TÓPICOS DE MATEMÁTICA BÁSICA

Potenciação e Radiciação

1. Potência - Seja a um número real e n um número natural. Podemos definir a potência de base a e expoente n, por a^n, que é o produto de n fatores iguais a a, se $n \geq 2$.

$a^n = a \times a \times a \times a \times \ldots \times a$,

Propriedades - Sejam a e b números reais, m e n números inteiros, temos:

$$a^1 = a$$

$$a^0 = 1, \; a \neq 0$$

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^m \times a^{-n} = a^{m-n}, \; a \neq 0$$

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n, \; a \neq 0$$

$$(a \times b)^n = a^n \times b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$\left(a^m\right)^n = a^{m \times n}$$

$$(a+b)(a+b) = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)(a-b) = (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

2. **Radiciação -** Seja a um número real maior ou igual a zero e n um número natural maior ou igual a 1. Definimos a raiz n-ésima de a o número real b maior ou igual a zero tal que $b^n = a$, isto é, $\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$.

Observação: Se a for um número negativo, o índice da raiz deverá ser ímpar, pois para números reais não existe raiz negativa de índice par.

Propriedades:

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

$$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \times b}$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

3. **Equação Exponencial** - Chamamos de equação exponencial toda equação na qual a incógnita aparece em expoente. Para resolver equações exponenciais, devemos realizar dois passos importantes:

(1) redução dos dois membros da equação a potências de mesma base;

(2) aplicação da propriedade $a^m = a^n \Rightarrow m = n \quad (a \neq 1 \quad e \quad a > 0)$.

Exemplos:

1) $5^x = 125 \Rightarrow 5^x = 5^3 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow S = \{3\}$

2) $2^x = 1 \quad \Rightarrow 2^x = 2^0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow S = \{0\}$

3) $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{16}{81} \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{2^4}{3^4} \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^4 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow S = \{4\}$

4) $3^{2x+1} = 243 \Rightarrow 3^{2x+1} = 3^5 \Rightarrow 2x + 1 = 5 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow S = \{2\}$

5) $2^{2x+4} = 16^x \Rightarrow 2^{2x+4} = (2^4)^x \Rightarrow 2^{2x+4} = 2^{4x} \Rightarrow 2x + 4 = 4x \Rightarrow 4x - 2x = 4 \Rightarrow \quad 2x = 4 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow S = \{2\}$

6) $3^{2x} - 6 \cdot 3^x - 27 = 0$

Resolução

$3^{2x} - 6 \cdot 3^x - 27 = 0 \Rightarrow (3^x)^2 - 6 \cdot 3^x - 27 = 0$

Fazendo $3^x = y$, obtemos a equação $y^2 - 6 \cdot y - 27 = 0$.

Resolvendo a equação acima obtemos y' = -3 e y'' = 9.

$\Rightarrow 2^{2x+4} = 2^{4x} \Rightarrow 2x + 4 = 4x \Rightarrow 4x - 2x = 4 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow S = \{2\}$

Para achar o valor de *x*, devemos voltar os valores para a equação auxiliar $3^x = y$:

y'= -3 $\Rightarrow$ $3^{x'} = -3$ $\Rightarrow$ não existe *x*', pois potência de base positiva é positiva

y''= 9 $\Rightarrow$ $3^{x''} = 9$ $\Rightarrow 3^{x''} = 3^2$ $\Rightarrow$ *x*''=2

Portanto a solução é $S = \{2\}$.

Exercícios

1- Calcule:

a) $(-3)^3 =$

b) $(-3)^4 =$

c) $-3^3 =$

d) $-3^2 =$

e) $-(-3)^3 =$

f) $-(-1)^{100} =$

g) $\pi^0 =$

h) $-3^3 =$

i) $-3^0 =$

j) $\left(\frac{2}{3}\right)^2 =$

k) $\left(\frac{5}{4}\right)^{-3} =$

l) $\left(\frac{2}{3}\right)^2 =$

m) $7^{-1} =$

n) $-7^{-1} =$

o) $(-2)^{-2} =$

p) $-\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} =$

q) $\frac{1}{5^{-2}} =$

r) $0^5 =$

s) $(0,1)^{-2} =$

2- Escreva sob a forma de potência fracionária os seguintes radicais:

a) $\sqrt[5]{3^2} =$

b) $\sqrt{7} =$

c) $\frac{1}{\sqrt[3]{2^6}} =$

3- Utilizando as propriedades de raízes, simplifique as expressões:

a) $\sqrt{400} =$

b) $\sqrt[3]{64} =$

c) $\sqrt[5]{3^{10}} =$

d) $\sqrt{16 \times 9} =$

e) $\sqrt[3]{2^6 \times 3^9} =$

f) $\sqrt[3]{2^5} =$

g) $\left(\sqrt[3]{3^2}\right)^3 =$

h) $\sqrt{\dfrac{25}{16}} =$

i) $\sqrt{\left(\dfrac{9}{36}\right)^{-1}} =$

4- Resolva as equações:

a) $5^x = \sqrt{5}$

b) $4^x = \sqrt[3]{32}$

c) $2^x = \dfrac{1}{32}$

d) $\left(\dfrac{3}{5}\right)^{2x} = \dfrac{27}{125}$

e) $2^{x-3} = \dfrac{1}{8}$

f) $8^x = 0{,}125$

g) $2^{3x+1} = 4^{x-2}$

h) $3^{x^2-5} = 81$

i) $25^{2x} = \sqrt{5}$

j) $3^{2x^2+3x-1} = 1$

k) $4^{x+1} - 4 \cdot 2^x = 224$

l) $2^{3x-1} \cdot 4^{2x+3} = 8^{3-x}$

m) $2^{3x+2} \div 8^{2x-3} = 4^{x-1}$

n) $(3^x)^{x-1} = 1$

o) $(5^{x-2})^{x-3} = 1$

p) $4^x - 2^x = 2$

q) $2^{x+1} + 2^x - 2^{x+2} = 44$

r) $3^{-x} + 3^{x+1} = \dfrac{28}{3}$

5- Resolva os sistemas de equações exponenciais:

a) $\begin{cases} 3^{x+y} = 1 \\ 2^{x+2y} = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5^{x+y} = \dfrac{1}{5} \\ 7^{2x+y} - 7 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 8^{x} \cdot 4^{y} = \dfrac{1}{4} \\ 4^{x} \div 2^{y} = 2 \end{cases}$

Respostas:

