

Funções Exponenciais

Objetivos

- Definir *Funções Exponenciais*, a partir de situações que elas modelam.
- Estudar algumas de suas propriedades básicas.
- Apresentar os conceitos de *meia-vida* e tempo de *duplicação*.

1. INTRODUÇÃO

Nesta aula vamos estudar uma função que não se constrói a partir das que já estudamos, chamada *Função Exponencial*. Ela é definida por expressões como $f(x) = a^x$, onde a é um número real positivo, diferente de 1.

Funções exponenciais surgem na modelagem de inúmeros problemas, em circuitos elétricos, reações químicas, desintegração radioativa, crescimento de populações e outros. Aqui, vamos obter sua expressão algébrica e esboçar seu gráfico, a partir de informações em conjuntos de dados. Vamos aprender a identificá-las quando representadas por expressões algébricas, gráficos e tabelas e estabelecer relações entre exponenciais em diferentes bases.

Iniciamos a aula com dois exemplos, que são característicos do caso geral.

2. EXEMPLO: CRESCIMENTO POPULACIONAL

A Tabela 1 registra o crescimento da população brasileira, no período de 1997 a 2002.

Que fórmula ou fórmulas algébricas se adequariam para expressar a relação entre o número de habitantes e o tempo transcorrido a partir de 1997, nessa tabela?

2.1 Buscando regularidades em um conjunto de dados

Ao calcularmos a *variação* anual da população, como na aula sobre funções lineares, vemos que a *taxa de variação anual* da população não é constante, no período considerado, de 1997 a 2002.¹ Isto quer dizer que os dados não correspondem à situação “ideal” a que o modelo linear se “ajusta” para representar o fenômeno. O cálculo da variação anual da população está registrado na terceira coluna da Tabela 1.

¹ Este fato não é uma propriedade apenas deste conjunto de dados, mas sim é característico da modelagem do crescimento de populações. Em condições normais, as populações crescem mais rapidamente (ou seja, têm maior variação) quando ficam maiores, porque o número de pessoas que têm filhos aumenta. Essa é uma justificativa para o aumento dos números que aparecem na terceira coluna da tabela. Na verdade, os dados que apresentamos nesta tabela são insuficientes para justificar a escolha de uma função diferente da linear para melhor descrever o fenômeno. Mesmo assim, vamos utilizá-los para ilustrar a discussão.

Tabela 1
Dados extraídos da planilha “Estimativas_e_taxas_1980-2012_Universo.xls”

Ano	População (milhões)	Variação da população (milhões)	Variação percentual da população (milhões)
1997	163,47	---	
1998	165,68	165,69-163,47=2,22	$\frac{165,69 - 163,47}{163,47} = 0,0136$
1999	167,91	167,91-165,69=2,22	$\frac{167,91 - 165,69}{165,69} = 0,0134$
2000	170,14	170,14-167,91=2,23	$\frac{170,14 - 167,91}{167,91} = 0,0133$
2001	172,38	172,38-170,14=2,24	$\frac{172,38 - 170,14}{170,14} = 0,0132$
2002	174,63	174,63-172,38=2,25	$\frac{174,63 - 172,38}{172,38} = 0,0131$

Fonte: IBGE/DPE/Departamento de População e Indicadores Sociais. Gerência de Estudos e Análises da Dinâmica Demográfica. Disponível em: < <http://www.ibge.gov.br>. >

Uma alternativa pode ser calcular a *variação percentual* da população, ano a ano. Isto porque *variações* bastante diferentes resultam de *taxas* ou *variações percentuais* iguais ou bem próximas. Por exemplo, uma variação percentual de 2% em 100 habitantes corresponde a uma variação de 2 habitantes. Esses mesmos 2% corresponderiam a uma variação de 20 habitantes, caso a população fosse de 1.000 habitantes.

O cálculo das *variações percentuais* pode ser feita na Tabela 1, como a seguir:

no período de 1997 a 1998, a população do Brasil teve um crescimento ou *variação* de:

População de 1998 – População de 1997 = 2,22 milhões de pessoas.

A *taxa* ou *variação percentual* da população nesse período refere-se à *percentagem da população de 1997 a que este valor, 2,22 milhões, corresponde*. Para isso, calculamos

$$\frac{\text{população}1998 - \text{população}1997}{\text{população}1997} = \frac{165,69 - 163,47}{163,47} = \frac{2,22}{163,47} = 0,0136,$$

ou seja, a variação da população no ano de 1998 é de aproximadamente $0,0136 \times 163,47 = \frac{1,36}{100} \times 163,47$, ou seja, 1,36% de 163,47 milhões.

Cálculos semelhantes para os demais anos estão na quarta coluna da Tabela 1.

Vamos fixar 0,013 como a *taxa ou variação percentual* de crescimento no período.²

Feita essa escolha, temos a seguinte evolução do crescimento populacional:

$$\text{População de 1998} = (\text{População de 1997}) + 0,013 (\text{População de 1997}) = 1,013 (\text{População de 1997})$$

$$\text{População de 1999} = (\text{População de 1998}) + 0,013 (\text{População de 1998}) = 1,013 (\text{População de 1998})$$

$$\text{População de 2000} = (\text{População de 1999}) + 0,013 (\text{População de 1999}) = 1,013 (\text{População de 1999})$$

e assim por diante.

