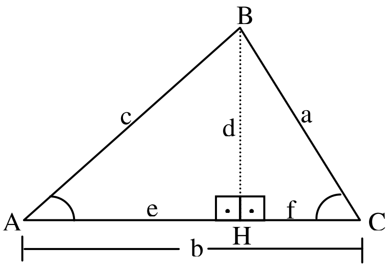
Relações Trigonométricas num Triângulo qualquer

1 – Lei dos Senos ou Teorema dos Senos

*Em todo triângulo, as medidas dos lados são proporcionais aos **senos dos ângulos opostos**, e a constante de proporcionalidade é a medida do diâmetro do círculo circunscrito a esse triângulo.*

Analisando o triângulo abaixo, podemos obter as seguintes relações:



i) $\operatorname{sen}\hat{C} = \dfrac{d}{a}$ e $\operatorname{sen}\hat{A} = \dfrac{d}{c}$

ii) $d = a\operatorname{sen}\hat{C}$ e $d = c\operatorname{sen}\hat{A}$

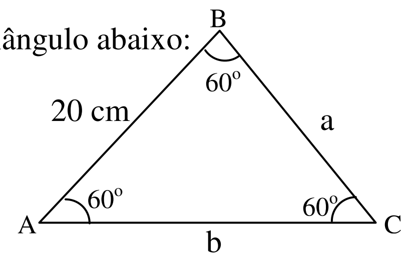
iii) $a\operatorname{sen}\hat{C} = c\operatorname{sen}\hat{A} \Rightarrow \dfrac{\operatorname{sen}\hat{A}}{a} = \dfrac{\operatorname{sen}\hat{C}}{c} \Rightarrow \dfrac{a}{sen\hat{A}} = \dfrac{c}{sen\hat{C}}$

iv) $a\operatorname{sen}\hat{B} = b\operatorname{sen}\hat{A} \Rightarrow \dfrac{\operatorname{sen}\hat{A}}{a} = \dfrac{\operatorname{sen}\hat{B}}{b} \Rightarrow \dfrac{a}{sen\hat{A}} = \dfrac{b}{sen\hat{B}}$

Logo a partir das relações acima podemos escrever matematicamente a lei dos senos:

$$\boxed{\dfrac{a}{sen\hat{A}} = \dfrac{b}{sen\hat{B}} = \dfrac{c}{sen\hat{C}} = 2r}$$

Exemplo: Usando a lei dos senos podemos encontrar os valores de a e b no triângulo abaixo:



$$\boxed{\dfrac{a}{sen60^o} = \dfrac{20}{sen60^o}} \Rightarrow \boxed{\dfrac{a}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{20}{\frac{\sqrt{3}}{2}}} \Rightarrow \boxed{a = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}\times 20}{\frac{\sqrt{3}}{2}}} \Rightarrow \boxed{a = 20\,cm}$$

2 – Lei dos Cossenos ou Teorema dos Cossenos

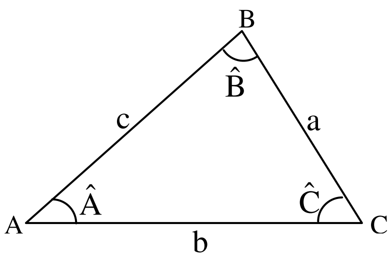
Em todo triângulo, o quadrado da medida de um lado é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros lados menos o duplo produto das medidas destes lados pelo cosseno do ângulo formado por eles.

Analisando o triângulo a baixo, podemos obter as seguintes relações, chamadas lei dos cossenos:

i) $\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos\hat{A}}$

ii) $\boxed{b^2 = a^2 + c^2 - 2.b.c.\cos\hat{B}}$

iii) $\boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b.\cos\hat{C}}$

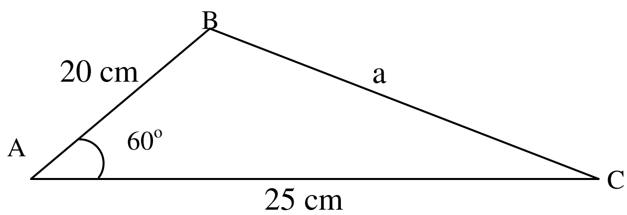


Exemplo: Usando a lei dos cossenos podemos encontrar os valores de a e b no triângulo abaixo:

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos\hat{A}} \Rightarrow \boxed{a^2 = 25^2 + 20^2 - 2\times 25\times 20\times \cos 30^o} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{a^2 = 625 + 400 - 2\times 500\times \dfrac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow$$