1)

a) -27 b) 81 c)-27 d)-9 e) 27 f) -1 g) 1 h) -27 i) -1 j) $\frac{4}{9}$ k) $\frac{64}{125}$

l) $\frac{4}{9}$ m) $\frac{1}{7}$ n) $-\frac{1}{7}$ o) $\frac{1}{4}$ p) -9 q) 25 r) 0 s)100

---

2)

a) $3^{\frac{2}{5}}$ b) $7^{\frac{1}{2}}$ c) 2^{-2}

---

3)

a) 20 b) 2^2 c) 3^2 d) 12 e) $2^2.3^2$ f) $2^{\frac{5}{3}}$ g) 3^2 h) $\frac{5}{4}$ i) 2

---

4)

a) $x = \frac{1}{2}$ b) $x = \frac{5}{2}$ c) $x = -5$ d) $x = \frac{3}{2}$ e) $x = 0$ f) $x = -1$

g) $x = -5$ h) $x = -3$ i) $x = \frac{1}{8}$ j) $x = \frac{-3-\sqrt{17}}{4}$ ou $x = \frac{-3+\sqrt{17}}{4}$

k) $x = 3$ l) $x = \frac{2}{5}$ m) $x = \frac{13}{5}$ n) $x = 0$ ou $x = 1$ o) $x = 2$ ou $x = 3$

p) $x = 1$ q) $\varnothing$ r) $x = 1$ ou $x = -2$

---

5)

a) $x = -1$ e $y = 1$ b) $x = 2$ e $y = -3$ c) $x = 0$ e $y = -1$

Potências de 10 e Notação Científica

1º Caso - expoente ≥ 0

$1 = 10^0$ $\quad$ $36 = 3,6 * 10 = 3,6 * 10^1$

$10 = 10^1$ $\quad$ $360 = 3,6 * 100 = 3,6 * 10^2$

$100 = 10^2$ $\quad$ $3600 = 3,6 * 1000 = 3,6 * 10^3$

$1000 = 10^3$ $\quad$ $36000 = 3,6 * 10000 = 3,6 * 10^4$

$10000 = 10^4$

Obs: Lembrar que $\boldsymbol{10^a = 1,0 * 10^a}$

$286 = 28,6 * 10$ $\quad$ $327,6 = 32,76 * 10$

$286 = 2,86 * 10^2$ $\quad$ $327,6 = 3,276 * 10^2$

2º Caso - expoente ∠ 0

$0,1 = \frac{1}{10} = 10^{-1}$ $\quad$ $0,5 = \frac{5}{10} = 5 * 10^{-1}$

$0,01 = \frac{1}{100} = 10^{-2}$ $\quad$ $0,05 = \frac{5}{100} = 5 * 10^{-2}$

$0,001 = \frac{1}{1000} = 10^{-3}$ $\quad$ $0,005 = \frac{5}{1000} = 5 * 10^{-3}$

$0,037 = 3,7 * 10^{-2}$

$0,00028 = 2,8 * 10^{-4}$

$0,000\ 046 = 4,6 * 10^{-5}$

Um número escrito em notação científica segue o seguinte modelo: $\mathbf{m \cdot 10^{e}}$ .O número **m** é denominado *mantissa* e $\mathbf{10^{e}}$ a *ordem de grandeza*.

Notação científica padronizada

A definição básica de notação científica permite uma infinidade de representações para cada valor. Mas a notação científica padronizada inclui uma restrição: a mantissa (coeficiente) deve ser maior ou igual a 1 e menor que 10. Desse modo cada número é representado de uma única maneira.

Como transformar Para transformar um número qualquer para a notação científica padronizada devemos deslocar a vírgula obedecendo ao princípio de equilíbrio.

Vejamos o exemplo : Colocar o número 253 756,42 na notação científica padronizada

A notação científica padronizada exige que a mantissa (coeficiente) esteja entre 1 e 10. Nessa situação, o valor adequado seria 2,5375642 (observe que a sequência de algarismos é a mesma, somente foi alterada a posição da vírgula). Para o exponente, vale o princípio de equilíbrio: "**Cada casa decimal que diminui o valor da mantissa aumenta o expoente em uma unidade, e vice-versa**". Nesse caso, o expoente é 5.Observe a transformação passo a passo: **253 756,42** = 25 375,642 · 10^1 = 2 537,5642 · 10^2 = 253,75642 · 10^3 = 25,375642 · 10^4 = **2,5375642 · 10^5**

Um outro exemplo (com valor menor que 1):

0,0000000475 = 0,000000475 · 10^{-1} = 0,00000475 · 10^{-2} = 0,0000475 · 10^{-3} = 0,000475 · 10^{-4} = 0,00475 · 10^{-5} = 0,0475 · 10^{-6} = 0,475 · 10^{-7} = **4,75 · 10^{-8}**

Dicas:

1. A “Cada casa decimal “andada”, diminui-se o valor do coeficiente, aumentando o expoente em uma unidade, e vice-versa”.
2. Quando o número a ser transformado for maior que um, a vírgula "andara" para a esquerda, e o expoente será positivo.
3. Quando o número a ser transformado for menos que um, a vírgula "andara" para a direita e o expoente será negativo.

Exercícios

1 - Escreva os números abaixo utilizando a notação científica padrão.

a) 570000
b) 12500
c) 50000000
d) 0,0000012
e) 0,032
f) 0,72
g) 82 . 10^{-3}
h) 640 . 10^5
i) 9150. 10^{-3}
j) 200 . 10^{-5}
k) 0,05 . 10^3
l) 0,0025 . 10^{-4}

2- Considere o volume de uma gota como 5,0. 10^{-2} ml. A ordem de grandeza do número de gotas em um litro de água é:

a) 10^3. **b)** 10^5. **c)** 10^2. **d)** 10^4. **e)** 10^6.

3-O fluxo total de sangue na grande circulação, também chamado de débito cardíaco, faz com que o coração de um homem adulto seja responsável pelo bombeamento, em média, de 20 litros por minuto. Qual a ordem de grandeza do volume de sangue, em litros, bombeado pelo coração em um dia?

a) $10^{2.}$ **b)** 10^3. **c)** 10^4. **d)** 10^5. **e)** 10^6.

4-O acelerador de íons pesados relativísticos de Brookhaven (Estados Unidos) foi inaugurado com a colisão entre dois núcleos de ouro, liberando uma energia de 10 trilhões de elétrons-volt. Os cientistas esperam, em breve, elevar a energia a 40 trilhões de elétrons-volt, para simular as condições do Universo durante os primeiros microssegundos após o Big Bang. (*Ciência Hoje*, setembro de 2000) Sabendo que 1 elétron-volt é igual a 1,6.10^{-19} joules, a ordem de grandeza da energia, em joules, que se espera atingir em breve, com o acelerador de Brookhaven, é:

a) $10^{-8.}$ **b)** 10^{-7}. **c)** 10^{-6}. **d)** 10^{-5}.

