LOGARITMOS

Definição: Logaritmo de ***x*** na base ***a*** é o expoente ***y*** que se deve atribuir à base ***a*** para obter o número ***x***, sendo ***a*** e ***x*** números reais positivos, com ***a*** $\neq 1$, isto é, $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$, com $x > 0$, $a > 0$ e $a \neq 1$.

Propriedades: Usando a definição de logaritmos, podemos facilmente demonstrar as seguintes propriedades:

a) $\log_a 1 = 0$, pois $a^0 = 1$

b) $\log_a a = 1$, pois $a^1 = a$

c) $\log_a \frac{1}{a} = -1$, pois $a^{-1} = \frac{1}{a}$

d) $\log_a a^n = n$, pois $a^n = a^n$

e) $a^{\log_a x} = x$, pois sendo $\log_a x = y \Rightarrow a^y = x$

Propriedades Operatórias:

a) $\log_a (x.y) = \log_a x + \log_a y$

b) $\log_a (\frac{x}{y}) = \log_a x - \log_a y$

c) $\log_a (\frac{1}{y}) = -\log_a y$

d) $\log_a x^n = n.\log_a x$

e) $co\log_a x = \log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$

f) Mudança de base:
De modo geral, consideramos: $\log_a x = p$, $\log_b x = q$ e $\log_a b = r$.
Daí tiramos que: $a^p = x$, $b^q = x$ e $a^r = b$.
Fazendo as substituições:

$$x = a^p = b^q \Rightarrow a^p = (a^r)^q \Rightarrow a^p = a^{rq} \Rightarrow p = rq \Rightarrow q = \frac{p}{r} \Rightarrow \log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

g) $\log_b a = \dfrac{1}{\log_a b}$, pois $\log_b a = \dfrac{\log_a a}{\log_a b} = \dfrac{1}{\log_a b}$

h) $\log_b a.\log_a b = 1$, pois $\log_b a.\log_a b = \dfrac{\log_a a}{\log_a b}.\dfrac{\log_a b}{\log_a a} = 1$

Sistema de Logaritmos

1) *Sistema de Logaritmos Decimais ou Logaritmos de Briggs*:

É o sistema de base ***10***, isto é, $\log_{10} x = \log x$.

2) *Sistema de Logaritmos Neperianos ou Logaritmos de Naturais*:

É o sistema de base ***e***, onde e = 2,718...., isto é, $\log_e x = \ell n x$.

Exemplos:

1) $\log_2 (4 \times 8 \times 16) = \log_2 4 + \log_2 8 + \log_2 16 = \log_2 2^2 + \log_2 2^3 + \log_2 2^4 =$
$= 2\log_2 2 + 3\log_2 2 + 4\log_2 2 = 2 + 3 + 4 = 9$

2) $\log_3 \frac{9 \times 81}{27} = (\log_3 9 + \log_3 81) - \log_3 27 = (\log_3 3^2 + \log_3 3^4) - \log_3 3^3 =$
$= (2\log_3 3 + 4\log_3 3) - 3\log_3 3 = (2+4) - 3 = 3$

3) $co\log_5 125 = \log_5 \frac{1}{125} = \log_5 1 - \log_5 125 = -\log_5 125 = -\log_5 5^3 = -3\log_5 5 = -3$

4) $\log_2 8^5 = 5\log_2 8 = 5\log_2 2^3 = 5 \times 3\log_2 2 = 5 \times 3 = 15$

5) $\log_4 64 = \dfrac{\log_2 64}{\log_2 4} = \dfrac{\log_2 2^6}{\log_2 2^2} = \dfrac{6\log_2 2}{2\log_2 2} = \dfrac{6}{2} = 3$

6) $\log_{100} 1000 = \dfrac{\log 1000}{\log 100} = \dfrac{\log 10^3}{\log 10^2} = \dfrac{3\log 10}{2\log 10} = \dfrac{3}{2}$

