal, 246
 Yasuma Kanada, cálculo de π com 134217700 dígitos, 147
 Yates, *The Trisection Problem*, 138n
 Young, Grace Chisholm (1868-1944), 608
 Pléiades Matemáticas, 622
 Young, W. H. (1863-1942), 608
 The Theory of Sets of Points,
 com G. C. Young, 608
 Yu, imperador (c. 2200 a.C.), 268
 Yuan, período (1279-1368), 246

Z

- Zenão de Eleia (c. 450 a.C.), 130, 417-8
 paradoxos de, 133, 417-8, 615, 673n
 Zermelo, E., 608
 postulado de, 608
 teoria restrita dos conjuntos, 675
 Zero, etimologia de, 40-1
 na dinastia Sung, 245
 Zeta, função (de Riemann), 614
 Zeta-fuchsianas, funções, 617
 Zeuthen, H. G. (1839-1920), 96n
 Zhang Liangjin (1989), 241n, 247
 Zona esférica, 214
 Zuanne da Tonini da Coi (ver Da Coi, Zuanne de Tonini)
 Zulus, tribo africana, 44
 Zwicky, F. (1933), 672



PERÍODOS MATEMÁTICOS

PERÍODOS MATEMÁTICOS

Com as contribuições e os contribuidores principais (muitas datas são aproximadas)

<i>EGÍPCIO E BABILÔNICO</i> (3000 a.C.-260 d.C.)	<i>GREGO</i> (600 a.C.-450 d.C.)	<i>CHINÊS</i> (1030 a.C.-1644 d.C.)	<i>HINDU</i> (200 a.C.-1250 d.C.)
Matemática essencialmente empírica, ou indutiva	Introdução e depois desenvolvimento significativo da geometria dedutiva (Tales, 600 a.C.; Pitágoras, 540 a.C.)	Grandemente isolada das correntes principais do desenvolvimento matemático	Introdução do sistema de numeração indo-arábico (antes de 250 a.C.)
Introdução dos sistemas de numeração antigos (decimal e sexagesimal)	Início da Teoria dos números (Escola Pitagórica, 540 a.C.)	Sistema de numeração decimal, numerais em barra, exemplo mais antigo de quadrado mágico	Números negativos e invenção do zero (últimos séculos a.C.)
Aritmética simples, geometria prática	Descoberta das grandezas incomensuráveis (Escola Pitagórica, antes de 340 a.C.)	<i>Chou-peï</i> , mais antigo dos clássicos matemáticos chineses	Desenvolvimento de algoritmos de cálculo antigos (900-1000 d.C.)
Tábuas matemáticas, coleções de problemas matemáticos	Sistematização da lógica dedutiva (Aristóteles, 340 a.C.)	<i>Nove capítulos sobre a Arte da Matemática</i> (100 a.C.-?)	Álgebra sincopada, equações indeterminadas. (Brahmagupta, 628 d.C.; Bhāskara, 1150 d.C.)
Fontes primárias principais: Moscou (1850 a.C.), Rhind (1650 a.C.) e outros papiros egípcios; tábulas cuneiformes babilônicas (2100 a.C. a 1600 a.C. e 600 a.C. a 300 d.C.)	Desenvolvimento axiomático da geometria (Euclides, 300 a.C.)	Método de Horner (Ch'in Kiu-Shoo, 1247)	<i>ÁRABE</i> (650-1200 d.C.)
	Germes do cálculo integral (Arquimedes, 225 a.C.)	Triângulo aritmético de Pascal, teorema binomial (Chu Shī-kié, 1303)	Preservadores da aritmética hindu e da geometria grega (incentivadas por califas que prestigiavam a cultura, como Harun al-Rashid, 790 d.C.)
	Geometria das secções cônicas (Apolônio, 225 a.C.)	Jesuítas missionários entram na China no século XVI.	Tratado de álgebra influente e livro sobre os numerais indus (Al-Khwarizmi, 820 d.C.)
	Geometria prática (Herão, 75 d.C.)		Tábuas trigonométricas (Abú'l Wefá, 980 d.C., lugh Beg, 1435 d.C.)
	Trigonometria (Hiparco, 140 a.C.; Menelau, 100 d.C.; Ptolomeu, 150 d.C.)		Solução geométrica de equações cúbicas, (1100 d.C.)
	Teoria dos Números, sincopação da álgebra (Diofanto, 250 d.C.)		