Respostas

1)

a) $5,7\times10^5$ b) $1,25\times10^4$ c) $5,0\times10^7$ d) $1,2\times10^{-6}$

e) $3,2\times10^{-2}$ f) $7,2\times10^{-1}$ g) $8,2\times10^4$ h) $6,4\times10^7$
i) $9,15\times10^0$ j) $2,0\times10^{-3}$ k) $5,0\times10^1$ l) $2,5\times10^{-7}$

2) d 3) c 4) c

Múltiplos e Submúltiplos

A identificação dos múltiplos e submúltiplos é feita por meio de **prefixos adicionais** ao nome da unidade* de medida, qualquer que seja a grandeza considerada, como na tabela seguinte:

Nome	Símbolo	Fator de multiplicação
Tera	T	10^{12} ou 1.000.000.000.000
Giga	G	10^{9} ou 1.000.000.000
Mega	M	10^{6} ou 1.000.000
Quilo	k	10^{3} ou 1.000
Hecto	h	10^{2} ou 100
Deca	Da	10^{1} ou 10
Unidade*	Ver quadro abaixo!	10^{0} ou 1
Deci	d	10^{-1} ou 0,1
Centi	c	10^{-2} ou 0,01
MiIi	m	10^{-3} ou 0,001
Micro	μ	10^{-6} ou 0,000.001
Nano	n	10^{-9} ou 0,000.000.001
Pico	p	10^{-12} ou 0,000.000.000.001
Fento	f	10^{-15} ou 0,000.000.000.000.001

Unidades : Abaixo estão algumas das unidades mais utilizadas

Grandeza	**Unidade**	**Símbolo**	**Dimensional analítica**	**Dimensional sintética**
Capacitância	farad	**F**	$A^2 \cdot s^2 \cdot s^2/(kg \cdot m^2)$	$A \cdot s/V$
Carga elétrica	coulomb	**C**	$A \cdot s$	---
Condutância	siemens	**S**	$A^2 \cdot s^3/(kg \cdot m^2)$	A/V
Densidade de fluxo magnético	tesla	**T**	$kg/(s^2 \cdot A)$	Wb/m^2
Energia	joule	**J**	$kg \cdot m^2/s^2$	$N \cdot m$
Fluxo magnético	weber	**Wb**	$kg \cdot m^2/(s^2 \cdot A)$	$V \cdot s$
Força	newton	**N**	$kg \cdot m/s^2$	---
Freqüência	hertz	**Hz**	1/s	---
Indutância	henry	**H**	$kg \cdot m^2/(s^2 \cdot A^2)$	Wb/A
Potência	watt	**W**	$kg \cdot m^2/s^3$	J/s
Pressão	pascal	**Pa**	$kg/(m \cdot s^2)$	N/m^2
Resistência elétrica	ohm	**Ω**	$kg \cdot m^2/(s^3 \cdot A^2)$	V/A
Tensão elétrica	volt	**V**	$kg \cdot m^2/(s^3 \cdot A)$	W/A

Atenção!!! Símbolo não admite plural !!!Como sinal convencional e invariável que é, utilizado para facilitar e universalizar a escrita e a leitura de significados. Nunca será seguido de "s". Veja:

	Certo	Errado
cinco metros	5 m	5 ms
dois quilogramas	2 kg	2 kgs
oito horas	8 h	8 hs

Exercícios

1- Um livro de Física tem 800 folhas e 4,0 cm de espessura. A espessura de uma folha do livro vale, em milímetros:
a) $2{,}5 \cdot 10^{-2}$ b) $5{,}0 \cdot 10^{-2}$ c) $1{,}0 \cdot 10^{-1}$ d) $1{,}5 \cdot 10^{-1}$ e) $2{,}0 \cdot 10^{-1}$

2- Considerando que cada aula dura 50 minutos, o intervalo de tempo de duas aulas seguidas, expresso em segundos, é de:

a) $3{,}0 \cdot 10^2$ b) $3{,}0 \cdot 10^3$ c) $3{,}6 \cdot 10^3$ d) $6{,}0 \cdot 10^3$ e) $7{,}2 \cdot 10^3$

3- Um shake é uma unidade de tempo equivalente a 10^{-8} s.
(a) Converta $1{,}2 \times 10^{-2}$ shakes para nanosegundos.
(b) Quantos shakes correspondem a 15 microssegundos?

4- Uma milha vale aproximadamente 1609 metros. Um foguete está a uma distância de 490 milhas da Terra. Calcule esta distância em quilômetros.

Respostas:
1) b
2) d
3) a) $x = 0{,}12$ nano b) $x = 1{,}5.10^3$ Shakes
4) $x = 7{,}8841.10^{2}\grave{}km$

Frações

1- Tipos de fração

Frações Próprias: são aquelas em que o numerador é menor que o denominador.

Frações Impróprias: são aquelas em que o numerador é maior que o denominador.

Frações Aparentes: são aquelas em que o numerador é múltiplo do denominador.

2- Operações com frações

Adição e Subtração: usamos o menor múltiplo comum.

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{5}-\frac{1}{6}=\frac{15+18-5}{30}=\frac{28}{30}=\frac{14}{15}$$

Multiplicação: O produto de duas frações é uma fração que tem por numerador o produto dos numeradores e que tem por denominador o produto dos denominadores.

$$\frac{3}{4}\times\frac{2}{5}=\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$$

Divisão: O quociente de duas frações é uma fração resultante do produto da primeira fração pelo inverso da segunda fração.

$$\frac{1}{2}\div\frac{3}{4}=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

Cálculo do valor de expressões numéricas: deve-se obedecer à prioridade dos sinais indicativos e das operações matemáticas.

