FUNÇÃO DO $1^{\underline{0}}$ GRAU

1. Introdução

Uma conta telefônica apresenta apenas duas parcelas: a referente à assinatura, que custa R$ 31,71 e a referente aos pulsos, que representam o tempo de uso da linha para fazer ligações locais ao custo de R$ 0,08 cada. Qual o valor da conta para 120 pulsos? Como o valor da conta poderá ser escrita em função do número de pulsos?

$$V(x) = \text{assinatura} + \text{pulsos} = \text{R\$ } 31{,}17 + 120 \times \text{R\$ } 0{,}08 = \text{R\$ } 40{,}77$$

Podemos notar que, para cada número x de pulos, há um certo valor $V(x)$ da conta telefônica.
Logo o valor de $V(x)$ é uma função de x:

$$V(x) = 31{,}17 + 0{,}08 \times x$$

que é um exemplo de função polinomial do $1^{\underline{0}}$ grau.

2. Definição

Chama-se **função polinomial do $1^{\underline{0}}$ grau** (também chamada de Função Afim), qualquer função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ dada por uma lei da formação $f(x) = ax + b$, onde a e b são números reais dados e $a \neq 0$.

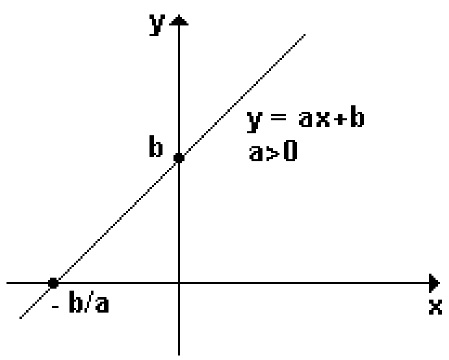
Na função $f(x) = ax + b$, o número **a** é chamado de coeficiente angular e o número **b** é chamado coeficiente linear.

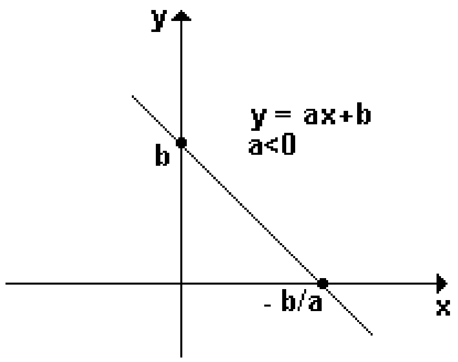
Exemplos:

a) $f(x) = 5x - 3$, onde a = 5 e b = - 3
b) $f(x) = -2x - 7$, onde a = -2 e b = - 7
c) $f(x) = 11x$, onde a = 11 e b = 0

3. Gráfico

O gráfico de uma função do $1^{\underline{0}}$ grau, $y = ax + b$, com $a \neq 0$, é uma reta oblíqua aos eixos Ox e Oy. O coeficiente angular "**a**" da reta está ligado à sua inclinação em relação ao eixo Ox. O coeficiente linear "**b**" da reta é a ordenada do ponto em que a reta corta o eixo Oy.



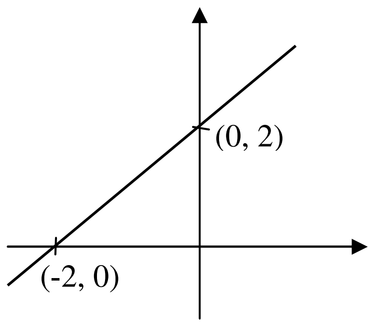


Exemplo:

$f(x) = y = x + 2$

Como o gráfico é uma reta, basta obter dois de seus pontos e ligá-los com o auxílio de uma régua:
Para $x = 0$, temos $y = 0 + 2 = 2 \Rightarrow y = 2$; portanto, um ponto é (0, 2).
Para $y = 0$, temos $0 = x + 2 \Rightarrow x = -2$; portanto, o outro ponto é (-2, 0).
Marcamos os pontos (0, 2) e (-2, 0) no plano cartesiano e ligamos os dois com uma reta.

