FUNÇÃO EXPOENCIAL

1. Potência - Seja a um número real e n um número natural. Podemos definir a potência de base a e expoente n, por a^n, que é o produto de n fatores iguais a a, se $n \geq 2$.

$a^n = a \times a \times a \times a \times \ldots \times a$,

1.1. Propriedades - Sejam a e b números reais, m e n números inteiros, temos:

a) $a^1 = a$

b) $a^0 = 1,\ a \neq 0$

c) $a^m \times a^n = a^{m+n}$

d) $\dfrac{a^m}{a^n} = a^m \times a^{-n} = a^{m-n},\ a \neq 0$

e) $a^{-n} = \left(\dfrac{1}{a}\right)^n,\ a \neq 0$

f) $(a \times b)^n = a^n \times b^n$

g) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

h) $(a^m)^n = a^{m \times n}$

i) $(a+b)(a+b) = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

j) $(a-b)(a-b) = (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

k) $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

2. Radiciação - Seja a um número real maior ou igual a zero e n um número natural maior ou igual a 1. Definimos a raiz n-ésima de a o número real b maior ou igual a zero tal que $b^n = a$, isto é, $\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$.

Observação: Se a for um número negativo, o índice da raiz deverá ser ímpar, pois raiz negativa de índice par não existe;

2.1. Propriedades:

a) $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

b) $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

c) $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \times b}$

d) $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

e) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

f) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \times n]{a}$

3. Potência de 10 - São muito usadas em física, mecânica, eletrônica, eletrotécnica e no sistema usual de numeração decimal.

Exemplos:

a) $3529 = 3000 + 500 + 20 + 9 = 3 \times 1000 + 5 \times 100 + 2 \times 10 + 9 \times 1 = 3 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 9 \times 10^0 =$
$= 3 \times 10^3 + 0{,}5 \times 10^3 + 0{,}02 \times 10^3 + 0{,}009 \times 10^3 = 3{,}529 \times 10^3$

b) $10.000.000 = 10^7$

c) $0{,}00001 = \dfrac{1}{100000} = \dfrac{1}{10^5} = 10^{-5}$

4. Notação Científica - Em assuntos científicos em geral, usa-se os números racionais na forma $x \times 10^n$ onde x é um número racional $\in (0,\ 10)$ e n é um número inteiro.

Exemplos:

a) $2{,}998 \times 10^8$ m/s é a velocidade da luz no vácuo.

b) $3{,}0 \times 10^{-9}$ m/s pode ser a velocidade média do crescimento de um fio de cabelo de uma pessoa.

c) $5{,}98 \times 10^{24}$ kg é a massa da terra.

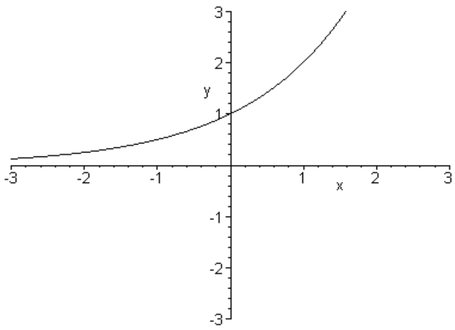
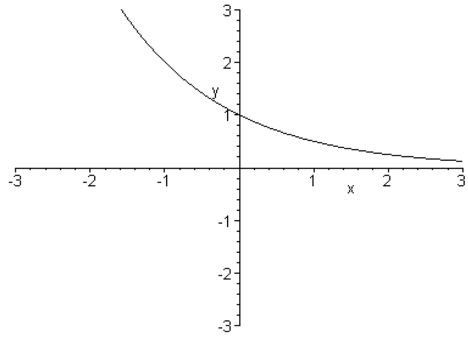
5. Função Exponencial - Qualquer função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ dada por uma lei da forma $f(x) = a^x$, em que $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ e $a \neq 1$.

