CONJUNTOS NUMÉRICOS

1. Introdução

Os números estão presentes nas mais diversas situações do nosso dia-a-dia. Nos meios de comunicação, como os jornais, por exemplo, deparamo-nos com muitas informações numéricas contidas em tabelas, gráficos e textos diversos. Precisamos estar preparados para enfrentar e compreender situações envolvendo informações numéricas relacionadas a medidas, comparações, dados de pesquisas, etc.

Os dois principais objetos com que se ocupa a matemática são os números e as figuras geométricas. O nosso objetivo aqui é recordar e aprofundar o conhecimento adquirido sobre números no Ensino Fundamental.

Os conjuntos cujos elementos são números que guardam entre si algumas características comuns que são aqui denominados Conjuntos Numéricos.

2. Conjunto dos Números Naturais ($\mathbb{N}$)

O surgimento do conjunto dos Números Naturais deve-se à necessidade da contagem dos objetos ou de ordená-los. Foram vários os sistemas de numeração utilizados desde a antiguidade: babilônico, romano, chinês, indo-arábico, etc. O sistema de numeração que utilizamos hoje, com dez símbolos, é derivado do sistema indo-arábico e foi introduzido na Europa no século XIII.

Atualmente, o conjunto dos números naturais é representado pela letra $\mathbb{N}$, isto é, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$. O conjunto dos números naturais é um conjunto infinito e ordenado, já que, dados dois números naturais quaisquer, é sempre possível dizer, se não são iguais ou, se um é menor ou maior que o outro. Um subconjunto importante de $\mathbb{N}$ é o conjunto $\mathbb{N}^*=\{1, 2, 3, 4, 5,...\}$.

Observação: Para quaisquer a e b $\in \mathbb{N}$, temos: $a + b \in \mathbb{N}$ e $a \times b \in \mathbb{N}$.

3. Conjunto dos Números Inteiros ($\mathbb{Z}$)

Qual o resultado da subtração 2 – 3? Durante muito tempo, problemas desse tipo foram considerados sem solução, porque só se admitia a subtração a – b entre dois números naturais desde que $a \geq b$. Circunstâncias como essa exigiram o surgimento de números com valores negativos para explicar relações que só os números naturais já não davam conta de representar.

Situações cotidianas como as que envolvem indicações de altitudes, saldo bancário, registro de temperatura, permitem compreender melhor o significado dos números inteiros, particularmente dos números negativos.

Representamos o conjunto dos números inteiros pela letra $\mathbb{Z}$, isto é, $\mathbb{Z}= \{...,-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,...\}$.

Temos também outros subconjuntos de $\mathbb{Z}$:

$\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z}-\{0\} = \{...,-3, -2, -1, 1, 2, 3,...\}$ = conjunto dos inteiros não nulos;

$\mathbb{Z}_+ = \{0,1,2,3,4,5,...\}$ = conjunto dos inteiros não negativos; observe que $\mathbb{Z}_+= \mathbb{N}$.

$\mathbb{Z}^*_+ = \{1,2,3,4,5,...\}$ = conjunto dos inteiros positivos; observe que $\mathbb{Z}^*_+ = \mathbb{N}^*$.

$\mathbb{Z}_- = \{...,-3, -2, -1, 0\}$ = conjunto dos inteiros não positivos;

$\mathbb{Z}^*_- = \{...,-3, -2, -1\}$ = conjunto dos inteiros negativos.

Números opostos ou simétricos – dois números inteiros são ditos opostos um do outro quando apresentarem soma zero. Assim os pontos que os representam distam igualmente da origem. Exemplo: o número 5 é o oposto de –5 e –5 é o oposto de 5 pois, 5 + (-5) = (-5) + 5 = 0. Dizemos, em geral, que o oposto, ou simétrico, de a é – a, e vice-versa; particularmente o oposto de zero é o próprio zero.

Módulo de um número inteiro – damos o nome de módulo ou valor absoluto, de x à distância entre a origem e o ponto que representa o número x. Dizemos que o módulo de – 4 é 4, e que o módulo de 4 também é 4; indicamos $|-4| = |4| = 4$.

4. Conjunto dos Números Racionais ($\mathbb{Q}$)

O surgimento dos números racionais está diretamente associado à noção de medidas. Independentemente do que estejamos medindo, medir significa comparar duas grandezas do mesmo tipo: dois comprimentos, duas superfícies, duas massas,...

Na tentativa de quantificar medidas e representá-las, surgiram os números racionais, que são também utilizados para representar quantidades não-inteiras e relações tais como os que aparecem na divisão de uma pizza ou nos problemas envolvendo escala.