7) $\log_e e^5 = \ell n e^5 = 5\ell n e = 5 \times 1 = 5$

8) Sejam $\log 2 = 0{,}301$ e $\log 3 = 0{,}477$ então:

a) $\log 36 = \log 4 \times 9 = \log 4 + \log 9 = \log 2^2 + \log 3^2 = 2\log 2 + 2\log 3 = 2 \times 0{,}301 + 3 \times 0{,}477 = 1{,}556$

b) $\log_2 3 = \dfrac{\log 3}{\log 2} = \dfrac{0{,}301}{0{,}477} \cong 0{,}631$

c) $\log_5 2 = \dfrac{\log 2}{\log 5} = \dfrac{\log 2}{\log \frac{10}{2}} = \dfrac{\log 2}{\log 10 - \log 2} = \dfrac{0{,}301}{1 - 301} \cong 0{,}431$

d) $\log_3 10 = \dfrac{\log 10}{\log 3} = \dfrac{1}{0{,}477} \cong 2{,}096$

e) $\log_{0{,}01} 7 = \dfrac{\log 15}{\log 0{,}01} = \dfrac{\log 3 \times 5}{\log \frac{1}{100}} = \dfrac{\log 3 + \log 5}{\log 10^{-2}} = \dfrac{\log 3 + \log \frac{10}{2}}{-2\log 10} = \dfrac{\log 3 + \log 10 - \log 2}{-2\log 10} = -0{,}824$

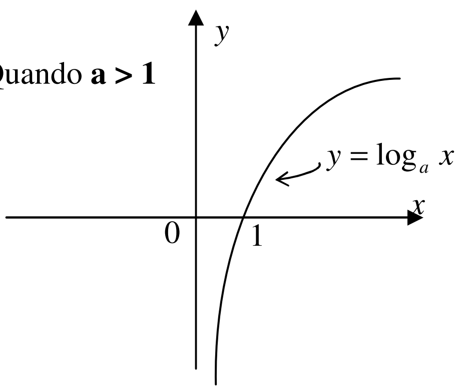
Função Logarítmica

Chamamos de ***função logarítmica*** de base ***a*** ($0 < a \neq 1$) a função que associa cada elemento $x \in R_+^*$ ao seu logaritmo, nessa base:

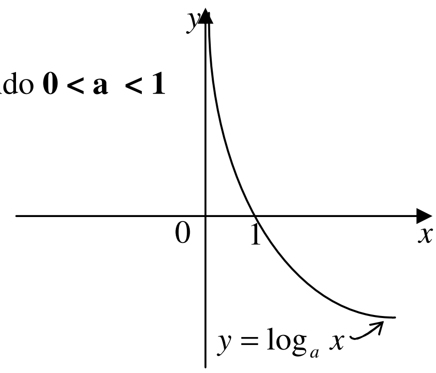
$f : R_+^* \to R$

$x \to y = \log_a x$

Quando **a > 1**



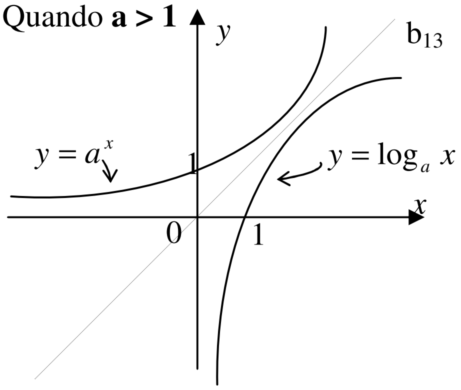
Quando **0 < a < 1**



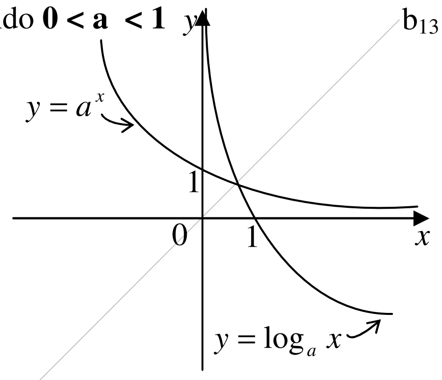
A função $y = \log_a x$ é inversa da função exponencial $x = a^y$:

$$x = a^y \Leftrightarrow y = \log_a x$$

Quando **a > 1**



Quando **0 < a < 1**



EXERCÍCIOS - LOGARITMOS

1) Calcule, aplicando a definição de logaritmo:

a) $\log_9 1/9 =$ b) $\log_{25} 625 =$ c) $\log_{0,01} 10 =$ d) $\log_{\sqrt{3}} 27 =$ e) $\log_{32} 0{,}25 =$

f) $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt[7]{16} =$ g) $\log_{100} \sqrt[3]{10} =$ h) $\log_8 \sqrt[3]{16} =$ i) $\log_{\frac{1}{4}} 2\sqrt[4]{8} =$ j) $\log_{\sqrt[3]{2}} 0{,}25 =$

k) $\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} \sqrt{27} =$ l) $\log_{2\sqrt{2}} 0{,}25 =$ m) $\log_{\sqrt{32}} 2\sqrt[3]{2} =$ n) $\log_{1,5} 4/9 =$