Exemplos:

1) $f(x) = 2^x$

2) $f(x) = (\frac{1}{3})^x$

5.1. Gráfico:

Para: **a > 1**, temos:	Para: **0 < a <1**, temos:
 - $\mathrm{Im}(f)=\mathbb{R}_+^*$; - A função *f*(*x*) é crescente, para quaisquer x_1 e x_2 do domínio, pois $x_2>x_1 \Rightarrow y_2>y_1$;	 - $\mathrm{Im}(f)=\mathbb{R}_+^*$; - A função *f*(*x*) é decrescente, para quaisquer x_1 e x_2 do domínio, pois $x_2>x_1 \Rightarrow y_2<y_1$;

6. Equação Exponencial - Chamamos de equação exponencial toda equação na qual a incógnita aparece em expoente.

Para resolver equações exponenciais, devemos realizar dois passos importantes:

1- redução dos dois membros da equação a potências de mesma base;

2- aplicação da propriedade $a^m = a^n \Rightarrow m = n \quad (a \neq 1 \quad e \quad a > 0)$.

Exemplos:

1) $5^X = 125 \Rightarrow 5^X = 5^3 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow S = \{3\}$

2) $2^X = 1 \Rightarrow 2^X = 2^0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow S = \{0\}$

3) $\left(\frac{2}{3}\right)^X = \frac{16}{81} \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^X = \frac{2^4}{3^4} \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^X = \left(\frac{2}{3}\right)^4 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow S = \{4\}$

4) $3^{2X+1} = 243 \Rightarrow 3^{2X+1} = 3^5 \Rightarrow 2x+1 = 5 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow S = \{2\}$

5) $2^{2X+4} = 16^x \Rightarrow 2^{2x+4} = (2^4)^x \Rightarrow 2^{2x+4} = 2^{4x} \Rightarrow 2x+4 = 4x \Rightarrow 4x - 2x = 4 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow S = \{2\}$

6) $3^{2X} - 6\cdot 3^x - 27 = 0$

Resolução

$3^{2X} - 6\cdot 3^x - 27 = 0 \Rightarrow (3^x)^2 - 6\cdot 3^x - 27 = 0$

Fazendo $3^x = y$, obtemos a equação $y^2 - 6\cdot y - 27 = 0$.

Resolvendo a equação acima obtemos y' = -3 e y'' = 9.

$\Rightarrow 2^{2x+4} = 2^{4x} \Rightarrow 2x+4 = 4x \Rightarrow 4x - 2x = 4 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow S = \{2\}$

Para achar o valor de *x*, devemos voltar os valores para a equação auxiliar $3^x = y$:

y'= -3 $\Rightarrow$ $3^{x'} = -3$ $\Rightarrow$ não existe *x*', pois potência de base positiva é positiva

y''= 9 $\Rightarrow$ $3^{x''} = 9$ $\Rightarrow 3^{x''} = 3^2$ $\Rightarrow$ *x*''=2

Portanto a solução é $S = \{2\}$.

7. Inequação Exponencial - Uma inequação exponencial é aquela que apresenta a incógnita no expoente de pelo menos uma potência.

Para resolver inequações exponenciais, devemos realizar dois passos importantes:

1- redução dos dois membros da inequação a potências de mesma base;

2- aplicação da propriedade:

Para **a > 1**, temos:	Para **0 < a < 1**, temos:
$a^x > a^y \Rightarrow x > y$ ou $a^x < a^y \Rightarrow x < y$	$a^x > a^y \Rightarrow x < y$ ou $a^x < a^y \Rightarrow x > y$

Exemplos:

1) $2^X > 8 \Rightarrow 2^X > 2^3 \Rightarrow x > 3 \Rightarrow S = (3, +\infty)$

2) $(\frac{1}{3})^{X-3} < 81 \Rightarrow (\frac{1}{3})^{X-3} < 3^4 \Rightarrow (\frac{1}{3})^{X-3} < (\frac{1}{3})^{-4} \Rightarrow x - 3 > -4 \Rightarrow x > -1 \Rightarrow S = (-1, +\infty)$

ou $(\frac{1}{3})^{X-3} < 81 \Rightarrow (3^{-1})^{x-3} < 3^4 \Rightarrow 3^{-x+3} < 3^4 \Rightarrow -x + 3 < 4 \Rightarrow -x < 1 \Rightarrow x > -1 \Rightarrow S = (-1, +\infty)$