Prioridade dos Sinais		Prioridade das Operações	
1	( )	1	Exponenciação e Logaritmação
2	[ ]	2	Potenciação e Radiciação
3	{ }	3	Multiplicação e Divisão
		4	Adição e Subtração

Exercícios

Calcule o valor das expressões:

a) $\frac{2}{3}-\frac{3}{4}+\frac{1}{6}=$ b) $\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^3\div\left(\frac{15}{12}\right)^2=$ c) $2+\left\{-5+\left[\left(\frac{3}{2}-\frac{5}{3}\right)+4\right]+\left(2\times\frac{3}{4}\right)\frac{1}{6}\right\}=$

d) $\frac{5}{4}\cdot\frac{6}{15}\cdot\frac{2}{7}=$ e) $-\sqrt{\frac{25}{81}}\div\sqrt{\frac{100}{9}}=$ f) $3\sqrt{2}+\sqrt{8}+\sqrt{32}=$

g) $\frac{5}{2}-\frac{1}{2}+\frac{2}{2}=$ h) $\frac{7}{3}\div\frac{21}{5}=$ i) $\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{5}-\frac{2}{3}\right)+\frac{3}{4}=$

j) $5-[9\times3\cdot(2+1)+4]-5\times3=$ k) $\left\{\left[\left(20\cdot5+16\div2-3^3\right)\div3^3\right]^7\div3^5\right\}^4\div3^8=$

l) $20-(-45)\div(-3)^2+(-2)\cdot(-1)^5=$ m) $\dfrac{0{,}1-0{,}01}{0{,}2-0{,}02}=$ n) $\dfrac{1}{4}+0{,}19\div\left(4-0{,}8\div0{,}5-\dfrac{1}{2}\right)=$

o) $\dfrac{13}{3}-\dfrac{3}{6}+\dfrac{4}{5}-\left[\left(\dfrac{3}{4}+\dfrac{4}{5}\right)+\left(\dfrac{2}{3}+\dfrac{5}{6}\right)\right]-\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}\right)=$ p) $\dfrac{4\sqrt[3]{8}-3\sqrt[5]{32}}{2}=$ q) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-4}\div\dfrac{1}{2}\cdot\left(4^{-1}\right)^2+\left(-\dfrac{1}{6}\right)^0=$

r) $\left[-2\cdot\left(-\dfrac{3}{2}\right)^2+2^2\right]\div(-2)^2=$ s) $\dfrac{-(-2)^2-\sqrt[3]{27}}{(-3+5)^0-2}=$ t) $\left[-1-(-1)^{\frac{1}{3}}\cdot(-1)^3\right]+(-1)^{\frac{1}{5}}=$

Respostas:

a) a) 1/12	b) b) 12/25	c) 13/12	d) 1/7
e) e) -1/6	f) f) $9\sqrt{2}$	g) 3	h) 5/9
i) 43/60	j) j) -95	k) 1	l) 27
m) 1/2	n) 7/20	o) 1	p) 1
q) 3	r) -1/8	s) 7	t) -3

Expressões Algébricas e Polinômios

Lembrete:

Produtos Notáveis

$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2$

$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - 2ab + b^2$

$(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$

1- Colocar fatores comuns em evidência

Exemplos:

a) $ab - b^2$

Então $ab - b^2 \quad = \quad b\,(a \;-\; b)$

$ab \div b = \dfrac{ab}{b} = a$

$b^2 \div b = \dfrac{b^2}{b} = b$

Ao efetuarmos o produto $b\cdot(b-a)$, voltaremos para a expressão inicial $ab - b^2$.

b) $2ay + 4by$

2y é o fator comum;
2 é o mínimo (menor) divisor comum

Assim: $\quad 2ay + 4by \quad = \quad 2y\,(a \;+\; 2b)$

$2ay \div 2y = \dfrac{2ay}{2y} = a$

$4by \div 2y = \dfrac{4by}{2y} = 2b$

c) $4bx^3 - 16bx^2 - 8b^2x$

Fator comum 2bx (as variáveis b e x com seus menores expoentes)
2 é o mínimo (menor) divisor comum de 4, 16 e 8.

$$4bx^3 - 16bx^2 - 8b^2x \quad = \quad 2bx\left(2x^2 \;-\; 8x \;-\; 4b\right)$$

$$4bx^3 \div 2bx = \frac{4bx^3}{2bx} = 2x^2$$

$$-16bx^2 \div 2bx = \frac{-16bx^2}{2bx} = -8x$$

$$-8b^2x \div 2bx = \frac{-8b^2x}{2bx} = -4b$$

Dica.: As variáveis que aparecem em todos os termos do polinômio aparecerão no fator comum sempre com o menor expoente.

2 -Divisão de polinômios

Dados dois polinômios p(x) e h(x), com h(x) não-nulo, dividir p(x) por h(x), significa encontrar dois polinômios q(x) e r(x) que satisfaçam as seguintes condições:
1ª) p(x) = h(x)q(x) + r(x) onde p(x) é chamado de dividendo, h(x) de divisor, q(x) de quociente e r(x) de resto.
2ª) o grau de r(x) não pode ser igual ou maior que o grau de h(x).

Exemplo: Vamos efetuar a divisão do polinômio $p(x) = x^3 + x^2 - x + 1$ pelo polinômio $h(x) = x + 4$.

$$\begin{array}{r|l}
x^3 + x^2 - x + 1 & x+4 \\ \cline{2-2}
-x^3 - 4x^2 \quad\quad\quad & x^2 - 3x + 11 \\ \hline
-3x^2 - x + 1 & \\
3x^2 + 12x \quad & \\ \hline
11x + 1 & \\
-11x - 44 & \\ \hline
-43 &
\end{array}$$

Neste exemplo temos $q(x)= x^2 -3x +11$ e $r(x)= -43$.

3 Decomposição em fatores primos

Todo polinômio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ (com $n \geq 1$ e $a_n \neq 0$) pode ser decomposto num produto de n fatores de primeiro grau.
(Sua demonstração usa o Teorema fundamental da Álgebra, que pedemos demonstrar depois de aplicar o conteúdo de números complexos).

Naturalmente :
$p(x) = 0 \Rightarrow a_n(x- x_1)(x-x_2)(x-x_3) ...(x-x_n) = 0$

Exemplo :
Vejamos qual é a forma fatorada do polinômio $3x^3 - 15x^2 - 3x + 15$, cujas raízes são 1, -1 e 5.
Pela decomposição, temos :
$p(x) = 3(x-1)(x+1)(x-5)$

4 Algoritmo de Briot-Ruffini

Este algoritmo permite efetuar as divisões por polinômios do tipo x – a de uma maneira rápida e simples.

Esquema de algoritmo:

Termo constante do divisor, com sinal trocado	Coeficientes de x do dividendo p(x)	Termo constante do dividendo p(x)
	Coeficientes do quociente	resto

Apliquemos o algoritmo para entendermos melhor como funciona, dividendo o polinômio p(x) = 3x³ - 5x² +x -2 por h(x) = x -2.

2	3	-5	1	-2
	3	6+(-5) 1	2+1 3	6+(-2) 4

Explicação passo a passo do que foi feito:

- Repetimos o primeiro coeficiente do dividendo, no caso 3.
- Multiplicamos o termo repetido pelo divisor e somamos o produto com o próximo termo do dividendo, que resulta em 1.
- Repetimos o processo para obter o novo termo do quociente, e assim por diante, sempre repetindo o processo, até chegar no ultimo coeficiente.

