

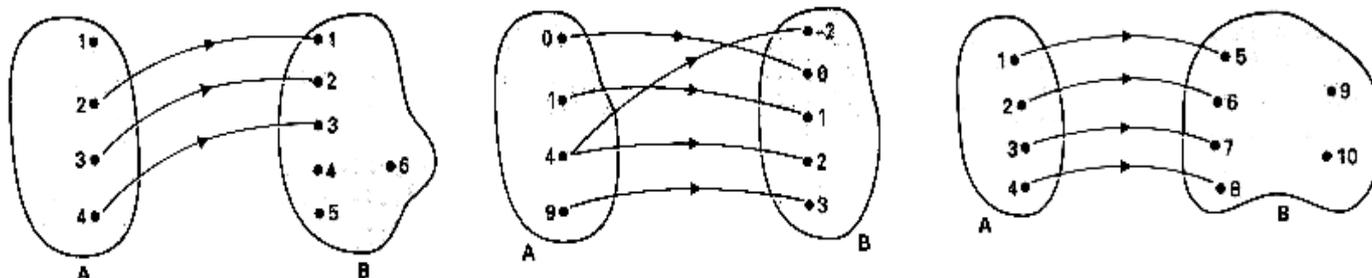
# RELAÇÕES E FUNÇÕES

## 1. Funções

O conceito de função é um dos mais importantes em toda a matemática. O conceito básico de função é o seguinte: toda vez que temos dois conjuntos e algum tipo de associação entre eles, que faça corresponder a todo elemento do primeiro conjunto um único elemento do segundo, ocorre uma função.

O uso de funções pode ser encontrado em diversos assuntos. Por exemplo, na tabela de preços de uma loja, a cada produto corresponde um determinado preço. Outro exemplo seria o preço a ser pago numa conta de luz, que depende da quantidade de energia consumida.

Observe, os diagramas das relações abaixo:



A primeira relação não é uma função, pois existe o elemento **1** no conjunto **A**, que não está associado a nenhum elemento do conjunto **B**. A segunda relação também não é uma função, pois existe o elemento **4** no conjunto **A**, que está associado a mais de um elemento do conjunto **B**. Já a terceira relação é uma função, pois todo elemento do conjunto **A**, está associado a **somente um** elemento do conjunto **B**.

**Definição:** Dados dois conjuntos não-vazios **A** e **B**, e uma relação entre eles, dizemos que essa relação (ou regra) é uma função de **A** (chamado domínio) em **B** (chamado contradomínio) se e somente se, para todo  $x \in A$  existe um único  $y \in B$  de modo que  $x$  se relacione com  $y$ .

**Notação:**  $f: A \rightarrow B$

$x \rightarrow y$  ou  $y = f(x)$ .

## 2. Domínio e Imagem de uma função

O **domínio** de uma função é **sempre** o próprio conjunto de partida, ou seja,  $D(f) = A$ . Se um elemento  $x \in A$  estiver associado a um elemento  $y \in B$ , dizemos que  $y$  é a **imagem** de  $x$  (indica-se  $y = f(x)$  e lê-se “ $y$  é igual a  $f$  de  $x$ ”).

**Exemplo:**  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

$$f(x) = x + 3$$

Então temos que:

- A imagem de 1 através de  $f$  é 4, ou seja,  $f(1) = 1 + 3 = 4$ ;
- A imagem de 2 através de  $f$  é 5, ou seja,  $f(2) = 2 + 3 = 5$ ;

Numa função  $f$  de **A** em **B**, os elementos de **B** que são imagens dos elementos de **A** através da aplicação de  $f$  formam o **conjunto imagem** de  $f$  ( $\text{Im}(f)$ ).

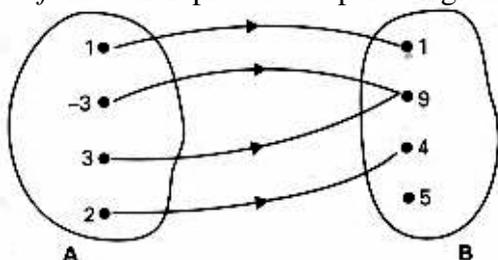
O **domínio** é o subconjunto de  $\mathbb{R}$  no qual todas as operações indicadas em  $y = f(x)$  são possíveis.

**Observações:** - O domínio deve sempre coincidir com o conjunto de partida, ou seja, todo elemento de **A** é ponto de partida de flecha. Se tivermos um elemento de **A** do qual não parta flecha, a relação não é função.