Observe uma outra regularidade no conjunto de dados da Tabela 1, prestando atenção no primeiro e no último membro das igualdades no quadro destacado acima:

$$\frac{\text{população em um ano}}{\text{população ano anterior}} = 1,013$$

A regularidade na Tabela 1 também pode ser expressa assim: explicitando um *fator* – neste caso, 1,013. Para obtermos a população de um ano, multiplicamos a do ano anterior por esse *fator*.

2.2 Reescrevendo a questão para resolvê-la

A escolha de 0,013 como a *taxa* percentual de crescimento anual da população permite uma reescrita da nossa questão, como a seguir:

A taxa percentual anual de crescimento da população brasileira em um dado período a partir de 1997 é de 1,3%, ou seja, 0,013. Escreva uma fórmula algébrica para a população, sabendo que a população de 1997 era de 163,47 milhões de habitantes.

Para tornar concisa a redação, chamamos a variável tempo (em anos) de t , e a população brasileira (em milhões de habitantes) de $P(t)$. Da discussão anterior, à taxa 0,013 corresponde o *fator* 1,013, que utilizaremos para multiplicar a população de um ano para obter a do ano seguinte.

² Observe que os valores encontrados para os percentuais de crescimento da população também não são constantes. Aparentemente, considerá-los constantes seria tão inadequado quanto modelarmos o fenômeno utilizando uma função linear. No entanto, no caso do modelo linear, o erro que cometeríamos ao considerarmos constante a variação da população (verificar terceira coluna da tabela 1) é da ordem de 0,01 milhões de pessoas (10.000 pessoas). Já ao considerarmos o percentual de crescimento como sendo, por exemplo, 0,013, nosso erro seria no máximo da ordem de 0,0005 milhões de pessoas (500 pessoas).

O valor $t = 0$ corresponderá ao ano de 1997, ou $P(0) = 163,47$ é a população de 1997. Nessa notação, em que t é o número de anos após 1997, temos:

$$t = 1 \text{ corresponde à população de 1998 e então } P(1) = 165,69 = P(0)(1,013) = 163,47(1,013);$$

$$t = 2 \text{ corresponde à população de 1999 e então } P(2) = 167,91 = P(1)(1,013) = 163,47(1,013)^2;$$

$$t = 3 \text{ corresponde à população de 2000 e então } P(3) = 170,14 = P(2)(1,013) = 163,47(1,013)^2 \cdot (1,013) = 163,47(1,013)^3.$$

Prosseguindo assim, confirme que $P(4) = 163,47(1,013)^4$ e $P(5) = 163,47(1,013)^5$.

O padrão acima³ pode ser generalizado: t anos após 1997 a população será

$$P(t) = P_0 (1,013)^t,$$

em que t é um número natural e P_0 denota a população em 1997, ou seja, vale $P(0)$.

Essa é uma expressão algébrica para representar o conjunto de dados na Tabela 1.

³ Veja que o desenvolvimento corresponde a uma progressão geométrica de razão 1,013 e termo inicial $P(0) = 163,47$

⁴ Supondo que o crescimento da população se mantém à taxa de crescimento $r = 0,013$, podemos fazer projeções para o valor da população anos antes de 1997 e anos após 1997.

⁵ Quando x fica muito grande, um valor $f(x) = a^x$, $a > 1$, que corresponde a elevar à potência x um número $a > 1$, fica também muito grande. Retomando o significado da base $a = 1,013$ como fator de crescimento da população, é natural concluirmos que a população cresce, à medida que o tempo passa.

2.3 Notação e linguagem

Em nosso exemplo, a população em cada ano é obtida multiplicando a população do ano anterior por um mesmo *fator*, que é $a = 1,013$.

Esse fator a tem um nome especial – *fator de crescimento*.

Tal *fator de crescimento* corresponde a uma *taxa r* anual de 1,3%, ou 0,013. Esta taxa percentual r é denominada *taxa de crescimento*.

Veja que *fator de crescimento* = $1 + \text{taxa de crescimento}$, ou seja, $a = 1 + r$.

A função $P(t) = P_0 (1,013)^t$ é denominada *função exponencial* de base $a = 1,013$.⁴

2.4 O gráfico de $P(t) = P_0 (1,013)^t$, definida em \mathbb{R}

A população $P(t) = P_0 (1,013)^t$ é crescente e ficará muito grande com o passar de muitos anos, ou seja, quando t fica muito grande.⁵

Veja também que quando t cresce, o crescimento de $P(t) = P_0(1,013)^t$ fica cada vez mais acentuado, mais rápido. Esse fato se confirma na Tabela 1: observe, na terceira coluna, que os valores de ΔP , em intervalos regulares de tempo, ficam maiores com o passar do tempo. Isto significa que a taxa de variação $\frac{\Delta P}{\Delta t}$ dessa função é crescente.