2) Calcule o valor das expressões:

a) $\log_2 8\sqrt{2} - 2\log_2(\log_3 81) =$ b) $\log_{0,1} 0{,}01 - 3\log_{\sqrt{2}} 0{,}25 + \frac{1}{2}\log_{25} 0{,}008 =$

c) $\log_{\frac{1}{8}} 16 + \log_3 \log_2 8 - 3\log_5 0{,}04 =$

3) Calcule o valor de x:

a) $\log_4 x = 1/2$ b) $\log_{\frac{3}{2}} x = -2$ c) $\log_{\sqrt{2}} x = 3/2$ d) $\log_{\frac{1}{8}} x = -2/3$

e) $\log_x 5 = -1$ f) $\log_x 9/4 = -2$ g) $\log_x 16 = 2$ h) $\log_x 243 = -5$

4) Calcule, sem usar a definição, isto é, usando as propriedades:

a) $\log_5 1 =$ b) $\log_4 4 =$ c) $\log_8 8^7 =$ d) $\log_{\sqrt{2}} 1 =$ e) $\log_5 5^2 =$ f) $\log 10 =$ g) $\log 10^4 =$

h) $10^{\log 4} =$ i) $25^{\log_{25} 51} =$ j) $9^{\log_9 83} =$ k) $\log_5 5 =$ l) $\log_6 6^3 =$ m) $\log_2 3 . \log_3 10 . \log 2 =$

5) Calcule o valor de cada expressão:

a) $2^{3+\log_2 5} =$ b) $6^{1-\log_6 2} =$ c) $3^{-2+\log_3 18} =$ d) $\log_2(\log_4 16) + \log_3(\log_2 2) + \log_5 5^3 - \log 1 =$

e) $\log_2(\log 100) + 3\log_4 4^3 + 5^{\log_5 6} =$

6) Resolver as equações:

a) $\log_x(2x+15) = 2$ b) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 4x + 4) = 0$ c) $\log_2(2x+3) = \log_2 x^2$

d) $\log_{(x-1)}(x^2 - 4x + 7) = 2$ e) $\log(x^2 - 3) = 0$ f) $\log_2(x^2 - x) = \log_2 2$

g) $\log_5(2x+3) = \log_5(x-2)$ h) $\log_{(2-x)} 8 = 3$ i) $\log_{(x-1)}(x^2 + 7) = 2$

j) $\log_2(\log(x-1)) = 2$ k) $\log(x+4) + \log(x-4) = 2\log 3$ l) $\log_5 x - \log_5(x-4) = 1$

7) Usando as propriedades operatórias, calcule:

a) $\log_2(64 \times 128) =$ b) $\log_5(125 \times 625 \times 25) =$ c) $\log_2(16 \times \sqrt{8} \times 2^{10}) =$

d) $\log_3 243/27 =$ e) $\log_3 \frac{81 \times \sqrt{3}}{\sqrt[3]{3}} =$

8) Desenvolver as seguintes expressões, aplicando as propriedades operatórias:

a) $S = \dfrac{5a^2\sqrt{b}}{3c^2}$ b) $S = \dfrac{3a}{b^2\sqrt[3]{c}}$ c) $S = \dfrac{a^3\sqrt{b}}{c\sqrt[3]{2d^2}}$ d) $S = \dfrac{2bc^2\sqrt{3d^2}}{5a^2}$ e) $S = \dfrac{a^3b^2}{\sqrt[4]{a^5b^3}}$

9) Determinar a expressão cujo desenvolvimento logaritmo é:

a) $\log S = 2\log a - \frac{1}{2}\log b - \frac{3}{2}\log c + \log 2$, com a > 0 , b > 0 e c > 0.

b) $\log Y = \frac{1}{3}\log b + 3\log a - \frac{1}{5}\log c - 4\log d$, com a > 0 , b > 0, c > 0 e d > 0.

c) $\log X = \frac{1}{3}[\log(b+c) + \log(b-c) - 2\log b]$.