Portanto **números racionais** são todos aqueles que podem ser colocados na forma de fração (com o numerador $\in \mathbb{Z}$ e denominador $\in \mathbb{Z}^*$). O conjunto dos números racionais é indicado pela letra $\mathbb{Q}$, e pode ser representado matematicamente por $\mathbb{Q} = \{ x \mid x = \frac{m}{n}, m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \}$.

Podemos verificar que entre dois números inteiros consecutivos existem infinitos números racionais e também que entre dois racionais quaisquer há infinitos racionais. Por exemplo, entre os racionais $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{3}$, podemos encontrar $\frac{13}{25}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{3}{5}$ entre outros.

Inverso de um número racional – dois números são ditos inversos um do outro quando o produto entre eles resulta em 1. Por exemplo, $\frac{3}{4}$ é o inverso de $\frac{4}{3}$ (e vice-versa) pois $\frac{3}{4} \times \frac{4}{3} = 1$. Zero é o único racional que não possui inverso.

5. Conjunto dos Números Irracionais ($\mathbb{Q}$'ou $\mathbb{I}$)

Durante muito tempo, ao medir comprimentos, pensou-se que o número encontrado seria sempre um racional. Descobriu-se porém, que isso nem sempre ocorria. Por exemplo: como medir a diagonal de um quadrado utilizando seu lado como medida? Ao procurar a resposta para esse problema, descobriu-se que há segmentos incomensuráveis, cuja razão entre as medidas não pode ser expressa como divisão entre dois inteiros, ou seja, existem razões que não expressem números racionais, isto é, têm representação decimal infinita não-periódica. Assim surgiram os números irracionais.

Historicamente, a descoberta dos irracionais parece estar ligada à utilização do Teorema de Pitágoras. Um exemplo disso é o cálculo da diagonal do quadrado de lado igual a 1 unidade de comprimento ($d = \sqrt{2} = 1{,}4142135623730950488016887242097....$).

Um número irracional bastante conhecido é o número π = 3,1415926535..., que é o quociente de uma circunferência pelo seu diâmetro (o número π já foi calculado com um bilhão de casas decimais). Outro numero irracional bastante conhecido é o número e, onde e = 2,718...., usado bastante em logaritmos.

6. Conjunto dos Números Reais ($\mathbb{R}$)

Quando falamos em números reais, estamos abrangendo todos os números vistos até aqui, ou seja, os números naturais, inteiros, racionais e irracionais.

Os números reais formam um conjunto ordenado e completo. Isto significa que dados dois números reais, é sempre possível verificar se eles são iguais ou se um é menor ou maior que o outro. Significa também que, dado um segmento de reta qualquer, existe sempre um número real que representa a medida do comprimento.

Dito de outro modo é sempre possível estabelecer uma correspondência entre o conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$) e o conjunto de pontos de uma reta.

Qualquer numero real, poder representado numa reta denominada reta real. Para isso, basta:

- escolher um ponto sobre a reta que represente o zero ou a origem;
- escolher dois sentidos, um positivo e um negativo;
- escolher uma unidade de medida para graduar a reta.

A cada numero real corresponde um único ponto da reta r e a cada ponto de r corresponde um único real, chamado de abscissa desse ponto em $\mathbb{R}$. Essa correspondência entre os elementos de $\mathbb{R}$ e os pontos de r é denominada **sistema de coordenadas**. A reta r é chamada **reta real**, de **eixo dos números reais** ou, mais comumente, de **reta numerada**. O ponto 0, corresponde ao número zero, é a **origem** desse sistema.

Além dos subconjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{Q}$', o conjunto dos números reais apresenta outros subconjuntos importantes:

$\mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$ – conjunto dos números reais não nulos;

$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ – conjunto dos números reais não negativos;

$\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ – conjunto dos números reais positivos;

$\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$ – conjunto dos números reais não positivos;

$\mathbb{R}_-^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$ – conjunto dos números reais negativos.

Observação: A raiz de índice par e radicando negativo é impossível em $\mathbb{R}$, mas é possível num outro conjunto chamado de Conjunto dos Números Complexos.

Módulo ou Valor Absolto – O módulo de a, denotado por $|a|$, é definida como:

$$|a| = a, \text{ se } a \geq 0$$
$$|a| = -a, \text{ se } a < 0$$

Notação Cientifica: é uma representação numérica que utiliza sempre um numero $x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ multiplicado por uma potência de base 10 com expoente inteiro.

Exemplos: $1{,}2 \cdot 10^3$; $10^{22} = 1 \cdot 10^{22}$; $0{,}00035 = 3{,}5 \cdot 10^{-4}$; $5.0000 = 5 \cdot 10^4$.

Desigualdades entre Números Reais – Dados dois números reais quaisquer **a** e **b**, poderá ocorrer uma e somente uma das seguintes possibilidades:

a < **b** ou **a** = **b** ou **a** > **b**.

