TRIGONOMETRIA

A ***trigonometria***, palavra formada por três radicais gregos: ***tri***(três), ***gonos***(ângulos) e ***metron***(medir), tem por objetivo o cálculo das medidas dos lados e ângulos de um triângulo. Inicialmente considerada uma extensão da Geometria, a Trigonometria apresentava vestígios de seu estudo entre os babilônios, que a utilizavam para resolver problemas práticos de Astronomia, navegação e agrimensura.

Pode-se dizer que foi a Astronomia a grande impulsionadora da Trigonometria, pois foi o astrônomo grego Hiparco (190 a.C. - 125 a.C.) quem empregou pela primeira vez relações entre os lados e os ângulos de um triângulo retângulo. No século VII, importantes trabalhos hindus foram traduzidos para o árabe, o que possibilitou aos matemáticos árabes notáveis descobertas sobre a Trigonometria. Já no século XV, Purback, matemático alemão nascido na Baviera, constrói a primeira tábua trigonométrica. Porém o primeiro tratado feito de maneira sistemática sobre a Trigonometria foi escrito pelo matemático alemão Johann Müller, também chamado Regiomontanus, denominado Tratado dos Triângulos. Sabe-se que Regiomontanus foi discípulo de Purback.

Atualmente, a Trigonometria não se limita apenas a estudar os triângulos. Sua aplicação se estende a outros campos da Matemática, como a Análise e a outros campos da atividade humana, como a Eletricidade, a Mecânica, a Acústica, a Música, a Topografia, a Engenharia Civil, etc.

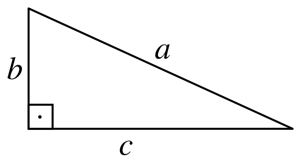
1 Trigonometria no Triângulo Retângulo

1.1 Teorema de Pitágoras

Pitágoras (580 – 500 a.C.) - Pitágoras foi um filósofo grego que deu importantes contribuições para o desenvolvimento da Matemática, da Astronomia e da Teoria Musical. Não existem relatos originais de seus trabalhos e por isso crio-se o mito em torno de seu nome. Conta a lenda que , após vinte anos de viagem pelo mundo conhecido, ele retornou à sua terra natal, Samos, para fundar uma escola para estudo de Filosofia e Matemática. Mas o rei Polícrates, um tirano, o proibiu. Partiu então para Crotona, sul da Itália, onde fundou sua escola, chamada "*Irmandade Pitagórica*". Criou a palavra "filósofo" (do grego philos – amigo; sophia – saber) quando pediram que descrevesse a si próprio:

"...na vida alguns são influenciados pela busca da riqueza, enquanto outros são dominados pela febre do poder. Mas os melhores entre os homens se dedicam à descoberta do significado e do propósito da vida... A estes homens eu chamo de filósofos, homens que podem amar a sabedoria como chave para descobrir os segredos da natureza..."

Dentre os trabalhos relacionados a Pitágoras, o mais importante é o célebre **teorema** que leva seu nome:
"O quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos."



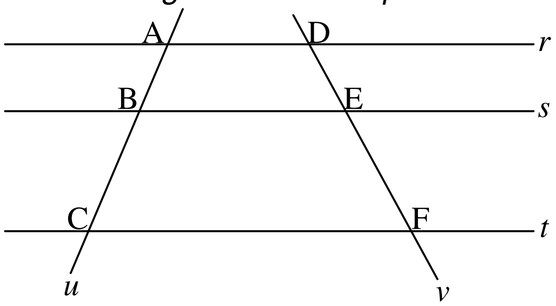
$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$$

Historicamente é sabido que, 1.000 anos antes, os babilônicos e os egípcios já usavam essa relação para medir a Terra, mas coube a Pitágoras ser o primeiro a provar essa verdade matemática.