- De cada elemento de **A** deve partir uma única flecha. Se de um elemento de **A** partir mais de uma flecha, a relação não é função.
- Como  $x$  e  $y$  têm seus valores variando nos conjuntos **A** e **B**, recebem o nome de **variáveis**.
- A variável  $x$  é chamada **variável independente** e a variável  $y$ , **variável dependente**, pois para obter o valor de  $y$  dependemos de um valor de  $x$ .
- Uma função  $f$  fica definida quando são dados seu domínio (conjunto **A**), seu contradomínio (conjunto **B**) e a lei de associação  $y = f(x)$ .

**Exemplos:**

1) Seja a função  $f: A \rightarrow B$  representada pelo diagrama a seguir:



- O domínio é igual ao conjunto de partida, ou seja,  $D(f) = A$ .
- O conjunto contradomínio é o conjunto  $B$ .
- $f(1) = 1$ ,  $f(-3) = 9$ ,  $f(3) = 9$  e  $f(2) = 4$ .
- O conjunto imagem é formado por todas as imagens dos elementos do domínio, portanto:  $\text{Im}(f) = \{1, 4, 9\}$ .
- Como  $1^2 = 1$ ,  $(-3)^2 = 9$ ,  $3^2 = 9$  e  $2^2 = 4$ , temos que a lei de formação da função é  $f(x) = x^2$ .

2) Para a função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (ou seja, o domínio e o contradomínio são os números reais) definida por  $f(x) = x^2 - x - 6$ , temos:

- $f(2) = (2)^2 - (2) - 6 = 4 - 2 - 6 = -4$   
 $f(3) = (3)^2 - (3) - 6 = 9 - 3 - 6 = 0$   
 $f(0) = (0)^2 - (0) - 6 = 0 - 0 - 6 = -6$

b) Calcular o valor de  $x$  cuja imagem vale 0 equivale a resolver a equação  $f(x)=0$ , ou seja,  $x^2 - x - 6 = 0$ . Utilizando a fórmula de Bhaskara encontramos as raízes  $-2$  e  $3$ . Portanto os valores de  $x$  que têm imagem 0 são  $-2$  e  $3$ .

3) O conjunto domínio da função  $f(x) = \sqrt{3x+6}$  é o conjunto  $D(f) = [-2, +\infty)$ , pois no conjunto dos reais só existe raiz quadrada de números maiores ou iguais a zero, isto significa que,  $3x+6 \geq 0 \Rightarrow 3x \geq -6 \Rightarrow x \geq -2$ .

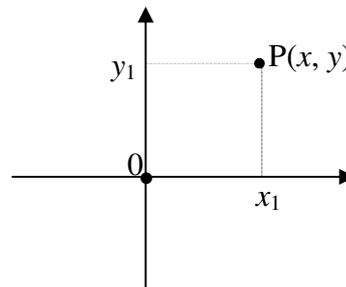
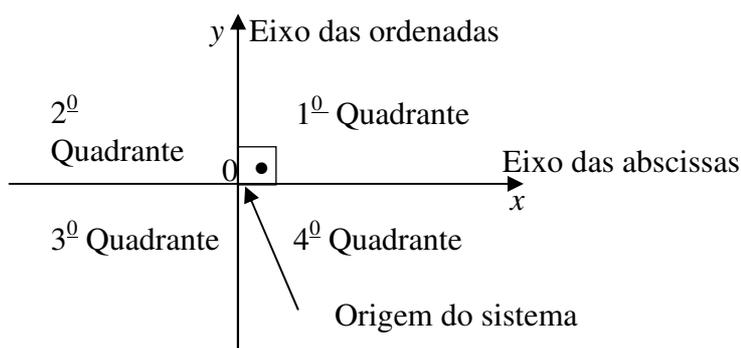
4) O conjunto domínio da função  $f(x) = \frac{3}{x+3}$  é o conjunto  $D(f) = \mathbb{R} - \{-3\}$ , pois o denominador não poderá ser zero, isto é,  $x+3 \neq 0 \Rightarrow x \neq -3$ .

5) O conjunto domínio da função  $f(x) = \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x+2}}$  é o conjunto  $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x < 1\} = (-2, 3]$ , pois  $1-x \geq 0$  e  $x+2 > 0$ .

### 3. Sistema Cartesiano Ortogonal

Um sistema cartesiano ortogonal (ou plano cartesiano) é constituído por duas retas " $x$ " (eixo das abscissas) e " $y$ " (eixo das ordenadas) que são perpendiculares entre si, e cuja intersecção entre essas retas é denominado origem do sistema.

