INEQUAÇÃO DO $1^{\underline{0}}$ GRAU

1. Definição

Denomina-se **Inequação do $1^{\underline{0}}$ grau**, toda inequação que poder ser reduzida às formas: $ax+b \geq 0$, $ax+b>0$, $ax+b \leq 0$ e $ax+b<0$, com a e b $\in \mathbb{R}$ e a $\neq$ 0.

Numa inequação do $1^{\underline{0}}$ grau, os valores da variável que transformam a inequação numa desigualdade verdadeira, recebem o nome de soluções da inequação. O conjunto de todas as soluções de uma inequação é o conjunto solução (S) ou conjunto verdade dessa inequação.

Exemplos:

1) $4x-1+2(1-3x) \leq 0 \Rightarrow 4x-1+2-6x \leq 0 \Rightarrow -2x \leq -1\,(\times -1) \Rightarrow 2x \geq 1 \Rightarrow x \geq \frac{1}{2}$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \frac{1}{2}\} = [\frac{1}{2}, +\infty)$

2) $3(x-1)+4 \leq x+5 \Rightarrow 3x-3+4 \leq x+5 \Rightarrow 3x-x \leq 5+3-4 \Rightarrow 2x \leq 4 \Rightarrow x \leq 2$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2\} = (-\infty, 2]$

2. Inequações simultâneas

Inequações simultâneas são inequações expressas por duplas desigualdades, por exemplo: $-1 < 2x+3 \leq x$ ou $-x+3 > x+1 > 2x$.

Para resolver as inequações simultâneas, usaremos a intersecção de conjuntos como veremos nos exemplos que seguem:

1) $-1 < 2x-3 \leq x$

I) $-1 < 2x-3$

$-2x < -3+1$

$-2x < -2\;(\times -1)$

$2x > 2 \Rightarrow x > 2/2 \Rightarrow x > 1$

e

II) $2x-3 \leq x$

$2x - x \leq 3$

$x \leq 3$

$\mathbf{S_I} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\} = (1, +\infty)$

$\mathbf{S_{II}} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 3\} = (-\infty, 3]$

$\mathbf{S} = S_I \cap S_{II} = (1, +\infty) \cap (-\infty, 3] = (1, 3]$

2) $2x-1 < x+5 \leq 4x+7$

I) $2x-1 < x+5$

$2x - x < 5+1$

$x < 6$

e

II) $x+5 \leq 4x+7$

$x-4x \leq 7-5$

$-3x \leq 2\,(\times -1)$

$3x \geq -2 \Rightarrow x \geq \frac{-2}{3}$

$\mathbf{S_I} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 6\} = (6, +\infty)$

$\mathbf{S_{II}} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \frac{-2}{3}\} = [\frac{-2}{3}, +\infty)$

$\mathbf{S = S_I \cap S_{II}} = (6, +\infty) \cap [\frac{-2}{3}, +\infty) = (6, +\infty)$

3. Sistemas de Inequações do $1^{\underline{0}}$ Grau

Duas ou mais inequações que devem ser satisfeitas ao mesmo tempo formam o que denominamos Sistema de inequações. O conjunto solução de um sistema de inequações é determinado pela intersecção dos conjuntos soluções de cada inequação do sistema.

Exemplos:

1) $\begin{cases} 4x-2 \leq 6 & \text{(I)} \\ -2x+1 \leq 3 & \text{(II)} \end{cases}$

De (I) vem: $4x-2 \leq 6 \Rightarrow 4x \leq 6+2 \Rightarrow 4x \leq 8 \Rightarrow x \leq 2$

$\Rightarrow \mathbf{S_I} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 6\} = (-\infty, 2]$

De (II) vem: $-2x+1 \leq 3 \Rightarrow -2x \leq 3-1 \Rightarrow -2x \leq 2\;(\times\text{-}1) \Rightarrow 2x \geq -2 \Rightarrow x \geq -1$