Na música conta-se uma história interessante: querendo saber o porquê da afinação (harmonia) das cordas de instrumentos musicais quando tocadas em certas posições, Pitágoras teve a resposta ao passar por um ferreiro. Ao ouvir o som de martelos batendo no ferro, observou que alguns *"batiam harmonicamente"*. Verificou que os harmoniosos tinham uma relação matemática simples – suas massas eram proporcionais, isto é, martelos com metade, dois terços ou três quartos da massa de determinado martelo eram harmoniosos. Analogamente, fixando a corda na metade do comprimento, produziu um som harmônico (uma oitava mais alta) e assim consegui explicar o porquê da afirmação em certas posições.

1.2 Teorema de Tales

Teorema: *Se duas restas transversais são cortadas por um feixe de retas paralelas, então a razão entre quaisquer dois segmentos determinados em uma das transversais é igual à razão entre os segmentos correspondentes da outra transversal.*

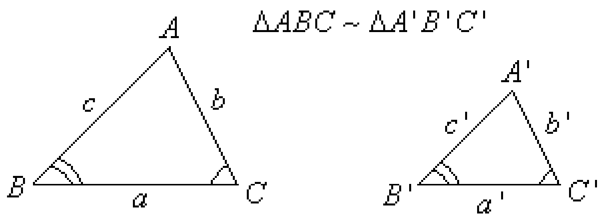


A partir do Teorema de Tales e da figura acima temos:

a) $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \dfrac{\overline{DE}}{\overline{EF}}$ b) $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{DF}}{\overline{DE}}$ c) $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \dfrac{\overline{DF}}{\overline{EF}}$

1.3 Semelhanças de Triângulos

Dois triângulos são semelhantes se as condições abaixo são satisfeitas simultaneamente:
- as medidas dos lados correspondentes são proporcionais;
- as medidas dos ângulos correspondentes devem ser iguais.

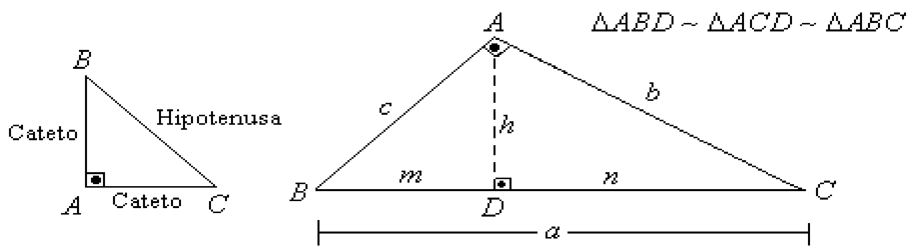


Propriedades:

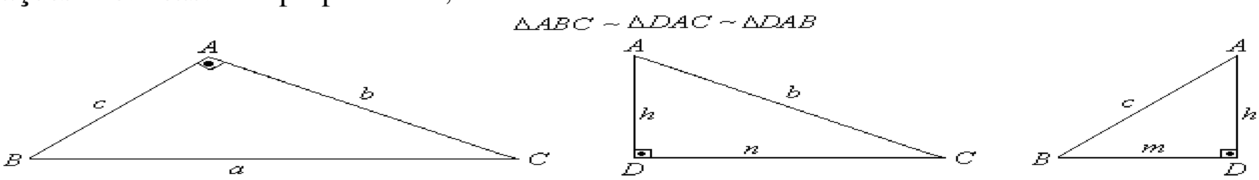
1ª) Se dois triângulos são semelhantes, então os lados de um são proporcionais aos lados do outro triângulo.

$$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \Rightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}.$$

2ª) No triângulo retângulo, a altura relativa à hipotenusa sempre determina dois triângulos que são semelhantes entre si e ao triângulo dado.



