Capítulo 2

Números reais

Capítulo 2

Números reais

Estudaremos o conjunto dos números reais $(\mathbb{R})$ ***, suas operações e propriedades, e sua relação de ordem. As propriedades das operações e da relação de ordem serão utilizadas para o estudo das equações e inequações.***

Introdução

Os conjuntos numéricos estão presentes em todos os conteúdos do Ensino Fundamental e do Ensino Médio: nas primeiras séries do Ensino Fundamental são estudadas as operações em $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Q}_+$; nas séries iniciais do segundo ciclo do Ensino Fundamental introduz-se $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}_-$ e em seguida $\mathbb{R}$. A partir daí as "ferramentas" de trabalho são os números.

É curioso observar como os alunos, de modo geral, "classificam" os números em "grandes" quando têm mais de dois algarismos; "não dão certo" quando são irracionais; uma fração é suspeita! Os "preconceitos" com determinadas classes de números acabam interferindo em outras áreas, como Física e Química. Por este motivo, o professor de matemática tem a tarefa de conduzir seus alunos no "mundo" dos números sem restrições e comentários que possam reforçar ou criar os "preconceitos". Para tanto, é preciso que o professor também não os tenha! Um exemplo claro é o conjunto dos números irracionais (cujo estudo é iniciado na sétima série do Ensino Fundamental, quando aparecem os radicais), pouco explorado no Ensino Fundamental e pouquíssimo explorado no Ensino Médio. No entanto, as representações dos fenômenos naturais utilizam em geral números irracionais; ao apresentar este universo para os alunos, estaremos contribuindo para que eles tenham um entendimento melhor da natureza.

Ao longo deste capítulo estudaremos o conjunto dos números reais não só como uma ferramenta útil na construção de outros conceitos matemáticos, mas como um objeto matemático próprio. O conhecimento do conjunto dos números reais é de extrema importância no estudo do Cálculo, juntamente com as funções, nosso objeto de estudo dos próximos capítulos.

2.1 O conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais: racionais e irracionais

Você já estudou os conjuntos numéricos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$, as operações definidas neles e suas propriedades. O que falta para chegarmos aos números reais é o conjunto dos números irracionais. Não faremos aqui a construção formal; você terá oportunidade de construir $\mathbb{R}$ em disciplinas de Análise. Mas o que é um número irracional? É um número real que não é racional, ou seja, que não pode ser expresso como uma razão de números inteiros $\frac{a}{b}$ com $b \neq 0$. Exemplos clássicos de números irracionais são as raízes "não exatas", como $\sqrt{5}$ e, de modo mais geral, $\sqrt{b}$ quando b não é o quadrado de um número. Talvez o irracional mais famoso seja o π, resultado da divisão do comprimento de uma circunferência pelo seu diâmetro. Aqui cabe uma pergunta: mas π não é a razão entre dois números? Por que não é racional? (deixaremos que você responda!). Outra maneira de caracterizar os números irracionais é por meio da representação decimal; sabemos que os números racionais podem ser representados na forma $\frac{a}{b}$ e também na forma decimal, resultado da divisão do inteiro a pelo inteiro b. O Algoritmo da Divisão nos garante que, ao dividirmos a por b, temos duas opções: ou a conta "dá exata", com resto zero, ou os restos começam a se repetir (pois estão limitados pelo divisor b), gerando uma dízima periódica. Assim, a representação decimal de um número racional será finita, no primeiro caso, ou infinita periódica no segundo. Reciprocamente, um número na forma decimal finita ou infinita periódica pode ser representado também na forma fracionária. Alguns exemplos:

1) $1,456 = \frac{1456}{1000}$

2) $2,343434... = 2 + \frac{34}{99} = \frac{232}{99}$

3) $0,2454545... = 0,2 + 0,0454545... = \frac{2}{10} + \frac{45}{990} = \frac{243}{990}$

Tendo em conta que um número irracional é aquele que não é racional, ele pode então ser caracterizado como aquele que possui uma representação decimal infinita não-periódica, ou seja, os algarismos após a vírgula não se apresentam como blocos repetidos, sucedendo-se uma infinidade de casas decimais, como por exemplo, 0,1010010001000010000001... Os exemplos a seguir mostram números irracionais conhecidos em sua representação infinita não-periódica:

4) $\pi = 3,1415926535...$

5) $e = 2,7182818284...$

6) $\sqrt{2} = 1,4142135623...$

Pergunta: se os números irracionais possuem uma infinidade não-periódica de casas decimais e não podemos saber todas elas, como eles são utilizados na prática? Por exemplo: o volume de uma lata de leite condensado (cilíndrica) é $V = A.h$, em que A é a área da base e h é a altura; a área da base é πr^2, sendo r o raio. Se r = 3,75cm e a altura for de 8 cm (dimensões aproximadas da lata de leite condensado), o volume V é dado por $V = \pi \times (3,75)^2 \times 8$, que é um número irracional (apesar da lata ser um objeto de uso comum para medidas nas receitas de pudim!). O que acontece nestes casos é que são usadas aproximações racionais para estas medidas. Você deve lembrar que na prática muitas vezes o professor dizia para usar π como $3,14$. Esta é uma aproximação racional para um número que possui uma infinidade não-periódica de casas decimais: $3,14$ não é o número π, e o resultado da substituição de π por $3,14$ apresentará um erro. No entanto, este erro pode não ser significativo e a aproximação do resultado servirá também aos nossos propósitos. Quanto mais casas decimais considerarmos, menor será o erro decorrente da substituição. Usando 3,14 como aproximação para π, o volume da lata de leite condensado é $353,25 \text{ cm}^3$ (na embalagem de uma das marcas de leite condensado aparece 353 cm^3). Observe outras aproximações na tabela:

Aproximação de π	$V = \pi \times (3{,}75)2 \times 8 \text{ cm}^3$
3,14	353,25
3,1415	353,41
3,141592	353,4291
3,14159265	353,429173125
3,1415926535	353,429173519

Já podemos nos sentir mais confortáveis: usar uma aproximação racional ao invés de uma infinidade não-periódica de casas decimais pelo menos nos permite fazer contas. Mas como encontrar as casas decimais para poder usar aproximações racionais? Em outras palavras: como determinar que $\sqrt{2} = 1,4142135623...$ se não é o resultado de uma divisão? Vale a mesma pergunta para $\pi = 3,1415926535...$: como estas casas decimais foram determinadas? Responder esta última pergunta é o primeiro exercício do capítulo 2; você vai precisar pesquisar em livros de História da Matemática.

Atividade de pesquisa

1) Dê exemplos de quatro tipos de aproximações de π feitas antes do século XX. Explique cada uma delas.

Exemplo de aproximação por racionais

Vamos estudar agora um método para aproximar números irracionais por racionais. Este método já era conhecido na antigüidade (foi desenvolvido pelos babilônios) e é bastante eficiente. No entanto, só pode ser utilizado para aproximar raízes quadradas "não-exatas", da forma $\sqrt{b}$, quando b não é o quadrado de um número.