A partir desse algoritmo chegamos que q(x) = 3x² +x +3 e r(x)= 4, ou seja, temos que 3x³ -5x² +x -2 = (x-2)(3x²+x+3) +4 e que 2 é uma raiz do polinômio.

Portanto através desse processo é possível também encontrar as raízes dos polinômios.

Exercícios

1- Calcule:

a) $2x^5 \cdot 3x^2 \cdot x =$

b) $(-3a^3x^2)\cdot(3ax^3)\cdot(-5a^4x^3) =$

c) $(3x^4y^2)\cdot(-2x^2y^3)-(-4x^6y^6) =$

d) $(2x+3)^2 =$

e) $\left(\dfrac{2x}{3}+\dfrac{3y}{2}\right)^2 =$

f) $(3x-2y)(3x+2y) =$

g) $(2x+1)\cdot(x^2+4x-3) =$

h) $(x+1)^2-(2x-2)^2+(x-2)\cdot(x+2) =$

i) $x(x+3y-2)-y(3x+y) =$

j) $a(a^2-a)-3(a^2-2a^3)-a^2(3-a) =$

k) $(28a^4b^3-7a^3b^4)\div(-7a^2b^2)$

l) $(2x^4+9x^3-6x^2+17x-6)\div(2x^2-x+3) =$

m) $2x+3(3-2x)-2(1-x) =$ (Resp.: $-2x+7$)

n) $3(a^2+a+1)-(a^2+3a-3)=$ (Resp.: $2a+6$)

o) $x(x^2 - xy + y^2) + y(x^2 - xy + y^2) =$ (Resp.: $x^3 + y^3$)

2- Escreva os polinômios na forma fatorada:

a) $81x^2 - 18x + 1 =$ b) $x^2 + 6x + 13 =$ c) $x^2 - 4x + 20 =$

3- Simplifique as expressões:

a) $3(a^2 + a + 1) + 2(a^2 + 2a - 2) - (a^2 + 3a - 3)$
b) $a(a + b - c) + b(b + c - a) + c(a - b + c)$

4- Simplifique:

a) $(x-2)^2 + x^2 - 2(x-1)^2$ b) $(m-1)^2 - (m+1)\cdot(m-1)$ c) $\dfrac{3x^4 - 10x^2}{x^5 - x^2}$

d) $\dfrac{x^2 - 16}{x + 4}$ e) $\dfrac{(x+3)^2}{x^2 - 9}$ f) $\dfrac{xy^2 - x^2y}{2xy}$

5- Complete os quadrados:

a) $x^2 + 12x + 36$ b) $a^2 - 6a + 9$ c) $a^2 + a + 1/4$
d) $x^2 + 6x + 36$ e) $b^2 - 2b + 10$ f) $a^2 + 10a + 27$

6- Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F)

a) ( ) $(x + a)^2 = x^2 + a^2$ b) ( ) $(x + a)^2 = x^2 + 2ax + x^2$
c) ( ) $p^2 + q^2 = (p + q)^2$ d) ( ) $(x^2 - y^2)^2 = x^4 - y^4$
e) ( ) $(x^2 - y^2)^2 = x^4 - 2x^2y^2 + y^2$ f) ( ) $(x^2 - y^2)^2 = x^4 - 2x^2y^2 + y^4$

7- Reduza ou Simplifique as expressões:

$\dfrac{x^2 + xy - 3x}{x^3 + 2x} =$ b) $(2x + 1)^2 =$ c) $2x + 3(3 - 2x) - 2(1 - x) =$

d) $2(x^2 + x + 1) + 2(x^2 + 2x - 2) - (x^2 + 2x - 3) =$ e) $\dfrac{7ax + ay + 7bx + by}{ax - ay + bx - by} =$

f) $(2x - 3)^2 =$ g) $(3x - 2)(3x + 2) =$ h) $(a - 1)^2 - (a + 1)(a - 1) =$

8- Fatore os polinômios utilizando as decomposições mostradas.

a) $x^2 + 8x + 15$
b) $x^2 + 14x + 40$
c) $x^2 - 13x + 42$
d) $x^3 + 12x^2 + 47x + 60$
e) $x^3 + 6x^2 - 19x - 24$

f) $x^3+10x^2+31x+30$
g) $x^3 + 2x^2 - 29x + 42$

9- Determine as raízes dos polinômios e escreva-os na forma fatorada:

a) $P(x) = 3x^2 + 9x + 6$
b) $P(x) = 2x^2 + 3x - 2$
c) $P(x) = x^3 - 6x^2 - x + 30$
d) $P(x) = 2x^3 - x^2 - 2x + 1$
e) $P(x) = x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6$
f) $P(x) = 4x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 4x - 1$
g) $P(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4$

Respostas:

1)
a) $6x^8$ b) $-45a^8x^8$ c) $-6x^6y^5 + 4x^6y^6$ d) $4x^2 + 12x + 9$
e) $\dfrac{16x^2 + 72xy + 81y^2}{36}$ f) $9x^2 - 4y^2$ g) $2x^3 + 9x^2 - 2x - 3$
h) $-2x^2 + 10x - 7$ i) $x^2 - 2x - y^2$ j) $8a^3 - 7a^2$ k) $-4a^2b + ab^3$
l) $x^2 + 5x - 2$ m) $-2x + 7$ n) $2a + 6$ o) $x^3 + y^3$

---

2)
a) $(9x-1)^2$ b) $(x+3+2i).(x+3-2i)$ c) $(x-2-4i).(x-2+4i)$

---

3) a) $4a^2 + 4a + 2$ b) $a^2 + b^2 + c^2$

---

4) *a) 2* *b) -2m+2* *c)* $\dfrac{3x^2 - 10}{x^3 - 1}$ *d)* $x - 4$ *e)* $\dfrac{x+3}{x-3}$ *f)* $\dfrac{y-x}{2}$

---

5) *a)* $(x+6)^2$ *b)* $(a-3)^2$ *c)* $\left(a + \dfrac{1}{2}\right)^2$ *d)* $(x+3)^2 + 27$ *e)* $(b-1)^2 + 9$ *f)* $(a+5)^2 + 2$

---

6) F, V, F, F, F, V

---

7) a) $\dfrac{x+y-3}{x^2+2}$ b) $4x^2 + 4x + 1$ c) $-2x + 7$ d) $3.(x+1).\left(x + \dfrac{1}{3}\right)$
e) $\dfrac{7x+y}{x-y}$ f) $4x^2 - 12x + 9$ g) $9x^2 - 4$ h) $2.(1-a)$

