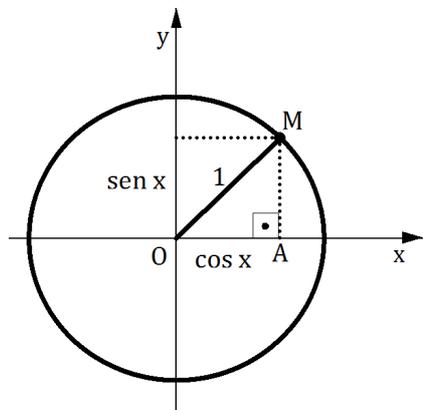


## RELAÇÕES FUNDAMENTAIS (Página 48)

### ➤ PRIMEIRA RELAÇÃO FUNDAMENTAL



Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo  $OAM$  temos:

$$OM^2 = OA^2 + AM^2$$

$$1^2 = (\text{sen } x)^2 + (\text{cos } x)^2$$

$$\text{sen}^2 x + \text{cos}^2 x = 1$$

### ➤ SEGUNDA RELAÇÃO FUNDAMENTAL

$$\text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\text{cos } x}$$

### ➤ Outras relações fundamentais

$$\text{cotg } x = \frac{\text{cos } x}{\text{sen } x}$$

$$\text{sec } x = \frac{1}{\text{cos } x}$$

$$\text{cossec } x = \frac{1}{\text{sen } x}$$

A partir das relações acima podemos obter outras relações:

$$\text{cotg } x = \frac{1}{\text{tg } x}$$

$$\text{sec}^2 x = 1 + \text{tg}^2 x$$

$$\text{cossec}^2 x = 1 + \text{cotg}^2 x$$

### Exemplos:

1. Dado  $\text{sen } x = -\frac{4}{5}$  e  $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ , obtenha:

- a)  $\text{cos } x$     b)  $\text{tg } x$     c)  $\text{cotg } x$     d)  $\text{sec } x$     e)  $\text{cossec } x$

2. Simplifique as expressões trigonométricas:

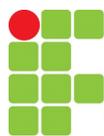
a)  $y = \frac{(\text{cossec } x - \text{sen } x)}{\text{cotg } x \cdot \text{sec } x}$

b)  $y = \frac{1 - \text{sen}^2 x}{\text{cos } x}$

3. Verifique as identidades

a)  $y = \text{sen } x \cdot \text{sec } x = \text{tg } x$

b)  $\frac{\text{sen } x}{\text{cossec } x} + \frac{\text{cos } x}{\text{sec } x} = \text{tg } x \cdot \text{cotg } x$



## TRANSFORMAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS (Página 44)

### ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE ARCOS

#### Cosseno da soma e cosseno da diferença

$$\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b$$

$$\cos(a - b) = \cos a \cdot \cos b + \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b$$

#### Exemplos:

1. Calcule.

a)  $\cos 75^\circ$

b)  $\cos 15^\circ$

#### Senos da soma e seno da diferença

$$\operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b + \operatorname{sen} b \cdot \cos a$$

$$\operatorname{sen}(a - b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b - \operatorname{sen} b \cdot \cos a$$

#### Exemplos:

1. Calcule o valor de:

a)  $\operatorname{sen} 75^\circ$

b)  $\operatorname{sen} 15^\circ$

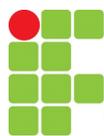
#### Tangente da soma e tangente da diferença

$$\operatorname{tg}(a + b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}$$

$$\operatorname{tg}(a - b) = \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}$$

#### Exemplos:

1. Calcule  $\operatorname{tg} 75^\circ$ .



A partir dessas transformações podemos obter outras.

