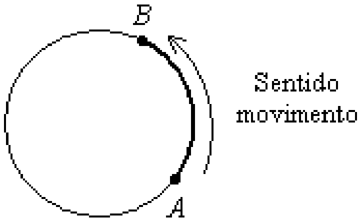
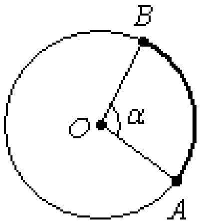
Trigonometria na Circunferência

Arco de circunferência é cada uma das partes em que uma circunferência fica dividida por dois de seus pontos.



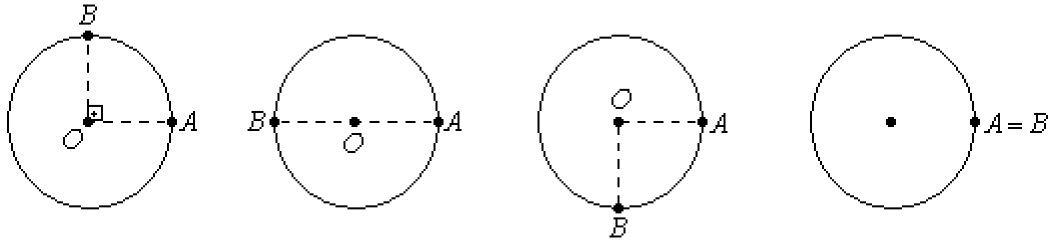
Ângulo Central: Consideremos uma circunferência de centro O e os pontos A e B pertencentes a ela. Unindo os pontos A e B ao centro da circunferência, determinamos o ângulo central $A\hat{O}B$.



Unidades para medir arcos: Para medir arcos e ângulos, utilizamos o grau e o radiano.

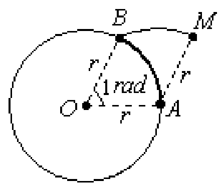
- **Grau:** quando dividimos uma circunferência em 360 partes congruentes, cada uma dessas partes é um arco de um grau (1°).

Temos:
$1^\circ = 60'$ (um grau é igual a sessenta minutos) e
$1' = 60''$ (um minuto é igual a sessenta segundos).
Considere o arco $\overset{\frown}{AB}$, que vai de A para B no sentido anti-horário:

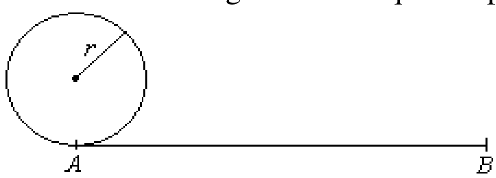


arco $\overset{\frown}{AB}$ de 90° (um quarto de volta) — arco $\overset{\frown}{AB}$ de 180° (meia volta) — arco $\overset{\frown}{AB}$ de 270° (três quartos de volta) — arco $\overset{\frown}{AB}$ de 360° ou 0° (uma volta ou nulo)

- **Radiano:** o radiano rad é o arco unitário cujo comprimento é igual ao raio da circunferência na qual se encontra o arco a ser medido.

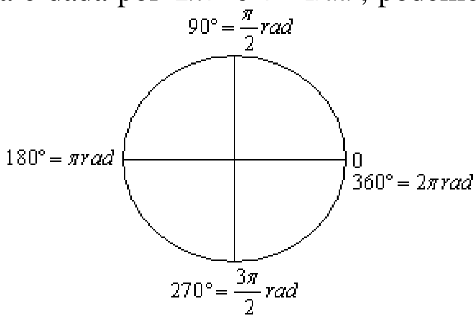


Observação: Seja a circunferência de raio r e o segmento $\overline{AB}$ que a representa:



Sabemos em Geometria que a medida C do comprimento da circunferência (AB) é dada por: $\boxed{C = 2\pi r}$.

Como a medida de uma circunferência é dada por $2\pi r$ e $r = 1 rad$, podemos dizer que uma circunferência (ou arco de uma volta) mede $2\pi rad$.