$\Rightarrow \mathbf{S_I} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1\} = [-1, +\infty)$

$\mathbf{S = S_I \cap S_{II}} = (-\infty, 2] \cap [-1, +\infty) = [-1, 2]$

2) $\begin{cases} x+4 \geq 2x-1 & \text{(I)} \\ -3x+1 < x+5 & \text{(II)} \end{cases}$

De (I) vem: $x+4 \geq 2x-1 \;\Rightarrow\; x-2x \geq -1-4 \;\Rightarrow\; -x \geq -5\,(\times\text{-}1) \;\Rightarrow\; x \leq 5$

$\Rightarrow\; \mathbf{S_I} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 5\} = (-\infty, 5]$

De (II) vem: $-3x+1 < x+5 \;\Rightarrow\; -3x-x < 5-1 \;\Rightarrow\; -4x < 4 \;\; (\times\text{-}1) \Rightarrow\; 4x \geq -4 \;\Rightarrow\; x \geq -1$

$\Rightarrow \mathbf{S_I} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1\} = [-1, +\infty)$

$\mathbf{S} = \mathbf{S_I} \cap \mathbf{S_{II}} = (-\infty, 5] \cap [-1, +\infty) = [-1, 5]$

3) $3(x-1)+4 \leq x+5 \;\Rightarrow\; 3x-3+4 \leq x+5 \;\Rightarrow\; 3x-x \leq 5+3-4 \;\Rightarrow\; 2x \leq 4 \;\Rightarrow\; x \leq 2$

S = $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2\} = (-\infty, 2]$

4. Inequação Produto e Inequação Quociente

Há certas inequações dispostos em forma de produto ou na forma de quociente cuja solução é baseada no estudo da variação do sinal de uma função do $1^{\underline{0}}$ grau e nas regras dos sinais do produto e do quociente de números reais.

Exemplos:

1) $(x+3)(x-2) \geq 0$

Algebricamente

Usando a regra dos sinais para o produto temos:

(I) $(x+3)(x-2) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+3) \geq 0 \quad \text{e} \quad (x-2) \geq 0$

$\Leftrightarrow \quad x \geq -3 \quad \text{e} \quad x \geq 2 \quad \Rightarrow \quad x \geq 2$

$\Rightarrow \quad \mathbf{S_I} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\} = [2, +\infty)$

ou

(II) $(x+3)(x-2) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+3) \leq 0 \quad \text{e} \quad (x-2) \leq 0$

$\Leftrightarrow \quad x \leq -3 \quad \text{e} \quad x \leq 2 \quad \Rightarrow \quad x \leq -3$

$\Rightarrow \quad \mathbf{S_{II}} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -3\} = (-\infty, -3]$

$\mathbf{S} = \mathbf{S_I} \cup \mathbf{S_{II}} = [2, +\infty) \cup (-\infty, -3] = (-\infty, -3] \cup [2, +\infty)$

Graficamente

$(x+3)(x-2) \geq 0$

Fazendo:

$f(x) = x+3$

$x+3=0 \Rightarrow x=-3$ é a raiz da função,

$f(x)$ é crescente pois a = 1 > 0

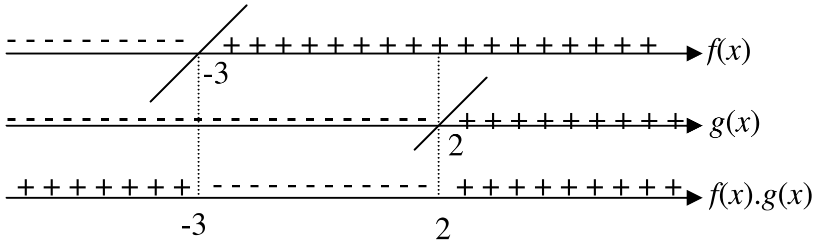
Logo $f(x) < 0$ em $x \in (-\infty, -3)$, $f(x) = 0$ em $x = -3$ e $f(x) > 0$ em $x \in (-3, +\infty)$

$g(x) = x-2$

$x-2=0 \Rightarrow x=2$ é a raiz da função,

$g(x)$ é crescente pois a = 1 > 0

Logo $g(x) < 0$ em $x \in (-\infty, 2)$, $g(x) = 0$ em $x = 2$ e $g(x) > 0$ em $x \in (2, +\infty)$



Queremos saber onde $(x+3)(x-2) \geq 0$ isto é $f(x).g(x) \geq 0$.