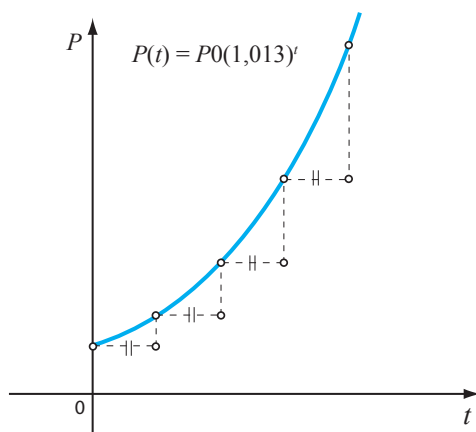


Figura 1 - Gráfico da função $P(t) = P_0(1,013)^t$, para valores de t positivos⁶

Veja o que acontece com os valores de $P(t) = P_0(1,013)^t$ para t no intervalo $(-\infty, 0]$.⁷ Um expoente t , negativo, numa potência de $a = 1,013$, representa o valor $a^t = \frac{1}{a^{|t|}}$. O denominador dessa última expressão cresce muito quando o valor absoluto de t crescer (porque $a = 1,013$ é maior que 1). Assim, o valor de $a^t = \frac{1}{a^{|t|}}$ vai diminuir, ficando muito próximo de zero (mas nunca sendo nulo).⁸ O gráfico de $P(t) = P_0(1,013)^t$, com $t \in \mathbb{R}$, tem seu esboço como na figura a seguir.

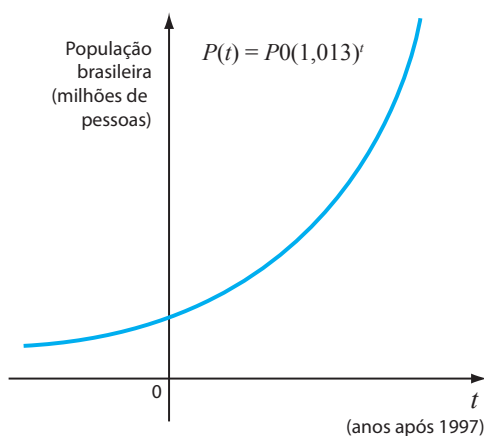


Figura 2 - Gráfico de $P(t) = P_0(1,013)^t$, $t \in \mathbb{R}$

⁶ Há vários modos de estudarmos os fenômenos da realidade. Utilizando a modelagem matemática, somos capazes de explorá-los sob um ponto de vista quantitativo. Na modelagem, construímos representações matemáticas, tais como funções, que devem ser entendidas como aproximações para o fenômeno em sua complexidade. Por exemplo, no caso em estudo, não faz sentido nos referirmos a um número fracionário $P(t)$ de pessoas. Apesar disso, esboçamos o gráfico de contínuo – “sem tirar o lápis do papel” – o que significa termos considerado valores de $P(t)$ em $[0, +\infty)$. Um gráfico mais apropriado para uma função crescimento populacional deveria apresentar descontinuidades – ou “saltos” – já que sua imagem $P(t)$ só assume valores inteiros. No entanto, a representação que propusemos é satisfatória: como os valores da função estão na casa dos milhões, os espaços provocados pelos saltos correspondentes a uma unidade se tornam invisíveis na escala utilizada. Mesmo assim, a curva desenhada “sem tirar o lápis do papel” representa apenas uma aproximação para o crescimento da população.

⁷ O significado aqui seria o de modelar o crescimento populacional em anos anteriores a 1997, supondo que o mesmo fator de crescimento se mantenha.

⁸ Observe que, desta vez, esta representação faz todo o sentido em termos do que ela está modelando: a população se inicia com alguns de seus membros; não haveria início de crescimento a partir de zero habitantes.

3. EXEMPLO: ELIMINAÇÃO DA NICOTINA NO SANGUE

Quando fumamos um cigarro, a nicotina entra na corrente sanguínea, é metabolizada e eliminada a uma taxa (estimada) de 30% a cada hora. Os cigarros comuns contêm, aproximadamente, 0,4 mg de nicotina. A função $q(t)$, que modela a quantidade de nicotina em nosso sangue que é eliminada t horas depois que fumamos, pode ser expressa como a seguir:

Em $t = 0$, a quantidade de nicotina no corpo é $q = 0,4$; ou seja, $q(0) = 0,4$.⁹

⁹ Vamos supor que toda a nicotina foi para o nosso corpo.

Da informação sobre o metabolismo da nicotina, passada 1 hora, 30% de sua quantidade inicial será eliminada.

Restará, portanto, 70% de 0,4 mg de nicotina, ou seja,

$$q(1) = q(0) \cdot \frac{70}{100} = 0,4(0,7)$$

Supondo que a taxa de eliminação se mantenha, passada mais 1 hora, 30% da quantidade $q(1)$ de nicotina será novamente eliminada. Restará, portanto, 70% de $q(1) = 0,4(0,7)$, ou seja,

$$q(2) = q(1) \cdot (0,7) = 0,4(0,7) \cdot (0,7) = 0,4(0,7)^2.$$

$$q(3) = q(2) \cdot (0,7) = 0,4(0,7)^2 \cdot (0,7) = 0,4(0,7)^3, \text{ e assim por diante.}$$

¹⁰ Use uma calculadora e confirme que $0,4(0,7)^t$ decresce, quando t cresce.

