Trigonometria na Circunferência – Parte II

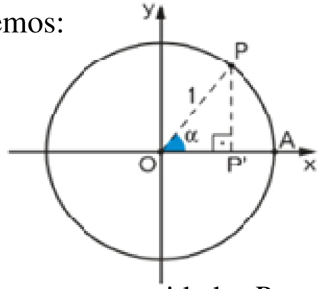
Seno, Cosseno e Tangente de um arco

Seno e Cosseno de um arco: Na circunferência trigonométrica abaixo temos um arco com origem em A e extremidade em P e medida do ângulo α.

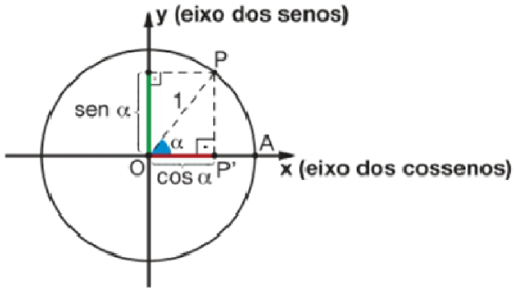
Analisando o triângulo retângulo POP', temos:

$$\text{sen } \alpha = \frac{PP'}{\overline{PO}} = \frac{PP'}{1} = PP'$$

$$\cos \alpha = \frac{OP'}{\overline{PO}} = \frac{OP'}{1} = OP'$$

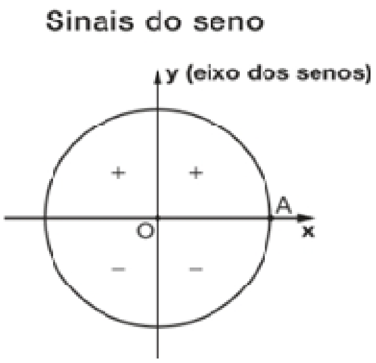


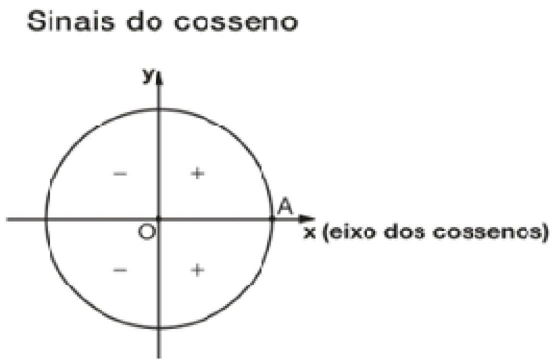
Logo temos que, dado um arco de medida α e extremidade P na circunferência trigonométrica, temos que o seno de α $(\text{sen } \alpha)$ corresponde à projeção de P no eixo y, e o cosseno de α $(\cos \alpha)$ corresponde à projeção de P no eixo x. Dizemos que o **eixo** y é o **eixo dos senos**, e **o eixo** x é o **eixo dos cossenos**.



Se um arco de medida α tem extremidade no:

- 1° quadrante, então $\cos \alpha > 0$ e $\text{sen } \alpha > 0$;
- 2° quadrante, então $\cos \alpha < 0$ e $\text{sen } \alpha > 0$;
- 3° quadrante, então $\cos \alpha < 0$ e $\text{sen } \alpha < 0$;
- 4° quadrante, então $\cos \alpha > 0$ e $\text{sen } \alpha < 0$.

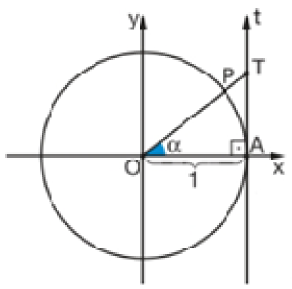




Tangente de um arco: Dado uma circunferência trigonométrica, uma reta t, tangente a ela no ponto A com a mesma orientação do eixo y e um arco $\overset{\frown}{AP}$ de medida α.