### Duplicação de arcos - Seno do arco duplo

$$\text{sen}(2a) = 2\text{sen } a \cdot \text{cos } a$$

### Cosseno do arco duplo

$$\text{cos}(2a) = \text{cos}^2 a - \text{sen}^2 a$$

### Tangente do arco duplo

$$\text{tg } 2a = \frac{2 \text{tg } a}{1 - \text{tg}^2 a}$$

ou  
ainda

$$\text{cos}(2a) = 2\text{cos}^2 a - 1$$

$$\text{cos}(2a) = 1 - 2\text{sen}^2 a$$

### Exemplos:

1. Simplifique:  $y = \frac{\text{sen } 2x}{2 \text{sen } x}$

2. Verifique as identidades.

a)  $\frac{1 + \text{cos } 2x}{\text{sen } 2x} = \text{cotg } x.$

b)  $\text{cossec } 2x + \text{cotg } 2x = \text{cotg } x.$

## EXERCÍCIOS

1. Simplifique cada uma das expressões:

a)  $\frac{1-\sin^2 x}{\cos x}$

b)  $\frac{\cos^2 x - 1}{\cotg x}$

c)  $(\sec^2 x - 1) \cotg x$

d)  $\frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{\sec x}$

e)  $\frac{\sin x + \operatorname{tg} x}{\cos x + 1}$

f)  $\frac{\sin x - 2 \sin^3 x}{2 \cos^3 x - \cos x}$

g)  $\frac{\sin a + \cos a}{\sec a + \operatorname{cosec} a}$

2. Verifique as identidades

a)  $\sin a \cdot \cos a \cdot \sec a \cdot \operatorname{cosec} a = 1$

b)  $\operatorname{tg} a + \cotg a = \sec a \cdot \operatorname{cosec} a$

c)  $\cos a + \operatorname{tg} a \cdot \sin a = \sec a$

d)  $\frac{\operatorname{tg} a - \cotg a}{\operatorname{tg} a + \cotg a} = 2 \sin^2 a - 1$

e)  $\frac{1-\cos a}{\sin a} = \frac{\sin a}{1+\cos a}$

f)  $\cotg a + \operatorname{tg} a = \cotg a \cdot \sec^2 a$

g)  $\frac{1+\operatorname{cosec} a}{\operatorname{cosec} a - 1} = \frac{1+\sin a}{1-\sin a}$

## RESPOSTAS

1. a)  $\cos x$     b)  $-\frac{\sin^3 x}{\cos x}$     c)  $\operatorname{tg} x$     d)  $\sec x$     e)  $\operatorname{tg} x$     f)  $\operatorname{tg} x$     g)  $\sin a \cos a$ .

2. a)  $\sin a \cdot \cos a \cdot \sec a \cdot \operatorname{cosec} a = \cancel{\sin a} \cdot \cancel{\cos a} \cdot \frac{1}{\cancel{\cos a}} \cdot \frac{1}{\cancel{\sin a}} = 1$ .

b)  $\operatorname{tg} a + \cotg a = \operatorname{tg} a + \frac{1}{\operatorname{tg} a} = \frac{\operatorname{tg}^2 a + 1}{\operatorname{tg} a} = \frac{\sec^2 a}{\operatorname{tg} a} = \frac{1}{\cos^2 a} \cdot \frac{\cos a}{\sin a} = \frac{1}{\cos a} \cdot \frac{1}{\sin a} = \sec a \cdot \operatorname{cosec} a$ .

c)  $\cos a + \operatorname{tg} a \cdot \sin a = \cos a + \frac{\sin a}{\cos a} \cdot \sin a = \cos a + \frac{\sin^2 a}{\cos a} = \frac{\cos^2 a + \sin^2 a}{\cos a} = \frac{1}{\cos a} = \sec a$ .

d)  $\frac{\operatorname{tg} a - \cotg a}{\operatorname{tg} a + \cotg a} = \frac{\frac{\sin a}{\cos a} - \frac{\cos a}{\sin a}}{\frac{\sin a}{\cos a} + \frac{\cos a}{\sin a}} = \frac{\frac{\sin^2 a - \cos^2 a}{\cos a \sin a}}{\frac{\sin^2 a + \cos^2 a}{\cos a \sin a}} = \frac{\cancel{\cos^2 a}}{1} = \sin^2 a - (-1 - \sin^2 a) = 2 \sin^2 a - 1$ .

e)  $\frac{1-\cos a}{\sin a} = \frac{(1-\cos a)(1+\cos a)}{\sin a(1+\cos a)} = \frac{1-\cos^2 a}{\sin a(1+\cos a)} = \frac{\sin^2 a}{\cancel{\sin a}(1+\cos a)} = \frac{\sin a}{1+\cos a}$

f)  $\cotg a + \operatorname{tg} a = \frac{\cos a}{\sin a} + \frac{\sin a}{\cos a} = \frac{\cos^2 a + \sin^2 a}{\sin a \cos a} = \frac{1}{\sin a \cos a} = \frac{\cancel{\cos a}}{\cancel{\sin a} \cos^2 a} = \cotg a \cdot \sec^2 a$

g)  $\frac{1+\operatorname{cosec} a}{\operatorname{cosec} a - 1} = \frac{1 + \frac{1}{\sin a}}{\frac{1}{\sin a} - 1} = \frac{\frac{\sin a + 1}{\sin a}}{\frac{1 - \sin a}{\sin a}} = \frac{\sin a + 1}{1 - \sin a} = \frac{1 + \sin a}{1 - \sin a}$