Após t horas, $q(t) = 0,4(0,7)^t$,¹⁰ representando a quantidade que resta de nicotina no sangue, que está sendo eliminada a uma taxa de decaimento $r = 0,3$.

Veja que aqui analisamos uma situação em que a função $q(t)$, modelando o fenômeno, é decrescente, ao invés de crescente. O fator de decaimento $a = 0,7$, que é a base de nossa exponencial, se escreve como $a = 1 - 0,3$. Observe que:

Fator de decaimento = $1 - \text{taxa de decaimento}$

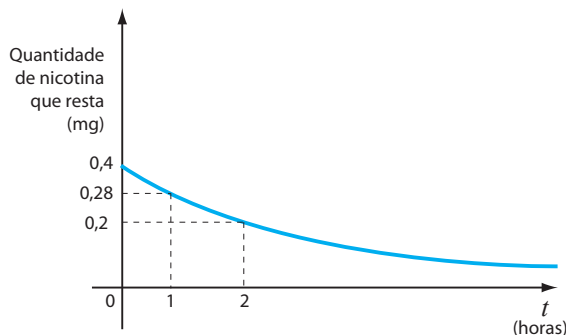


Figura 3 - Gráfico da função $q(t) = 0,4(0,7)^t$

4. A FUNÇÃO EXPONENCIAL $y = ka^x$, ONDE $a > 0$, $a \neq 1$

4.1 Definição

Uma relação entre variáveis expressa na forma $y = f(x) = ka^x$ é denominada *função exponencial* de x com base a , em que a e k são números reais e $a > 0$, $a \neq 1$. O domínio dessa função é \mathbb{R} .¹¹

A discussão para $y = f(x) = ka^x$, onde $a > 1$ e $k > 0$, assemelha-se à do exemplo 2; e para $0 < a < 1$ e $k > 0$, à do exemplo 3.¹²

Os gráficos desenhados a seguir representam as duas situações:

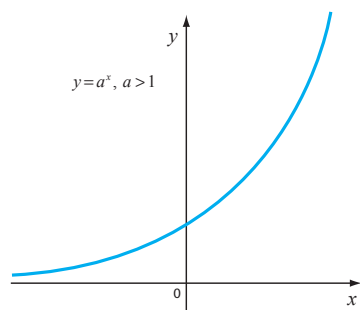


Figura 4 - Gráfico de $y = a^x$, $a > 1$

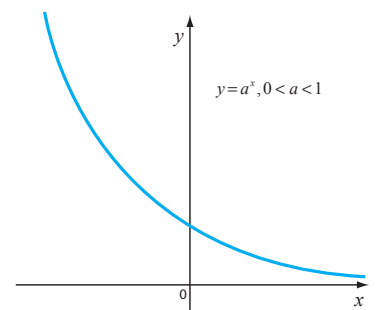


Figura 5 - Gráfico de $y = a^x$, $0 < a < 1$

Interpretando a base a como um *fator de crescimento* ou *decaimento*, confirme que:

- valores grandes de a em $y = f(x) = a^x$ modelam crescimentos rápidos.
- valores de a próximos de 0 em $y = f(x) = a^x$ modelam decaimentos rápidos.

Os gráficos desenhados a seguir dão uma ideia desses significados.

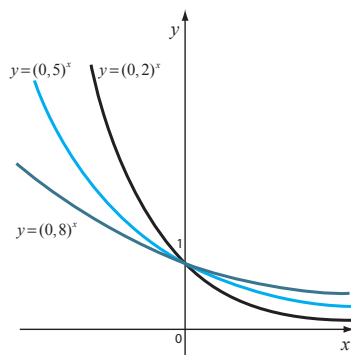


Figura 6 - Gráficos de $y = a^x$, $0 < a < 1$

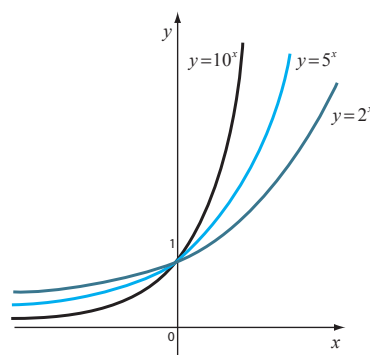


Figura 7 - Gráficos de $y = a^x$, $a > 1$

¹¹Vale a pena ser feito um comentário sobre o domínio de expressões como $y = f(x) = ka^x$, antes de defini-lo. Observe que em nosso primeiro exemplo os dados referiam-se a valores anuais da população, enquanto o gráfico contínuo, esboçado sem tirar o lápis do papel, considerou valores da população em quaisquer instantes. Desse modo, o domínio da função representada no gráfico, ao invés dos naturais \mathbb{N} , foi o conjunto \mathbb{R} dos números reais. Sair de modelos discretos, em que os dados correspondem a valores em \mathbb{N} , e passar para o modelo contínuo requer a definição de função potência para valores "intermediários" de x . A Aula 5 nos tornou capazes de considerar potências racionais de um número. Não discutimos ainda o significado de potências irracionais e nem seremos capazes de levar esta discussão aqui. Adiantamos que estas últimas são definidas através das aproximações racionais dos números irracionais.