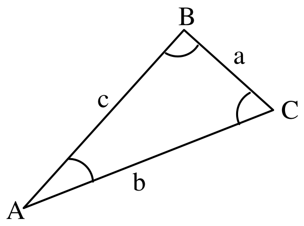
$$\Rightarrow \boxed{a = \sqrt{625 + 400 - 2\times 500\times \dfrac{1}{2}}} \Rightarrow \boxed{a = 5\sqrt{21}\,cm}$$



3 – Cálculo da área de uma região triangular

Quando conhecemos dois lados de uma região triangular e o ângulo formado por eles, podemos determinar a sua área por meio da seguinte propriedade:

A área S de qualquer região triangular é igual à metade do produto das medidas de dois dos seus lados multiplicada pelo seno do ângulo formado por eles.



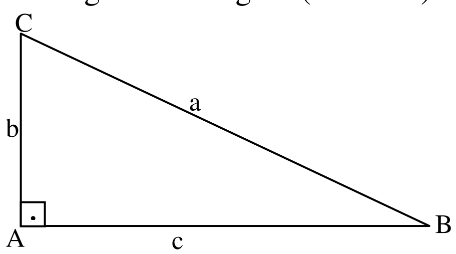
$$S = \frac{b.c}{2}.\text{sen}\,\hat{A}$$

$$S = \frac{a.c}{2}.\text{sen}\,\hat{B}$$

$$S = \frac{a.b}{2}.\text{sen}\,\hat{C}$$

Vamos demonstrar apenas uma dessas relações; as demais podem ser demonstradas de maneira análoga. Há três casos a considerar:

1º caso: O triângulo é retângulo ($\hat{A} = 90^\circ$)



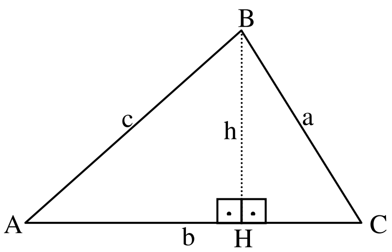
Sabemos que a área do triângulo é dada por $\frac{\text{base . altura}}{2}$.

Neste caso, $S = \frac{\text{cateto.cateto}}{2} = \frac{b.c}{2}$.

Isso equivale a escrever:

$$S = \frac{b.c}{2}.1 \Rightarrow S = \frac{b.c}{2}.\text{sen}90^\circ \Rightarrow \boxed{S = \frac{b.c}{2}.\text{sen}\hat{A}}$$

2º caso: O triângulo é acutângulo



$S = \frac{b.h}{2}$ (equação **I**)

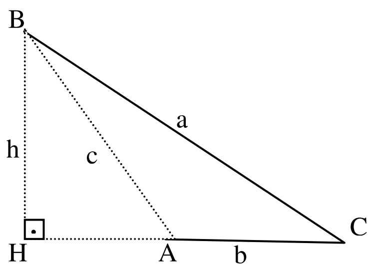
No triângulo retângulo AHB ($\hat{H}$ é reto), temos:

$$\text{sen}\,\hat{A} = \frac{b}{c} \Rightarrow h = c.\text{sen}\hat{A} \quad \text{(equação II)}$$

Substituindo a equação **II** em **I**, vem:

$$\boxed{S = \frac{b.c}{2}.\text{sen}\hat{A}}$$

3º caso: O triângulo é obtusângulo



$S = \frac{b.h}{2}$ (equação **I**)

No triângulo retângulo AHB ($\hat{H}$ é reto), temos:

$$\text{sen}(180^\circ - \hat{A}) = \frac{b}{c} \Rightarrow h = c.\text{sen}(180^\circ - \hat{A})$$

Como $\text{sen}(180^\circ - \hat{A}) = \text{sen}\,\hat{A}$, temos:

$h = c.\text{sen}\hat{A}$ (equação **II**)

Substituindo a equação **II** em **I**, vem:

$$\boxed{S = \frac{b.c}{2}.\text{sen}\hat{A}}$$

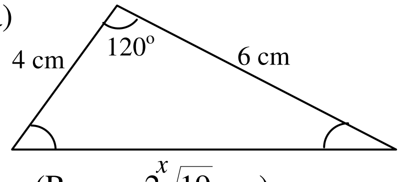
Exemplo: Determine a área do triângulo ABC, ângulo $\hat{A} = 30^\circ$, lado c = 4 cm e lado b = 5 cm.

$$S = \frac{5.4}{2}.\text{sen}30^\circ \Rightarrow S = \frac{5.\cancel{4}}{\cancel{2}}.\frac{1}{\cancel{2}} \Rightarrow S = 5\ \text{cm}^2.$$