---

8) a) $(x+3).(x+5)$

b) $(x+4).(x+10)$

c) $(x-6).(x-7)$

d) $(x+3).(x+4).(x+5)$

e) $(x+1).(x-3).(x+8)$

f) $(x+2).(x+3).(x+5$

g) $(x-2).(x-3).(x+7)$

---

9) a) $P(x)=3(x+1)(x+2)$

b) $P(x)=2\left(x-\dfrac{1}{2}\right).(x+2)$

c)
P(x) = (x + 2).(x – 3).(x – 5)

d) $P(x)=2.(x-1)\left(x-\dfrac{1}{2}\right).(x+1)$

e) P(x) = (x – 1).(x + 1).(x – 2).(x + 3)

f) $P(x)=4.(x-1).(x+1)\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2$

$P(x) = (x - 1)^2.(x - 2)^2$
g)

Equação de Segundo Grau

1- Definição

Denomina-se equação do 2º grau na incógnita x, toda equação da forma:

$$ax^2 + bx + c = 0; \quad a, b, c \in \mathbb{R} \text{ e } a \neq 0.$$

Exemplos:

- $x^2 - 5x + 6 = 0$ é um equação do 2º grau com $a = 1$, $b = -5$ e $c = 6$.
- $6x^2 - x - 1 = 0$ é um equação do 2º grau com $a = 6$, $b = -1$ e $c = -1$.
- $7x^2 - x = 0$ é um equação do 2º grau com $a = 7$, $b = -1$ e $c = 0$.
- $x^2 - 36 = 0$ é um equação do 2º grau com $a = 1$, $b = 0$ e $c = -36$.

Lembre-se:

a é sempre o coeficiente de x^2;

b é sempre o coeficiente de x,

c é o coeficiente ou termo independente.

2- Equação completas e Incompletas

Uma equação do 2º grau é **completa** quando ***b*** e ***c*** são diferentes de zero.

Exemplos: $x^2 - 9x + 20 = 0$ e $-x^2 + 10x - 16 = 0$ são equações completas.

Uma equação do 2º grau é **incompleta** quando ***b*** ou ***c*** é igual a zero, ou ainda quando ambos são iguais a zero. Exemplos:

- $x^2 - 36 = 0$ ($b = 0$)
- $x^2 - 10x = 0$ ($c = 0$)
- $4x^2 = 0$ ($b = c = 0$)

3- Raízes de uma equação do 2º grau

Resolver uma equação do 2º grau significa determinar suas **raízes**.

Raiz é o número real que, ao substituir a incógnita de uma equação, transforma-a numa sentença verdadeira.

A raízes são obtidas de duas formas:

1) Pela fórmula de Báskhara: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, onde o Δ (discriminante) é dado por $\Delta = b^2 - 4a.c.$

2) Por soma e produto: as duas raízes (x' e x") obedecem às relações com os coeficientes dadas por:

i) $x'+x'' = -\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}$; como x' + x" é a soma das raízes (S), costuma-se usar $S = -\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}$

ii) $x'.x'' = \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{a}}$; como x'.x" é o produto das raízes (P), costuma-se usar $P = \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{a}}$

Exercícios

1) Determine as raízes reais (se existir) de cada uma das seguintes equações do $2^{\underline{0}}$ grau:

a) $3x^2 - 27 = 0$

b) $12x + 4x^2 = 0$

c) $3x^2 + 5x - 6 = -4x - 6$

d) $(x-6)(x+9) - x = 2(x+23)$

e) $x^2 - 4\sqrt{3}x + 12 = 0$

f) $\frac{x-3}{x^2-4} + 1 = \frac{1}{x-2}$

2) Determine o valor de *m* para que as equações:

(I) duas raízes reais e distintas; (II) duas raízes reais iguais; (III) não tenha raízes reais.

a) $x^2 - 3x + m = 0$;
b) $mx^2 - 6x + 1 = 0$
c) $(m-1)x^2 - 2x + 4 = 0$

3) Escreva uma equação do $2^{\underline{0}}$ grau cujas raízes são:
a) –1 e 4

b) –2 e 3

4) Resolva:
   a. A diferença entre o quadrado de um número e o seu triplo é 35. Qual é o número?

   b. Qual é o número que, adicionado ao triplo do seu quadrado, vale 14?

   c. Se do quadrado de um número subtrairmos 6, o resto será 30. Qual é esse número?

   d. Determine dois números consecutivos ímpares cujo produto seja 195.

   e. A diferença entre as idades de dois irmãos é 3 anos e o produto de suas idades é 270. Qual é a idade de cada um?

   f. Qual é o número inteiro positivo cuja metade acrescida de sua terça parte é igual ao seu quadrado diminuído 134?

5) (FUVEST) O dobro de um número, mais a sua terça parte, mais a sua quarta parte somam 31. Determine o número.

Respostas:

1)

a) $x=-3$ ou $x=3$ b) $x=0$ ou $x=-3$ c) $x=0$ ou $x=-3$

d) $x=\frac{-1-\sqrt{401}}{2}$ ou $x=\frac{-1+\sqrt{401}}{2}$ e) $x=2\sqrt{3}$ f) $x=-\sqrt{5}$ ou $x=\sqrt{5}$

---

2)

a) I: $m<\frac{9}{4}$ II: $m=\frac{9}{4}$ III: $m>\frac{9}{4}$

b) I: $m<9$ II: $m=9$ III: $m>9$

c) I: $m<\frac{5}{4}$ II: $m=\frac{5}{4}$ III: $m>\frac{5}{4}$

---

3)

a) $x^2-3x-4=0$ b) $x^2-x-6=0$

---

4)

a) $x=\frac{3+\sqrt{149}}{2}$ ou $x=\frac{3-\sqrt{149}}{2}$ b) $x=-\frac{7}{3}$ ou $x=2$ c) $x=-6$ ou $x=6$

d) não é possível pois dois números consecutivos nunca são ambos ímpares.

e) $x=15$ e $y=18$ f) $x=12$

---

5)

