POLINÔMIOS

Definição: Dado um número natural n e os números complexos a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, $\cdots$, a_2, a_1, a_0, denominamos função polinomial ou polinômio em $\mathbb{R}$ à função:

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ definida para todo $\mathbb{R}$.

Os números a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, $\cdots$, a_2, a_1, a_0 são os coeficientes do polinômio.

$x \in \mathbb{R}$ é a variável e a_0 é o termo independente.

Grau de Polinômio: Dado um polinômio com pelo menos um termo de coeficiente não nulo, o grau de $P(x)$ é o maior expoente da variável x nos termos com coeficiente diferente de zero indica-se por $gr(P)$.

Obs. Não se define grau de polinômio nulo.

Exemplos: $P(x) = 8x^3 - 7x + 2 \to gr(P) =$

$P(x) = 5x^2 - 0x + 10 \to gr(P) =$

$P(x) = 8 \to gr(P) =$

$P(x) = 0 \to \nexists gr(P)$.

Valor Numérico de um Polinômio: O valor numérico do polinômio $P(x)$, para $x = a$, é o número que se obtém substituindo x por a e efetuando todas as operações indicadas pela relação que define o polinômio.

Exemplo: Se $P(x) = x^3 + 2x^2 - x - 1$, o valor numérico de $P(x)$, para $x = 2$, é:

Raiz ou zero de um Polinômio: Se um número complexo (real ou imaginário) a é raiz ou zero de $P(x)$, então $P(a) = 0$.

Exemplo 1: No polinômio $P(x) = x^2 - 5x + 6$, temos $P(2) = 0$; então 2 é a raiz ou zero de $P(x)$.

Exemplo 2: Sabendo-se que -3 é raiz de $P(x) = x^3 + 4x^2 - ax + 1$, calcular o valor de a.

Polinômio Nulo: Um Polinômio é nulo se todos os coeficientes são iguais a zero, ou seja, $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ é polinômio nulo se e somente se, $a_n = a_{n-1} = a_{n-2} = \cdots = a_2 = a_1 = a_0 = 0$.

Não se define grau de polinômio nulo.

Polinômios Idênticos ou Iguais: Dois polinômios $A(x)$ e $B(x)$ são iguais ou idênticos quando os coeficientes dos termos de mesmo grau são iguais.

Exemplo 1: Calcular a, b e c, sabendo-se que $x^2 - 2x + 1 \equiv a\left(x^2 + x + 1\right) + \left(bx + c\right)\left(x + 1\right)$.

Exemplo 2: Sabendo-se que $\dfrac{A}{x+4} + \dfrac{B}{x-1} \equiv \dfrac{5x+10}{x^2+3x-4}$, calcular A e B.

Operações com Polinômios: Por meio de exemplos, vamos retomar operações conhecidas no estudo de expressões algébricas, como adição, subtração e multiplicação de polinômios, além da multiplicação de um número real por um polinômio. Em seguida, estudaremos mais detalhadamente a divisão de polinômios.

Exemplo 1: Se $A(x) = 3x^2 + 2x - 1$ e $B(x) = -x^3 + 4x^2 - 2x - 5$. Calcular $A(x) + B(x)$.

Exemplo 2: Se $A(x) = 3x^2 - 4x + 1$ e $B(x) = 5x^2 - 3x + 4$. Calcular $A(x) - B(x)$.

Exemplo 3: Se $A(x) = 2x^3 - 4x^2 + 5x - 3$. Calcular $7\left[A(x)\right]$.

Exemplo 4: Se $A(x)=3x^2-4x+1$ e $B(x)=3x+4$. Calcular $A(x)\cdot B(x)$.

Divisão de Polinômios

<u>Método de Euclides</u>: Consiste simplesmente em fazer a divisão de polinômios usando a "chave".

Exemplo: Dividir o polinômio $A(x)=4x^2-2x+3$ por $B(x)=2x-1$.

<u>Método de Descarte</u>: Sejam dois polinômios $A(x)$ e $B(x)$, com $B(x)\neq 0$.