4 – Exercícios

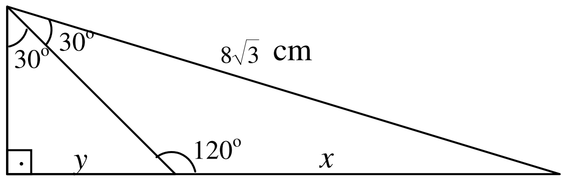
1) Determine as variáveis desconhecidas:

a)



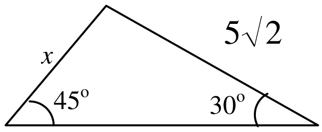
(R.: $x = 2\sqrt{19}$ cm)

b)



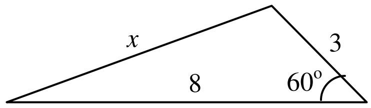
(R.: x = 8cm e y = 4 cm)

c)



(R.: x = 5 cm)

d)



(R.: x = 7 cm)

2) Um navio se encontra num ponto A, distante 10 milhas de um farol F. No mesmo instante, outro navio se encontra num ponto B distante 15 milhas do farol, de tal modo que o ângulo $A\hat{F}B = 60^o$. Qual é a distancia entre os dois navios nesse instante? (R.: $d = 5\sqrt{7}$ milhas)
3) Num paralelogramo, de dimensões 6 dm e 10 dm, um dos ângulos mede 60°. Calcule as medidas de suas diagonais. (R.: $d_1 = 2\sqrt{19}$ dm e d_2 = 14 dm)
4) Calcule o raio do circulo no qual está inscrito um ΔABC de lado a = 12 e ângulo $\hat{A} = 30^o$. R.: r = 12 cm
5) (FEI-SP) Se em um triângulo ABC o lado $\overline{AB}$ mede 3 cm, o lado $\overline{BC}$ mede 4 cm e o ângulo interno formado entre os lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ mede 60^o, calcule a medida do lado $\overline{AC}$. (R.: $\overline{AC} = \sqrt{13}$ cm)
6) Um observador está na margem de um rio no ponto A e necessita calcular a distância até o ponto B que está na outra margem. Partindo de A o observador caminhou 50 m até um ponto C (qualquer) e obteve as medidas dos ângulos $\hat{A} = 45^o$ e $\hat{C} = 60^o$. Calcule para o observador a distancia do ponto A até o ponto B.
7) Dois navios, distantes 56 km um do outro "avistam" um mesmo farol sob um ângulo de 30° e 45°. A que distância do farol está cada navio? (R.: 28,99 e 41 km)
8) Calcule o comprimento da diagonal menor de um losango com 5 cm de lado e ângulo agudo 20°.
9) Num triangulo ABC são dados $\hat{A} = 45^o$, $b = 8\sqrt{2}$ cm e c = 10 cm. Calcule a medida do terceiro lado do triângulo.
10) (UNICAMP) A água utilizada na casa de um sítio é captada e bombeada do rio para uma caixa-d´água a 50 m de distância. A casa está a 80 m de distância da caixa-d´água, e o ângulo formado pelas direções caixa-d´água-bomba e caixa-d´água-casa é 60°. Se se pretende bombear água do mesmo ponto de captação até a casa quantos metros de encanamento serão necessários? (R.: 70 m)
11) Duas árvores localizam-se em lados opostos de um lago. O ângulo entre as linhas de visão de um observador que as vê é 120^0, e o ângulo formado por uma dessas linhas e a linha que une as árvores é 45°. Sabendo que uma das árvores está a 100 m do observador, determine a distancia d entre as árvores. (R.: 122 m)
12) Um topógrafo quer medir a distância entre dois pontos A e B, situados em margens opostas de um rio. Para isso, escolhe um ponto C na margem em que está e mede os ângulos $A\hat{C}B$ e $A\hat{B}C$, encontrando, respectivamente, 45° e 60°. Determine $\overline{AB}$, sabendo que $\overline{AC}$ mede 16 m.
13) Estou num ponto A e enxergo o pico de uma montanha segundo um ângulo de 60°. Caminho em linha reta 1.500 m e vejo o pico segundo um ângulo de 150°. Qual a distância do ponto inicial ao pico?
14) Determine a intensidade da resultante de duas forças $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$, sabendo que valem, respectivamente, 10N e 20N e são aplicadas a uma mesma partícula, formando entre si um ângulo $\alpha = 60^o$. (R.: $R = 10\sqrt{7}$ N)
15) (Fuvest-SP) Um triângulo T tem os lados iguais a 4, 5 e 6. Calcule o cosseno do maior ângulo de T.(R.: 1/8)
16) (Vunesp) Os lados de um triângulo mede $2\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$ e $3+\sqrt{3}$. Determine a medida do ângulo oposto ao lado de medida $\sqrt{6}$. (R.: $\alpha = 30^o$)