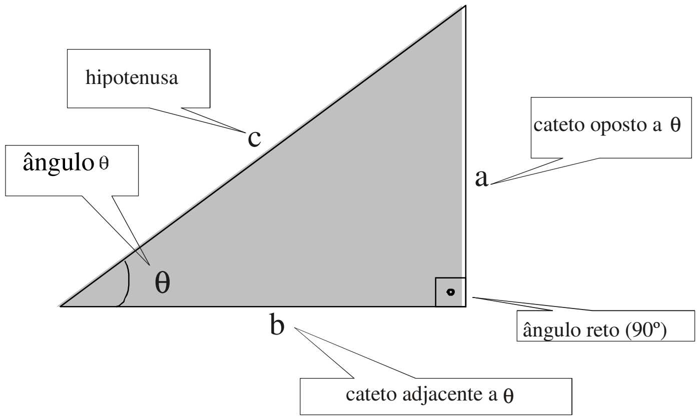
$x=12$

Trigonometria

1- Relações trigonométricas num triângulo retângulo

Em um triângulo retângulo, a relação entre os lados é descrita pelo **Teorema de Pitágoras** que diz "***o quadrado da hipotenusa é igual a soma do quadrado dos catetos***". Matematicamente, se **c** designar a hipotenusa e **a** e **b** os catetos, pode-se escrever o Teorema de Pitágoras da seguinte forma:

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$$



A hipotenusa é o lado oposto ao ângulo reto (90º). Num triângulo retângulo, dado um ângulo θ, podemos escrever as relações entre seus lados:

$$sen\theta = \frac{\text{cateto oposto a }\theta}{\text{hipotenusa}} \Rightarrow sen\theta = \frac{a}{c} \Rightarrow a = c \cdot sen\theta$$

$$\cos\theta = \frac{\text{cateto adjacente a }\theta}{\text{hipotenusa}} \Rightarrow \cos\theta = \frac{b}{c} \Rightarrow b = c \cdot \cos\theta$$

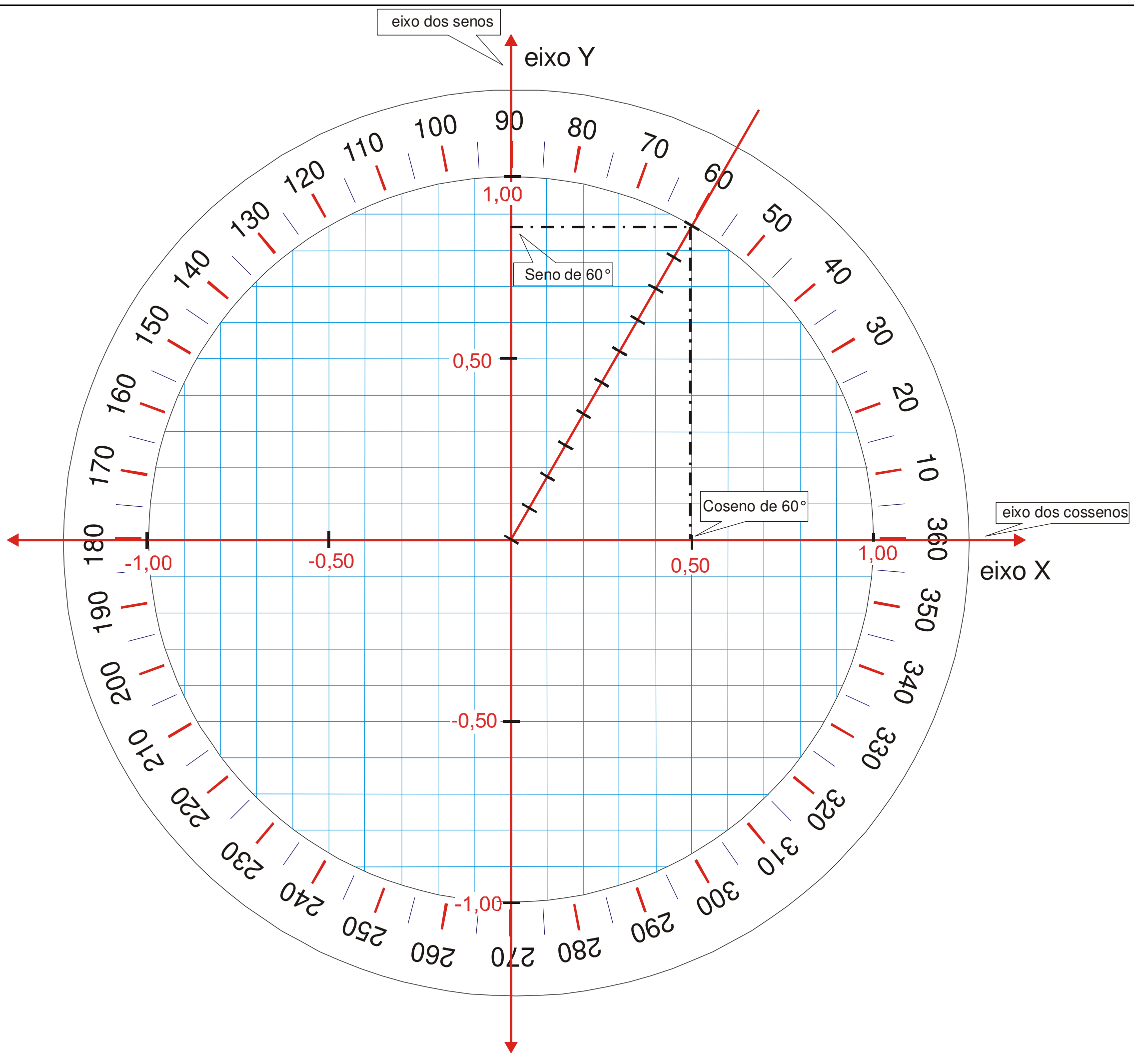
$$tg\theta = \frac{\text{cateto oposto a }\theta}{\text{cateto adjacente a }\theta} \Rightarrow tg\theta = \frac{a}{b} \Rightarrow a = b \cdot tg\theta$$

2 Circulo trigonométrico

O circulo trigonométrico é um circulo de raio unitário (r = 1 unidade de comprimento).

A projeção do raio no eixo X, é igual a *cosθ* e sobre o eixo Y é igual *senθ*.

O valor da tangente do ângulo é o comprimento do segmento de reta perpendicular ao eixo X, que é cortado pelo segmento de reta que determina o ângulo θ.