Faremos como exemplo as aproximações para $\sqrt{2}$:

Inicialmente observamos que $1 < \sqrt{2} < \frac{3}{2}$, uma vez que

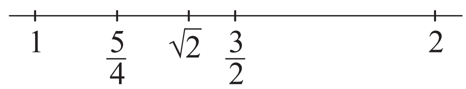
$$1^2 < 2 < \frac{9}{4} = 2,25.$$

Tomamos como ponto de partida a média aritmética entre 1 e $\frac{3}{2}$, que na reta significa o ponto médio entre entre 1 e $\frac{3}{2}$; esta média aritmética será nossa

- **1ª aproximação**: $\dfrac{1+\frac{3}{2}}{2} = \frac{5}{4} = 1,25$

  Como $\left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{25}{16} = 1,56 < 2$, concluímos que $\frac{5}{4} < \sqrt{2} < \frac{3}{2}$.

  Na reta:



  $\frac{5}{4} = 1,25$ é uma aproximação "por falta", uma vez que é menor do que $\sqrt{2}$.

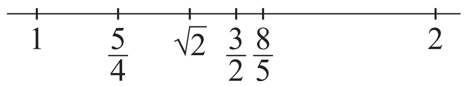
  Posso chegar ainda mais próximo de $\sqrt{2}$ por valores racionais? Para chegarmos mais "perto", lembramos que estamos procurando números racionais próximos de um número x cujo quadrado é 2, ou seja, $x^2 = x.x = 2$. Fazendo $x.\frac{5}{4} = 2$, obtemos $x = \frac{8}{5}$ e tomando a média aritmética (ou o ponto médio) entre $\frac{5}{4}$ e $\frac{8}{5}$, obtemos nossa

- **2ª aproximação:** $\dfrac{\frac{5}{4}+\frac{8}{5}}{2} = \dfrac{25+32}{20\cdot 2} = \dfrac{57}{40} = 1,425$

  Mas por que efetuamos estas inesperadas operações para obtermos nossa segunda aproximação? De fato, é um procedimento bastante razoável. Buscamos um número x tal que $x.x = 2$; se $\frac{5}{4}$ é uma aproximação de $\sqrt{2}$ e encontramos x tal que $x.\frac{5}{4} = 2$, ou seja, $\frac{5}{4}.\frac{8}{5} = 2$, podemos concluir que $\frac{8}{5}$ é também uma aproximação de

$\sqrt{2}$. Além disso, se uma destas aproximações é menor do que $\sqrt{2}$, a outra deverá ser maior. De fato, $\left(\frac{8}{5}\right)^2 = \frac{64}{25} > \frac{50}{25} = 2$ e conseqüentemente $\sqrt{2} < \frac{8}{5}$. Por este motivo é que tomamos o ponto médio entre $\frac{5}{4}$ e $\frac{8}{5}$ para nossa segunda aproximação.

Na reta

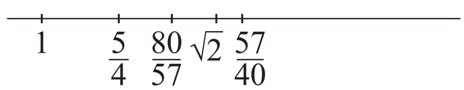


Observe que diminuímos o intervalo no qual se encontra o número $\sqrt{2}$: agora temos $\frac{5}{4} < \sqrt{2} < \frac{8}{5}$ e esta $2^{\underline{a}}$ aproximação está à direita de $\sqrt{2}$, pois $\left(\frac{57}{40}\right)^2 = \frac{3249}{1600} > \frac{3200}{1600} = 2$.

Novamente usamos $\frac{57}{40}$ para fazer o papel de um "x" na igualdade $x.x = 2$, obtendo um número à esquerda de $\sqrt{2}$: $x.\frac{57}{40} = 2$, o que nos dá $x = \frac{80}{57}$.

Como $\left(\frac{80}{57}\right)^2 = \frac{6400}{3249} < \frac{6498}{3249} = 2$, concluímos que $\frac{80}{57} < \sqrt{2} < \frac{57}{40}$.

Na reta



Com um intervalo ainda mais reduzido, tomamos o ponto médio (a média aritmética) entre $\frac{80}{57}$ e $\frac{57}{40}$, para produzir nossa

- **$3^{\underline{a}}$ aproximação**: $\dfrac{\frac{80}{57} + \frac{57}{40}}{2} = \dfrac{6449}{4560} \cong 1{,}41425...$

Continuando este procedimento encontramos uma sucessão de números racionais $\frac{5}{4}, \frac{57}{40}, \frac{6449}{4560}$ ... que se aproximam cada vez mais de $\sqrt{2}$.

Compare esta sucessão com o número que a calculadora nos dá como $\sqrt{2}$:

Calculadora	Aproximações	Erro (diferença entre o valor dado pela calculadora e as aproximações)
1,41421356237...	$\frac{5}{4}=1,25$	0,16421356237 (erro na 1ª casa decimal)
	$\frac{57}{40}=1,425$	0,01078643763 (erro na 2ª casa decimal)
	$\frac{6449}{4560}=1,41425...$	0,00003643763 (erro na 5ª casa decimal)

Faça você a $4^{\underline{a}}$ e a $5^{\underline{a}}$ aproximações e observe como o erro diminui a ponto de não mais o reconhecermos!

Observação 1. As aproximações que encontramos dependem do ponto de partida (da 1ª aproximação), quando consideramos o intervalo que contém $\sqrt{2}$. Se tomássemos 2 como 1ª aproximação (em vez de $\frac{3}{2}$) nossa sucessão seria diferente, mas ainda assim se aproximaria de $\sqrt{2}$. Experimente!

Observação 2. Todos os números irracionais podem ser aproximados por racionais; este é um resultado que você estudará com detalhes na disciplina de Análise.

Observação 3. O conjunto dos números irracionais é anotado por $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$, uma vez que se trata do conjunto dos números reais que não são racionais: $\mathbb{R}-\mathbb{Q}=\{x\in\mathbb{R} \,/\, x\notin\mathbb{Q}\}$

Exercícios propostos

1) Utilizando o procedimento anterior, encontre a 4ª aproximação de $\sqrt{30}$, começando as aproximações com 5 (1ª aproximação). Comparando com o resultado da calculadora, em qual casa decimal está o erro?

2) Encontre três aproximações racionais para $\sqrt{5}$, escolhendo diferentes intervalos que contém $\sqrt{5}$ (1ª aproximação). Compare os resultados.

3) Você conhece um programa computacional que pode ser usado para calcular as aproximações por racionais? Caso conheça, dê um exemplo. Caso desconheça, informe-se!

2.2 Operações e propriedades no conjunto $\mathbb{R}$: a estrutura de corpo

Durante todo o Ensino Médio você operou com números reais e utilizou as propriedades das operações e da relação de ordem definida em $\mathbb{R}$ na resolução de equações e inequações. Na verdade você utilizou o fato de $\mathbb{R}$ ter uma **"estrutura de corpo ordenado"**. Uma "estrutura" (também chamada estrutura algébrica) é obtida em um conjunto equipado com operações quando estas operações têm determinadas propriedades. A construção formal de $\mathbb{R}$ nos permitiria definir as operações e provar todas as propriedades; no entanto, esta construção não será feita neste momento, como dissemos anteriormente. Assim, vamos considerar conhecidos o conjunto $\mathbb{R}$ e suas operações e vamos apresentar algumas propriedades como um conjunto de axiomas. A partir daí, provaremos outros resultados importantes para a compreensão do conjunto $\mathbb{R}$.