As relações Métricas: Das propriedades, temos:



Considerando a semelhança entre os dois primeiros triângulos:

$$\boxed{\frac{a}{b}=\frac{b}{n}=\frac{c}{h}} \Rightarrow \boxed{ah=bc},\quad \boxed{bh=cn} \quad \text{e} \quad \boxed{b^2=an}.$$

Pela semelhança entre o primeiro e o terceiro triângulos:

$$\boxed{\frac{a}{c}=\frac{b}{h}=\frac{c}{m}} \Rightarrow \boxed{ah=bc},\quad \boxed{bm=ch} \quad \text{e} \quad \boxed{c^2=am}.$$

Considerando a semelhança entre os dois últimos triângulos, podemos escrever:

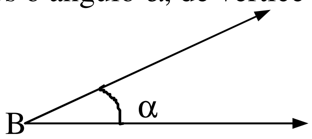
$$\boxed{\frac{c}{b}=\frac{h}{n}=\frac{m}{h}} \Rightarrow \boxed{cn=bh},\quad \boxed{ch=bm} \quad \text{e} \quad \boxed{h^2=mn}.$$

Lembrando que $a=m+n$ e considerando duas das relações acima (e somando-se membro a membro), temos:

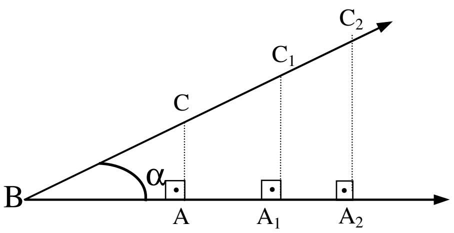
$$\begin{array}{rl} & a\cdot n=b^2 \\ + & a\cdot m=c^2 \\ \hline & a\cdot n+a\cdot m=b^2+c^2 \quad \Rightarrow \\ & a(n+m)=b^2+c^2 \quad \Rightarrow \\ & a(a)=b^2+c^2 \quad \Rightarrow \\ & a^2=b^2+c^2. \quad \text{Teorema de Pitágoras.} \end{array}$$

1.4 Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo

Consideremos o ângulo α, de vértice B, indicado na figura.



Sobre um dos lados do ângulo α, tomamos arbitrariamente os pontos A, A_1, A_2, ... e por esses pontos traçamos perpendiculares ao lado $\overline{AB}$ que encontram o outro lado do ângulo nos pontos C, C_1, C_2,..., respectivamente. Obtemos, assim, os triângulos retângulos ABC, A_1BC_1, A_2BC_2, ... todos semelhantes entre si; podemos, então estabelecer as proporções:



$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{A_1C_1}}{\overline{BC_1}}=\frac{\overline{A_2C_2}}{\overline{BC_2}}=\ldots=k_1$$

$$\frac{\overline{BA}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{BA_1}}{\overline{BC_1}}=\frac{\overline{BA_2}}{\overline{BC_2}}=\ldots=k_2$$

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BA}}=\frac{\overline{A_1C_1}}{\overline{BA_1}}=\frac{\overline{A_2C_2}}{\overline{BA_2}}=\ldots=k_3$$

O número k_1 assim obtido, é chamado ***seno do ângulo agudo*** α e se indica por:

$$\text{sen}\,\alpha=\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$$

O número k_2, assim obtido é chamado ***cosseno do ângulo agudo*** α e se indica por:

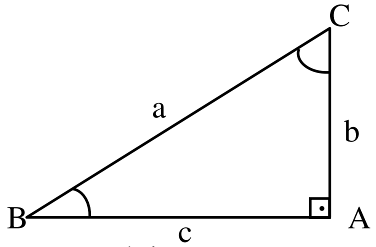
$$\cos\alpha=\frac{\overline{BA}}{\overline{BC}}$$

O número k_3, assim obtido, é chamado ***tangente do ângulo agudo*** α e se indica:

$$tg\,\alpha=\frac{\overline{AC}}{\overline{BA}}$$

Os números ***sen*** α, ***cos*** α, ***tg*** α são chamados ***razões trigonométricas do ângulo*** α e não dependem dos pontos A, A_1, A_2, ... (só variam quando variar o ângulo).

