FUNÇÃO MODULAR

1. Módulo (ou valor absoluto) de um número

O módulo (ou valor absoluto) de um número real x, que se indica por $| x |$ é definido da seguinte maneira:

$$|x| = \begin{cases} x, & se\ x \geq 0 \\ -x, & se\ x < 0 \end{cases}$$

Exemplos:

$|2| = 2$; $|1/2| = 1/2$; $|15| = 15$ $|-2| = -(-2) = 2$; $|-20| = -(-20) = 20$

O módulo de um número real é **sempre** positivo ou nulo. O módulo de um número real **nunca** é negativo. Representando geometricamente, o módulo de um número real x é igual a distância do ponto que representa, na reta real, o número x ao ponto 0 de origem. Assim:

- Se $| x | < a$ (com $a>0$) significa que a distância entre x e a origem é menor que a, isto é, x deve estar entre $-a$ e a, ou seja, $| x | < a \Leftrightarrow -a < x < a$.

- Se $| x | > a$ (com $a>0$) significa que a distância entre x e a origem é maior que a, isto é, x deve estar à direita de a ou à esquerda de $-a$ na reta real, ou seja: $| x | > a \Leftrightarrow x > a$ ou $x < -a$.

2. Equações Modulares

Toda a equação que contiver a incógnita em um módulo num dos membros será chamada **equação modular**.

Exemplos:

1) Resolver a equação $| x^2-5x | = 6$.

Resolução: Temos que analisar dois casos:

caso 1: $x^2-5x = 6$
caso 2: $x^2-5x = -6$

Resolvendo o caso 1:
$x^2-5x-6 = 0$ => $x'=6$ e $x''=-1$.
Resolvendo o caso 2:
$x^2-5x+6 = 0$ => $x'=3$ e $x''=2$.

Resposta: S={-1,2,3,6}

2) Resolver a equação $| x-6 | = | 3-2x |$.

Resolução: Temos que analisar dois casos:

caso 1: x-6 = 3-2x
caso 2: x-6 = -(3-2x)

Resolvendo o caso 1:
x-6 = 3-2x => x+2x = 3+6 => 3x=9 => x=3
Resolvendo o caso 2:
x-6 = -(3-2x) => x-2x = -3+6 => -x=3 => x=-3

Resposta: S={-3,3}

3. Inequações Modulares

Chamamos de inequações modulares as inequações nos quais aparecem módulos de expressões que contém a incógnita.

Exemplos:

1) Resolver a equação | -2x+6 | < 2.

Resolução:

$$|-2x+6|<2 \Rightarrow -2<-2x+6<2 \Rightarrow \begin{cases}-2<-2x+6\\-2x+6<2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2x<6+2\\-2x<4\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}2x<8\\2x>4\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x<4\\x>2\end{cases}$$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 4\}$

2) Dê o conjunto solução da equação $|x^2-2x+3| \le 4$.

Resolução:

$|x^2-2x+3| \le 4$ => $-4 \le x^2-2x+3 \le 4$.

Então temos duas inequações (que devem ser satisfeitas ao mesmo tempo):

$-4 \le x^2-2x+3$ (1)

$x^2-2x+3 \le 4$ (2)

Resolvendo (1):

$-4 \le x^2-2x+3$ => $-4-3 \le x^2-2x$ => $-7 \le x^2-2x$ => $x^2-2x+7 \ge 0$ => **sem raízes reais**

Resolvendo (2):

$x^2-2x+3 \le 4$ => $x^2-2x-1 \le 0$

Aplicando Bhaskara encontramos as raízes $\begin{cases}x' = 1-\sqrt{2}\\x'' = 1+\sqrt{2}\end{cases}$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1-\sqrt{2} \le x \le 1+\sqrt{2}\}$

4. Módulo e Raiz Quadrada

Consideremos os números reais **x** e **y**. Temos por definição, que:

$\sqrt{x} = y \Leftrightarrow y^2 = x$, e $y \ge 0 \Rightarrow \sqrt{x^2} = x$, se $x \ge 0$.

Se tivermos $x < 0$, não podemos afirmar que $\sqrt{x^2} = x$, pois isso contradiz a definição.

Exemplo:

Se x = -3, teríamos $\sqrt{(-3)^2} = -3$, o que é um absurdo, pois o primeiro membro é **positivo** e o segundo **negativo**.

Usando a definição de módulo, podemos escrever:

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

o que é **verdadeiro** para todo **x** real.

