Equações Algébricas

Definição: Toda equação da forma $P(x)=0$, em que $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0$ é um polinômio de grau n, denominase **equação algébrica** ou **equação polinomial** de grau n.

Exemplos: a) $2x-1=0$ é uma equação algébrica do $1^{\underline{0}}$ grau.
b) $5x^2+x-3=0$ é uma equação algébrica do $2^{\underline{0}}$ grau.

Sabemos que:

- $ax+b=0$ (com $a\neq 0$) $\Rightarrow x=-\dfrac{b}{a}$ (raiz da equação do $1^{\underline{0}}$ grau).
- $ax^2+bx+c=0$ (com $a\neq 0$) $\Rightarrow x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ (raízes da equação do $2^{\underline{0}}$ grau).

Pelo que podemos observar, nas equações do $1^{\underline{0}}$ grau e do $2^{\underline{0}}$ grau, as raízes são obtidas por fórmulas que envolvem os coeficientes das equações, as operações fundamentais e a extração de raízes.

Alguns matemáticos do século XVI, baseados nesses conhecimentos, já resolviam equações polinomiais de $3^{\underline{0}}$ e $4^{\underline{0}}$ graus, constatando que a quantidade de soluções encontradas era sempre igual ao grau da equação. Entretanto, tais fórmulas de resolução são complicadas demais para terem valor prático.

Estudaremos alguns métodos que nos permitem resolver algumas dessas equações, baseados no **Teorema Fundamental da Álgebra**, demonstrado por Gauss, em 1799:

Toda equação algébrica $P(x)=0$, de grau n ($n\geq 1$), tem pelo menos uma raiz real ou complexa.

Teorema da Decomposição: Todo polinômio $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0$ pode ser escrito na **forma fatorada**:

$$P(x)=a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n),\text{ onde } \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n \text{ são raízes de } P(x).$$

Exemplo 1: Formar o polinômio cujas raízes são 2, -1 e 3.

Exemplo 2: Decompor o polinômio $P(x)=x^3-2x^2-x+2$ em um produto de fatores do $1^{\underline{0}}$ grau, sabendo-se que uma das raízes é -1.

Multiplicidade de uma raiz: As raízes de uma equação algébrica podem ser todas distintas ou não.

- Se uma equação algébrica tiver duas raízes iguais, a raiz terá multiplicidade 2, isto é, será uma raiz dupla; se tiver três raízes iguais, a raiz terá multiplicidade 3, isto é, será uma raiz tripla, e assim sucessivamente.
- Se um número α for uma só vez raiz de uma equação algébrica, ele será chamado raiz simples.

  Exemplo: Seja a equação algébrica $(x-2)^2(x+1)^3(x-3)=0$, que pode ser colocada na forma $(x-2)(x-2)(x+1)(x+1)(x+1)(x-3)=0$. Podemos observar que a equação tem 6 raízes: uma raiz dupla igual a 2, uma raiz tripla igual a -1 e uma raiz simples igual a 3.

Exemplo 1: Sabendo-se que -1 é raiz dupla da equação $x^4-3x^3-3x^2+7x+6=0$, determinar o seu conjunto solução.

Exemplo 2: Calcular a e b de modo que 2 seja raiz dupla da equação $x^3+ax^2-8x+b=0$.

Fatoração de uma equação algébrica com raízes complexas: Se um número complexo $(a+bi)$ é raiz da equação algébrica $P(x)=0$, de coeficientes reais, o complexo conjugado $(a-bi)$ é também raiz da mesma equação.

Observações:

1) Se o número $(a+bi)$ é uma raiz com multiplicidade k, o número conjugado $(a-bi)$ é também uma raiz com a mesma multiplicidade.

   Exemplo: Se o complexo $2+3i$ for raiz dupla de uma determinada equação, o conjugado $2-3i$ será também raiz dupla da mesma equação.

2) As raízes complexas não reais ocorrem aos pares. Portanto, toda equação de grau ímpar, com coeficientes reais, admite pelo menos uma raiz real.

Exemplo: Sabendo-se que uma das raízes da equação $x^4-9x^3+30x^2-42x+20=0$ é $3+i$, determinar seu conjunto solução.

Relações de Girard: São equações matemáticas que relacionam os coeficientes de uma equação algébrica com as raízes.

Seja a equação:

- $ax^2+bx+c=0$ de raízes α_1 e α_2, temos:

$$\begin{cases} \alpha_1+\alpha_2=-\dfrac{b}{a} & \rightarrow \text{ soma das duas raízes} \\ \alpha_1\cdot\alpha_2=\dfrac{c}{a} & \rightarrow \text{ produto das duas raízes} \end{cases}.$$

- $ax^3+bx^2+cx+d=0$ de raízes α_1, α_2 e α_3, temos:

$$\begin{cases} \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=-\dfrac{b}{a} & \rightarrow \text{ soma das duas raízes} \\ \alpha_1\cdot\alpha_2+\alpha_1\cdot\alpha_3+\alpha_2\cdot\alpha_3=\dfrac{c}{a} & \rightarrow \text{ soma dos produtos, tomados dois a dois.} \\ \alpha_1\cdot\alpha_2\cdot\alpha_3=-\dfrac{d}{a} & \rightarrow \text{ produto das três raízes} \end{cases}$$

Seguindo essa linha de raciocínio, é possível deduzir as relações de Girard para qualquer equação.