Efetuar a divisão de A por B é determinar dois polinômios $Q(x)$ e $R(x)$ que satisfaçam as seguintes condições:

$$\begin{array}{r|l} A(x) & B(x) \\ \cline{2-2} R(x) & Q(x) \end{array}$$

1) $A(x)\equiv Q(x)\cdot B(x)+R(x)$
2) $gr(R)<gr(B)$ ou $R(x)=0$.

Nessa divisão, temos:

$A(x)$ é o dividendo. $B(x)$ é o divisor. $Q(x)$ é o quociente. $R(x)$ é o resto.

Observação: Se $B(x)$ é o divisor de $A(x)$ $\Leftrightarrow$ $R(x)=0$.

Exemplo 1: Determinar o quociente de $A(x)=x^4+x^3-7x^2+9x-1$ por $B(x)=x^2+3x-2$.

Exemplo 2: O polinômio $P(x)=x^3+px+q$ é divisível por x^2+2x+5. Calcular os valores de p e q.

Divisão de um $P(x)$ por um binômio do tipo $ax+b$

- **Teorema do resto**: O resto de um polinômio $P(x)$ pelo binômio $(ax+b)$ é igual a $P\left(-\frac{b}{a}\right)$
- Se o polinômio $P(x)$ é divisível por $(ax+b)$ então $P\left(-\frac{b}{a}\right)=0$, logo $-\frac{b}{a}$ é raiz de $P(x)$.
- Se o polinômio $P(x)$ é divisível por $(x-a)(x-b)$ então $P(a)=0$ e $P(b)=0$, logo a e b são raízes de $P(x)$.

Exemplo: Determinar o valor de p, para que o polinômio $P(x)=2x^3+5x^2-px+2$ seja divisível por $x-2$.

<u>**Dispositivo prático de Briot-Ruffini**</u>: Só pode ser usado para divisor do 1º grau do tipo $ax+b$.

Exemplo: Determinar o quociente e o resto da divisão de $P(x)=3x^3-5x^2+x-2$ por $x-2$.

Exercícios

1. Considere os polinômios $A(x)=x^2-x+1$; $B(x)=-2x^2+3$ e $C(x)=x^3-x+2$. Represente sob a forma de polinômio reduzido e dê o grau de:
   a) $A-2B+C$ **b)** $(A-B)^2-3(C+B)$
2. Transforme num polinômio reduzido e ordenado segundo as potências decrescentes de x cada um dos polinômios:
   a) $P_1(x)=5x+1-\left[(x+1)^2-x(3-x)^2\right]$ **b)** $P_2(x)=4\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{4}-x\right)-2(2-x)^2$
3. Dado o polinômio $P(x)=2x^3-x^2+x+3$, calcular $\frac{P(2)-2P(-1)}{P\left(\frac{1}{2}\right)}$.
4. Sejam os polinômios $A(x)=x^3-x^2+x-1$ e $B(x)=-3x^2+x+2$. Calcule:
   a) $A\left(\frac{1}{2}\right)-B(-1)$ **b)** $A(0)+B(1)$
5. Sendo $P(x)=x^2-2x+1$, calcule:
   a) $P(i)$ **b)** $P(1+i)$ **c)** $P(2-i)$
6. Determine $m\in\mathbb{R}$, para que o polinômio $P(x)=(m-4)x^3+(m^2-16)x^2+(m+4)x+4$ seja de grau 2.

7. O polinômio P é tal que $P(x)+x\cdot P(2-x)=x^2+3$ para todo x real. Determine $P(0)$, $P(1)$ e $P(2)$.

8. Sabendo que -3 é raiz de $P(x)=x^3+4x^2-ax+1$, calcule o valor de a.

9. Se $P(x)=x^3+(a-2)x^2+(b-4)x-3$ admite as raízes 1 e -1, calcule os valores de a e b.

10. Num polinômio $P(x)$, do 3° grau, o coeficiente de x^3 é 1. Se $P(1)=P(2)=0$ e $P(3)=30$, calcule o valor de $P(-1)$.

11. Seja o polinômio $P(a+2)=2a^2-3a+1$.

a) Calcule $P(-1)$ e $P(4)$. **b)** Determine $P(a)$.