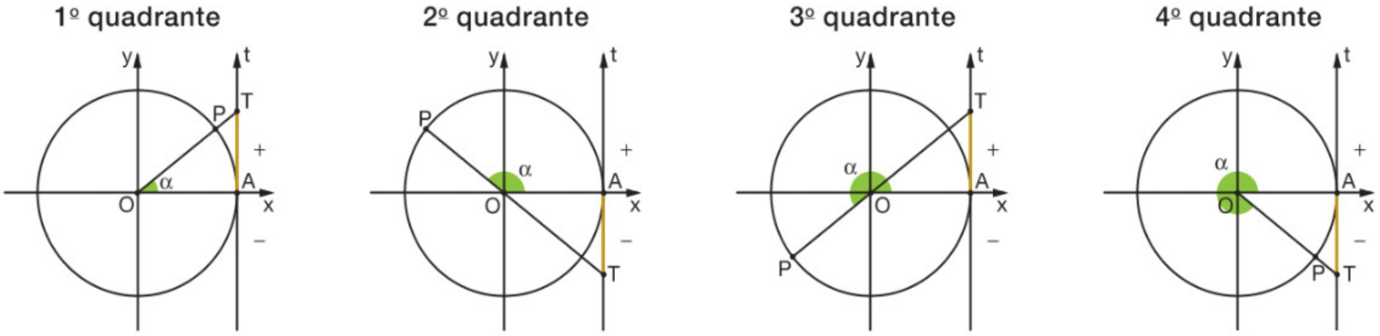
No triângulo retângulo TOA, temos:

$$\text{tg } \alpha = \frac{AT}{\overline{OA}} = \frac{AT}{1} = AT$$



Dado um arco de medida α e extremidade P, com $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, temos que a tangente de α $(\text{tg}\ \alpha)$ corresponde à medida algébrica de $\overline{AT}$, sendo T o ponto obtido na interseção da reta tangente t e $\overline{OP}$. A reta t chamada de **eixo das tangentes.**

O gráfico abaixo apresenta os arcos de extremidade P em cada um dos quatro quadrantes.



Podemos verificar que, se um arco de medida α tem extremidade no:

- 1° quadrante, então $\text{tg}\alpha > 0$;
- 2° quadrante, então $\text{tg}\alpha < 0$;
- 3° quadrante, então $\text{tg}\alpha > 0$;
- 4° quadrante, então $\text{tg}\alpha < 0$.

Alguns valores notáveis para seno, cosseno e tangente:

α	0 ou 0°	$\frac{\pi}{6}$ ou 30°	$\frac{\pi}{4}$ ou 45°	$\frac{\pi}{3}$ ou 60°	$\frac{\pi}{2}$ ou 90°	π ou 180°	$\frac{3\pi}{2}$ ou 270°	2π ou 360°
sen α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tg α	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\nexists$	0	$\nexists$	0

Redução ao primeiro quadrante: Reduzir um arco ao primeiro quadrante é determinar um arco do primeiro quadrante cujas funções trigonométricas sejam iguais em valor absoluto às do arco dado.

Por esse motivo, a tabela seguinte é muito importante, pois ela será útil na resolução de exercícios:

α	0° ou 0	30° ou $\frac{\pi}{6}$	45° ou $\frac{\pi}{4}$	60° ou $\frac{\pi}{3}$	90° ou $\frac{\pi}{2}$
seno	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cosseno	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tangente	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\nexists$

Para reduzir um arco “α” qualquer pertencente ao 2º, 3º ou 4º quadrantes, a um correspondente arco no primeiro quadrante, com o mesmo valor da razão trigonométrica (em módulo), procede-se:

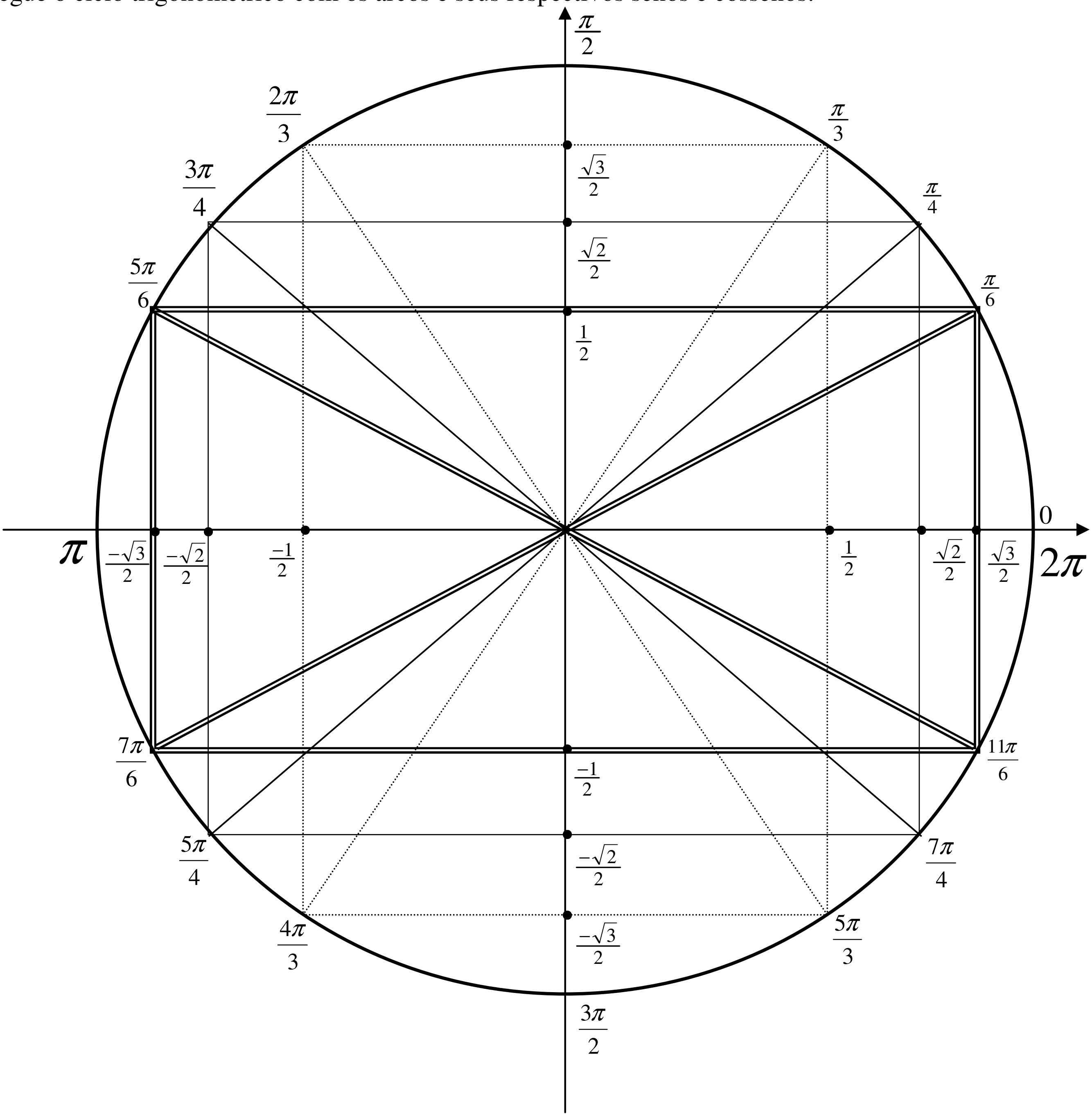
- localize o quadrante em que está o arco a ser reduzido.
- verifique o sinal da razão trigonométrica no referido quadrante.
- faça a redução do arco conforme segue:

  $\rightarrow$ se $\alpha \in 2°$ quadrante $\Rightarrow$ quanto falta para 180º.

  $\rightarrow$ se $\alpha \in 3°$ quadrante $\Rightarrow$ quanto passa de 180º.

  $\rightarrow$ se $\alpha \in 4°$ quadrante $\Rightarrow$ quanto falta para 360º.