Exemplo 1: Sejam a, b e c as raízes da equação polinomial $x^3-2x^2-4x+1=0$. Calcular o valor da expressão $a^2+b^2+c^2$.

Exemplo 2: Seja a equação $x^3+x^2+kx+t=0$, em que k e t são coeficientes reais. Sabendo que o complexo $1-2i$ é uma das raízes dessa equação, determinar:

a) Seu conjunto solução. b) Os Valores de k e t.

Exemplo 3: Resolver a equação $x^3-5x^2+7x-3=0$, sabendo-se que uma raiz é dupla.

Raízes Racionais: Se a fração racional irredutível $\dfrac{p}{q}$ for raiz da equação algébrica de grau n e de coeficientes inteiros, $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0=0$, então p é um divisor de a_0 e q é um divisor de a_n.

Exemplo: Determinar o conjunto solução da equação $2x^3-7x^2+7x-2=0$.

Exercícios

1. Forme um polinômio $P(x)$ cujas raízes são 1, -3, i e $-i$.

2. Decomponha em fatores do 1º grau o polinômio $P(x)=3x^3+2x^2-7x+2$, sabendo que suas raízes são -2, $\frac{1}{3}$ e 1.

3. Se -1 é raiz da equação $x^3+x^2-3x-3=0$, determine as outras duas raízes.

4. O polinômio $P(x)=x^3-x^2+x+a$ é divisível por $x-1$. Ache todas as raízes complexas de $P(x)$.

5. Determine k, de modo que 2 seja uma das raízes da equação $x^3+kx^2+20x-12=0$.

6. Sabendo que 2 é uma raiz simples da equação $x^3+2x^2-13x+10=0$, determine o seu conjunto solução.

7. Resolva a equação $x^3+5x^2-18x-72=0$, sabendo que -3 é uma de suas raízes.

8. Sabendo que 1 e 3 são raízes da equação $x^4-8x^3+24x^2-32x+15=0$, determine o seu conjunto solução.

9. Solucione a equação polinomial $x^4-7x^3+13x^2+3x-18=0$, sabendo que 3 é raiz dupla da equação.

10. Resolva a equação $x^5+5x^4+6x^3-2x^2-7x-3=0$, sabendo que -1 é raiz tripla da equação.

11. Sabe-se que 5 é raiz da equação $x^3-5x^2+x+m=0$:

a) Determinar o valor de m. **b)** Resolva a equação.

12. O número 2 é raiz dupla da equação $ax^3+bx+16=0$. Determine a e b.

13. Dê o conjunto solução da equação $x^4-x^3-11x^2-x-12=0$, sabendo que i é uma de suas raízes.

14. Determinar o valor de m, para que a equação $x^4-3x^3+6x^2+mx+8=0$ tenha como uma de suas raízes $2i$.

15. Sabendo que $1+2i$ é raiz da equação $x^4-7x^3+19x^2-33x+20=0$, encontre seu conjunto solução.

16. Se a, b e c são raízes da equação $x^3-2x^2+3x-4=0$, calcule o valor de $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$.

17. Dada a equação polinomial $2x^3-4x^2+3x-1=0$, de raízes a, b e c, encontre o valor de:

a) $\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}$. **b)** $a^{-1}+b^{-1}+c^{-1}$. **c)** $\frac{a}{bc}+\frac{b}{ca}+\frac{c}{ab}$.

18. Resolva a equação $x^3-3x^2-6x+8=0$, sabendo que a soma de duas de suas raízes é igual a 5.

19. Sabendo que $2+i$ é uma das raízes da equação $3x^3-14x^2+mx-10=0$, determine o valor de m.

20. Determine as raízes da equação $x^3-16x^2+85x-150=0$, sabendo que uma das raízes tem multiplicidade 2.

21. Resolva as equações:

a) $x^3-16x^2-x+30=0$. **b)** $2x^3-x^2-2x+1=0$.

22. Determine as raízes da equação $3x^3-13x^2+13x-3=0$.

23. Resolva a equação cúbica $x^3-2x^2-3x+6=0$.

24. Encontre, se existir, as raízes racionais da equação $4x^3-5x+1=0$.

Respostas

1. $P(x)=x^4+2x^3-2x^2+2x-3$. **2.** $P(x)=3(x+2)\left(x-\frac{1}{3}\right)(x-1)$. **3.** $\{-\sqrt{3},\sqrt{3}\}$. **4.** $\{1,i,-i\}$.

5. -9. **6.** $\{-5,1,2\}$. **7.** $\{-6,-3,4\}$. **8.** $\{1,3,2-i,2+i\}$. **9.** $\{-1,2,3\}$. **10.** $\{-3,-1,1\}$. **11.**a) $m=-5$.

b) $\{5,i,-i\}$. **12.** $a=1$ e $b=-12$. **13.** $\{-3,4,-i,i\}$. **14.** $m=-12$. **15.** $\{1,4,1-2i,1+2i\}$. **16.** $\frac{3}{4}$.

17. a) 4. b)3. c)2. **18.** $\{-2,1,4\}$. **19.** $m=23$. **20.** $\{5,6\}$. **21.** a) $\{-2,3,5\}$. b) $\left\{-1,1,\frac{1}{2}\right\}$.

22. $\left\{\frac{1}{3},1,3\right\}$. **23.** $\{-\sqrt{3},\sqrt{3},2\}$. **24.** $\left\{1,\frac{-1+\sqrt{2}}{2},\frac{-1-\sqrt{2}}{2}\right\}$.