Analisando o gráfico acima chegamos a conclusão que $f(x).g(x) \geq 0$ em $x \in (-\infty, -3] \cup [2, +\infty)$, que é a solução da inequação produto

2) $(x+2)(x-1)(-x+2) \leq 0$

Algebricamente

Usando a regra dos sinais para o produto temos:

(I) $(x+2)(x-1)(-x+2) \leq 0 \iff (x+2) \leq 0$ e $(x-1) \leq 0$ e $(-x+2) \leq 0$

$\iff x \leq -2$ e $x \leq 1$ e $x \geq 2$

$\Rightarrow$ **S$_{\mathbf{I}}$** $= \varnothing$

ou

(II) $(x+2)(x-1)(-x+2) \leq 0 \iff (x+2) \leq 0$ e $(x-1) \geq 0$ e $(-x+2) \geq 0$

$\iff x \leq -2$ e $x \geq 1$ e $x \leq 2$

$\Rightarrow$ **S$_{\mathbf{II}}$** $= \varnothing$

ou

(III) $(x+2)(x-1)(-x+2) \leq 0 \iff (x+2) \geq 0$ e $(x-1) \leq 0$ e $(-x+2) \geq 0$

$\iff x \geq -2$ e $x \leq 1$ e $x \leq 2$

$\Rightarrow$ **S$_{\mathbf{III}}$** = [-2, 1]

ou

(IV) $(x+2)(x-1)(-x+2) \leq 0 \iff (x+2) \geq 0$ e $(x-1) \geq 0$ e $(-x+2) \leq 0$

$\iff x \geq -2$ e $x \geq 1$ e $x \geq 2$

$\Rightarrow$ **S$_{\mathbf{IV}}$** = [2, +∞)

S = **S$_{\mathbf{I}}$** ∪ **S$_{\mathbf{II}}$** ∪ **S$_{\mathbf{III}}$** ∪ **S$_{\mathbf{IV}}$** = ∅ ∪ ∅ ∪ [-2, 1] ∪ [2,+∞) = [-2, 1] ∪ [2,+∞)

3) $\dfrac{x+1}{2-x} \geq 0$

Algebricamente

Usando a regra dos sinais para o produto temos:

(I) $\dfrac{x+1}{2-x} \geq 0 \iff (x+1) \geq 0$ e $(2-x) > 0$

$\iff x \geq -1$ e $-x > -2 \Rightarrow x < 2$

$\Rightarrow$ **S$_{\mathbf{I}}$** $= [-1,\ 2)$

ou

(II) $\dfrac{x+1}{2-x} \geq 0 \iff (x+1) \leq 0$ e $(2-x) < 0$

$\iff x \leq -1$ e $-x < -2 \Rightarrow x > 2$

$\Rightarrow$ **S$_{\mathbf{II}}$** $= \varnothing$

S = **S$_{\mathbf{I}}$** ∪ **S$_{\mathbf{II}}$** $= [-1,\ 2) \cup \varnothing = [-1,\ 2)$