Considerando-se o triângulo retângulo ABC ($\hat{A} = 90^o$), temos:



$\overline{BC}$ = hipotenusa = a
$\overline{AC}$ = cateto = b
$\overline{AB}$ = cateto = c
$\hat{B} + \hat{C} = 90^o$

$\overline{AC}$ = cateto oposto ao ângulo $\hat{B}$
$\overline{AB}$ = cateto adjacente ao ângulo $\hat{B}$
$\overline{AC}$ = cateto adjacente ao ângulo $\hat{C}$
$\overline{AB}$ = cateto oposto ao ângulo $\hat{C}$

Podemos então concluir que:

$$\text{sen}\,\hat{B} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\text{cateto oposto a }\hat{B}}{\text{hipotenusa}} \Rightarrow \text{sen}\,\hat{B} = \frac{b}{a}$$

$$\cos\hat{B} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\text{cateto adjacente a }\hat{B}}{\text{hipotenusa}} \Rightarrow \cos\hat{B} = \frac{c}{a}$$

$$tg\hat{B} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\text{cateto oposto a }\hat{B}}{\text{cateto adjacente a }\hat{B}} \Rightarrow tg\hat{B} = \frac{b}{c}$$

$$\text{sen}\,\hat{C} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\text{cateto oposto a }\hat{C}}{\text{hipotenusa}} \Rightarrow \text{sen}\,\hat{C} = \frac{c}{a}$$

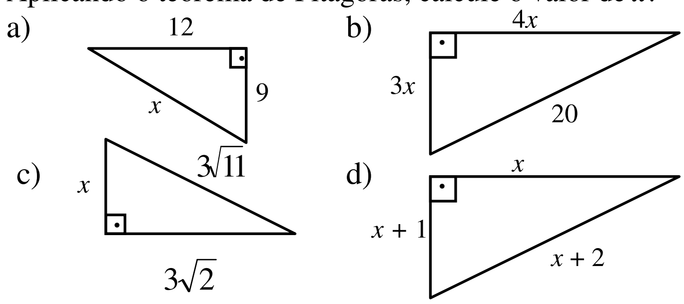
$$\cos\hat{C} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\text{cateto adjacente a }\hat{C}}{\text{hipotenusa}} \Rightarrow \cos\hat{C} = \frac{b}{a}$$

$$tg\hat{C} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\text{cateto oposto a }\hat{C}}{\text{cateto adjacente a }\hat{C}} \Rightarrow tg\hat{C} = \frac{c}{b}$$

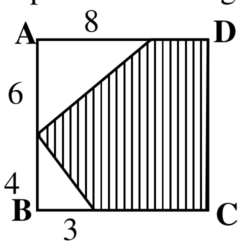
Teorema: Se α é a medida de um ângulo agudo, então $\text{sen}\,\alpha = \cos(90^0 - \alpha)$ e $\cos\alpha = \text{sen}(90^0 - \alpha)$.
(Demonstre usando um triângulo retângulo)

1.5 Exercícios

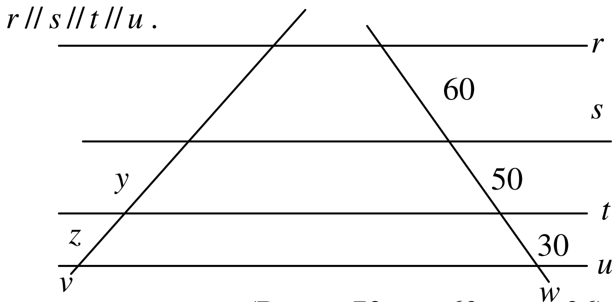
1) Aplicando o teorema de Pitágoras, calcule o valor de ***x***:



2) A figura ABCD é um quadrado de 10 cm de lado. Qual é o perímetro da figura tracejada?