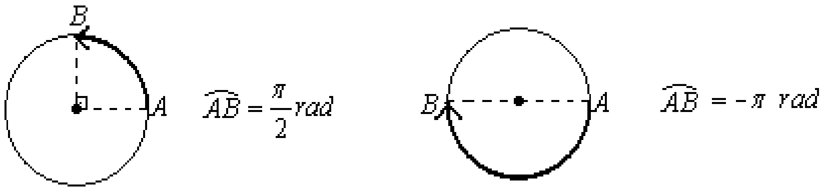
Comprimento de um arco de circunferência: Considerando um arco de circunferência $\widehat{AB}$, raio r e ângulo central α (em radianos), para calcularmos o comprimento de um arco (l), basta estabelecer a seguinte relação:

Comprimento do arco	Medida do arco
r	$1\ rad$
(l)	$\alpha\ rad$

Que nos fornece a relação $\boxed{l = \alpha \cdot r}$, usada para calcular o comprimento de um arco de circunferência em função do raio e do ângulo central correspondente, medido em radianos.

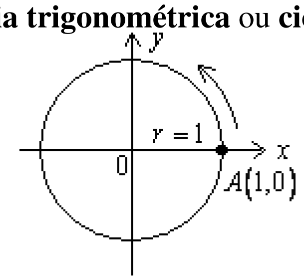
Circunferência Trigonométrica: Uma circunferência se diz **orientada** quando nela fixamos um sentido positivo de percurso. Em trigonometria, convencionou-se estabelecer como sentido positivo o sentido anti-horário (sentido contrário ao do movimento dos ponteiros do relógio). Naturalmente, o sentido negativo é o sentido horário. Todo arco de uma circunferência orientada chama-se **arco orientado**.

Exemplo:



Vamos fixar um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais $x0y$ no plano.

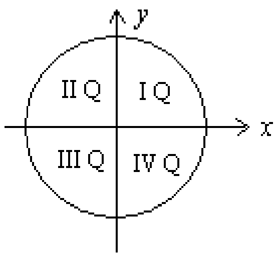
A circunferência orientada de centro na origem do sistema, de raio unitário $(r = 1)$ e cujo sentido positivo é o anti-horário, é denominada **circunferência trigonométrica** ou **ciclo trigonométrico**.



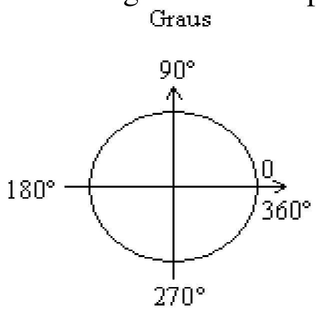
A partir de agora, consideremos apenas os arcos orientados da circunferência trigonométrica com origem no ponto $A(1,0)$, que são chamados **arcos trigonométricos**. O ponto $A(1,0)$ é chamado **origem dos arcos**.

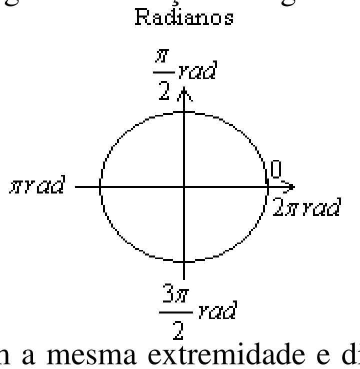
Quadrantes: As retas x e y, eixos do sistema de coordenadas cartesianas ortogonais $x0y$, dividem a circunferência trigonométrica em quatro partes iguais, que são chamadas **quadrantes**.

I Q $\rightarrow$ 1º Quadrante
II Q $\rightarrow$ 2º Quadrante
III Q $\rightarrow$ 3º Quadrante
IV Q $\rightarrow$ 4º Quadrante

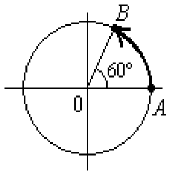


Os quadrantes do ciclo trigonométrico apresentam as seguintes variações em graus e radianos:

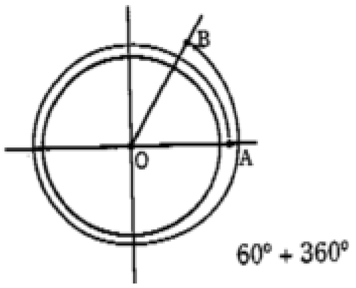


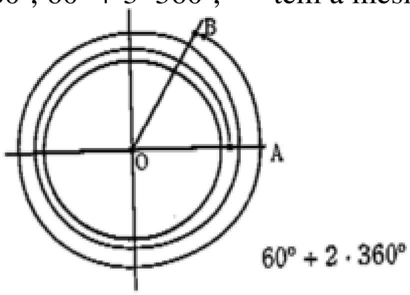


Arcos Côngruos: Dois arcos são **côngruos** quando têm a mesma extremidade e diferem entre si apenas pelo número de voltas inteiras. Vamos representar na circunferência trigonométrica um arco de 60º:

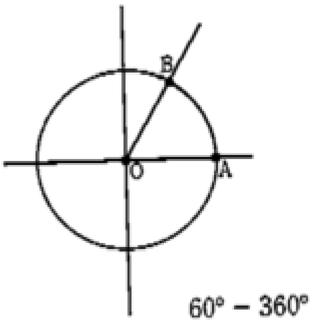


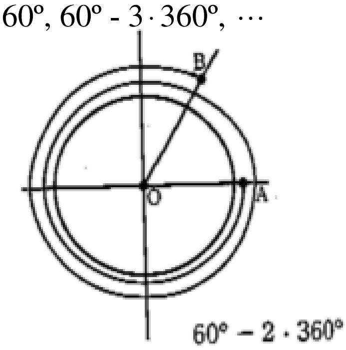
Observe que os arcos de medidas 60º + 360º, 60º + $2 \cdot$ 360º, 60º + $3 \cdot$ 360º, $\cdots$ têm a mesma extremidade do arco de 60º.





O mesmo vai ocorrer com os arcos 60º - 360º, 60º - $2 \cdot$ 360º, 60º - $3 \cdot$ 360º, $\cdots$





Então, os arcos cujas medidas são: $\cdots$, 60º - $3 \cdot$ 360º, 60º - $2 \cdot$ 360º, 60º - 360º, 60º, 60º + 360º, 60º + $2 \cdot$ 360º, 60º + $3 \cdot$ 360º, $\cdots$ têm a mesma extremidade e diferem entre si apenas pelo número de voltas inteiras.

Assim:

- Se um arco mede α graus, a expressão geral dos arcos côngruos a ele é dada por $\alpha^o + k \cdot 360^o$, com $k \in \mathbb{R}$.
- Se um arco mede α radianos, a expressão geral dos arcos côngruos a ele é dada por $\alpha + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{R}$.

Primeira determinação positiva de um arco:

- Se um arco mede α graus, dizemos que um arco de β graus é a sua **primeira determinação positiva** quando $0 \leq \beta < 360^o$ e β é côngruo a α.

- Se o arco mede α radianos, dizemos que um arco de β radianos é a sua **primeira determinação positiva** quando $0 \leq \beta < 2\pi$ e β é côngruo a α.

Exemplos:

1) O valor 60º é chamado **primeira determinação positiva** do arco de 420º.

2) O valor $\frac{\pi}{3}$ é chamado **primeira determinação positiva** do arco de $\frac{7\pi}{3}$.

Exercícios

1. Expresse em rad : **a)** 350º **b)** 12º **c)** 67º30’ **d)** 25º20’ **R.: a)** $\frac{35\pi}{18}rad$. **b)** $\frac{\pi}{15}rad$. **c)** $\frac{3\pi}{8}rad$. **d)** $\frac{19\pi}{135}rad$.

2. Expresse em graus: **a)** $\frac{10\pi}{9}rad$ **b)** $\frac{11\pi}{18}rad$ **c)** $\frac{\pi}{9}rad$ **d)** $\frac{4\pi}{3}rad$ **R.: a)** 200º. **b)** 110º. **c)** 20º. **d)** 240º.

3. Calcule o comprimento de uma circunferência de raio 30 *cm*. **R.:** 188,40*cm*.

4. Sabendo que uma pessoa dá 4 voltas em torno de um canteiro circular de 1,5 *m* de raio, calcule a distância percorrida pela pessoa. **R.:** 37,68*m*.