x	$y = 3x-1$	(x, y)
0	2	(0, 2)
-2	0	(-2, 0)



4. Zero da Função do 1º Grau

Chama-se zero ou raiz da função polinomial do 1º grau, $f(x) = \mathrm{a}x + \mathrm{b}$, $\mathrm{a} \neq 0$, o número real x tal que $f(x) = 0$. Temos:

$$f(x) = 0 \;\Rightarrow\; \mathrm{a}x + \mathrm{b} = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{-b}{a} \;\Rightarrow\; S = \left\{\frac{-b}{a}\right\}$$

Exemplo:

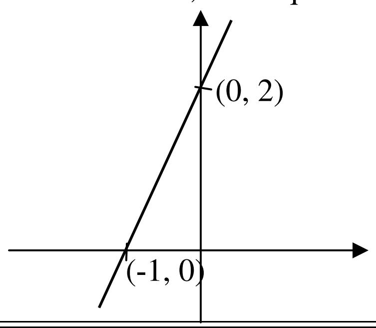
$$f(x) = -6x + 12 \Rightarrow -6x + 12 = 0 \;\Rightarrow\; -6x = -12 \Rightarrow\; x = (-12)/(-6) \;\Rightarrow\; x = 2 \quad \Rightarrow \mathrm{S} = \{2\}$$

5. Crescimento e Decrescimento da Função do 1º Grau

Consideremos a função do 1º grau, $f(x) = 2x + 2$. Vamos atribuir valores cada vez maiores a x e observar o que ocorre com y:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-4	-2	0	2	4	6	8

Notemos que, quando aumentamos o valor de x, os correspondentes valores de y também aumentam. Dizemos, então que a função $y = 2x + 2$ é crescente. Observamos o seu gráfico:



Regra geral:

- a função do 1º grau, $f(x) = \mathrm{a}x + \mathrm{b}$, é crescente quando o coeficiente de x é positivo ($\mathrm{a} > 0$);
- a função do 1º grau, $f(x) = \mathrm{a}x + \mathrm{b}$, é decrescente quando o coeficiente de x é negativo ($\mathrm{a} < 0$);

Justificativa:

- para $\mathrm{a} > 0$: se $x_1 < x_2$, então $\mathrm{a}x_1 < \mathrm{a}x_2$. Daí, $\mathrm{a}x_1 + \mathrm{b} < \mathrm{a}x_2 + \mathrm{b}$, de onde vem $f(x_1) < f(x_2)$.
- para $\mathrm{a} < 0$: se $x_1 < x_2$, então $\mathrm{a}x_1 > \mathrm{a}x_2$. Daí, $\mathrm{a}x_1 + \mathrm{b} > \mathrm{a}x_2 + \mathrm{b}$, de onde vem $f(x_1) > f(x_2)$.

Exemplo:

Seja $f(x) = 3x - 6$

$f(x)$ é uma função crescente pois $\mathrm{a} = 3 > 0$. Se tomarmos $x_1 = 1$ e $x_2 = 3$ ($x_1 < x_2$), e ao substituirmos x_1 e x_2 em $f(x)$, temos, $3\times 1 - 6 < 3\times 2 - 6 \Rightarrow -6 < 0$, de onde vem $f(1) < f(3)$ [$f(x_1) < f(x_2)$].

6. Sinal da Função do 1º Grau

Estudar o sinal de uma função $y = f(x)$ significa determinar os valores de x para os quais y é positivo, o valor de x para o qual y é zero e os valores de x para os quais y é negativo.