Os dois eixos dividem o plano cartesiano em quatro regiões denominadas quadrantes. Cada par ordenado  $(x, y)$  de números reais fica associado a um único ponto  $P(x, y)$  do plano cartesiano.



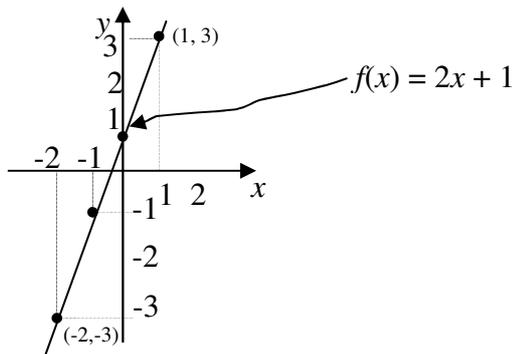
## 4. Gráfico de uma função

Para construir o gráfico de uma função  $f$ , basta atribuir valores do domínio à variável  $x$  e, usando a sentença matemática que define a função, calcular os correspondentes valores da variável  $y$ . Para facilitar a construção do gráfico, siga as etapas :

- construir uma tabela com valores de  $x$  escolhidos convenientemente do  $D(f)$  e com estes valores encontraremos as imagens, isto é, os  $y = f(x)$ ;
- a cada par ordenado  $(x, y)$  da tabela associar num ponto do plano cartesiano;
- marcar um número suficiente de pontos, até que seja possível esboçar o gráfico da função;
- unir os pontos marcados no plano cartesiano.

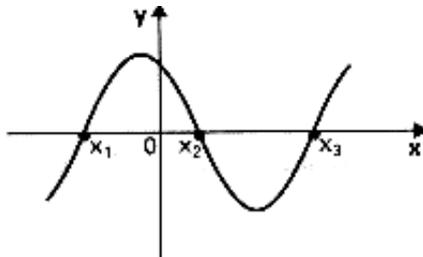
*Exemplo:* Construir o gráfico da função definida por  $f(x) = 2x + 1$ .

$x$	$f(x) = 2x + 1$	$(x, y)$
-2	-3	$(-2, -3)$
-1	-1	$(-1, -1)$
0	1	$(0, 1)$
1	3	$(1, 3)$
2	5	$(2, 5)$
3	7	$(3, 7)$



## 5. Raízes de uma função

Dada uma função  $y = f(x)$ , os valores de  $x$  para os quais  $f(x) = 0$ , são chamados **raízes** da função. No gráfico cartesiano da função, as raízes são as abscissas dos pontos onde o gráfico corta o eixo horizontal. Observe o gráfico abaixo:



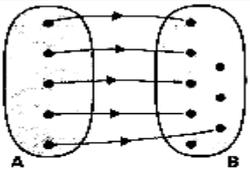
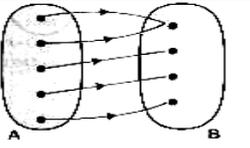
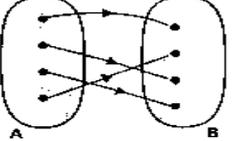
No gráfico acima temos:  $f(x_1) = 0$ ,  $f(x_2) = 0$  e  $f(x_3) = 0$ . Portanto  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  são raízes da função.

## 6. Propriedades de uma função

Algumas propriedades que caracterizam uma função  $f: A \rightarrow B$ :

- a) Função Injetora:** A função é injetora se elementos distintos do domínio tiverem imagens distintas, ou seja, dois elementos não podem ter a mesma imagem. Portanto não pode haver nenhum elemento no conjunto  $B$  que receba duas flechas. Por exemplo, a função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = 3x$  é injetora pois se  $x_1 \neq x_2$  então  $3x_1 \neq 3x_2$ , portanto  $f(x_1) \neq f(x_2)$ .
- b) Função sobrejetora:** Dizemos que uma função é sobrejetora se, e somente se, o seu conjunto imagem for igual ao contradomínio, isto é, se  $\text{Im}(f) = B = \text{CD}(f)$ . Em outras palavras, não pode sobrar elementos no conjunto  $B$  sem receber flechas.
- c) Função Bijetora:** Uma função é bijetora quando ela é injetora e sobrejetora ao mesmo tempo. Por exemplo, a função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $y = 3x$  é injetora, como vimos no exemplo anterior. Ela também é sobrejetora, pois  $\text{Im}(f) = B = \mathbb{R}$ . Logo, esta função é bijetora.  
Já a função  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  definida por  $y = x + 5$  é injetora, pois valores distintos de  $x$  têm imagens distintas, mas **não** é sobrejetora, pois  $\text{Im}(f) = \{5, 6, 7, 8, \dots\}$  e o contradomínio  $\text{CD}(f) = \mathbb{N}$ . Logo essa função **não** é bijetora.