3) Quantos metros de fio são necessários pra fazer a ligação de um poste de 12 m de altura até a caixa do medidor de energia que está ao lado da casa a uma distância de 16 m do poste? (R.: 20 m)
4) Um homem partindo de um ponto A percorre 14 km em direção sul, depois 6 km em direção leste, e finalmente 6 km em direção norte, parando em um ponto B. A que distância em linha reta está o ponto B do ponto de partida A? (R.: 10 m)
5) Calcule a medida da altura de um triângulo eqüilátero cujo perímetro mede 48 cm.
6) O perímetro de um losango mede 20 cm e uma das diagonais mede 8 cm. Quanto mede a outra diagonal? (R.: 6 cm)
7) Determine a medida da diagonal de um retângulo cuja área mede 2700 cm^2, sabendo que a base é o triplo da largura. ($30\sqrt{10}\ cm$)
8) (UNESP – SP) Um observado situado num ponto O, localizado na margem de um rio, precisa determinar sua distância até um ponto P, localizado na outra margem, sem atravessar o rio. Para isso marca, com estacas, outros pontos do lado da margem em que se encontra, de tal forma que P, O e B estão alinhados entre si e P, A e C também. Além disso, $\overline{OA}$ é paralelo a $\overline{BC}$, AO = 25 m, BC = 40 m e OB = 30 m. Qual a distância, em metros, do observador em O até o ponto P? (R.: 50 m)
9) Determine os valores de x, y, e z na figura abaixo, sabendo que $x + y + z = 168$ e $r // s // t // u$.



(R.: $x = 72$, $y = 60$, e $z = 36$)

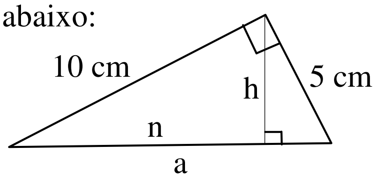
10) Os triângulos ABC e EBD são semelhantes. Sabendo que os ângulos $\hat{A} = 60^o$ e os ângulos de medidas α e 70º são opostos pelo vértice, quais são, em graus, as medidas dos ângulos $\alpha, \hat{C}, \hat{D}$ e $\hat{E}$.
(R.: $\alpha = 70^o$, $\hat{C} = 50^o$, $\hat{D} = 50^o$ e $\hat{E} = 60^0$)

11) Sabendo que os triângulos ABC e DEF são semelhantes, com AB = 40, BC = 60, AC = 5x, DE = 9y-2, EF = 13y e DF = 65, determine os valores de x e y. (R.: $x = 10$ e $y = 6^0$)

12) Um avião decola do ponto A e voa 5 km em linha reta, quando sobrevoa o ponto B, a uma altura de 1.500 m. Voando mais 2 km na mesma rota, o avião irá sobrevoar o ponto C. Qual será, em quilômetros, a altura do avião, em relação ao solo, ao sobrevoar o ponto C? (R.: 2,1 km)

13) Duas casas, B e C, são separadas por um lago. São tomados com reverência três pontos A, D e E, de tal forma que DE = 30 m, $\overline{DE} // \overline{BC}$, AB = 156 m e AD = 36 m. Determine a distância, em linha reta, entre as duas casas. (R.: 130 m)

14) Determine as medidas representadas pelas letras no triângulo abaixo:



(R.: $a = 5\sqrt{5}cm$, $m = \sqrt{5}cm$, $n = 4\sqrt{5}cm$ e $h = 2\sqrt{5}cm$)

15) (UEMG_MG) No alto de um bambu vertical está presa uma corda. A parte da corda em contato com o solo mede 2 m. Quando a corda é esticada, sua extremidade toca no solo a uma distância de 7 m do pé do bambu. De acordo com o enunciado a cima, qual é a altura do bambu?
(R.: 11,25 m)

16) Durante um incêndio num edifício de apartamentos, os bombeiros utilizaram uma escada magirus de 40 m para atingir a janela do apartamento sinistrado. A escada estava colocada a 1 m do chão, sobre um caminhão que se encontrava 24 m afastado do edifício. Qual a altura do apartamento sinistrado em relação ao chão? (R.: 33 m)

17) Encontre a medida da altura de um trapézio retângulo sabendo que suas bases e o lado oblíquo medem respectivamente, 10 cm, 15 cm e 13 cm.

18) Um avião levanta vôo sob um ângulo de 30º. Depois de percorrer 8 km, a que altura ele se encontra do solo?