Este assunto será estudado de maneira aprofundada na disciplina de Álgebra I deste curso.

Axiomas
São afirmações que admitimos verdadeiras, sem demonstração. Este assunto já foi discutido em outras disciplinas, você se lembra?

Vamos então estabelecer como conhecidos:

i) o conjunto dos números reais denotado por $\mathbb{R}$;

ii) as operações de adição e multiplicação de números reais.

Para quaisquer x e y em $\mathbb{R}$, a adição faz corresponder a soma $x+y \in \mathbb{R}$ e a multiplicação faz corresponder o produto $x \cdot y \in \mathbb{R}$.

Estas operações satisfazem os seguintes axiomas: $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$.

A1) $x+(y+z)=(x+y)+z$	(Associativa)
A2) $x+y=y+x$	(Comutativa)
A3) Existe $0 \in \mathbb{R}$ tal que $x+0=x$	(Existência do elemento neutro)
A4) Existe $-x \in \mathbb{R}$ tal que $x+(-x)=0$	(Existência do elemento oposto)
M1) $x.(y.z)=(x.y).z$	(Associativa)
M2) $x.y=y.x$	(Comutativa)
M3) Existe 1 $\in$ $\mathbb{R}$ tal que $x.1=x$	(Existência do elemento neutro)
M4) Se $x \neq 0$, existe $x^{-1} \in \mathbb{R}$ tal que $x.x^{-1}=1$	(Existência do elemento inverso)
D) $x.(y+z)=x.y+x.z$. Por M2, também vale $(x+y).z=x.z+y.z$	(Distributiva)

Com estes axiomas as operações de adição e multiplicação definem em $\mathbb{R}$ uma estrutura de "corpo comutativo".

Observação 4. Os quatro primeiros axiomas referem-se à operação adição; os quatro seguintes, à operação multiplicação. O último axioma (D) relaciona as duas operações; lembre que este axioma também é conhecido como "colocar em evidência".

Observação 5. Você deve lembrar de um conjunto de propriedades consideradas como axiomas quando estudou os conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$. À medida que "ampliamos" nosso universo numérico, "ganhamos" mais propriedades relativas às operações. Vamos fazer uma retrospectiva das propriedades relativas às operações dos conjuntos estudados até agora (para identificar as propriedades, usaremos a notação das propriedades de $\mathbb{R}$ que acabamos de estabelecer):

Conjunto numérico	Propriedades da Adição	Propriedades da Multiplicação	Dist.
Naturais ($\mathbb{N}$)	A1, A2, A3	M1, M2, M3	D
Inteiros ($\mathbb{Z}$)	A1, A2, A3, A4	M1, M2, M3	D
Racionais ($\mathbb{Q}$)	A1, A2, A3, A4	M1, M2, M3, M4	D
Reais ($\mathbb{R}$)	A1, A2, A3, A4	M1, M2, M3, M4	D

Podemos observar na tabela que, ao ampliarmos de $\mathbb{N}$ para $\mathbb{Z}$, ganhamos A4, ou seja, os opostos dos números; de $\mathbb{Z}$ para $\mathbb{Q}$ ganhamos M4, ou seja, os inversos dos números não- nulos. Mas de $\mathbb{Q}$ para $\mathbb{R}$ não ganhamos nada. Isto significa que $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ se comportam da mesma maneira em relação às operações, isto é, têm a mesma estrutura de corpo.

Das operações de adição e multiplicação associadas aos axiomas A4 e M4, podemos definir em $\mathbb{R}$ mais duas operações (como já definido em $\mathbb{Q}$), a subtração e a divisão: $\forall x, y \in \mathbb{R}$, a diferença $x - y = x + (-y)$ soma de x com o oposto de y; o quociente para $y \neq 0$, $x \div y = x.y^{-1}$ é o produto de x pelo inverso de y.

Assim como em $\mathbb{Q}$, estas operações não são comutativas nem associativas e não têm elemento neutro.

Propriedades

Decorrem dos axiomas as seguintes propriedades em $\mathbb{R}$:

P1) O zero é único.

Demonstração. A estratégia para provar esta unicidade é supor que existam dois zeros e provar que são iguais. Suponhamos então que existam dois elementos em $\mathbb{R}$ satisfazendo A3 (fazendo o papel de zero): 0 e 0_1. Pela existência do oposto teríamos então: $1 + (-1) = 0$ e $1 + (-1) = 0_1$. Logo, $0 = 0_1$ e o zero é único.

■

P2) O oposto de um elemento de $\mathbb{R}$ é único.

Demonstração. Seja $x \in \mathbb{R}$. Suponhamos que x tenha dois opostos: y e z. Então teremos $x + y = 0$ e $x + z = 0$, o que significa $x + y = x + z$. Somamos y (o oposto de x) em ambos os lados da igualdade e teremos:

$$y + (x + y) = y + (x + z)$$

$$(y + x) + y = (y + x) + z \qquad \text{(Associativa, A1)}$$

$$0 + y = 0 + z \qquad \text{(Existência do oposto, A4 e comutativa, A2)}$$

$$y = z \qquad \text{(Existência do elemento neutro)}$$

Poderíamos também somar z, o "outro" oposto de x e chegaríamos à mesma conclusão).

■

P3) Vale a lei do cancelamento para a adição:

$$x + z = y + z \Rightarrow x = y, \forall x, y, z \in \mathbb{R}$$

Demonstração. Análoga à demonstração para os números inteiros.

P4) Vale a lei do cancelamento para a multiplicação:

$$xz = yz \; e \; z \neq 0 \Rightarrow x = y, \forall x, y, z \in \mathbb{R}$$

Demonstração. Análoga à demonstração para os números racionais.

P5) O elemento 1 é único.

Demonstração. Análoga à demonstração de P1. Faça como exercício.

P6) O inverso de cada elemento não-nulo em $\mathbb{R}$ é único.

Demonstração. Análoga à demonstração de P2. Faça como exercício.

P7) $x \cdot 0 = 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Demonstração. Como $0 = 0 + 0$, podemos escrever:

$x \cdot (0 + 0) = x \cdot 0$

$x \cdot 0 + x \cdot 0 = x \cdot 0$ (Distributiva)

$x \cdot 0 + x \cdot 0 = x \cdot 0 + 0$ (Existência do elemento neutro)

$x \cdot 0 = 0$ (Lei do cancelamento para adição, P3)

■

P8) $x \cdot y = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $y = 0$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$

Demonstração. Análoga à demonstração para os números racionais; vamos fazê-la novamente:

Hipótese. $x \cdot y = 0$

Tese. $x = 0$ ou $y = 0$

Como temos que provar uma afirmação com "ou" (no sentido de alternativa), vamos supor que uma das alternativas não ocorra, ou seja, vamos supor $x \neq 0$. Devemos mostrar então que para y só resta a opção de ser 0. De fato: por hipótese temos $x.y = 0$ e pela propriedade P7 temos que $0 = x.0$. Podemos então escrever $x.y = x.0$.

Como $x \neq 0$, pela Lei do cancelamento para a multiplicação (P4), temos que $y = 0$.

■

P9) $-(-x) = x$ e $(x^{-1})^{-1} = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Análoga à demonstração para os números racionais.