¹²Tais funções são definidas com valores $a > 0$ e $a \neq 1$, para sua base. Valores negativos para a base poderiam resultar em funções com domínio bem complexo. Por exemplo, como já vimos, raízes n -ésimas de um número negativo não existem quando n é par. No caso de $a = 1$, as funções seriam constantes.

O crescimento exponencial é muitas vezes dado por meio de sua taxa de crescimento r . Como em nosso primeiro exemplo, o fator de crescimento será $a = 1 + r$, e a função que modela o fenômeno será $y = f(x) = a^x$.

Numa situação de decaimento, como a do segundo exemplo, o fator de decaimento será $a = 1 - r$, onde r é a taxa de decaimento. Esse valor a corresponderá à base da exponencial que modela o fenômeno.

4.2 Exemplo: ajuste de expressões exponenciais a um conjunto de dados

Aqui vamos relacionar os dados $h(s)$, $f(s)$, $g(s)$, cujos valores estão na tabela a seguir, com as seguintes fórmulas: $y = a(1,1)^x$, $y = b(1,05)^x$, $y = c(1,03)^x$. Estamos supondo que a , b e c são constantes e buscando o melhor ajuste entre dados e expressões algébricas. Note que os valores foram arredondados em duas casas decimais.

s	$h(s)$	s	$f(s)$	s	$g(s)$
2	1,06	1	2,20	3	3,47
3	1,09	2	2,42	4	3,65
4	1,13	3	2,66	5	3,83
5	1,16	4	2,93	6	4,02
6	1,19	5	3,22	7	4,22

Iniciamos com os dados na coluna $h(s)$, calculando as razões:

$$\frac{h(3)}{h(2)} = \frac{1,09}{1,06} = 1,0283, \quad \frac{h(4)}{h(3)} = \frac{1,13}{1,09} = 1,0366,$$

$$\frac{h(5)}{h(4)} = \frac{1,16}{1,13} = 1,0265, \quad \frac{h(6)}{h(5)} = \frac{1,19}{1,16} = 1,0258.$$

Dentre as três fórmulas apresentadas a que melhor irá ajustar o conjunto de dados na coluna $h(s)$ será $y = c(1,03)^x$. Para tomar esta decisão, arredondamos os valores das razões em duas casas decimais como 1,03 e consideramos que:

$$\frac{h(3)}{h(2)} \approx \frac{h(4)}{h(3)} \approx \frac{h(5)}{h(4)} \approx \frac{h(6)}{h(5)} \approx 1,03$$

Com esta proposta, escrevemos;

$$h(3) = 1,03h(2);$$

$$h(4) = 1,03h(3) = (1,03)^2 h(2);$$

$$h(5) = (1,03)h(4) = (1,03)^3 h(2);$$

$$\text{e finalmente } h(6) = (1,03)h(5) = (1,03)^4 h(2).$$

Observe os expoentes do fator 1,03 e confirme que as expressões que obtivemos se escrevem como: $h(s) = (1,03)^{s-2} h(2)$, para os valores de s . Propriedades de potências e o fato de que $h(2) = 1,06$,

$$\text{permitem escrever: } h(s) = \frac{h(2)}{(1,03)^2} (1,03)^s = \frac{1,06}{(1,03)^2} (1,03)^s.$$

Agora use uma calculadora e verifique que a função $y = c(1,03)^x$, com $c = 1$, ajusta-se bem ao conjunto de dados $h(s)$, se comparada às duas outras opções.

A discussão das duas outras colunas de dados agora é com você!

5. CLASSES DE FUNÇÕES E REGULARIDADES EM TABELAS DE DADOS

Como reconhecer se uma tabela de valores x e y provém de uma *função linear*? Ou de uma *função exponencial*?

Funções lineares caracterizam-se pelo fato de sua *taxa de variação* ser constante. Dados em uma tabela corresponderiam a valores de uma função linear $y = f(x)$, caso a *taxa de variação* $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ permanecesse sempre constante.

Para as *exponenciais* $y = f(x) = ka^x$, as *razões* entre valores de y correspondentes a valores igualmente espaçados de x devem permanecer constantes.

Vale observar que as propriedades de potências são todas válidas para as exponenciais.

5.1 Exemplo: explorando tabelas de dados

Cada uma das tabelas de valores a seguir pode corresponder a valores de uma função linear, uma função exponencial, ou nenhuma dessas duas. Decida sobre a classe de funções que podem estar aí representadas.

Quando possível, ache uma fórmula para a função.

x	$f(x)$
0	21
1	25,4
2	37,8
3	73,4

x	$g(x)$
-1	25,1
0	15,06
1	9,036
2	5,4216

x	$h(x)$
0	27
2	24
4	21
6	18

a) Para a função $y = f(x)$, temos

$$f(1) - f(0) = 25,4 - 21 = 4,4$$

$f(2) - f(1) = 37,8 - 25,4 = 12,4$, o que já significa que ela não é linear, pois a variação Δf , correspondente a uma variação em x com mesmo espaçamento, não é constante.