Segue o ciclo trigonométrico com os arcos e seus respectivos senos e cossenos:



Se $\alpha \in$ 2º quadrante $\Rightarrow$ $sen\alpha = sen(\pi - \alpha)$, $\cos\alpha = -\cos(\pi - \alpha)$ e $tg\alpha = -tg(\pi - \alpha)$

Se $\alpha \in$ 3º quadrante $\Rightarrow$ $sen\alpha = -sen(\alpha - \pi)$, $\cos\alpha = -\cos(\alpha - \pi)$ e $tg\alpha = -tg(\alpha - \pi)$

Se $\alpha \in$ 2º quadrante $\Rightarrow$ $sen\alpha = -sen(2\pi - \alpha)$, $\cos\alpha = \cos(2\pi - \alpha)$ e $tg\alpha = -tg(2\pi - \alpha)$

Exercícios

1. Determine o valor de:

a) $\text{sen } 900^\circ$. **b)** $\text{sen } \left(-1620^\circ\right)$. **c)** $\text{sen } 765^\circ$. **d)** $\text{sen } \left(-1530^\circ\right)$. **e)** $\text{sen } 13\pi$. **f)** $\text{sen } \frac{9\pi}{2}$. **g)** $\text{sen } \frac{25\pi}{3}$.

Resp.: a) 0. **b)** 0. **c)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **d)** -1. **e)** 0. **f)** 1. **g)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. Calcule o valor da expressão $\text{sen } \frac{9\pi}{4} + \text{sen } \frac{13\pi}{2}$. **Resp.:** $\frac{\sqrt{2}+2}{2}$.

3. Determine o valor de:

a) $\cos 810^\circ$. **b)** $\cos\left(-900^\circ\right)$. **c)** $\cos 1980^\circ$. **d)** $\cos 11\pi$. **e)** $\cos \frac{9\pi}{2}$. **h)** $\cos \frac{13\pi}{6}$.

Resp.: a) 0. **b)** -1. **c)** -1. **d)** -1. **e)** 0. **f)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

4. Sabendo que $A = \frac{\sqrt{2}}{2} + \cos 3x + \cos\frac{x}{2}$ e que $x = \frac{\pi}{2}$, determine o valor de A. **Resp.:** $\sqrt{2}$.

5. Indique os valores do seno e do cosseno do arco:

a) 135° **b)** $\frac{5\pi}{6}$ **c)** $\frac{16\pi}{3}$ **d)** 1380° **e)** $\frac{5\pi}{4}$

Resp.: **a)** $\text{sen } 135^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 135^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. **b)** $\text{sen } \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $\cos\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

c) $\text{sen } \frac{16\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\frac{16\pi}{3} = -\frac{1}{2}$. **d)** $\text{sen } 1380^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 1380^\circ = \frac{1}{2}$.

e) $\text{sen } \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

6. Calcule o valor de:

a) $y = \dfrac{\cos\frac{\pi}{6} - \cos\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{2}}$ **b)** $y = \dfrac{\text{sen }\frac{\pi}{4}\cdot\text{sen }\frac{2\pi}{3}}{\text{sen }\frac{7\pi}{6}\cdot\text{sen }\frac{5\pi}{3}}$ **c)** $y = \dfrac{\text{sen }\frac{\pi}{3} - 2\,\text{sen }\frac{\pi}{6}}{\text{sen }\frac{3\pi}{2} - 3\,\text{sen }\frac{\pi}{2}}$

Resp.: a) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$ **b)** $\sqrt{2}$ **c)** $\frac{-\left(\sqrt{3}-2\right)}{8}$

7. Determine o valor de:

a) $tg 900^\circ$ b) $tg(-540^\circ)$ c) $tg(1500^\circ)$ d) $tg(-1035^\circ)$ e) $tg(11\pi)$ f) $tg(\frac{13\pi}{3})$

Resp.: a) 0 b) 0 c) $\sqrt{3}$ d) 1 e) 0 f) $\sqrt{3}$

8. Calcular $y = sen(3x) + \cos(4x) - tg(2x)$ para $x = \frac{\pi}{2}$.

Resp.: $y = 0$

9. Qual o valor da expressão: $z = \dfrac{sen(\frac{7\pi}{6}) + tg(\frac{5\pi}{4})}{\cos(\frac{5\pi}{3})}$. **Resp.:** 1

10. Determine m para que $\frac{\pi}{3}$ seja raiz da equação $tg^2 x - m\cos^2 x + sen^2 x = 0$. **Resp.:** 15

11. Ache o valor de da expressão $\cos(510^o) + tg(\frac{3\pi}{4})$. **Resp.:** $\frac{-2-\sqrt{3}}{2}$.