Observe os diagramas abaixo:

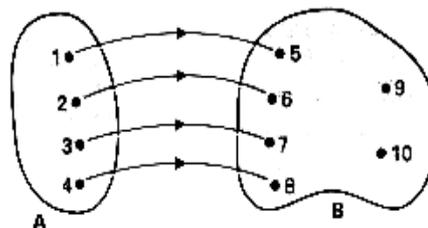
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Essa função é injetora, pois elementos de <b>A</b> estão associados a um único elemento de <b>B</b>.</li> <li>• Essa função não é sobrejetora, pois existem elementos sobrando em <b>B</b></li> <li>• Essa função não é bijetora, pois não é sobrejetora</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Essa função é sobrejetora, pois não sobra elemento em <b>B</b></li> <li>• Essa função não é injetora, pois existem dois elementos com mesma imagem</li> <li>• Essa função não é bijetora, pois não é injetora</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Essa função é injetora, pois elementos de <b>B</b> são “flechados” só uma vez.</li> <li>• Essa função é sobrejetora, pois não existem elementos sobrando em <b>B</b></li> <li>• A função é bijetora, pois é injetora e sobrejetora</li> </ul>

## 7. Exercícios

- Dados  $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ ,  $B = \{-1, 0, 1, 3, 4\}$  e a correspondência entre **A** e **B** dada por  $y = x^2$ , com  $x \in A$  e  $y \in B$ , faça um diagrama e diga se  $f$  é uma função de **A** em **B**.
- Dados  $A = \{0, 1, 2, 3\}$ ,  $B = \{-1, 0, 1\}$  e a correspondência entre **A** e **B** dada por  $y = x - 2$ , com  $x \in A$  e  $y \in B$ , faça um diagrama e diga se  $f$  é uma função de **A** em **B**.

- Considere a função  $f: A \rightarrow B$  dada pelo diagrama e determine:

- $D(f) =$
- $\text{Im}(f) =$
- $f(3) =$
- $x$  quando  $y = 5$
- $x$  quando  $f(x) = 8$



- Seja a função  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = x^2 - 2x + 3$ , de domínio  $D = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ . Determine o conjunto imagem de  $f$ .

- Seja  $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$  a função dada por  $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$ . Qual é o valor de  $f(3) + f(\frac{1}{3})$ ?

- Seja  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  uma função tal que  $f(x) = \begin{cases} x + 2, & \text{se } x \text{ é par} \\ 2x, & \text{se } x \text{ é ímpar} \end{cases}$ , Calcule:

- $f(5) =$
- $f(4) =$
- $f(0) =$
- $f(13) =$
- $x$  tal que  $f(x) = 14$

- As funções  $f$  e  $g$  são dadas por  $f(x) = 3x + 2m$  e  $g(x) = -2x + 1$ . Calcule o valor de  $m$  sabendo que  $f(0) - g(1) = 3$ .

- Um técnico em eletrônica cobra R\$ 50,00 a visita e R\$ 30,00 a hora de trabalho. Escreva a função  $p$  que determina quanto esse técnico receberá após  $t$  horas de trabalho.

- Construa o gráfico de cada uma das seguintes funções determinando em cada caso o conjunto domínio e imagem:

- $f(x) = x - 2$
- $f(x) = x$
- $f(x) = -2x + 1$
- $f(x) = 3x$
- $f(x) = x^2$
- $f(x) = 2^x$

- $f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x < 0 \\ 1, & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ -x, & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$
- $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \leq 2 \\ x, & \text{se } x > 2 \end{cases}$
- $f(x) = \frac{1}{x}$

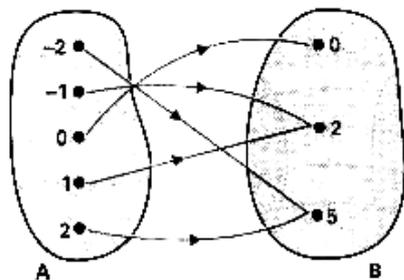
- Sejam as funções:  $f(x) = 4x - 12$ ,  $f(x) = x^2 - 9$ ,  $f(x) = -2x + 1$ ,  $f(x) = x^2 - 4x + 4$ , encontre suas raízes.