Verificando então a possibilidade dos dados serem valores de uma exponencial, calculamos:

$$\frac{f(1)}{f(0)} = \frac{25,4}{21} = 1,2 \quad ; \quad \frac{f(2)}{f(1)} = \frac{37,8}{25,4} = 1,4, \text{ o que também significa}$$

que $y = f(x)$ também não é uma exponencial.

b) Para a função $y = g(x)$, temos

$$g(0) - g(-1) = 15,06 - 25,1 = -9,04$$

$g(1) - g(0) = 9,036 - 15,06 = -6,024$, o que já significa que ela não é linear, pois a variação Δg correspondente a um mesmo espaçamento em x não é constante.

Verificando então a possibilidade de os dados representarem uma exponencial, calculamos:

$$\frac{g(0)}{g(-1)} = \frac{15,06}{25,1} = 0,6; \quad \frac{g(1)}{g(0)} = \frac{9,036}{15,06} = 0,6; \quad \frac{g(2)}{g(1)} = \frac{5,4216}{9,036} = 0,6,$$

o que significa que $y = g(x)$ pode ser uma exponencial, de base $a = 0,6$. Sua expressão algébrica é $y = g(x) = g(0)a^x$, que então se escreve $y = 15,06(0,6)^x$.

c) Para a função $y = h(x)$, temos

$$h(2) - h(0) = 24 - 27 = -3; \quad h(4) - h(2) = 21 - 24 = -3;$$

$$h(6) - h(4) = 18 - 21 = -3.$$

Veja que a variação da função foi constante para valores de x com o mesmo espaçamento. Então a função $y = h(x)$ pode corresponder a uma função linear. Uma expressão algébrica para $y = h(x)$ pode

$$\text{ser } \frac{y-27}{x-0} = -3, \text{ ou seja, } y = -3x + 27.$$

6. O NÚMERO e

O número irracional $e=2,7182$ é tão usado como base das exponenciais que as calculadoras contêm um botão e^x . Motivos de tal preferência não serão discutidos aqui, mas valem uma pesquisa!

Nesta aula, queremos apenas chamar sua atenção para o fato de que seu estudo e seu gráfico são análogos aos anteriores e que qualquer outra função exponencial da forma $y = f(x) = ka^x$ pode ser escrita na base e , ou em qualquer outra base.

Veja o gráfico da função $y = e^x$, na Figura 8. Como mencionamos, desenhamos gráficos de exponenciais sem tirar o lápis do papel. Isto quer dizer que, dado qualquer valor $y = a$, onde $a > 0$, existe um valor, digamos, m , tal que $e^m = a$.

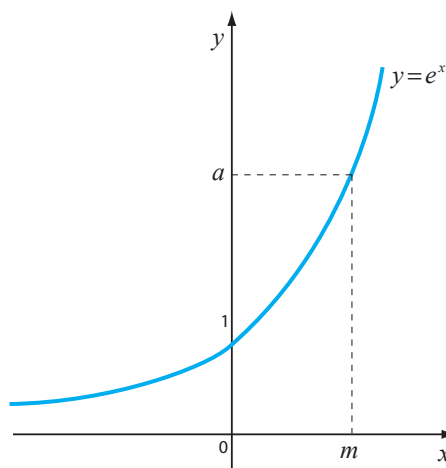


Figura 8 - A exponencial de base e

Substituindo esse valor $e^m = a$ na expressão $y = f(x) = ka^x$, podemos escrever¹³

$$y = f(x) = ka^x = k(e^m)^x = ke^{mx}$$

O destaque acima traduz uma função exponencial de base a qualquer em termos de uma função exponencial de base e .

Assim, para estudarmos as funções $y = ka^x$, não é necessário esgotarmos milhares de valores para a base a . Basta, por exemplo, estudarmos as expressões $y = ke^{mx}$.

Esse é um dos motivos de nossa calculadora trabalhar com a expressão de uma única exponencial; no caso, a expressão e^x .

6.1 Exemplo: decaimento radioativo e meia-vida

Experimentos em laboratórios indicam que alguns átomos emitem parte de sua massa na forma de radiação. Com sua massa menor, constituem outro elemento não radioativo. Assim sendo, com o

¹³Entre a terceira e a quarta igualdade, utilizamos propriedades de potências, que são também válidas quando operamos com exponenciais.

passar do tempo, a quantidade de substância original diminui e, conseqüentemente, a massa da nova substância não radioativa aumenta. Esse processo é denominado *decaimento radioativo*.

Se M_0 denota a massa inicial (instante $t = 0$) de uma substância radioativa, então a massa que resta em qualquer tempo t posterior será dada por

$$M(t) = M_0 e^{-rt}, \quad r > 0,$$

e o número r é chamado de *taxa de desintegração* da substância.¹⁴

Por exemplo, o carbono-14, ou radiocarbono, indicado por C^{14} , se desintegra para o nitrogênio 14, N^{14} , e a sua *taxa de decaimento*, determinada experimentalmente, é de aproximadamente $r = 1,2 \times 10^{-4}$, quando t é medido em anos.