17) Calcule o raio da circunferência circunscrita ao triângulo ABC, sendo $\hat{B} = 45^o$ e $\overline{AC} = 6$ cm. (R.: $3\sqrt{2}$ cm)

18) Dois vetores $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ têm módulos de 4 m e 10 m e formam um ângulo de 60°. Calcule o módulo do vetor resultante (soma dos vetores). (R.: $2\sqrt{39}$ m)

19) Um ΔABC tem lados a = 6 cm e b = 4 cm. Sendo $\hat{C} = 45^o$, calcule a área do triângulo. (R.: $6\sqrt{2}$ cm²)

20) Determine a área do triângulo ABC, com ângulo $\hat{C} = 45^o$, lado a = 6 cm e lado $b = 2\sqrt{2}$. (R.: 6 cm²)

21) Num triângulo ABC, dois lados medem $6\sqrt{3}$ cm e 4 cm, e formam um ângulo de 60°. Determine a área dessa região triangular. (R.: 18 cm²)

22) Qual é a área da região limitada por um paralelogramo cujos lados medem 10 cm e 16 cm, sabendo que formam um ângulo de 30°? (R.: 80 cm²)

23) As diagonais de um paralelogramo medem 10 cm e 8 cm e formam um ângulo de 60°. Determine a área dessa região limitada pelo paralelogramo. (R.: $20\sqrt{3}$ cm²)

24) (Vunesp-SP) A área de um triângulo retângulo é 12 dm². Se um dos catetos é $\frac{2}{3}$ do outro, calcule a medida da hipotenusa desse triângulo. (R.: $2\sqrt{13}$ dm)

25) Um triângulo tem dois lados medindo 8 cm e dois ângulos medindo 30°. Calcule o perímetro e a área da região triangular. (R.: 2P = $(16+8\sqrt{3})$ cm; S = $16\sqrt{3}$ cm²)

26) Determine as dimensões do lado c de um triângulo, sabendo que a = b = 1 cm, a área $S = \frac{\sqrt{2}}{4}$ cm² e o ângulo $\hat{C}$ é agudo. (R.: $c = \sqrt{2-\sqrt{2}}$ cm)

27) Calcule a área de um paralelogramo ABCD, cujos lados medem, respectivamente, 8 cm e 10 cm formando um ângulo agudo de 150°. (R.: 40 cm²)

28) Um barco navegou 200 km partindo do ponto O em direção ao nordeste, de modo que sua trajetória formou um ângulo de 30° com a direção norte. Depois, ele percorreu 100 km em direção ao leste. Em linha reta, quanto o barco tem que se deslocar para regressar ao ponto de partida? (R. 265 km)

29) (U.F.Uberlândia – MG) Uma pessoa se encontra numa planície às margens de um rio num ponto A e vê , do outro lado do rio, o topo T de uma torre de telefone. Com o objetivo de determinar a altura H da torre, ela anda 200 m até um ponto B e vê o topo T da torre sob um ângulo de 30⁰, sendo $T\hat{A}B = 30^o$ e $T\hat{B}P = 105^o$ e P o pé da torre. (R.: $50\sqrt{2}$ m)

30) (EEM-SP) No triângulo isósceles ABC, $\hat{B} = \hat{C}$, a bissetriz $\overline{BD}$ de comprimento 6 cm, forma um ângulo de 135° com o lado $\overline{AC}$ que mede 6 cm. Calcule o comprimento do lado $\overline{AB}$. (R.: $2\sqrt{6}$ cm)

31) De um ponto A partem, em um mesmo instante, dois móveis, M_1 em direção a B, a uma velocidade de 3 m/s e M_2 em direção a C, a uma velocidade de 5 m/s. Sabendo que o ângulo formado entre os segmentos AB e AC tem 30°, qual a distância aproximada entre os móveis após 12 segundos? (R.: aproximadamente 34 m)

32) Na praia do Santinho, um turista posicionado num ponto A vê um ponto C na ilha das Aranhas sob um ângulo de 84° em relação ao ponto B, anda 80 m até o ponto B e vê o mesmo ponto C sob um ângulo de 75° em relação ao ponto A. Calcule a distância dos pontos A e B até o ponto C localizado na ilha.
(Dados: sen84° = 0,9945; cos84° = 0,1045; tg84° = 9,5144; sen75° = 0,9659; cos75° = 0,2588; tg75° = 3,7321; (R.: ≃220,50 m, ≃214 m)