8. Exercícios:

1) Calcule:

a) $-8^2 =$ b) $(-0{,}4)^3 =$ c) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} =$ d) $-\left(-\frac{1}{2}\right)^{-4} =$

e) $3^{-2} =$ f) $(-1{,}2)^2 =$ g) $(0{,}0001)^{-4} =$ h) $-\left(\frac{1}{6}\right)^2 =$

i) $27^{\frac{4}{3}} =$ j) $625^{-0{,}25} =$ k) $1000^{0{,}666666...} =$ l) $\sqrt{\sqrt{81}} =$

2) Escreva sob a forma de radical as seguintes potências:

a) $5^{\frac{3}{4}} =$ b) $3^{0{,}25} =$ c) $\pi^{\frac{5}{3}} =$ d) $2^{0{,}125} =$

3) Escreva sob a forma de potência com expoente fracionário os seguintes radicais:

a) $\sqrt[4]{2^3} =$ b) $\frac{1}{\sqrt[3]{4}} =$ c) $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt[3]{4}} =$ d) $\frac{\sqrt[5]{2^2}}{\sqrt[4]{2^3}} =$

4) Calcule o valor das seguintes expressões:

a) $4^{\frac{1}{2}} - 2^{-1} + (-3)^0 + (-0{,}1)^0 \cdot (25^{-1})^0 =$

b) $16^{-0{,}5} + 81^{-0{,}25} =$

c) $\dfrac{2^{-1} + 2^{-2} + 36^{\frac{1}{2}}}{81^{\frac{3}{4}} + 16^{\frac{-1}{2}} \cdot 1^{-100}} =$

d) $\left(-\frac{1}{3}\right)^3 + [3^{-1} - (-3)^{-1}]^{-2} =$

e) $\dfrac{2^{-1} + 2^2 - 2^{-1}}{2^{-2} - 2^{-1}} =$

f) $\dfrac{(3^8)^8 \cdot (3^4)^{-2}}{(3^7)^2 \cdot (\sqrt{3})^{20}} =$

g) $(10^0 + 10^1 + 10^2)^2 =$

h) $\dfrac{(7^5)^3 : (7^3)^2}{(1 + 2 \cdot 3)^5} =$

i) $\left[\frac{1}{10^2} + \frac{1}{-10}\right]^{-1} =$

j) $(2 + \sqrt{3})^2 =$

k) $(\sqrt{5} - \sqrt{2})^2 =$

l) $(\sqrt{7} - 5) \cdot (\sqrt{7} + 5) =$

m) $\sqrt[5]{\sqrt{15} + 4} \cdot \sqrt[5]{\sqrt{15} - 4} =$

n) $(\sqrt{a} - \sqrt{b}) \cdot (\sqrt{a} + \sqrt{b}) =$

5) (CEFET/MG) Sabendo que $A = \dfrac{3^x + 3^{-x}}{2}$ e $A = \dfrac{3^x - 3^{-x}}{2}$, qual o valor de $A^2 - B^2$?

6) Racionalize o denominador de cada uma das seguintes frações:

a) $\frac{1}{\sqrt{5}} =$ b) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} =$ c) $\frac{2}{3\sqrt{2}} =$

d) $\frac{5}{\sqrt{2} + 1} =$ e) $\frac{7}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} =$ f) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} =$

7) (UNIFOR-CE) Simplifique a expressão $\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2} + 1} + \dfrac{1}{\sqrt{2} - 1}$.

8) (UF-MS) Calcule $\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} - \left(\frac{-2}{3}\right)^{2}}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+1\right)^{2}}$.