- Verifique as seguintes funções são: injetora, sobrejetora e bijetora, justificando sua resposta:

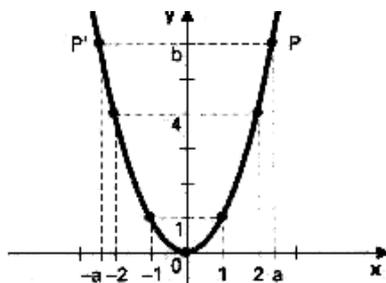
- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = -2x + 6$
- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2$
- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 6$
- $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $f(x) = x^2$
- $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x - 1$
- $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ ,  $f(x) = x + 2$

## 8. Função par e função ímpar

Dada uma função  $f: A \rightarrow B$ , dizemos que  $f$  é **par** se, e somente se,  $f(x) = f(-x)$  para todo  $x \in A$ . Ou seja: os valores simétricos devem possuir a mesma imagem. O diagrama a seguir mostra um exemplo de função par:

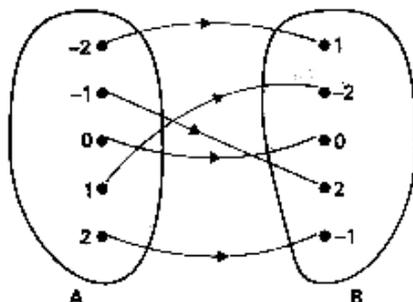


*Exemplo:* A função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = x^2$  é uma função par, pois  $f(x) = x^2 = (-x)^2 = f(-x)$ . Podemos notar a paridade dessa função observando o seu gráfico:

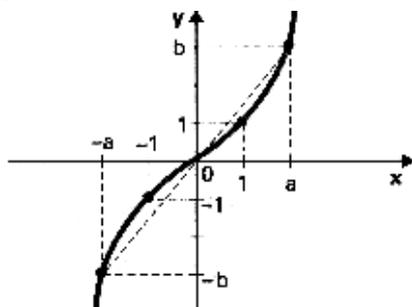


Notamos, no gráfico, que existe uma **simetria em relação ao eixo vertical**. Elementos simétricos têm a mesma imagem. Os elementos 2 e -2, por exemplo, são simétricos e possuem a imagem 4.

Dada uma função  $f: A \rightarrow B$ , dizemos que  $f$  é **ímpar** se, e somente se,  $f(-x) = -f(x)$  para todo  $x \in A$ . Ou seja: valores simétricos possuem imagens simétricas. O diagrama a seguir mostra um exemplo de função ímpar:



*Exemplo:* A função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = x^3$  é uma função ímpar, pois  $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$ . Podemos notar que a função é ímpar observando o seu gráfico:



Notamos, no gráfico, que existe uma **simetria em relação a origem 0**. Elementos simétricos têm imagens simétricas. Os elementos 1 e -1, por exemplo, são simétricos e possuem imagens 1 e -1 (que também são simétricas).

*Observação:* Uma função que não é par nem ímpar é chamada *função sem paridade*.

*Exemplos:*

1) Classifique as funções abaixo em pares, ímpares ou sem paridade:

a)  $f(x) = 3x$

$$f(-x) = 3(-x) = -3x = -f(x) \rightarrow f(-x) = -f(x), \text{ portanto } f \text{ é ímpar.}$$

b)  $f(x) = x^2 + 1$

$$f(-x) = (-x)^2 + 1 = x^2 + 1 = f(x) \rightarrow f(x) = f(-x), \text{ portanto } f \text{ é par.}$$

c)  $f(x) = x^2 - 2x + 3$

$$f(-x) = (-x)^2 - 2(-x) + 3 = x^2 + 2x + 3 \neq -f(x) \text{ e } x^2 + 2x + 3 \neq f(x)$$

Como  $f(x) \neq f(-x)$ , então  $f$  não é par, e como  $f(-x) \neq -f(x)$ , logo  $f$  não é ímpar.

Logo com  $f$  não ser par nem ímpar, concluímos que  $f$  é função sem paridade.