Vamos estudar o sinal da função $y = f(x) = \mathrm{a}x + \mathrm{b}$. Já vimos que essa função se anula pra raiz $x = \frac{-b}{a}$. Há dois casos possíveis:

1º) $\mathrm{a} > 0$ (a função é crescente)

$$\mathrm{y} > 0 \;\Rightarrow\; \mathrm{a}x + \mathrm{b} > 0 \;\Rightarrow\; x > \frac{-b}{a}$$

$$\mathrm{y} < 0 \;\Rightarrow\; \mathrm{a}x + \mathrm{b} < 0 \;\Rightarrow\; x < \frac{-b}{a}$$

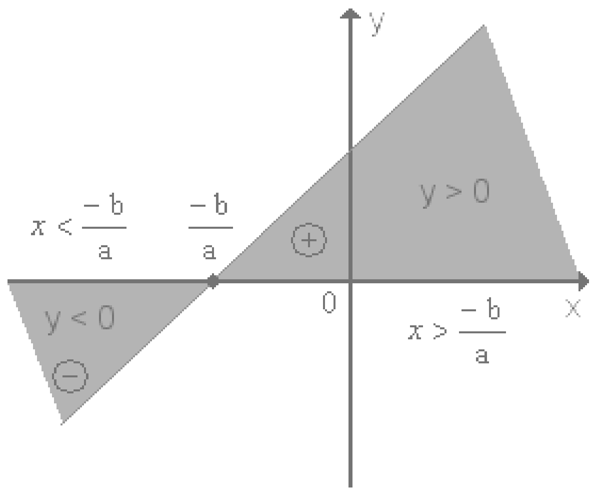
Conclusão: y é positivo para valores de x maiores que a raiz; y é negativo para valores de x menores que a raiz

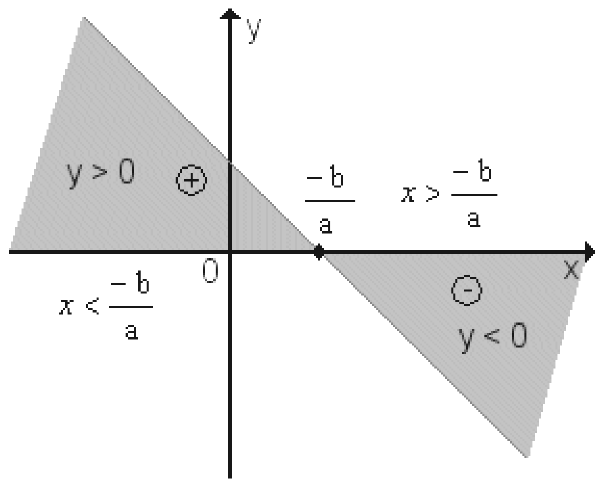
2º) a < 0 (a função é decrescente)

$$y > 0 \Rightarrow ax + b > 0 \Rightarrow x < \frac{-b}{a}$$

$$y < 0 \Rightarrow ax + b < 0 \Rightarrow x > \frac{-b}{a}$$

Conclusão: *y* é positivo para valores de *x* menores que a raiz; *y* é negativo para valores de *x* maiores que a raiz



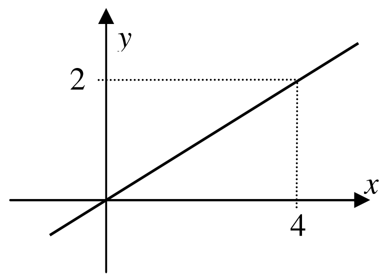


7. Tipos Particulares de Funções

7.1 **Função Linear:** Uma função é dita Linear , quando é do tipo ***f*(*x*) = ax,** com a ≠ 0. O gráfico de uma função identidade é uma reta que passa pela origem.

Exemplo:

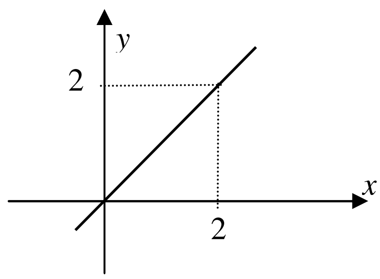
$$f(x) = \frac{x}{2}$$



7.2 **Função Identidade:** Uma função é dita Identidade , quando é do tipo ***f*(*x*) = x**. O gráfico de uma função identidade é uma reta que passa pela origem cortando os quadrantes I e II ao meio, também chamada de bissetriz dos quadrantes ímpares.