19) Com o auxílio de uma régua e de um transferidor, calcule seno 45º, co-seno 45º e tangente 45º.

20) Um alpinista deseja calcular a altura de uma encosta que vai escalar. Para isso, afasta-se horizontalmente, 80 m do pé da encosta e visualiza o topo sob um ângulo de 55º com o plano horizontal. Calcule a altura da encosta. (Dados: sen55º = 0,81, cos55º = 0,57 e tg 55º = 1,42)

21) Uma escada deve ser construída para unir dois pisos de um prédio. A altura do piso mais elevado em relação ao piso inferior é de 8m. Para isso, foi construída uma rampa plana unindo os dois pisos. Sabendo que o ângulo formado pela rampa com um plano horizontal é 33º, calcule o comprimento da rampa. (Dados sen33º = 0,54, cos33º = 0,83 e tg 33º = 0,64)

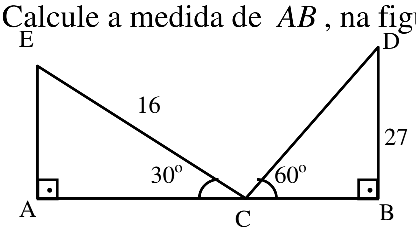
22) Um teleférico deve unir os topos A e B de dois morros. Para calcular a quantidade de cabos de aço necessária para unir A e B, um engenheiro mediu as alturas dos morros em relação a um mesmo plano horizontal, obtendo 108 m e 144 m. A seguir, mediu o ângulo que a reta AB forma com a horizontal, obtendo 32º. Calcule a distância entre A e B. (Dados sen32º = 0,52, cos32º = 0,84 e tg 32º = 0,62)

23) Para medir a largura de um rio, de margens paralelas, um topógrafo marcou dois pontos A e B numa margem, distantes 52 m um do outro. Na outra margem, o topógrafo tomou um ponto C tal que os ângulos $C\hat{A}B$ e $A\hat{C}B$ têm medidas iguais ao ângulo agudo $A\hat{B}C$ tem medida α, com tgα = 12/5. Qual é a largura do rio?

24) Um homem de 1,80 m de altura, em pé, em um terreno plano e horizontal, vê, sob um ângulo de 30º com o plano horizontal, um poste localizado nesse mesmo terreno. Ao aproximar-se 3 m em direção ao poste, passa a vê-lo sob um ângulo de 60º com o plano horizontal. Determine a altura do poste.

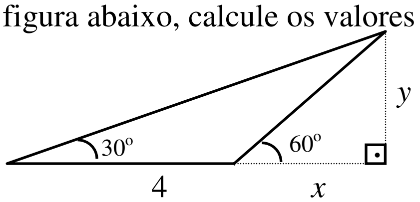
25) Um farol tem 17,5 m de altura. A que distância se encontra um navio que avista o farol sob um ângulo de 1º? (R.: 1 km)

26) Calcule a medida de $\overline{AB}$, na figura:



(R.: $6\sqrt{3}$)

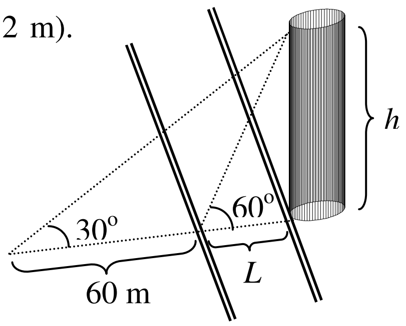
27) Na figura abaixo, calcule os valores desconhecidos:



28) Um Barco atravessa um rio num trecho em que a largura é 220 m. Se a direção seguida pelo barco forma um ângulo de 40° com uma das margens, qual a distância percorrida pelo barco para atravessar o rio? (R.: 100 m)

29) Do alto de um edifício de 36 m de altura vejo um automóvel estacionado sob um ângulo de 45°. A que distância do edifício está o automóvel? (R.: 36 m)

30) Na margem de um rio, posicionado na direção perpendicular a ele, um observador enxerga uma torre situada na outra margem, segundo um ângulo de 60°. Mantendo-se na mesma direção perpendicular ao rio, o observador afasta-se 60 m e passa a enxergar a torre segundo um ângulo de 30°. Desprezando a altura do observador, calcule a largura do rio e altura da torre. (R.: $\ell = 30$ m e $h = 30\sqrt{3} \cong 52$ m).