<i>ALTA IDADE MÉDIA</i> (450-1120 d.C.)	<i>MODERNO</i> (Primeira metade, 1450 a 1700 d.C.)	<i>MODERNO</i> (Segunda metade, 1700 d.C. até o presente)
Período estéril para o saber e a cultura na Europa Ocidental	Trigonometria antiga (Regiomontanus, 1464; Copérnico, 1530; Rheticus, 1550)	Cálculo aplicado (Jakob e Johann Bernoulli, 1700; Clairaut, 1743; d'Alembert, 1743; Euler, 1750; Lagrange, 1788; Laplace, 1805; Fourier, 1822; Legendre, 1825; Green, 1828; Poisson, 1831)
Preservação em monastérios de um fio delgado do saber e da cultura gregos e latinos	Primeiras aritméticas (Borghi, 1484; Widman, 1489; Pacioli, 1494; Köbel, 1512; Riese, 1518; Tonstall, 1522; Buteo, 1525)	Séries infinitas (Taylor, 1715; Maclaurin, 1742; Fourier, 1822)
<i>PERÍODO DE TRANSMISSÃO</i> (950-1500 d.C.)	Início do simbolismo algébrico (Recorde, 1557; Bombelli, 1572; Viète, 1579; Oughtred, 1631)	Geometria não euclidiana (Saccheri, 1733; Lambert, 1770; Legendre, 1794; Gauss, 1800; Lobachevsky, 1829; J. Bolyai, 1832)
O saber e a cultura preservados pelos árabes são transmitidos lentamente à Europa Ocidental	Solução algébrica das equações cúbicas e quárticas (Tartaglia, Cardano, Ferrari, 1545)	Topologia (Euler, 1736; Gauss, 1799; Listing, 1847; Riemann, 1851; Möbius, 1865; Poincaré, 1895)
Tradução de trabalhos árabes (Platão de Tivoli, 1120 d.C.; Robert de Chester, 1140 d.C.; Adelardo de Bath, 1142 d.C.; Geraldo de Cremona, 1150 d.C.; Campanus, 1260 d.C.)	Desenvolvimento da álgebra clássica (Viète, 1580, Harriot, 1631)	Geometria analítica avançada (Monge, 1795; Plücker, 1826; Möbius, 1827)
Luta pelo sistema de numeração indo-arábico (Fibonacci, 1260 d.C.)	Frações decimais (Stevin, 1585)	Análise (Lagrange, 1797; Abel, 1826; Cauchy, 1827; Riemann, 1851; Dedekind, 1872; Weierstrass, 1874; Lebesgue, 1903)
Século XIV, século da Peste Negra	Impulso na ciência (Galileu, 1600; Kepler, 1609)	Geometria projetista (Poncelet, 1822; Gergonne, 1826; Steiner, 1834; von Staudt, 1847; Clifford, 1878)
Primeiro livro de matemática impresso no Mundo Ocidental (<i>Aritmética de Treviso</i> , 1478)	Logaritmos (Napier, 1614; Briggs, 1615)	Máquinas de calcular modernas (Babbage, 1823; ASCC, 1944; ENIAC, 1945; SSEG; EDVAC; MANIAC; UNIVAC)
Primeira edição impressa dos <i>Elementos</i> de Euclides (Tradução de Campanus, 1482 d.C.)	Teoria dos Números moderna (Fermat, 1635)	O despontar da álgebra moderna (Galois, 1832; Hamilton, 1843; Grassmann, 1844; Cayley, 1857)
	Geometria analítica (Fermat, 1629; Descartes, 1637)	Lógica matemática (Boole, 1847; De Morgan, 1847; Schröder, 1890; Peano, 1894; Whitehead e Russell, 1910; Lukasiewicz, 1921)
	Início da geometria projetiva (Desargues, 1639; Pascal, 1648)	Teoria dos conjuntos (Cantor, 1874; Hausdorff, 1914)
	Probabilidade matemática (Fermat e Pascal, 1654)	Fundamentos e filosofias da matemática (Frege, 1884-1903; Hilbert, 1899; Brouwer, 1907; Whitehead e Russell, 1910; Gödel, 1931)
	Cálculo (Fermat, 1629; Cavalieri, 1635; Barrow, 1669; Leibniz, 1684; Newton, 1687)	Espaços abstratos (Fréchet, 1906; Hausdorff, 1914; Banach, 1923)

Título	Introdução à história da matemática
Autor	Howard Eves
Tradutor	Hygino H. Domingues
Assistente técnico de direção	José Emílio Maiorino
Coordenador editorial	Ricardo Lima
Secretária editorial	Eva Maria Maschio
Secretário gráfico	Ednilson Tristão
Preparação dos originais	Editora da Unicamp
Revisão	Thiago Basile
Editoração eletrônica	Silvia Helena P. C. Gonçalves
Design de capa	Ana Basaglia
Formato	16 x 23 cm
Papel	Offset 75 g/m ² – miolo Cartão supremo 250 g/m ² – capa
Tipologia	Garamond Premier Pro
Número de páginas	848

ESTA OBRA FOI IMPRESSA NA GRÁFICA RETTEC
PARA A EDITORA DA UNICAMP EM AGOSTO DE 2011.