P10) $-(x+y) = (-x)+(-y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Análoga à demonstração para os números inteiros.

P11) $(-x).y = x.(-y) = -(x.y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Análoga à demonstração para os números inteiros.

Observação 6. Estas propriedades são utilizadas para a resolução de equações em $\mathbb{R}$. Vejamos um exemplo, resolvendo a equação $x^2 - 3x = 2x$ e explicitando a propriedade ou axioma utilizado em cada passo:

$x^2 - 3x = 2x$

$x^2 - 3x + (-2x) = 2x + (-2x)$ (existência do oposto (A4): o oposto de $2x$ é $-2x$)

$x^2 + (-3x) + (-2x) = 0$ (def. subtração e A4)

$x^2 + (-3)x + (-2)x = 0$ (P11, oposto do produto)

$x^2 + [(-3)+(-2)]x = 0$ (distributiva)

$x^2 + (-5)x = 0$ (P10, oposto da soma)

$x[x + (-5)] = 0$ (distributiva)

$x = 0$ ou $x + (-5) = 0$ (P8: se um produto é nulo, um dos fatores é nulo)

$x = 0$ ou $x + (-5) + 5 = 0 + 5$ (adicionamos 5 aos dois membros da igualdade)

$x = 0$ ou $x + 0 = 5$ (A4, A3 e distributiva)

$x = 0$ ou $x = 5$ (A3)

Como visto, todos os procedimentos de resolução se originam nos axiomas e/ou propriedades dos números reais.

2.3 Operações com números irracionais

Esta palavra é recorrente no vocabulário matemático e indica que uma possibilidade exclui a outra, isto é, se satisfaz a primeira sentença não pode satisfazer a segunda e vice-versa.

As propriedades que acabamos de estudar referem-se ao conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais; este conjunto, como já sabemos, compõe-se de números racionais e irracionais. Lembre-se que um número irracional é aquele que não é racional, ou seja: dado um número real, ele só tem duas possibilidades: é racional ou irracional e este "ou" é exclusivo.

Você já conhece o conjunto dos números racionais e sabe que quando operamos números racionais (com as operações adição, multiplicação, subtração, divisão) o resultado é ainda um número racional (as operações são fechadas em $\mathbb{Q}$). De modo geral, isto não acontece com os números irracionais. Adição e multiplicação de dois números irracionais pode ser um número racional ou um número irracio- nal. Vejamos alguns exemplos:

$$\sqrt{5}+(-\sqrt{5})=0\in\mathbb{Q},\ 1+\sqrt{30}\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$$

$$\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}=7\in\mathbb{Q},\ \sqrt{3}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{6}\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$$

No entanto, temos alguns resultados que, em parte, "substituem" a propriedade de fechamento.

Proposição 1.

a) A soma de um número racional e um número irracional é um número irracional.

b) O produto de um número racional não-nulo por um número irracional é um número irracional.

c) O oposto de um número irracional é um número irracional.

Demonstração.

a) Sejam $r \in \mathbb{Q}$ e $\square \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$; suponhamos que a soma $r + \square$ seja um número racional b.

$$r + \square = b \Rightarrow \square = b + (-r) \Rightarrow \square = b - r$$

Como a diferença entre dois números racionais é um número racional, da última igualdade concluímos que $\square \in \mathbb{Q}$. Isto contradiz nossa hipótese de que $\square \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Essa contradição surgiu da suposição de que $r + \square \in \mathbb{Q}$. Logo, $r + \square \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

b) Faça como exercício (utilizando o mesmo tipo de argumento usado em a).

c) Faça como exercício.

■

Observação 7. Os resultados enunciados na Prop. 1 nos permitem "produzir" números irracionais. Escolha um número irracional, $\sqrt{5}$, por exemplo; para cada número racional $b \neq 0$, teremos os irracionais $b + \sqrt{5}$ e $b \cdot \sqrt{5}$. Isto significa que, para cada número irracional escolhido, podemos construir uma infinidade de outros irracionais.

Exercícios resolvidos

1) Prove que para todo número inteiro primo positivo p, tem se que $\sqrt{p}$ é um número irracional.

Resolução. Como um número real é racional ou irracional e este "ou" é exclusivo, vamos supor que $\sqrt{p}$ seja racional; então $\sqrt{p} = \frac{a}{b}$, com a e b inteiros positivos e $b \neq 0$. Podemos também considerar que $\frac{a}{b}$ é uma fração irredutível, ou seja, $mdc\,(a, b) = 1$ (lembre que todo número racional pode ser expresso em sua forma irredutível).

Na igualdade anterior, elevando ambos os membros ao quadrado, obtemos $p = \frac{a^2}{b^2}$ e, multiplicando por b^2, teremos $p.b^2 = a^2$ (I).

Note que esta última igualdade é uma igualdade de números inteiros e dela podemos concluir que p é um divisor de a^2. Como p é um número primo e divisor do produto $a.a$, um teorema de divisibilidade

Teorema: sejam a, b e p números inteiros; se $p \mid (a \cdot b)$ e p é primo, então $p \mid a$ ou $p \mid b$.

nos garante que p é um divisor de a, ou seja, $a = p \cdot x$, para $x \in \mathbb{Z}$. A igualdade (I) pode então ser escrita como:

$p.b^2 = (p.x)^2$

$p.b^2 = p^2.x^2$ (propriedade das potências em $\mathbb{Z}$)

$b^2 = p.x^2$ (Lei do cancelamento para multiplicação em $\mathbb{Z}$)

A última igualdade nos mostra que p é um divisor do produto $b.b$ e, pelo mesmo argumento anterior, concluímos que p é um divisor de b. Logo, teremos $b = p.y$, para $y \in \mathbb{Z}$. Como também temos $a = p \cdot x$, concluímos que p é um divisor comum de a e b, e $p \neq 1$ (pois p é primo). Isto contraria o fato que $mdc(a,b) = 1$ e esta contradição foi "produzida" pela nossa suposição inicial de que $\sqrt{p}$ era um número racional. Desta forma, concluímos que $\sqrt{p}$ é um número irracional.

2) Sejam w e v números irracionais. Prove que, se $w+v$ é racional, então $w-v$ é irracional.

Resolução. Suponhamos que $w-v$ fosse racional:
$w - v = x \in \mathbb{Q}$. Como por hipótese $w+v$ é racional, temos que $(w+v)+(w-v) = 2w \in \mathbb{Q}$, o que é uma contradição, já que $2 \in \mathbb{Q}$, $w \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ e, pela Proposição 1, temos $2w \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Logo, $w-v$ é irracional.

Observação 8. Você viu que a maneira mais eficiente de provar que um número é irracional é supô-lo racional e chegar a uma contradição. Isso pode ser feito, pois um número real é racional ou irracional, com "ou" exclusivo, isto é:

$$\mathbb{R} \cap (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) = \phi \text{ e } \mathbb{R} \cup (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) = \mathbb{R}$$

Observação 9. Voltaremos a falar em números irracionais quando estudarmos as funções polinomiais e as funções trigonométricas.

Exercícios propostos

4) Determine a soma, a diferença e o produto dos números $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ e $\sqrt{a} - \sqrt{b}$, com a e b números reais positivos.