Temos então que

$$M(1000) = M_0 e^{-1000r} = M_0 e^{-1,2 \times 10^{-4} \times 1000} = M_0 e^{-0,12} = 0,8869 M_0$$

$$M(5000) = M_0 e^{-5000r} = M_0 e^{-1,2 \times 10^{-4} \times 5000} = M_0 e^{-0,6} = 0,5488 M_0.$$

Usualmente, a taxa de desintegração de uma substância é dada em termos de sua *meia-vida*, isto é, o tempo necessário para que a metade dos núcleos, presentes originalmente na amostra, sofram decaimento. Para determinar a *meia-vida* do carbono, vamos denotar a quantidade inicial de massa de uma amostra por M_0 e o tempo necessário para que essa amostra fique reduzida à metade

por T , ou seja, $M(T) = \frac{1}{2} M_0$.

$$\text{Logo, } M_0 e^{-rT} = \frac{1}{2} M_0 \Rightarrow e^{-rT} = \frac{1}{2} \Rightarrow e^{rT} = 2.$$

Como determinar o valor de T , numa relação como essa? Podemos fazê-lo por tentativa e erro ou usar uma calculadora, caso soubéssemos o valor de r . No momento, faltam-nos instrumentos capazes de escrever o valor de T de modo explícito, a partir de uma equação como essa.

A resolução de equações como $e^{rT} = 2$ é um dos objetivos de nossa próxima aula.

¹⁴É importante mencionarmos que ao modelarmos um fenômeno utilizando a exponencial $y = ke^{rx}$, o número r passa a ser denominado taxa contínua de crescimento ou decrescimento. Procure informar-se sobre esta questão.

EXERCÍCIOS

1. A partir dos gráficos nas figuras 4 e 5, construa os gráficos de $y = ka^x$, discutindo o que acontece quando consideramos valores diferentes para k . Organize sua resposta em dois itens, correspondentes a valores de $k > 0$ e valores de $k < 0$.
2. Um dos contaminantes principais de um acidente nuclear, tal como o de Chernobyl, é o estrôncio-90, que decai exponencialmente a uma taxa de, aproximadamente, 2,5 % ao ano.
- a) Escreva a expressão da função que descreve o decaimento nesse caso. Para isso, denomine por k_0 a quantidade de estrôncio presente no início do acidente.
- b) Considerando que ao tempo $t=0$ há 100% do contaminante presente, escreva a porcentagem de estrôncio-90 restante, P , em função de anos t , desde o acidente nuclear.
- c) Esboce o gráfico de $P(t)$.
3. Quais das seguintes tabelas corresponderiam a uma função linear? Quais corresponderiam a uma função exponencial? Ou a nenhuma delas?¹⁵

x	$f(x)$	t	$f(t)$	u	$h(x)$
0	10,5	-1	50,2	0	27
1	12,7	0	30,12	2	24
2	18,9	1	18,07	4	21
3	36,7	2	10,8432	6	18

¹⁵HUGHES-HALLETT, D. *et al. Cálculo e aplicações*, Exercício 13, p. 36.

REFERÊNCIAS

HUGHES-HALLET, D. *et al.* *Cálculo e aplicações*. São Paulo: Edgard Blucher Ltda., 1999.

PINTO, M.; ARAUJO, J.; FERREIRA, C. *Cálculo I*. Belo Horizonte: Editora UFMG, 2008. (Coleção Educação a Distância)

IBGE/DPE - Departamento de População e Indicadores Sociais. Gerência de Estudos e Análises da Dinâmica Demográfica. Disponível em: <<http://www.ibge.gov.br>>. Acesso em: 2 maio 2006.

Função Logarítmica

Objetivos

- Definir *Função Logarítmica*, discutindo propriedades, relações entre as diversas bases e gráfico.
- Utilizar a nova função para resolver equações.

1. INTRODUÇÃO

A aula sobre Funções Exponenciais deixou, ao seu final, a equação $e^x = 2$ para ser resolvida. Para encontrar sua solução, é preciso definir uma função que desmancha a ação da função exponencial, sendo sua inversa, chamada *Função Logarítmica*.

Nesta aula, vamos definir essa nova função, discutir suas propriedades, seu gráfico e relações entre suas possíveis representações e bases. Iniciamos com um exemplo, resolvendo a equação envolvendo exponenciais.

2. EXEMPLO: RESOLVENDO A EQUAÇÃO $e^x = 2$

O gráfico da função $y = e^x$ está esboçado na Figura 1 e nos sugere que existe um valor de x , tal que $e^x = 2$.

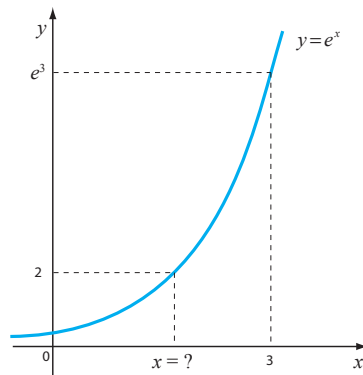


Figura 1 - Resolvendo a equação $e^x = 2$

Numericamente, verificamos que $0 < x < 1$, pois $2 < e < 3$ e então $e^0 < 2 < e^1$.