Devemos proceder da mesma forma em relação a todas raízes de índice par:

$\sqrt[4]{x^4} = |x|$, $\sqrt[6]{x^6} = |x|$, $\sqrt[2n]{x^{2n}} = |x|$, com $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}^*$

Com relação às raízes de índice ímpar, podemos escrever:

$\sqrt[3]{x^3} = x$, $\sqrt[5]{x^5} = x$, $\sqrt[2n+1]{x^{2n+1}} = x$, com $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$

5. Função Modular

Chamamos de função modular a função $f(x)=|x|$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases}x, \text{ se } x \ge 0\\-x, \text{ se } x < 0\end{cases}$$

Observe, então, que a função modular é uma função definida por duas sentenças.

→ Determinação do domínio

Vamos determinar o domínio de algumas funções utilizando inequações modulares:

Exemplo 1: Determinar o domínio da função

$$f(x)=\frac{1}{|x|-3}$$

Resolução:

Sabemos que $\frac{1}{|x|-3}$ só é possível em $\mathbb{R}$ se $|x|-3\neq 0$.

Então: $|x|-3\neq 0 \Rightarrow |x|\neq 3 \Rightarrow x\neq 3$ ou $x\neq -3$

Resposta: $D=\{x\in \mathbb{R}\mid x\neq 3 \text{ ou } x\neq -3\}$

Exemplo 2: Determinar o domínio da função

$$f(x)=\sqrt{2-|x-1|}$$

Resolução:

Sabemos que $\sqrt{2-|x-1|}$ só é possível em $\mathbb{R}$ se $2-|x-1|\geq 0$.

Então: $2-|x-1|\geq 0 \Rightarrow -|x-1|\geq -2 \Rightarrow |x-1|\leq 2 \Rightarrow -2\leq x-1\leq 2$

$-2\leq x-1\leq 2 \Rightarrow -2+1\leq x\leq 2+1 \Rightarrow -1\leq x\leq 3$

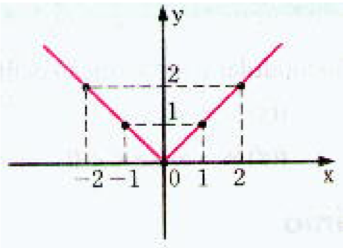
Resposta: $D=\{x\in \mathbb{R}\mid -1\leq x\leq 3\}$

→ Gráfico

Vamos construir o gráfico da função *f*(*x*)=|*x*|:

x	y=f(*x*)
-1	1
-2	2
0	0
1	1
2	2

Gráfico da função *f*(*x*)=|*x*|:



6. Exercícios

1) Verifique quais das seguintes funções são do $1^{\underline{0}}$ grau:

   a) $f(x)=3(x+1)+4(x-1)$
   b) $f(x)=(x+2)^2+(x-2)(x+2)$
   c) $f(x)=(x-3)^2-x(x-5)$
   d) $f(x)=(x-3)-5(x-1)$

2) Escreva a função do $1^{\underline{0}}$ grau a) $f(x)=ax+b$, sabendo que:

   a) $f(1)=5\ e\ f(-3)=-7$
   b) $f(-1)=7\ e\ f(23)=1$

3) Um motorista de táxi cobra R$ 3,20 de bandeirada mais R$ 1,02 por quilometro rodado. Sabendo que o preço a pagar é dado em função do número *x* de quilômetros rodados, responda:

   a) Qual a lei da função representada por essa situação?
   b) Qual o custo de uma corrida de 17 km?

4) Determine a lei da função do $1^{\underline{0}}$ grau cuja reta passa pelos pontos A(-8,0) e B(0,4). Essa função é crescente ou decrescente?

5) Construa o gráfico das seguintes funções, identificando se as mesmas são crescentes ou decrescentes:

a) $f(x) = x + 1$ b) $f(x) = -x + 1$ c) $f(x) = x$ d) $f(x) = -x$

e) $f(x) = -2x + 1$ f) $f(x) = 2x + 1$ g) $f(x) = -2$ h) $f(x) = 2$

i) $f(x) = \begin{cases} 2, se\ x < 0 \\ -1, se\ x \geq 0 \end{cases}$ j) $f(x) = \begin{cases} -1, & se\ \ x < -2 \\ -x, & se - 2 \leq x \leq 0 \\ 2x, & se\ \ 0 < x < 1 \\ 1, & se\ \ x \geq 1 \end{cases}$ k $f(x) = \begin{cases} 2 - x, & se\ \ x < -3 \\ x + 2, & se - 3 \leq x \leq -1 \\ -x, & se\ \ \text{-}1 < x < 2 \\ x - 2, & se\ \ x \geq 2 \end{cases}$