9) Para as seguintes funções: construir o gráfico, determinar o conjunto domínio, o conjunto imagem e identificar o(s) intervalo(s) onde a função é crescente ou/e decrescente:

a) $f(x) = 3^x$ b) $f(x) = (1/3)^x$ c) $f(x) = 2^x - 1$

d) $f(x) = (1/2)^x + 3$ e) $f(x) = 2^{x+1}$ f) $f(x) = 2^{1-x}$

g) $f(x) = -2^x$ h) $f(x) = 3(2)^x$

i) $f(x) = \begin{cases} 2^x, & se\ x < 0 \\ (1/2)^x, & se\ x \geq 0 \end{cases}$ j) $f(x) = \begin{cases} 3, & se\ x < -4 \\ -x, & se\ -4 < x < -2 \\ 4-x, & se\ -2 \leq x < 0 \\ (1/2)^x + 3, & se\ x \geq 0 \end{cases}$ k) $f(x) = \begin{cases} 2-x, & se\ x < -3 \\ 2^{-x}, & se\ -3 \leq x \leq 0 \\ -2^x, & se\ 0 < x < 2 \\ x-2, & se\ x \geq 2 \end{cases}$

10) Resolva as equações:

a) $5^x = \sqrt{5}$ b) $4^x = \sqrt[3]{32}$ c) $2^x = \dfrac{1}{32}$

d) $\left(\dfrac{3}{5}\right)^{2x} = \dfrac{27}{125}$ e) $2^{x-3} = \dfrac{1}{8}$ f) $8^x = 0{,}125$

g) $2^{3x+1} = 4^{x-2}$ h) $3^{x^2-5} = 81$ i) $25^{2x} = \sqrt{5}$

j) $3^{2x^2+3x-1} = 1$ k) $4^{x+1} - 4 \cdot 2^x = 224$ l) $2^{3x-1} \cdot 4^{2x+3} = 8^{3-x}$

m) $2^{3x+2} \div 8^{2x-3} = 4^{x-1}$ n) $(3^x)^{x-1} = 1$ o) $(5^{x-2})^{x-3} = 1$

p) $4^x - 2^x = 2$ q) $2^{x+1} + 2^x - 2^{x+2} = 44$ r) $3^{-x} + 3^{x+1} = \dfrac{28}{3}$

11) Resolva os sistemas de equações exponenciais:

a) $\begin{cases} 3^{x+y} = 1 \\ 2^{x+2y} = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5^{x+y} = \dfrac{1}{5} \\ 7^{2x+y} - 7 = 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 8^x \cdot 4^y = \dfrac{1}{4} \\ 4^x \cdot 2^{-y} = 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 10^{-x} \cdot 10^{2y} = 10^5 \\ 4^{5x} \div 8^{y-x} = 16 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 5^x + 5^{y+1} = 26 \\ e^y \cdot e^{2y} = 1 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 7^{xy+1} = \dfrac{1}{7} \\ 3^{x^2+y^2} = 3^2 \end{cases}$

12) Resolva em $\mathbb{R}$, as seguintes inequações exponenciais:

a) $3^x < 81$ b) $5^x < 1$ c) $3^x \geq 243$

d) $(1/5)^x \geq 125$ e) $(2/5)^x > (5/2)$ f) $(\sqrt[3]{3})^x \leq (1/9)$

g) $e^{4x+1} > 1/e$ h) $(0{,}8)^x \geq 5/4$ i) $2^{x^2-x} \leq 64$

j) $(1/4)^{-x+3} \geq (1/8)^{2x-1}$ k) $(2/3)^{x^2-3} > 1$ l) $2^{\frac{2x+1}{x-1}} \leq 1/2$

m) $2^{x-1} + 2^x + 2^{x+1} - 2^{x+2} + 2^{x+3} > 240$ n) $4^x - 6 \cdot 2^x + 8 < 0$

o) $4^{x^2} - 5 \cdot 2^{x^2} + 4 \leq 0$ p) $(1/2)^{x^2-4} \leq 8^{x+2}$

13) Determine o domínio das seguintes funções:

a) $f(x) = \sqrt{2^x - 2^{1-x}}$ b) $f(x) = \sqrt{125 - 5^{-2x}}$ c) $f(x) = \sqrt{2^{x^2-x} - 1}$