3 Tabela de razões trigonométricas

ângulo em graus	seno	co-seno	tangente	ângulo em graus	seno	co-seno	tangente	ângulo em graus	seno	co-seno	tangente
0	0	1,000	0,000	**31**	0,515	0,857	0,601	**61**	0,875	0,485	1,804
1	0,017	1,000	0,017	**32**	0,530	0,848	0,625	**62**	0,883	0,469	1,881
2	0,035	0,999	0,035	**33**	0,545	0,839	0,649	**63**	0,891	0,454	1,963
3	0,052	0,999	0,052	**34**	0,559	0,829	0,675	**64**	0,899	0,438	2,050
4	0,070	0,998	0,070	**35**	0,574	0,819	0,700	**65**	0,906	0,423	2,145
5	0,087	0,996	0,087	**36**	0,588	0,809	0,727	**66**	0,914	0,407	2,246
6	0,105	0,995	0,105	**37**	0,602	0,799	0,754	**67**	0,921	0,391	2,356
7	0,122	0,993	0,123	**38**	0,616	0,788	0,781	**68**	0,927	0,375	2,475
8	0,139	0,990	0,141	**39**	0,629	0,777	0,810	**69**	0,934	0,358	2,605
9	0,156	0,988	0,158	**40**	0,643	0,766	0,839	**70**	0,940	0,342	2,747
10	0,174	0,985	0,176	**41**	0,656	0,755	0,869	**71**	0,946	0,326	2,904
11	0,191	0,982	0,194	**42**	0,669	0,743	0,900	**72**	0,951	0,309	3,078
12	0,208	0,978	0,213	**43**	0,682	0,731	0,933	**73**	0,956	0,292	3,271
13	0,225	0,974	0,231	**44**	0,695	0,719	0,966	**74**	0,961	0,276	3,487
14	0,242	0,970	0,249	**45**	0,707	0,707	1,000	**75**	0,966	0,259	3,732
15	0,259	0,966	0,268	**46**	0,719	0,695	1,036	**76**	0,970	0,242	4,011
16	0,276	0,961	0,287	**47**	0,731	0,682	1,072	**77**	0,974	0,225	4,331
17	0,292	0,956	0,306	**48**	0,743	0,669	1,111	**78**	0,978	0,208	4,705

18	0,309	0,951	0,325	**49**	0,755	0,656	1,150	**79**	0,982	0,191	5,145
19	0,326	0,946	0,344	**50**	0,766	0,643	1,192	**80**	0,985	0,174	5,671
20	0,342	0,940	0,364	**51**	0,777	0,629	1,235	**81**	0,988	0,156	6,314
21	0,358	0,934	0,384	**52**	0,788	0,616	1,280	**82**	0,990	0,139	7,115
22	0,375	0,927	0,404	**53**	0,799	0,602	1,327	**83**	0,993	0,122	8,144
23	0,391	0,921	0,424	**54**	0,809	0,588	1,376	**84**	0,995	0,105	9,514
24	0,407	0,914	0,445	**55**	0,819	0,574	1,428	**85**	0,996	0,087	11,430
25	0,423	0,906	0,466	**56**	0,829	0,559	1,483	**86**	0,998	0,070	14,301
26	0,438	0,899	0,488	**57**	0,839	0,545	1,540	**87**	0,999	0,052	19,081
27	0,454	0,891	0,510	**58**	0,848	0,530	1,600	**88**	0,999	0,035	28,636
28	0,469	0,883	0,532	**59**	0,857	0,515	1,664	**89**	1,000	0,017	57,290
29	0,485	0,875	0,554	**60**	0,866	0,500	1,732	**90**	1,000	0,000	$\nexists$
30	0,500	0,866	0,577								

Exercícios

1. Utilizando uma régua e o círculo trigonométrico determine:
   a) cos 60^0 =
   b) seno 60^0 =
   c) cos 30^0 =
   d) sen 30^0 =
   e) cos 120^0 =
   f) seno 120^0 =
   g) cos 210^0 =
   h) seno 210^0 =
   i) cos 300^0 =
   j) seno 300^0 =

2. Utilize a tabela razões trigonométricas ou uma calculadora cientifica, determine os valores e ângulos pedidos:
   a) sen α = 0,326 $\Rightarrow$ α =

   b) tg α = 1,000 $\Rightarrow$ α =

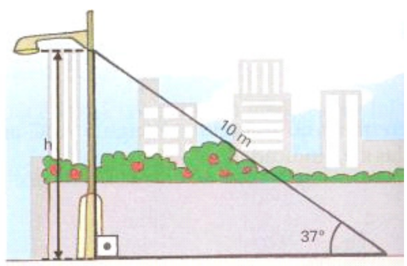
   c) cos α = 0,906 $\Rightarrow$ α =

   d) sen α = 0,998 $\Rightarrow$ α =

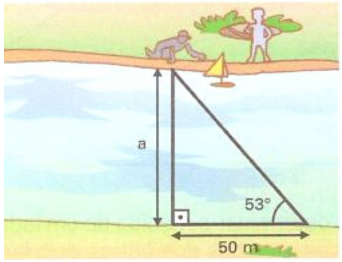
   e) cos α = 0,485 $\Rightarrow$ α =

   f) tg α = 57,290 $\Rightarrow$ α =

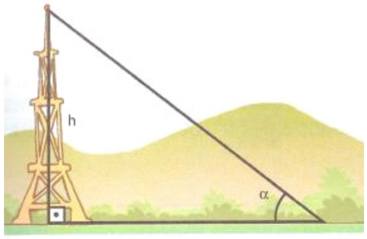
3. Calcule a altura h do poste representado pela figura ao lado.



4. Calcule a largura do rio representado na figura ao lado?



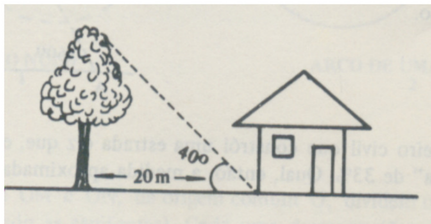
5. A uma distância de 40 m, uma torre é vista sob um ângulo α, como nos mostra a figura. Determine a altura h da torre se:



   a) $\alpha = 20°$

   b) $\alpha = 40°$

6. Pode-se tombar a árvore na direção da casa sem que a mesma a destrua?



7. Um homem parte de sua casa percorre 12 quadras para o norte e 9 quadras para leste.
   a) Usando uma escala de 1cm:1quadra e sabendo que uma 1quadra tem 100m de comprimento, desenhe um diagrama mostrando os deslocamentos sucessivos do homem.

   b) Desenhe o vetor deslocamento resultante, e determine o seu módulo, medindo-o diretamente no diagrama.

   c) Use o teorema de Pitágoras para calcular o módulo do deslocamento resultante.

Respostas

1)

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $\frac{1}{2}$ e) $-\frac{1}{2}$ f) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

g) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ h) $-\frac{1}{2}$ i) $\frac{1}{2}$ j) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

---

2)
a) $\alpha = 19^o$ b) $\alpha = 45^o$ c) $\alpha = 25^o$ d) $\alpha = 86^o$ e) $\alpha = 61^o$ f) $\alpha = 89^o$

---

3)
$h = 6{,}02m$

---

4)
$a = 66{,}35m$

---

5)
a) $h = 14{,}56m$ b) $h = 33{,}56m$

---

7)
a) b) c) $d = 15m$