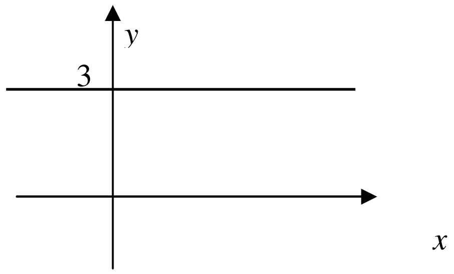
Exemplo:

$$f(x) = \frac{x}{2}$$



7.3 **Função Constante:** Uma função é dita constante quando é do tipo ***f*(*x*) = b** , onde b não depende de *x*. O gráfico de uma função constante é uma reta paralela ao eixo dos x. Veja o gráfico a seguir:

Exemplo:
$f(x) = 3$



8. Exercícios

1) Verifique quais das seguintes funções são do $1^{\underline{0}}$ grau:
   a) $f(x) = 3(x+1) + 4(x-1)$
   b) $f(x) = (x+2)^2 + (x-2)(x+2)$
   c) $f(x) = (x-3)^2 - x(x-5)$
   d) $f(x) = (x-3) - 5(x-1)$
2) Escreva a função do $1^{\underline{0}}$ grau a) $f(x) = ax + b$, sabendo que:
   a) $f(1) = 5 \ e \ f(-3) = -7$
   b) $f(-1) = 7 \ e \ f(23) = 1$
3) Um motorista de táxi cobra R$ 3,20 de bandeirada mais R$ 1,02 por quilometro rodado. Sabendo que o preço a pagar é dado em função do número *x* de quilômetros rodados, responda:
   a) Qual a lei da função representada por essa situação?
   b) Qual o custo de uma corrida de 17 km?
4) O salário fixo mensal de um segurança é de R$ 650,00. Para aumentar sua receita, ele faz plantões noturnos em uma boate, onde receber R$ 70,00 por noite de trabalho.
   a) Se em um mês, o segurança faz 4 plantões, que salário receberá?
   b) Qual o salário final *y* que o segurança receberá ele realiza *x* plantões?
   c) Represente graficamente a função obtida no item anterior, lembrando que o seu domínio é o conjunto dos números inteiros.
5) Determine a lei da função do $1^{\underline{0}}$ grau cuja reta passa pelos pontos A(-8,0) e B(0,4). Essa função é crescente ou decrescente?
6) Construa o gráfico das seguintes funções, identificando se as mesmas são crescentes ou decrescentes:
   a) $f(x) = x + 1$
   b) $f(x) = -x + 1$
   c) $f(x) = x$
   d) $f(x) = -x$
   e) $f(x) = -2x + 1$
   f) $f(x) = 2x + 1$
   g) $f(x) = -2$
   h) $f(x) = 2$
   i) $f(x) = \begin{cases} 2, se\ x < 0 \\ -1, se\ x \geq 0 \end{cases}$
   j) $f(x) = \begin{cases} -1, \ se \ \ x < -2 \\ -x, \ se -2 \leq x \leq 0 \\ 2x, \ se \ \ 0 < x < 1 \\ 1, \ se \ \ x \geq 1 \end{cases}$
   k $f(x) = \begin{cases} 2 - x, \ se \ \ x < -3 \\ x + 2, \ se -3 \leq x \leq -1 \\ -x, \ se \ \ -1 < x < 2 \\ x - 2, \ se \ \ x \geq 2 \end{cases}$
7) Determine o valor de m para que o gráfico da função $f(x) = 2x + m - 3$:
   a) Intercepte o eixo y no ponto (0,5);
   b) Intercepte o eixo x no ponto (3,0).
8) Determine a raiz das seguintes funções:
   a) $f(x) = 5x - 10$
   b) $f(x) = -\frac{x}{3} + 2$
   c) $f(x) = 15 - 3x$
   d) $f(x) = -x$
9) Estude o sinal de cada uma das seguintes funções:
   a) $f(x) = 2x + 4$
   b) $f(x) = -\frac{x}{2} - 1$
   c) $f(x) = 8 - 4x$
   d) $f(x) = -x$
10) Discuta, em função do parâmetro m, a "variação" (crescente, decrescente ou constante) de cada uma das funções:
   a) $f(x) = (m+2)x - 3$
   b) $f(x) = (4-m)x + 2$