## 9. Função crescente e função decrescente

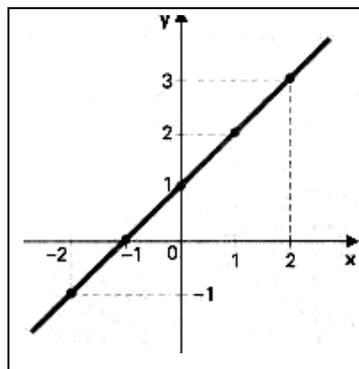
Dada uma função  $f: A \rightarrow B$ , dizemos que  $f$  é **crescente** em algum conjunto  $D \subset A$ , se, e somente se, para quaisquer  $x_1$  e  $x_2 \in D$ , com  $x_1 < x_2$ , tivermos  $f(x_1) < f(x_2)$ .

Dada uma função  $f: A \rightarrow B$ , dizemos que  $f$  é **decrescente** em algum conjunto  $D \subset A$ , se, e somente se, para quaisquer  $x_1$  e  $x_2 \in D$ , com  $x_1 < x_2$ , tivermos  $f(x_1) > f(x_2)$ .

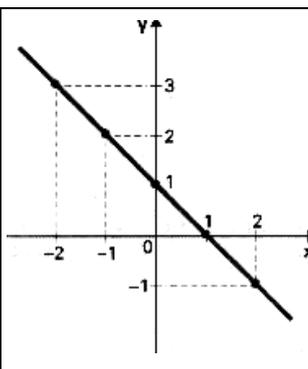
*Exemplos:*

1) A função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = x + 1$  é crescente em  $\mathbb{R}$ , pois  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) = x_1 + 1 < x_2 + 1 = f(x_2) \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ , por exemplo, para  $x_1 = 2$  e  $x_2 = 3$ , temos  $f(2) = 2 + 1 = 3 < f(3) = 3 + 1 = 4 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ . Logo, quando os valores do domínio crescem, suas imagens também crescem.

2) A função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = -x + 1$  é decrescente em  $\mathbb{R}$ , pois  $x_1 < x_2 \Rightarrow -x_1 > -x_2 \Rightarrow -x_1 + 1 > -x_2 + 1 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ , por exemplo, para  $x_1 = 2$  e  $x_2 = 3$ , temos  $f(2) = -2 + 1 = -1 > f(3) = -3 + 1 = -2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ . Logo quando os valores do domínio crescem, suas correspondentes imagens decrescem.



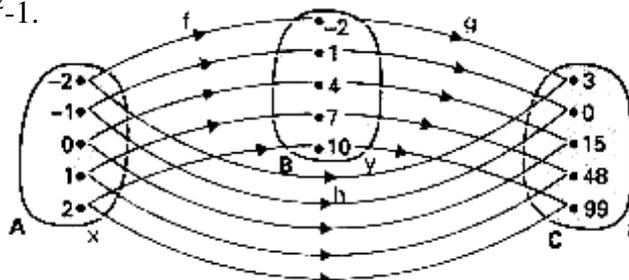
Esse é um exemplo de função **crescente**. Podemos notar no gráfico que à medida que os valores de  $x$  vão crescendo, suas imagens também vão crescendo.



Esse é um exemplo de função **decrescente**. Podemos notar no gráfico que à medida que os valores de  $x$  vão crescendo, suas imagens vão decrescendo.

## 10. Função Composta

Para entender o que é uma função composta, vamos analisar um exemplo. Consideremos os conjuntos  $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ ,  $B = \{-2, 1, 4, 7, 10\}$  e  $C = \{3, 0, 15, 48, 99\}$ , e as funções  $f: A \rightarrow B$  definida por  $f(x) = 3x + 4$ , e  $g: B \rightarrow C$  definida por  $g(y) = y^2 - 1$ .



Como nos mostra o diagrama acima, para todo  $x \in A$  temos um único  $y \in B$  tal que  $y = 3x + 4$ , e para todo  $y \in B$  existe um único  $z \in C$  tal que  $z = y^2 - 1$ , então concluímos que existe uma função  $h$  de  $A$  em  $C$ , definida por  $h(x) = z$  ou  $h(x) = 9x^2 + 24x + 15$ , isto é,  $h(x) = z \Rightarrow h(x) = y^2 - 1$ , e como  $y = 3x + 4$ , então  $h(x) = (3x + 4)^2 - 1 \Rightarrow h(x) = 9x^2 + 24x + 15$ .

A função  $h(x)$  é chamada **função composta** de  $g$  com  $f$ . Podemos indicá-la por  $g \circ f$  (lemos “ $g$  composta com  $f$ ”) ou  $g[f(x)]$  (lemos “ $g$  de  $f$  de  $x$ ”).