5) Se x é um número irracional, mostre que o oposto $-x$ e o inverso x^{-1} são também números irracionais.

2.4 Relação de ordem em $\mathbb{R}$

No início deste capítulo mostramos um método de como os números irracionais podem ser aproximados por racionais. No desenvolvimento do método, usamos a idéia de colocar os números em uma reta, ou seja, usamos o "modelo" da reta para expressar o conjunto $\mathbb{R}$. Isto significa que a cada número real associamos um único ponto da reta e a cada ponto da reta associamos um único número real. Este modelo da reta para o conjunto $\mathbb{R}$ é largamente utilizado em todas as séries do Ensino Fundamental e do Ensino Médio. Mas os números reais não estão colocados aleatoriamente sobre a reta: é preciso definir um ponto que será associado ao zero e uma unidade, que será o 1, como já sabemos. A partir disso os números reais podem ser associados aos pontos, seguindo uma certa ordem. Isto significa que, dados quaisquer dois números reais, sabemos "qual vem antes", ou, em linguagem mais adequada, "qual é o menor". Já sabemos como localizar os números racionais na reta; os pontos que "sobram" após a identificação dos racionais serão "preenchidos" pelos irracionais. Assim, os números reais estão dispostos na reta da esquerda para a direita, do menor para o maior, como acontecia para os outros conjuntos numéricos. Esta "ordem" é que vamos estabelecer formalmente agora. Isto será feito com um cuidado especial: queremos que esta ordem perma- neça a mesma que estabelecemos para os números racionais. Para tanto, vamos tomar como axioma a existência de um determinado subconjunto de $\mathbb{R}$ (o conjunto dos números positivos) que goza de determinadas propriedades em relação às operações; a partir deste axioma, definiremos uma relação de ordem em $\mathbb{R}$: a conhecida relação " $\leq$ " (menor do que ou igual a).

Axioma de Ordem. No conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais existe um subconjunto $\mathbb{R}_+$, denominado "conjunto de números positivos", que satisfaz:

O1) Se $a \in \mathbb{R}$, exatamente uma das três afirmações ocorre:

i) $a = 0$;

ii) $a \in \mathbb{R}_+$, ou seja, a é positivo;

iii) $-a \in \mathbb{R}_+$, ou seja, o oposto de a é positivo.

O2) A soma e o produto de dois números positivos é um número positivo.

Definição 1. Um número real a é negativo se e somente se $-a$ é positivo.

Definição 2. Para $a, b \in \mathbb{R}$, definimos:

a) a é estritamente menor do que b, se e somente se $b-a$ é positivo.

b) a é estritamente maior do que b, se e somente se $a-b$ é positivo.

c) a é menor do que ou igual a b, se e somente se a é estritamente menor do que b ou a é igual a b.

d) a é maior do que ou igual a b, se e somente se a é estritamente maior do que b ou a é igual a b.

Simbolicamente, escrevemos:

- $a < b$, se e somente se $b - a \in \mathbb{R}_+$
- $a > b$, se e somente se $a - b \in \mathbb{R}_+$
- $a \leq b$, se e somente se $a < b$ ou $a = b$
- $a \geq b$, se e somente se $a > b$ ou $a = b$

Observação 10. A **definição 1** estabelece o que é um número negativo: é aquele cujo oposto é positivo. O axioma de ordem garante que, dado um número real a, somente uma das três afirmações ocorre: $a = 0$; $a \in \mathbb{R}_+$; $-a \in \mathbb{R}_+$. Concluímos então que, dado um número real a, somente uma das três afirmações ocorre: ele é positivo ($a \in \mathbb{R}_+$), ele é negativo ($-a \in \mathbb{R}_+$), ou ele é zero (esta conclusão já era verdadeira para os números racionais).

Observação 11. Os itens (a) e (c) da **definição 2** estabelecem as conhecidas relações "$\leq$" e "$<$". Os itens (b) e (d) poderiam ter sido omitidos, uma vez que são equivalentes aos itens (a) e (c), respectivamente. De modo geral, usaremos as notações correspondentes aos itens (a) e (c). Usando uma outra notação, podemos escrever os itens (a) e (c) como:

- $a < b$ se e somente se $b - a \in \mathbb{R}_+$;
- $a \leq b$ se e somente se $b - a \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$.

Observação 12. Como a e b são números reais quaisquer, fazendo $a = 0$ no item (a) da **definição 2**, temos que $0 < b$, se e somente se $b - 0 = b$ é positivo. Analogamente, fazendo $b = 0$, temos que $a < 0$, se e somente se $0 - a = -a$ é positivo, ou seja, a é negativo.

Assim, um número real x é positivo quando $0 < x$ (ou $x > 0$) e um número real y é negativo quando $y < 0$ (ou $0 > y$).

Observação 13. Dados dois números reais a e b, como $b - a$ é também um número real, o axioma de ordem nos garante que exatamente uma das afirmações ocorre:

- $b - a$ é positivo, ou seja, $a < b$;
- $b - a$ é negativo, ou seja, $-(b-a) = a - b$ é positivo e assim $b < a$;
- $b - a = 0$, ou seja, $a = b$.

Observação 14. O axioma de ordem O2 nos garante que a soma e o produto de dois números positivos é positivo, ou seja, se $x \in \mathbb{R}_+$ e $y \in \mathbb{R}_+$, então $x + y \in \mathbb{R}_+$ e $x \cdot y \in \mathbb{R}_+$. O que ocorre quando x e y pertencem a $\mathbb{R}_+ \cup \{0\}$? Como $\mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$, basta considerar a possibilidade de um dos dois números ser zero (ou ambos). Com $x = 0$ e $y \in \mathbb{R}_+$; então $x + y = 0 + y = y \in \mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$, ou seja, $x + y \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$. Em relação ao produto, se um dos números é zero, o produto será zero e teremos: $xy = 0 \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$.

Conclusão: como conseqüência do axioma de ordem O2, temos: se $x \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ e $y \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$, então $x + y \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ e $xy \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ se $x < y$, então $x \leq y$. Isto decorre da seguinte regra lógica: se A e B são afirmações, então a afirmação $A \Rightarrow (A$ ou $B)$ é verdadeira).

Proposição 2. A relação $\leq$ satisfaz as seguintes condições:

- $a \leq a$, para todo número real a.

- se $a \leq b$ e $b \leq a$, então $a = b$, para quaisquer números reais a e b.
- se $a \leq b$ e $b \leq c$, então $a \leq c$, para quaisquer números reais a, b e c.

Demonstração.

i) Devemos mostrar que $a - a$ é positivo ou $a - a = 0$. Como esta última afirmação sempre ocorre, podemos concluir que $a \leq a$.

ii) **Hip.** $a \leq b$ e $b \leq a$

Tese. $a = b$

Dados os números reais a e b, pela **Obs. 13,** exatamente uma das três situações ocorre:

$$a < b,\ b < a \text{ ou } a = b.$$

Para provarmos que $a = b$, devemos mostrar que as outras opções não ocorrem. Vamos supor que ocorra $a < b$: se $a < b$, então $a \neq b$ e $b - a$ é positivo; como por hipótese $a - b$ é positivo ou nulo e estamos supondo $a \neq b$, teremos $a - b$ e $b - a = -(a - b)$ ambos positivos, o que não pode ocorrer pois, pelo axioma de ordem 01, um número real é zero, ou é positivo ou seu oposto é positivo e este ou é **exclusivo**.