- Os símbolos < (menor que) e > (maior que) (chamados de desigualdades estritas) são definidos:
  - **(i)** $a < b \Leftrightarrow b - a$ é positivo;
  - **(ii)** $a > b \Leftrightarrow a - b$ é positivo.
- Os símbolos ≤ (menor ou igual que) e ≥ (maior ou igual que) (chamados de desigualdades não estritas) são definidos:
  - **(i)** $a \leq b \Leftrightarrow a < b$ ou $a = b$;
  - **(ii)** $a \geq b \Leftrightarrow a > b$ ou $a = b$.

7. Intervalos

O conjunto dos números reais possui também subconjuntos, denominados intervalos, que são determinados por meio de desigualdades. Sejam os números reais a e b , com a < b.

- **Intervalo Aberto:** $\{x \mid a < x < b\}$ denota-se (a, b) ou]a, b[.
- **Intervalo Fechado:** $\{x \mid a \leq x \leq b\}$ denota-se [a, b].
- **Intervalo Fechado à Direita e Aberto à Esquerda:** $\{x \mid a < x \leq b\}$ denota-se (a, b] ou]a, b].
- **Intervalo Aberto à Direita e Fechado à Esquerda:** $\{x \mid a \leq x < b\}$ denota-se [a, b) ou [a, b[.
- **Intervalos Infinitos:**
  - **(i)** $\{x \mid x > a\}$ denota-se (a, +∞) ou]a, +∞[;
  - **(ii)** $\{x \mid x \geq a\}$ denota-se [a, +∞) ou [a, +∞[;
  - **(iii)** $\{x \mid x < b\}$ denota-se (-∞, b) ou]-∞, b[;
  - **(iv)** $\{x \mid x \leq b\}$ denota-se (-∞, b] ou]-∞, b].

8. Operações entre conjuntos

Sejam A e B conjuntos contidos num universo E:

União – O conjunto união de A e de B (notação: A ∪ B) é o conjunto formado por todos os elementos que pertencem a A ou a B. $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$

Intersecção – O conjunto intersecção de A e de B (notação: A ∩ B) é o conjunto formado pelos elementos comuns a A e a B. $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$

Diferença – O conjunto diferença entre A e B (notação: A – B) é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A e não pertencem a B.
$A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$

9. Exercícios

1) Classifique em verdadeira (V) ou falsa (F):
   ( ) Existe um número natural que é maior que todos os demais.
   ( ) Todo número natural tem um sucessor.
   ( ) Todo número natural tem um antecessor.
   ( ) A soma de um número racional com um número irracional é sempre um número irracional.
   ( ) O produto de um número irracional por um número racional diferente de zero é um número irracional.
   ( ) Sejam x e $y \in \mathbb{R}$. Se $x < y$, $\Rightarrow x + z < y + z$, $\forall\, z \in \mathbb{R}$.

2) Determine o módulo dos seguintes números:
   a) $|-5| =$ b) $|100| =$ c) $|-\pi| =$ d) $|-\sqrt{7}\,| =$ e) $|-\frac{3}{2}\,| =$

3) Escreva os seguintes números em notação cientifica:
   a) 5.000.000.000 = b) 0,0000005 = c) 135.000.000 =

4) Represente em notação de intervalo os seguintes conjuntos:
   a) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \le 3\} =$ b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \le 5\} =$ c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\} =$
   d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x \ge 1\} =$ e) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \le 0 \text{ ou } x > 2\} =$

5) Sejam os conjuntos, A = (-2, 5], B = [2, 6], C = (-∞, -1], D = [2, +∞) e E = [-3, 3]:
   a) Represente cada um dos conjuntos na reta real;
   b) Obtenha : A ∪ E; C ∩ D; B – D; A ∩ E; C – D; C ∪ A; e represente-os na reta real;

6) (CEFET/PR) São dos os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é impar}\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 \le x \le 4\}$ e $C = \{x \in \mathbb{Z}_+^* \mid x < 6\}$. O conjunto D, tal que D = (A ∩ B) – C, é :
   a) {-3, -2, -1, 0, 7, 9} b) {2, 4, 5} c) {-3,-1} d) {1,3}

7) Determine os conjuntos A ∪ B e A ∩ B, representando-os na reta, sendo:
   a) A = [2, 4] e B = [3, 6];
   b) A = [-2, 0) e $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \le x < 1\}$;
   c) A = [-3, 0[e B = [-1, +∞[

8) Dados, A = (-5, 2], B = [-6, 6] e C = (-∞, 2], calcule:
   a) A ∪ B ∪ C =
   b) A ∩ B ∩ C =
   c) (A ∪ B) ∩ C =
   d) A ∩ (B ∪ C) =
   e) (A ∪ B) – C =
   f) (A – B) – C =
   g) (A ∩ B) – C =
   h) (A – B) ∪ C =