Exemplos:

1) Sejam as funções  $f(x) = 2x$  e  $g(x) = x + 3$ . Encontre  $(g \circ f)(x)$  e  $(f \circ g)(x)$ .

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g[2x] = (2x) + 3 = 2x + 3.$$

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f[x + 3] = 2(x + 3) = 2x + 6.$$

2) Sejam as funções  $f(x) = x^2 + 1$  e  $g(x) = \sqrt{x}$ . Encontre  $(g \circ f)(x)$  e  $(f \circ g)(x)$ .

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g[x^2 + 1] = \sqrt{x^2 + 1}.$$

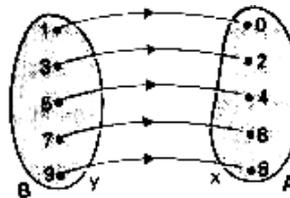
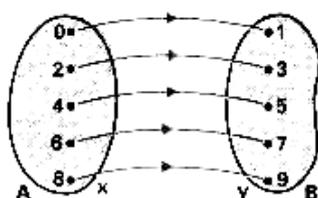
$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f[\sqrt{x}] = (\sqrt{x})^2 + 1 = x + 1.$$

3) Sejam as funções  $f(x) = 3x + 1$  e  $f[g(x)] = 6x - 8$ . Encontre  $g(x)$ .

$$\text{Como } f(x) = 3x + 1 \text{ e } f[g(x)] = 3 \cdot g(x) + 1, \text{ porém, } f[g(x)] = 6x - 8, \Rightarrow 3 \cdot g(x) + 1 = 6x - 8 \Rightarrow g(x) = 2x - 3.$$

## 11. Função Inversa

Consideremos os conjuntos  $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$  e  $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$  e a função  $f: A \rightarrow B$  definida por  $y = x + 1$ . A função  $f$  está representada no primeiro diagrama abaixo:



A função  $f$  é uma função **bijetora**, pois a cada elemento  $x$  de  $A$  está associado um único elemento  $y$  de  $B$ , de modo que  $y = x + 1$ .

Como  $f$  é bijetora, a cada elemento  $y$  de  $B$  está associado um único elemento  $x$  de  $A$ , de modo que  $x = y - 1$ , temos uma outra função  $g: B \rightarrow A$ , de modo que  $x = y - 1$  ou  $g(y) = y - 1$ . Essa função  $g$  está representada no segundo diagrama acima.

Pelo que acabamos de ver, a função  $f$  leva  $x$  até  $y$  enquanto a função  $g$  leva  $y$  até  $x$ . A função  $g: B \rightarrow A$  recebe o nome de **função inversa de  $f$**  e é indicada por  $f^{-1}$ .

O domínio de  $f$  é o conjunto imagem de  $g$ , e o conjunto imagem de  $f$  é o domínio de  $g$ . Quando queremos, a partir da sentença  $y = f(x)$ , obter a sentença de  $f^{-1}(x)$ , devemos dar os seguintes passos:

I) Isolamos  $x$  na sentença  $y = f(x)$

II) Pelo fato de ser usual a letra  $x$  como símbolo da variável independente, trocamos  $x$  por  $y$  e  $y$  por  $x$ .

Exemplos:

1) Para obter a função inversa de  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $y = x - 6$ , devemos:

I) Isolar  $x$  em  $y = x - 6 \Rightarrow x - 6 = y \Rightarrow x = y + 6$

II) Trocar  $x$  por  $y$  e  $y$  por  $x \Rightarrow y = x + 6$ .

Logo, a função inversa de  $f(x) = x - 6$  é a função  $f^{-1}(x) = x + 6$ .

2) Para obter a função inversa de  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $y = 2x + 4$ , devemos:

I) Isolar  $x$  em  $y = 2x + 4 \Rightarrow 2x + 4 = y \Rightarrow 2x = y - 4 \Rightarrow x = \frac{y - 4}{2} \Rightarrow x = \frac{y}{2} - 2 \Rightarrow x = \frac{1}{2}y - 2$

II) Trocar  $x$  por  $y$  e  $y$  por  $x \Rightarrow y = \frac{1}{2}x - 2$ .

Logo, a função inversa de  $f(x) = 2x + 4$  é a função  $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - 2$ .