Analogamente, não pode ocorrer $b < a$. Assim, só é possível que ocorra $a = b$.

iii) **Hip.** $a < b$ e $b < c$, ou seja, $b - a$ é positivo ou nulo e $c - b$ é positivo ou nulo.

Tese. $a < c$ (ou $c - a \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$)

Por hipótese, temos que $b - a$ e $c - b$ pertencem ao conjunto $\mathbb{R}_+ \cup \{0\}$. Pela Obs.12 temos que:

$$(b - a) + (c - b) = b + (-a) + c + (-b) =$$

$$= [b + (-b)] + c + (-a) = 0 + (c - a) = c - a \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \text{ e } a \leq c.$$

■

Observação 15. Veremos no capítulo sobre Relações que as três condições da Proposição 2 caracterizam uma relação de ordem em um conjunto. Assim, a Proposição 2 prova que a relação $\leq$ é uma relação de ordem em $\mathbb{R}$; a primeira condição é a propriedade reflexiva da relação, a segunda é a anti-simétrica e a terceira é a transitiva. Além disso, como dois números reais sempre são comparáveis pela relação $\leq$, dizemos que esta ordem é total. A estrutura de corpo e a ordem total fazem de $\mathbb{R}$ um corpo totalmente ordenado.

2.4.1 Propriedades da relação de ordem

As propriedades a seguir decorrem dos Axiomas de ordem, das **definições 1** e **2** e das *proposições 1* e *2*. Algumas demonstrações serão deixadas como exercício. A compreensão destas propriedades será essencial no estudo das inequações.

Propriedades

PO1) $\forall x, y \in \mathbb{R}$, tem-se $x = y$ ou $x < y$ ou $y < x$.

Demonstração. Já feita na **Observação 13.**

PO2) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$, se $x < y$ e $y < z$, então $x < z$

Esta propriedade é a propriedade transitiva para a relação $<$; a demonstração é análoga à demonstração da Proposição 2 (iii).

PO3) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$, se $x \leq y$ e $0 \leq z$, então $xz \leq yz$.

Esta é a já conhecida propriedade "se multiplicarmos ambos os lados de uma desigualdade (do tipo $\leq$) por um número maior do que ou igual a zero, a desigualdade se mantém".

Demonstração.

Hip. $x \leq y$ e $0 \leq z$

Tese. $xz \leq yz$

Devemos provar que $xz \leq yz$, ou seja, devemos provar que $yz - xz \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$.

Por hipótese, temos que $y - x \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ e $z \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$. A Observação 14 (conseqüência do axioma de ordem O2) nos garante então que $(y - x).z = yz - xz \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$, ou seja, $xz \leq yz$.

■

PO4) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$, se $x \le y$ e $z < 0$, então $yz \le xz$

Esta também é uma propriedade conhecida como uma "regra": se multiplicarmos ambos os lados de uma desigualdade por um número negativo, inverte-se o sinal da desigualdade. Cabe aqui um comentário sobre a expressão "inverte-se o sinal da desigualdade", um emprego do verbo "inverter" em seu significado usual e não matemático. Em matemática estão definidos somente o inverso de números e funções, não há uma definição de "inverso de sinal".

Demonstração.

Hip. $x \le y$ e $z < 0$

Tese. $yz \le xz$

Por hipótese, temos que $y - x \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ e, como $z < 0$, temos que $-z \in \mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$. Então

$(-z)(y-x) \in \mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ (Obs. 14)

$(-z)(y-x) = (-z)[y + (-x)]$ (definição de subtração)

$(-z)(y-x) = (-z).y + (-z)(-x)$ (distributiva D)

$(-z)(y-x) = zx + [-(zy)]$ (P11 e A2)

$(-z)(y-x) = zx - zy$ (definição de subtração)

$(-z)(y-x) = xz - yz \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ (lembre de M2!), ou seja, $yz \le xz$).

■

PO5) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, x \le y$, se e somente se $x + z \le y + z$.

Demonstração. Este resultado é conhecido como a "compatibilidade da relação de ordem com a operação adição" e já é verdadeiro para o conjunto $\mathbb{Q}$. Vamos fazer a demonstração usando equivalências, observando que:

$$y - x = (y - x) + z + (-z) = y + (-x) + z + (-z) =$$

$$= (y + z) + [-(x + z)] = (y + z) - (x + z).$$

Assim, $y - x \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$, se e somente se $(y+z) - (x+z) \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$, ou seja, $x \le y$, se e somente se $x + z \le y + z$.

■

Tarefa

Identifique a propriedade utilizada em cada uma das quatro igualdades anteriores.

PO6) $\forall x, y, a, b$, se $x \le y$ e $a \le b$, então $x + a \le y + b$.

O resultado nos diz que, dadas duas desigualdades, se somarmos respectivamente os seus membros, a desigualdade se mantém.

Demonstração.

Hip. $x \le y$ e $a \le b$

Tese. $x + a \le y + b$

Por hipótese, temos que $y - x \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ e $b - a \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$. Logo,

$$(y - x) + (b - a) = y + (-x) + b + (-a) =$$

$$= (y + b) - (x + a) \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \text{ e assim } x + a \le y + b.$$

■

PO7) $\forall x, y, a, b \in \mathbb{R}$, se $0 \le x \le y$ e $0 \le a \le b$, então $ax \le by$.

Demonstração. Deixamos a demonstração como exercício.

PO8) $x \le y$, se e somente se $-y \le -x, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Demonstração.

$$x \le y \Leftrightarrow x + (-x) \le y + (-x) \Leftrightarrow 0 \le y + (-x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (-y) + 0 \le (-y) + y + (-x) \Leftrightarrow -y \le -x.$$

■

PO9) $\forall x, y \in \mathbb{R}$, tem-se:

a) $0 < x$, se e somente se $0 < x^{-1}$

b) $x < 0$, se e somente se $x^{-1} < 0$

c) $0 < x < 1 \Rightarrow 1 < x^{-1}$

d) $1 < x \Rightarrow 0 < x^{-1} < 1$

e) $0 < x < y \Rightarrow y^{-1} < x^{-1}$

f) $x < y < 0 \Rightarrow y^{-1} < x^{-1}$

Demonstração. Estes resultados são importantes e serão usados em diversas circunstâncias no futuro. Vamos relembrar alguns comentários sobre cada um dos itens, que são pertinentes também para os números reais, e provar novamente o item (e):

(a) e (b) As afirmações significam que um número real e seu inverso ou são ambos positivos ou ambos negativos. Observe a desigualdade estrita: o zero não tem inverso.

(c) e (d) Também bastante conhecidas, estas propriedades estabelecem que, se um número positivo é **menor** do que 1, seu inverso será **maior** do que 1 e se um número positivo é **maior** do que 1, seu inverso será **menor** do que 1. Note que se x e y são números reais e $xy = 1$, x e y não podem ser ambos maiores do que 1 nem ambos menores do que 1.