12. Determine m, n e p, de modo que $(mx^2+nx+p)(x+1)\equiv 2x^3+3x^2-2x-3$.

13. Sendo $x^3+1\equiv(x+1)(x^2+ax+b)$, para todo x real, determine os valores de a e b.

14. Calcule a, b e c pertencentes ao conjunto dos números reais, de modo que para todo valor real de x se tenha $3x^2+ax+b=(x-b)^2+cx^2+x$.

15. Considere os polinômios $A(x)=x^2-3x+1$, $B(x)=(x+4)(2-5x)$ e $C(x)=mx^2+(n+4)x-2p$. Determine m, n e p de modo que $A(x)+B(x)=C(x)$.

16. Ache os valores de m, n e p que satisfazem a igualdade: $5x^2-19x+18=p(x-2)(x-3)+m(x-1)(x-3)+n(x-1)(x-2)$.

17. Calcule a, b, c e d, para que o polinômio $P_1(x)=a(x+c)^3+b(x+d)$ seja idêntico a $P_2(x)=x^3+6x^2+15x+14$.

18. Dados $A(x)=(a+1)x^2+(b-1)x+c$ e $B(x)=ax^2+bx-3c$, calcule a, b e c, para que $A(x)+B(x)\equiv 0$.

19. Determine A, B e C na decomposição $\dfrac{1}{x^3-1}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{Bx+C}{x^2+x+1}$.

20. Determine A, B e C, sabendo que $\dfrac{5-3x}{x^3-5x^2+6x}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x-2}+\dfrac{C}{x-3}$.

21. Dê o quociente e o resto da divisão de $f(x)=2x^3+x^2-x+2$ por $g(x)=x^2+3x+1$.

22. Ache $Q(x)$ e $R(x)$ na divisão de $A(x)=x^4-1$ por $B(x)=x+1$.

23. Determine α e β, para que seja exata a divisão de $A(x)=2x^3+\alpha x^2+\beta x-1$ por $B(x)=2x^2-x-1$.

24. Determine p e q, de modo que o resto da divisão de $A(x)=x^4+px^3-x^2+qx+1$ por $B(x)=x^2+x+1$ seja igual a $x+2$.

25. Dividindo (x^3-4x^2+7x-3) por um certo polinômio $P(x)$, obtemos o quociente $(x-1)$ e o resto $(2x-1)$. Determine o polinômio $P(x)$.

26. Dados os polinômios $F=3x^3-2x^2-11$, $G=x^3-2x-1$ e $H=x+1$, determine:

a) O polinômio $P=(F-3G)\div H$. **b)** O grau do polinômio $(F\cdot G)$.

27. Calcule o resto da divisão de:

a) x^2+5x-1 por $x+1$. **b)** $3x^4-x^2+4x$ por $x-2$. **c)** $6a^3+2a^2-a+3$ por $2a$.

28. Dê o resto da divisão de $P(x)=x^3+7x^2-2x+1$ por:

a) $x-3$. **b)** $x+3$. **c)** $2x+5$.

29. Ache k, de modo que o polinômio $P(x)=x^3-x^2+kx-1$ dividido por:

a) $x-1$ dê resto 4. **b)** $2x-3$ dê resto -1.

30. Determine o resto da divisão de:

a) x^2+x+2 por $x-1$. **b)** $5x^3+2x^2-x+4$ por x. **c)** $x^6-x^4+x^2$ por $x+2$.

31. Qual é o número real que se deve adicionar a $P(x)=x^3-2x^2+x$ para se obter um polinômio divisível por $x-3$?

32. O polinômio $A(x)$ do 2° grau dividido por x, $(x-1)$ e $(x+2)$ apresenta restos 1, 0 e 4, respectivamente. Calcule $A(x)$.

33. Determine o polinômio $P(x)$ do 3° grau que se anula para $x=1$ e que, dividido por $x+1$, $x-2$ e $x+2$, apresenta resto igual a 6.