10) Sabendo que $\log 2 = 0{,}3010$ e $\log 3 = 0{,}4771$, calcule os logaritmos, aplicando as propriedades operatórias:

a) $\log 18 =$ b) $\log 48 =$ c) $\log 4800 =$ d) $\log 5 =$ e) $\log 0{,}06 =$

f) $\log \frac{2}{3} =$ g) $\log \frac{3}{100} =$ h) $\log 0{,}125 =$ i) $\log 9\sqrt{2} =$

11) Sendo $\log 2 = a$ e $\log 3 = b$, calcule, em função de a e b:

a) $\log 54 =$ b) $\log 150 =$ c) $\log \sqrt[3]{12} =$ d) $\log \dfrac{9}{\sqrt[3]{2{,}5}} =$ e) $\log 25{,}6 =$

12) Resolva os sistemas de equações:

a) $\begin{cases} \log x - \log y = \log 3 \\ x + 2y = 15 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \log x + \log y = 2 \\ x + y = 20 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \log x - \log y = \log 2 \\ 4^{x-y} = 16 \end{cases}$ d) $\begin{cases} \log x - \log y = 1 \\ x + y^2 = 24 \end{cases}$

13) Em química o pH de uma solução é dado em função da concentração de hidrogênio H^+ em mols por litro de solução, pela seguinte expressão: $pH = \log \dfrac{1}{[H^+]} = -\log[H^+]$. O cérebro humano contém um líquido cuja concentração de $[H^+]$ é $4{,}8.10^{-8}$ mol/L (em média). Qual o pH desse líquido? (Dados: log 4,8 = 0,68124)

14) Em matemática financeira temos a expressão $M = C(1+i)^t$ que permite calcular o montante M, resultante da aplicação do capital C a juros compostos, à taxa mensal i ao completar um período t meses. Nessas condições, se o capital de R$ 500,00 for aplicado a juros compostos e a taxa mensal de 1%, após quanto tempo de aplicação o montante será de 1.000,00? (Dados: log2 = 0,0301 e log1,01= 0,00043)

15) A intensidade I de um terremoto, medida na escala Richter, é um número que varia de I = 0 até I = 8,9 para o maior terremoto conhecido. I é dado pela fórmula $I = \dfrac{2}{3}\log\dfrac{E}{E_0}$, na qual E é a energia liberada no terremoto em quilowatt-hora e $E_0 = 7.10^{-3}$ kWh. Qual a energia liberada num terremoto de intensidade 8 na escala Richter? Qual a intensidade d terremoto quando a energia liberada do mesmo for 7.10^6 kWh? Aumentado de uma unidade a intensidade do terremoto, por quanto fica multiplicada a energia liberada?

16) Construir o gráfico, determinar o conjunto domínio e o conjunto imagem das seguintes funções:

a) $f(x) = \log_2 x$ b) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ c) $f(x) = \log_3 x$ d) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ e) $y = \log_5 x$

e) $f(x) = \log_2(x+3)$ f) $f(x) = \log_2(x-4)$ g) $f(x) = \log_4 x$ h) $f(x) = \log_{(x-1)}(x+6)$

i) $f(x) = \log_{(x+3)}(x-5)$

Respostas

1) a) -1; b) 2; c) -1/2; d) 6; e)-2/5; f)-4/7; g) 1/6; h) 4/9; i)-7/8; j)-6; k)-3; l)-4/3; m) 8/15; n) -2

2) a)-1/2; b) 53/4; c) 17/3;

3) a) 2; b) 4/9; c) $\sqrt[4]{8}$; d) 4; e) 1/5; f) 2/3; g) 4; h) 1/3;

4) a) 0;) 1; c) 7; d) 0; e) 2; f) 1; g) 4; h) 4; i) 51; j) 83; k) 1; l)3; m) {1}

5) a) 40; b) 3 c) 2; d) 4; e)16;

6) a) {5}; b) {1, 3}; c) {-1, 3}; d) {3}; e) {-2, 2}; f) {-1, 2}; g) ϕ; h) ϕ; i) {3}; j) {82}; k) {5}; l) {5}

7) a) 13; b) 9; c) 31/2; d) 2; e) 25/6;

8)

9)

10) a) 1,2552; b) 1,6811; c) 3,6811; d) 0,699; e) -1,2; f) -0,1761; g) -1,5229; h)-0,903; i) 1,1047;

11) a) 3b + a; b) b - a + 2; c) $\dfrac{2a+b}{3}$; d) 8^a - 1; e) 2a +1;

12) a) S = {(9,3)}; b) S = {(10,10)}; c) S = {(4,2)}; d) S = {(20,2)};

13) pH $\cong$ 7,3

14) 70 meses.

15) $E = 7.10^9$ kWh; $I = 6$; $10\sqrt{10}$