(e) e (f) Estes resultados são mais conhecidos como uma "regra" na forma : se $x < y$ então $\frac{1}{y} < \frac{1}{x}$. Observe que nem sempre isto vale, pois temos $-2 < 2$ e $\frac{1}{-2} < \frac{1}{2}$.

Faremos novamente a demonstração de e) e deixamos a demonstração de f) como exercício:

Hip. $0 < x < y$

Tese. $y^{-1} < x^{-1}$

Por hipótese, x e y são positivos, o que significa que seus inversos são também positivos (parte a). Também por hipótese, temos $x < y$. Então:

$x < y$

$x.x^{-1} < y.x^{-1}$ (PO3, multiplicando ambos os membros por x^{-1})

$y^{-1}.x.x^{-1} < y^{-1}.y.x^{-1}$ (PO3, multiplicando ambos os membros por y^{-1})

$y^{-1}.1 < 1.x^{-1}$ (M4, existência do inverso)

$y^{-1} < x^{-1}$ (M3, existência do elemento neutro da multiplicação).

■

PO10) $\forall x, y \in \mathbb{R}$, tem-se

$$x \leq 0 \;\text{ e }\; y > 0 \Rightarrow xy \leq 0$$

$$x \leq 0 \;\text{ e }\; y < 0 \Rightarrow 0 \leq xy$$

Demonstração. Estes resultados são as conhecidas "regras de sinal". Note que não é simplesmente uma "regra", mas um fato que decorre dos axiomas, definições e propriedades já estudadas. Demonstre como exercício.

PO11) Para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$(x_1)^2 + (x_2)^2 + \ldots + (x_n)^2 \geq 0$$

$$(x_1)^2 + (x_2)^2 + \ldots + (x_n)^2 = 0,$$

se e somente se $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$

Demonstração. Deixamos como exercício; os dois resultados serão úteis na resolução de inequações.

Observação 16. O conjunto de axiomas e propriedades dos números reais que acabamos de ver são a base para nossos estudos futuros. À primeira vista pode parecer que estamos "complicando" o que é muito simples. É nosso objetivo esclarecer a origem de tantas regras que nos apresentaram no ensino básico: regra de sinais para multiplicar, regra para inverter frações, regras para "multiplicar" desigualdades, etc. A origem de todas estas "regras" está nos axiomas e definições que acabamos de estudar: as regras são na verdade teoremas que podemos demonstrar utilizando os axiomas e as definições. Elas não foram "inventadas", mas deduzidas a partir de um conjunto de informações.

Exercícios propostos

6) Demonstre o que foi deixado como exercício.

7) Dado $a \in \mathbb{R}$, prove que:

a) Se $0 < a$, então $0 < a^n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

b) Se $a < 0$, então $0 < a^{2n}$ e $a^{2n+1} < 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

8) Se $a,b \in \mathbb{R}$ e $a < b$, mostre que $a^3 < b^3$.

9) Se $a,b \in \mathbb{R}$, prove que: $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$. Quando ocorre a igualdade?

2.4.2 Intervalos em $\mathbb{R}$

Alguns subconjuntos do conjunto de números reais possuem uma notação especial: os intervalos. Listamos a seguir estes subconjuntos especiais; estaremos considerando a e b números reais diferentes com $a < b$.

- $(a,b) = \{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$: intervalo aberto de extremos a e b .
- $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$: intervalo fechado de extremos a e b .
- $(a,b] = \{x \in \mathbb{R} / a < x \leq b\}$: intervalo de extremos a e b (nem aberto, nem fechado).
- $[a,b) = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x < b\}$: intervalo de extremos a e b (nem aberto, nem fechado).
- $(a,\infty) = \{x \in \mathbb{R} / a < x\}$: intervalo aberto, ilimitado superiormente.
- $[a,\infty) = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x\}$: intervalo ilimitado superiormente (nem aberto, nem fechado).
- $(-\infty,b) = \{x \in \mathbb{R} / x < b\}$: intervalo aberto, ilimitado inferiormente.
- $(-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R} / x \leq b\}$: intervalo ilimitado inferiormente (nem aberto, nem fechado).

Note que um intervalo é chamado "aberto" quando não contém seus extremos e é chamado "fechado" quando contém seus extremos. Também podemos usar as notações $(a,b) =]a,b[$, $(a,b] =]a,b]$, $[a,b) = [a,b[$. É bom ressaltar que os símbolos $+\infty$ e $-\infty$ não representam números. Ao escrevermos $x \in [a,\infty)$, queremos expressar que x é um número real maior do que a . Da mesma forma, ao escrevermos $(-\infty,b]$, declaramos que x é um número real menor do que b .

2.5 Módulo ou valor absoluto de um número real

Utilizando o modelo da reta, o módulo de um número real é a distância desse número (do ponto associado a este número) até a origem (o ponto associado ao zero).

Definição 3. Seja $a \in \mathbb{R}$; indicamos por $|a|$ o módulo (ou valor absoluto) de a, definido por:

$$|a| = \begin{cases} a \text{ se } a \geq 0 \\ -a \text{ se } a < 0 \end{cases}$$

Exemplos: $|5| = 5$; $\left|-\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3}$

Observação 16. Vamos destacar alguns detalhes da definição:

1º) $|a|$ está definido para todo número real, pois, pelo axioma de ordem, $a > 0$, $a < 0$ ou $a = 0$.

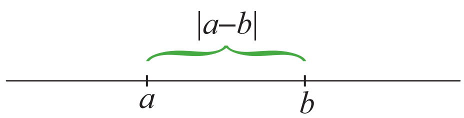
2º) $|a| \geq 0$ para todo número real a, uma vez que o módulo é o próprio número se ele é positivo ou nulo, e seu oposto se ele é negativo. Lembre-se que se $a < 0$, então $-a > 0$.

3º) Vamos lembrar novamente que $|a| = \sqrt{a^2}$. A raiz quadrada de um número positivo é sempre um número positivo; por exemplo, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$ são números positivos e $-\sqrt{3}$, $-\sqrt{4}$ são números negativos. É comum uma certa confusão em relação à raiz quadrada de um número originada da resolução de equações; por exemplo, se $x^2 = 4$, então os valores de x que satisfazem a igualdade são 2 ou -2. Ao resolver esta equação, costuma-se escrever:

$$x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{4} \Rightarrow x = \pm 2$$

O sinal $\pm$ é colocado antes do radical justamente porque tanto $x = 2$ como $x = -2$ são tais que $x^2 = 4$ e resolver uma equação significa encontrar todos os valores de x que satisfazem a igualdade. Note que $\sqrt{4} = \sqrt{(-2)^2} = |-2| = 2$ e $\sqrt{4} = \sqrt{2^2} = |2| = 2$.

4º) Considerando os números a e b sobre a reta, o módulo da diferença $|a-b|$ significa a distância (sempre positiva) entre os pontos a e b.



Essa idéia será de extrema importância na disciplina de Cálculo I, no estudo do conceito de limite.

Propriedades do módulo

As propriedades que veremos a seguir desempenham um papel muito importante nos próximos capítulos, no estudo das inequações. Também serão bastante úteis em disciplinas posteriores. Para prová-las, usaremos basicamente a definição; para $x \in \mathbb{R}$ consideramos sempre as duas possibilidades: $x \geq 0$ e $x < 0$.