6) Determine a raiz das seguintes funções:

a) $f(x) = 5x - 10$ b) $f(x) = -\dfrac{x}{3} + 2$ c) $f(x) = 15 - 3x$ d) $f(x) = -x$

7) Estude o sinal de cada uma das seguintes funções:

a) $f(x) = 2x + 4$ b) $f(x) = -\dfrac{x}{2} - 1$ c) $f(x) = 8 - 4x$ d) $f(x) = -x$

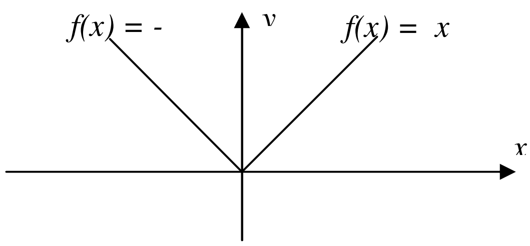
Definição: Módulo de um número real *x*, denotado por $|\,x\,|$, é definido por:

$$|\,x\,| = \begin{cases} x, & se\ \ x \geq 0 \\ -x, & se\ \ x < 0 \end{cases}$$

Exemplos: 1) $|\,3\,| = 3$ 2) $|-2| = 2$ 3) $\left|\dfrac{-5}{4}\right| = \dfrac{5}{4}$ 4) $|-0{,}25| = 0{,}25$

Definição: Função modular é aquela que faz corresponder a cada número real o seu módulo, denotada por $f(x) = |\,x\,|$ e, portanto, a função modular é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} x, & se\ \ x \geq 0 \\ -x, & se\ \ x < 0 \end{cases}$$

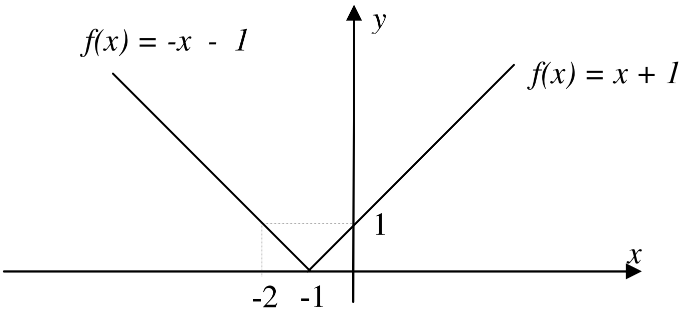


Onde o conjunto domínio é o conjunto dos reais (D(*f*) = $\mathbb{R}$) e o conjunto imagem é o conjunto dos reais não negativos (Im(*f*) = $\mathbb{R}_+$)

Observação: A função acima é uma função definida por duas sentenças.

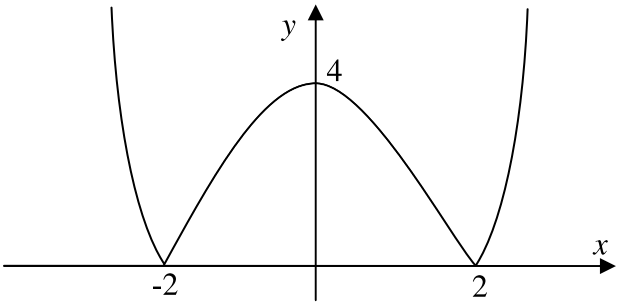
Exemplos:

1) $f(x) = |x+1| = \begin{cases} x+1, & se \quad x+1 \geq 0 \\ -(x+1), & se \quad x+1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x+1, & se \quad x \geq -1 \\ -x-1, & se \quad x < -1 \end{cases}$



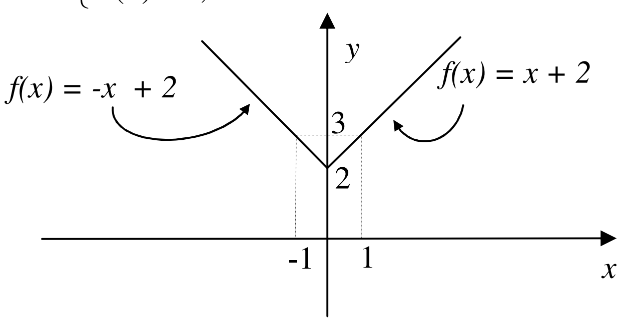
D(*f*) = *IR* e Im(*f*) = IR_+

2) $f(x) = |x^2-4| = \begin{cases} x^2-4, & se \quad x^2-4 \geq 0 \\ -(x^2-4), & se \quad x^2-4 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x^2-4, & se \quad x \leq -2 \ ou \ x \geq 2 \\ -x^2+4, & se \quad -2 < x < 2 \end{cases}$