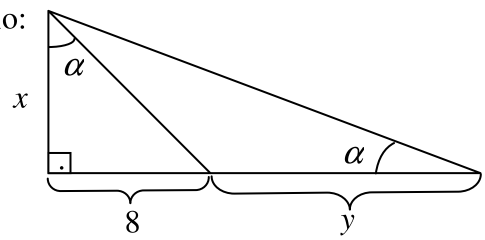
31) Um barco atravessa um rio num trecho em que a largura do rio é 340 m. Se a direção seguida pelo barco, forma um ângulo de 30° com uma das margens, qual a distância percorrida pelo barco para atravessar o rio?

32) Um barco navega seguindo uma trajetória retilínea e paralela à costa. Num certo momento, um coqueiro situado na praia é visto do barco segundo um ângulo de 20° com sua trajetória. Navegando mais 500 m, o coqueiro fica posicionado na linha perpendicular à trajetória do barco. Qual a distância do barco a costa? (R.: $\simeq$182m)

33) (UFSM-RS) Um fio de antena está preso no topo de um prédio de 16 m de altura e na cumeeira de uma casa ao lado, a 4 m de altura. Considerado o terreno plano (horizontal) e que a distância entre a casa e o prédio é de 9 m, qual o comprimento do fio?

(R.: 15 m)

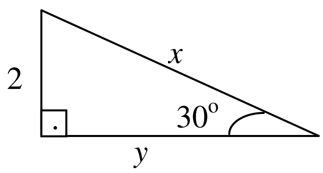
34) Dado $tg\alpha = \dfrac{2}{3}$, calcule os valores de x e y da figura baixo:



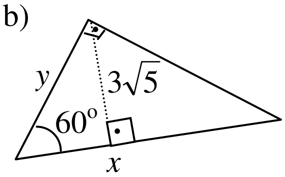
35) Um mergulhador percorreu uma distância de 40 m, entre a superfície e o fundo do mar, segundo um ângulo de 50° com a superfície. Qual é, aproximadamente, a profundidade do local alcançada pelo mergulhador? Subindo verticalmente para a superfície, a que distancia do ponto em que mergulhou ele sairá, aproximadamente? (R.: $\simeq$30,6 m $\simeq$25,7 m)

36) Calcule o valor de x e y para cada um dos triângulos:

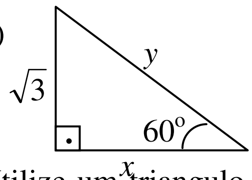
a)



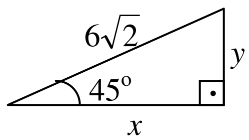
b)



c)



d)



37) Utilize um triangulo eqüilátero de lado ℓ para encontrar o seno, o cosseno e a tangente de 30° e 60°.

38) Utilize um triangulo retângulo de catetos iguais de tamanho ℓ para encontrar o seno, o co-seno e a tangente de 45°.

39) Do alto da torre de uma plataforma marítima de petróleo, de 45 m de altura, o ângulo de depressão em relação à proa de um barco é de 60°. A que distancia do barco está a plataforma? (R.: $15\sqrt{3}$ m)

40) Na construção de um telhado de uma casa foram usados telhas francesas e o "caimento" do telhado é de 20° em relação ao plano horizontal. Sabendo que em cada lado da casa, foram construídos 6 m de telhado e que, até a laje do teto, a casa tem 3 m de altura, determine a que altura se encontra o ponto mais alto dessa casa. (Dados: sen20° = 0,34, cos20° = 0,94 e tg 20° = 0,36)