1) $|x| = 0$,se e somente se $x = 0$.

Demonstração. Se $|x| = 0$ e por definição $|x| = x$ ou $|x| = -x$, teremos $x = 0$ ou $-x = 0$, o que resulta $x = 0$. Reciprocamente, se $x = 0$, então por definição $|x| = 0$.

■

2) Para todo $x \in \mathbb{R}$, tem-se $|x| = |-x|$.

Demonstração. Consideremos os dois casos:

i) se $x \geq 0$, por definição temos que $|x| = x$. Como $-x \leq 0$, também por definição temos que

$$|-x| = -(-x) = x \text{. Logo, } |x| = |-x| \text{.}$$

ii) se $x < 0$, então $-x > 0$ e teremos por definição:

$$|x| = -x \text{ e } |-x| = -x \text{. Assim, } |x| = |-x| \text{.}$$

De (i) e (ii), $|x| = |-x|$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

■

Observação 17. Esta propriedade nos diz que um número e seu oposto, quando considerados como pontos na reta, são equidistantes da origem. Este fato já acontecia com os números inteiros. Também nos diz que a distância entre dois números reais a e b, quando considerados como pontos na reta, pode ser expressa como $|a-b|$ ou como $|b-a|$, uma vez que $b-a=-(a-b)$.

3) $-|x| \leq x \leq |x|$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Demonstração.

i) para $x \geq 0$, temos $|x| = x$ que satisfaz $x \leq |x|$. Como $|x| \geq 0$, $-|x| \leq 0$ e aplicando a propriedade transitiva (PO2) a $-|x| \leq 0$ e $0 \leq x$, teremos $-|x| \leq x$. Assim, $-|x| \leq x \leq |x|$.

ii) para $x < 0$, temos $|x| = -x$. Assim, $-|x| = x$ que satisfaz $-|x| \leq x$. Como $x < 0$ e $|x| \geq 0$, segue que $x < |x|$, que satisfaz $x \leq |x|$. Então, $-|x| \leq x \leq |x|$.

De i) e ii) segue que, para todo $x \in \mathbb{R}$, tem-se $-|x| \leq x \leq |x|$.

■

4) Para todos $x, y \in \mathbb{R}$, $|xy| = |x| \cdot |y|$

Demonstração. Deixamos como exercício.

5) Para todos $x, y \in \mathbb{R}$, $|x+y| \leq |x| + |y|$

Demonstração. Também conhecida como "desigualdade triangular", esta propriedade será útil em diversas circunstâncias. Vamos prová-la:

i) para $x, y \in \mathbb{R}$, $x + y \geq 0$: $|x+y| = x + y$

Pela propriedade 3, temos $x \leq |x|$ e $y \leq |y|$; somando membro a membro (PO6), teremos

$$|x+y| = x + y \leq |x| + |y|$$

ii) para $x, y \in \mathbb{R}$, $x + y < 0$: $|x+y| = -(x+y) = (-x) + (-y)$

Pela propriedade 3 temos $-|x| \leq x$ e $-|y| \leq y$, ou seja:

$$-x \leq |x| \text{ e } -y \leq |y|$$

Assim, $|x+y| = -(x+y) = (-x) + (-y) \leq |x| + |y|$.

■

6) Para todos $x, y \in \mathbb{R}$, $|x| - |y| \leq |x - y| \leq |x| + |y|$

Demonstração. Deixamos como exercício.

7) Sejam $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}_+$ um número fixo e $|x| < a$. Então $-a < x < a$.

Demonstração.

Hip. $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}_+$ e $|x| < a$.

Tese. $-a < x < a$

i) para $x \geq 0$, temos $|x| = x < a$ (por hipótese). Como $a > 0$ (também por hipótese), temos $-a < 0 \leq x < a$. Logo, $-a < x < a$.

ii) para $x < 0$, temos $|x| = -x < a$. Então $-a < x$ e teremos $-a < x < 0 \leq a$. Logo, $-a < x < a$.

De i) e ii) tem-se $-a < x < a$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

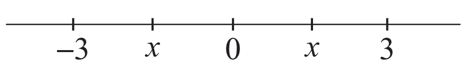
■

Observação 18. A recíproca da propriedade 7 também é verdadeira: "Se $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}_+$ e $-a < x < a$, então $|x| < a$". Faça a demonstração como exercício.

Tarefa

Mostre que a propriedade 7 continua verdadeira, se substituirmos $<$ por $\leq$.

Observação 19. Vamos exemplificar a propriedade 7; consideremos $a = 3$ e $|x| < 3$. Isto significa que a distância de x até zero é menor do que 3. Vamos observar na reta:



Vemos que para qualquer ponto (número real) x entre -3 e 3 (excluindo o 3 e o -3), a distância de x até zero é menor do que 3. E se a distância de x até zero é menor do que 3, então x está entre -3 e 3. Logo, $|x| < 3$, se e somente se $-3 < x < 3$, ou, em notação de intervalos, $x \in (-3, 3)$.

8) Sejam $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}_+$ um número fixo e $|x| > a$. Então $x > a$ ou $x < -a$.

Demonstração.

Hip. $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}_+$ e $|x| > a$

Tese. $x > a$ ou $x < -a$

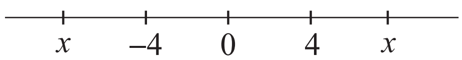
i) para $x \geq 0$: $|x| = x > a$. Por hipótese $|x| > a$, então $x > a$ (I).

ii) para $x < 0$: $|x| = -x > a$. Como $|x| > a$, então $-x > a$, ou seja, $x < -a$ (II).

Lembre-se que para todo $x \in \mathbb{R}$ temos $x \geq 0$ ou $x < 0$; então (I) ocorre ou (II) ocorre. Isto significa que $x > a$ ou $x < -a$.

■

Observação 20. Vamos observar a propriedade 8 na reta, fazendo $a = 4$; $|x| > 4$ significa que a distância de x até zero é maior do que 4.



Assim, x deve ser um número localizado à esquerda de -4 ou à direita de 4. Em notação de intervalos, $x \in (-\infty, 4) \cup (4, \infty)$.

As propriedades 7 e 8 são essenciais na resolução de inequações modulares.

Exercícios propostos

10) Faça as demonstrações deixadas como exercício.

11) Dados os subconjuntos de $\mathbb{R}$, $A = (-1, 5]$, $B = \left[\frac{1}{2}, \sqrt{5}\right]$ e $C = (3, \infty)$, determinar:

a) $A \cup B$

b) $B \cup C$

c) $A \cap B$

d) $B \cap C$

12) Usando valor absoluto, escreva expressões para os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

a) o conjunto dos pontos cuja distância a 1 é menor do que ou igual a 4.

b) o conjunto dos pontos cuja distância a -5 é menordoque 2.

c) o conjunto dos pontos cuja distância a 6 é maior do que 3.

13) Descreva os conjuntos do exercício 11 usando intervalos.

14) Descreva geometricamente as expressões a seguir, considerando $x \in \mathbb{R}$:

a) $|x-1| \leq 9$

b) $|x| > -5$

c) $|x+4| > \dfrac{1}{2}$