5. As rodas de um automóvel têm 70 *cm* de diâmetro. Determine o número de voltas efetuadas pelas rodas quando o automóvel percorre 9891 *m*. **R.:** 4500 voltas.

6. Quantos segundos possui um arco de? **a)** 12º **b)** 3º20’ **c)** 20º24’30’’ **R.: a)** 43200’’ **b)** 12000’’ **c)** 73470’’

7. Qual é o comprimento de um arco que subtende um ângulo central de 45º numa circunferência de raio $r = 50\,cm$? **R.:** 39,25*cm*.

8. Determine em radianos, a medida de um arco de circunferência cujo comprimento mede 30 m e o diâmetro dessa circunferência 20 m. **R.:** 3 rad .

9. Uma pessoa, caminhando em volta de uma praça circular, ao percorrer 125,6 *m* descreve um arco de 160º. Qual o diâmetro da praça? **R.:** 90*m*.

10. Numa circunferência de raio 12 *cm*, um arco subtende um ângulo central de 120º. Qual é o comprimento desse arco? **R.:** 25,12 *cm*.

11. Desenhe o ciclo trigonométrico e indique a posição dos arcos:
a) 30º, 45º, 120º, 150º, 225º, 240º, 300º e 315º. **b)** -30º, -60º, -135º, -150º, -210º, -225º e -330º.

12. Marque no ciclo trigonométrico os ângulos: **a)** $\frac{\pi}{2}rad$ **b)** $-\frac{\pi}{3}rad$ **c)** $-\frac{\pi}{4}rad$ **d)** $\frac{7\pi}{4}rad$

13. Quantas voltas completas dá e em qual quadrante pára um móvel que, partindo da origem A dos arcos, percorre um arco de: **a)** 1875º **b)** -1290º **c)** $\frac{27\pi}{4}rad$ **d)** $\frac{31\pi}{6}rad$ **R.: a)** 5, IQ **b)** 3, IIQ **c)** 3, IIQ **d)** 2, IIIQ

14. Verifique se são côngruos o par de arcos: 1850º e -670º. **R.:** Sim.

15. Calcule a 1ª determinação positiva e escreva a expressão geral dos arcos côngruos a:
a) 930º **b)** 1550º **c)** -1970º **d)** $\frac{23\pi}{6}rad$

R.: a) 210º, $\alpha = 210º + k \cdot 360º$, k ∈ IR **b)** 110º, $\alpha = 110º + k \cdot 360º$, k ∈ IR
c) 190º, $\alpha = 190º + k \cdot 360º$, k ∈ IR **d)** $\frac{11\pi}{6}rad$, $\alpha = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$, k ∈ IR

16. Sabendo que a roda da bicicleta tem 60 cm de diâmetro e $\pi = 3{,}14$, responda:
a) Qual o comprimento da circunferência dessa roda?
b) Quantas voltas dará cada roda num percurso de 94,2m? **R.: a)** 188,4 *cm*. **b)** 50 voltas.

17. Calcule, em cada caso, o menor ângulo formado entre os dois ponteiros de um relógio que marca:
a) 4h10min **b)** 3h50min **c)** 9h20min **d)** 14h15min **e)** 3h15min
R.: a) 65º **b)**175º **c)** 160º **d)** 22º30’ **e)** 7º30’

18. Um automóvel percorre 78,5 m de uma curva, descrevendo um arco de 45º. Determine o raio da curva. **R.:** 100m.

19. Um pêndulo de 10 cm de comprimento oscila entre A e B através de um ângulo de 10º. Qual é o comprimento da trajetória descrita pela sua extremidade entre A e B? **R.:** 1,74 *cm*.

20. Escreva a expressão geral dos arcos $\frac{9\pi}{4}$, $\frac{17\pi}{4}$, $-\frac{7\pi}{4}$, $\frac{-23\pi}{4}$,..., apresentando sua posição no ciclo trigonométrico. **R.:** $\frac{\pi}{4} + 2k\pi$, k ∈ IR