34. Determine m e n, de modo que $P(x)=2x^4-x^3+mx^2-nx+2$ seja divisível por $(x-2)\,(x+1)$.

35. O polinômio $P(x)=x^4-4x^3+mx^2+4x+n$ é divisível por $(x-1)(x-2)$. Calcule o valor de $5m+2n$.

36. Nos esquemas abaixo, foi aplicado o dispositivo prático de Briot-Ruffini, calcule o valor dos elementos desconhecidos em cada um deles:

a)

2	**a**	**b**	**c**	**d**
	1	**3**	**-2**	**1**

b)

-1	**a**	**b**	**c**	**d**
	4	**-2**	**-1**	**0**

37. Ache o quociente e o resto da divisão de:

a) $P(x)=x^6-x^4$ por $x-1$. **b)** $P(x)=-2x^7+x^3+x$ por $x+2$.

38. Aplicando o dispositivo prático de Briot-Ruffini, calcule o quociente e o resto da divisão de:

a) $P(x)=x^4-5x^3+2x^2+3x-1$ por $x-2$.

b) $P(x)=2x^3-x^2-1$ por $x-1$.

c) $P(x)=5x^2-3x+2$ por $x+3$.

d) $P(x)=4x^5-5x^4+1$ por $x-1$.

e) $P(x)=2x^3-3x^2+x+2$ por $2x-1$.

f) $P(x)=x^2-2x+1$ por $2x-3$.

Respostas

1.a) x^3+5x^2-2x-3, grau 3. **b)** $9x^4-9x^3-5x^2+7x-11$, grau 4. **2.a)** x^3-7x^2+12x. **b)** $-6x^2+11x-\frac{17}{2}$. **3.** $\frac{38}{7}$. **4.a)** $\frac{11}{8}$. **b)**-1. **5.a)** $-2i$. **b)**-1. **c)** $-2i$. **6.** $\nexists m\in\mathbb{R}$. **7.a)** $P(0)=3$. **b)** $P(1)=2$. **c)** $P(2)=1$. **8.** $a=-\frac{10}{3}$. **9.** $a=5$ e $b=3$. **10.** 66. **11.a)** $P(-1)=28$ e $P(4)=3$. **b)** $P(a)=2a^2-11a+15$. **12.** $m=2$, $n=1$ e $p=-3$. **13.** $a=-1$ e $b=1$. **14.** $a=1$, $b=0$ e $c=2$ ou $a=-1$, $b=1$ e $c=2$. **15.** $m=-4$, $n=-25$ e $p=-\frac{9}{2}$. **16.** $m=0$, $n=3$ e $p=2$. **17.** $a=1$, $b=3$, $c=2$ e $d=2$. **18.** $a=-\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{2}$ e $c=0$. **19.** $A=\frac{1}{3}$, $B=-\frac{1}{3}$ e $C=-\frac{2}{3}$. **20.** $A=\frac{5}{6}$, $B=\frac{1}{2}$ e $C=-\frac{4}{3}$. **21.** $Q(x)=2x-5$ e $R(x)=12x+7$. **22.** $Q(x)=x^3-x^2+x-1$ e $R(x)=0$. **23.** $\alpha=1$ e $\beta=-2$. **24.** $p=0$ e $q=-1$. **25.** $P(x)=x^2-3x+2$. **26. a)** $-2x+8$. **b)** 6. **27. a)**-5. **b)**52. **c)**3. **28.a)**85. **b)**43. **c)** $\frac{273}{8}$. **29.a)** $k=5$. **b)** $k=-\frac{3}{4}$. **30.a)**4. **b)**4. **c)**52. **31.** -12. **32.** $A(x)=\frac{1}{6}x^2-\frac{7}{6}x+1$. **33.** $P(x)=x^3+x^2-4x+2$. **34.** $m=-6$ e $n=1$. **35.**7. **36.a)** $a=1$, $b=1$, $c=-8$ e $d=5$. **b)** $a=4$, $b=2$, $c=-3$ e $d=-1$. **37.a)** $Q(x)=x^5+x^4$ e $R(x)=0$. **b)** $R(x)=246$ e $Q(x)=-2x^6+4x^5-8x^4+16x^3-31x^2+62x-123$. **38.a)** $Q(x)=x^3-3x^2-4x-5$ e $R(x)=-11$. **b)** $Q(x)=2x^2+x+1$ e $R(x)=0$. **c)** $Q(x)=5x-18$ e $R(x)=56$. **d)** $Q(x)=4x^4-x^3-x^2-x-1$ e $R(x)=0$.