3) Para obter a função inversa de  $f: \mathbb{R} - \{3\} \rightarrow \mathbb{R} - \{1\}$  definida por  $f(x) = y = \frac{x + 1}{x - 3}$ , devemos:

I) Isolar  $x$  em

$$y = \frac{x + 1}{x - 3} \Rightarrow y(x - 3) = x + 1 \Rightarrow yx - 3y = x + 1 \Rightarrow yx - x = 1 + 3y \Rightarrow x(y - 1) = 3y + 1 \Rightarrow x = \frac{3y + 1}{y - 1}$$

II) Trocar  $x$  por  $y$  e  $y$  por  $x \Rightarrow y = \frac{3x + 1}{x - 1}$ .

Logo, a função inversa de  $f(x) = \frac{x+1}{x-3}$  é a função  $f^{-1}(x) = \frac{3x+1}{x-1}$ .

**Observação:** Para que uma função  $f$  admita a inversa  $f^{-1}$  é necessário que ela seja bijetora. Se  $f$  não for bijetora, ela não possuirá inversa.

## 12. Exercícios

- 1) O preço do serviço executado por um pintor consiste em uma taxa fixa de R\$ 25,00 e mais uma quantia que depende da área pintada. A tabela abaixo mostra alguns orçamentos apresentados por esse pintor:

Área pintada (em m <sup>2</sup> )	Total a pagar (em reais)
5	35,00
10	45,00
15	55,00
20	65,00

Observando a tabela, responda:

- Como se exprime, matematicamente, o preço total (p) da pintura de x metros quadrados?
  - Qual o preço cobrado pela pintura de uma área de 135 m<sup>2</sup>?
  - Qual é a área máxima que pode ser pintada dispendo-se de R\$ 625,00?
- 2) Um fabricante vende um produto por R\$ 0,80 a unidade. O custo total do produto consiste numa taxa fixa de R\$ 40,00 mais o custo de produção de R\$ 0,30 por unidade.
- Escreva a função custo de produção e a função lucro que o fabricante terá.
  - Qual o número de unidades que o fabricante deve vender para não ter lucro nem prejuízo?
  - Se vender 200 unidades desse produto, o fabricante terá lucro ou prejuízo?
- 3) Determine o domínio das seguintes funções:
- $f(x) = \frac{2}{x+3}$
  - $f(x) = \frac{4x}{x^2-9}$
  - $f(x) = \sqrt[3]{x}$
  - $f(x) = \sqrt[4]{2x-4}$
  - $f(x) = \sqrt[6]{5-x}$
  - $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x-6}}$
  - $f(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{x-6}$
  - $f(x) = \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{3x-6}}$
- 4) Construir o gráfico das funções abaixo e determinar o conjunto imagem:
- $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = 2x - 1$ , sendo  $D = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ .
  - $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{se } x < 0 \\ -2x, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$ , sendo  $D = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ .
  - $f: [-2, 6] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = \frac{6-x}{2}$
- 5) Usando a definição, verifique se as funções são pares, ímpares ou sem paridade (nem pares nem ímpares):
- $f(x) = x^3 - x$
  - $f(x) = x^3 + x^2 + x$
  - $f(x) = x^4 + 2x^2$
  - $f(x) = 2^x + 2^{-x}$
- 6) Seja  $f(x) = x^2 - 1$ , encontre o intervalo onde  $f$  é crescente e onde  $f$  é decrescente. Qual é o valor de  $x$  onde a função  $f$  tem valor mínimo? Qual o valor de  $x$  onde a função  $f$  tem valor máximo?
- 7) Através de exemplos, escreva e faça o gráfico de funções que são crescentes, decrescentes e constantes.
- 8) Para cada uma das funções  $f$  e  $g$  de  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , determine as funções compostas  $g \circ f$ ,  $f \circ g$ ,  $g \circ g$  e  $f \circ f$ :
- $f(x) = x+5$  e  $g(x) = x^2 - 1$
  - $f(x) = 1-x$  e  $g(x) = 2x+5$
  - $f(x) = x^2 + 1$  e  $g(x) = x-1$
  - $f(x) = 5x-3$  e  $g(x) = x^2 - 4$
- 9) Verifique se as seguintes funções são bijetoras e, em caso positivo, determine a lei de formação das funções inversas:
- $y = 2x - 4$
  - $y = 3x$
  - $y = -3x + 6$
  - $f(x) = x^2$
  - $f(x) = \sqrt{x}$
  - $f(x) = \frac{x+3}{x-2}$
  - $f(x) = \frac{x+5}{x-5}$
  - $f(x) = x^2 - 4$