Graficamente

$\dfrac{x+1}{2-x} \geq 0$

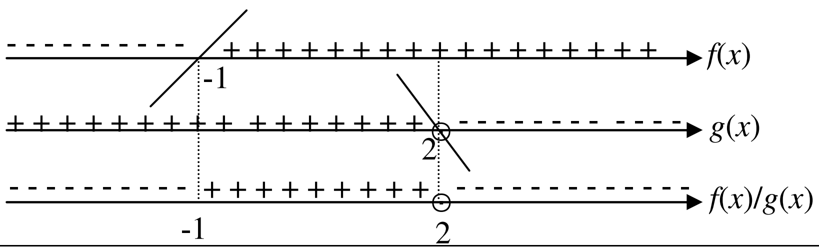
Fazendo:

$f(x) = x+1$, e $x+1=0 \Rightarrow x=-1$ é a raiz da função, $f(x)$ é crescente pois a = 1 > 0

Logo $f(x) < 0$ em $x \in (-\infty, -1)$, $f(x) = 0$ em $x = -1$ e $f(x) > 0$ em $x \in (-1, +\infty)$

$g(x) = 2-x$, e $2-x=0 \Rightarrow x=2$ é a raiz da função, $g(x)$ é decrescente pois a = -1 < 0

Logo $g(x) < 0$ em $x \in (2,+\infty)$, $g(x) = 0$ em $x = 2$ e $g(x) > 0$ em $x \in (-\infty, 2)$



Queremos saber onde $\frac{x+1}{2-x} \geq 0$ isto é $\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0$.

Analisando o gráfico acima chegamos a conclusão que $\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0$ em $x \in [-1,\ 2)$ que é a solução da inequação quociente.

5. Exercícios

1) Determine o conjunto solução das inequações do $1^{\underline{0}}$ grau:

a) $x(x+1)+-2(3x-1) \leq -x(1-x)$

b) $(x+1)^2-(x-1)^2<8$

c) $5x-(x+3)^2 \geq -(2x+9)-x^2$

d) $\frac{5(3x+1)}{2}-\frac{3x}{4}>\frac{5(1-3x)}{8}+\frac{18}{3}$

2) Resolva as seguintes inequações simultâneas do $1^{\underline{0}}$ grau:

a) $-2<3x+1<2$

b) $1 \leq x+1<2x$

c) $4x-2<2-2x \leq 6x$

d) $\frac{2x-1}{4} \geq 5+x>\frac{x+1}{2}$

3) Resolva os sistemas de inequações do $1^{\underline{0}}$ grau:

a) $\begin{cases} -2x-2<0 \\ 2x+1<2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x-1>5x+2 \\ 4x+3<7x-11 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+4 \leq 4x+1 \\ x+1 \geq 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \frac{x}{3}-\frac{x-2}{5}<2 \\ \frac{3(x+6)}{4}>0 \end{cases}$

4) Determine o conjunto solução algébrica e gráfica das inequações produto (do $1^{\underline{0}}$ grau):

a) $(x+3)(x-1)>0$

b) $(2x+1)(-x+2)<0$

c) $(x-1)(x-2)(x+4)>0$

d) $(2x-1)(-3x+2)(-x+3)<0$

e) $(3x+1)(-x-2)(-x-3) \geq 0$

f) $(-x+3)(x-1)>0$

5) Determine o conjunto solução algébrica e gráfica das inequações quociente (do $1^{\underline{0}}$ grau):

a) $\frac{x-1}{x}>0$

b) $\frac{x+3}{-x-2} \geq 0$

c) $\frac{-2x+1}{x-2}<0$

d) $\frac{-2x+4}{-x-5} \leq 0$

e) $\frac{(x+3)(-x+1)}{x+4}<0$

f) $\frac{(x-1)(x+3)}{-x+5} \geq 0$

6) Usando o estudo de inequações do $1^{\underline{0}}$ grau, determine algebricamente o domínio das seguintes funções:

a) $f(x)=\sqrt{-2(3x-1)}$

b) $f(x)=\sqrt{(x-1)(2x+4)}$

c) $f(x)=\sqrt{\frac{x+1}{3-x}}$

d) $f(x)=\sqrt{\frac{(2-x)(x+3}{x}}$