D(*f*) = *IR* e Im(*f*) = IR_+

3) $f(x) = |\,x\,| + 2 = \begin{cases} x+2, & se \quad x \geq 0 \\ -(x)+2, & se \quad x < 0 \end{cases}$



D(*f*) = *IR* e Im(*f*) = [2, +∞)

Observação: Se compararmos as funções do tipo $f(x) = |\,x\,| \pm k$ (k constante) e $f(x) = |x \pm k|$ com a função modular simples $f(x) = |\,x\,|$, verificamos que há uma translação relativamente aos eixos das ordenadas ou das abscissas, respectivamente.

4) Seja $f(x) = |x+1| + |x-2|$. Temos: $|x+1| = \begin{cases} x+1, \ se \ x+1 \geq 0 \\ -(x+1), \ se \ x+1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x+1, \ se \ x \geq -1 \\ -x-1, \ se \ x < -1 \end{cases}$

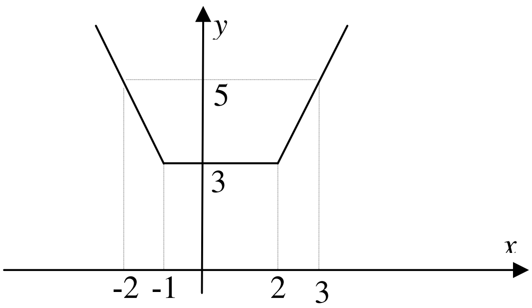
e

$$|x-2| = \begin{cases} x-2, \ se \ x-2 \geq 0 \\ -(x-2), \ se \ x-2 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x-2, \ se \ x \geq 2 \\ -x+2, \ se \ x < 2 \end{cases}$$

Resumindo os resultados obtidos numa tabela, temos:

	-1		2
$\lvert x+1\rvert$	$-x - 1$	$x + 1$	$x + 1$
$\lvert x-2\rvert$	$-x + 2$	$-x + 2$	$x - 2$
$\lvert x+1\rvert + \lvert x-2\rvert$	$-2x + 1$	3	$2x - 1$

-1 2



$$f(x) = \begin{cases} -2x+1, \ se \ x < -1 \\ 3, \ se \ -1 \leq x < 2 \\ 2x-1, \ se \ x \geq 2 \end{cases}$$

D(f) = $\mathbb{R}$ e Im(f) = $[3, +\infty)$

1) Usando a definição de função modular, eliminar o módulo, construir o gráfico, determinar o conjunto domínio e o conjunto imagem das funções:

a) $f(x) = x + |\ x\ |$

b) $f(x) = |4x - 2|$

c) $f(x) = 2 - |x - 1|$

d) $f(x) = \dfrac{|\ x\ | + x}{x}$; $x \neq 0$

e) $f(x) = |1 - x^2| + x^2$

f) $f(x) = x^2 - |\ x\ |$

g) $f(x) = \dfrac{|\ x\ |}{x}$; $x \neq 0$

h) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{|x-2|}$; $x \neq 2$

i) $f(x) = \dfrac{2x + |\ x\ |}{3x}$; $x \neq 0$

j) $f(x) = |x^2 - 5x + 6|$

k) $f(x) = |-2x^2 + 5x - 3|$

l) $f(x) = -|x^2 - x - 6|$

m) $f(x) = |\ x\ |.x$

n) $f(x) = \dfrac{-|\ x\ | + x}{|\ x\ |}$; $x \neq 0$

o) $f(x) = |\text{sen}\, x|$

p) $f(x) = -|\cos x|$

q) $f(x) = |x| + |x - 3|$

r) $f(x) = |x+1| + |x-2|$

s) $f(x) = |x+2| - |\ x\ |$

t) $f(x) = |x + x| + x - 3$

v) $f(x) = |3x| - 4$

x) $f(x) = |\log_2 x|$;

2) Resolver as seguintes equações:

a) $\left|\dfrac{4-2x}{3}\right| = 2$

b) $\left|\dfrac{2x-5}{4}\right| = \dfrac{1}{3}$