Damos o nome $\log_e 2$ a esse valor de x (tal que $e^x = 2$). Em outras palavras,

$x = \log_e 2$ é a potência que se deve elevar o número e para obtermos o valor 2.

Veja na figura a seguir que é possível determinar o valor de x , tal que $e^x = b$ sempre que $b > 0$, resolvendo esta equação envolvendo uma exponencial. Esse valor de x será positivo caso $b > 1$; será negativo caso $0 < b < 1$ e será 0 caso $b = 1$.

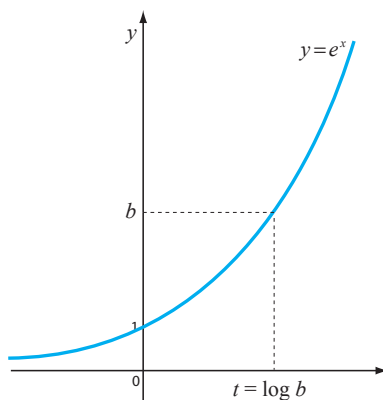


Figura 2- Resolvendo graficamente $e^x = b$

¹ Como observamos na aula sobre funções exponenciais, o uso da base e é muito difundido. Desse modo, sua inversa $y = \ln x$ terá um papel central dentre o grupo de funções estudadas nesta aula. Numa calculadora científica, temos o comando LN, que corresponde a esta função. Por isso, muitas vezes vamos resolver as equações utilizando a função logaritmo natural.

O valor de x , tal que $e^x = b$, é denotado por $x = \log_e b$ ou, alternativamente, por $x = \ln b$. Ele é denominado *logaritmo natural* de b .

Ou seja,

2.1 Definição

$x = \log_e b$ é a potência a que se deve elevar o número e para se obter o valor b .

Em linguagem matemática

$$x = \log_e b \Leftrightarrow e^x = b$$

² Observe, em seu gráfico na Figura 1, que retas de equação $y = b$, onde b é um número real, o interceptam quando $b > 0$, e no máximo uma vez.

3. A INVERSA DA FUNÇÃO EXPONENCIAL $y = e^x$ ¹

O processo de resolver a equação $e^x = b$ corresponde, na verdade, ao de determinar a inversa de $y = e^x$. Tal inversa pode ser definida porque $y = e^x$ é injetiva em \mathbb{R} .²

Veja o esboço do gráfico da inversa de $y = e^x$, obtido ao refletir seu próprio gráfico em torno da reta $y = x$.

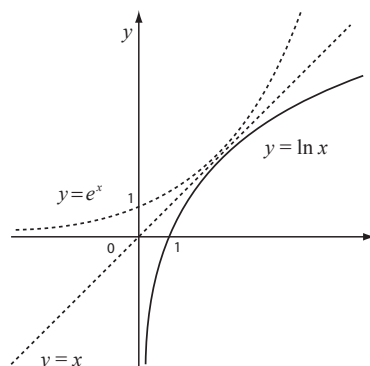


Figura 3 - A função inversa de $y = e^x$ chamada *função logaritmo natural* $y = \ln x$

4. A INVERSA DA EXPONENCIAL GERAL $y = a^x (a > 0, a \neq 1)$

A discussão sobre a inversa de $y = a^x (a > 0, a \neq 1)$ é semelhante à da inversa de $y = e^x$.

Primeiro, veja na Figura 3 que retas de equação $y = b$, onde b é um número real, interceptam a função $y = e^x$ quando $b > 0$, e no máximo uma vez.

Isto significa que a função $y = a^x (a > 0, a \neq 1)$ é injetiva. Retome a Aula 4 e confirme que então podemos definir sua inversa, cujo domínio é \mathbb{R} e imagem \mathbb{R}^+ .

4.1 Definição

O nome da inversa de $y = a^x$ é $y = \log_a x$, ($a > 0, a \neq 1$), que denominamos *logaritmo de x na base a* .

Em linguagem matemática,

$$y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x.$$

Nas figuras 4 e 5 a seguir, temos o gráfico de $y = \log_a x$, obtidos como na Aula 4.

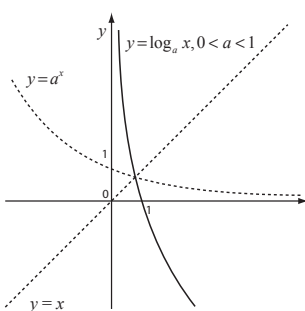


Figura 4 - Gráfico da função $y = \log_a x$, $0 < a < 1$, chamada *logaritmo de x na base a*

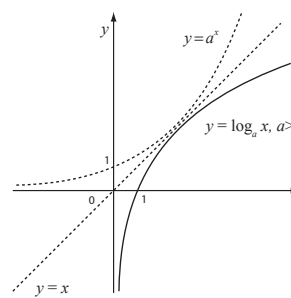


Figura 5 - Gráfico da função $y = \log_a x$, $a > 1$

Informações importantes podem ser obtidas a partir do gráfico de uma função. Na seção a seguir, vamos explorar o gráfico de $y = \log_a x$, ($a > 0, a \neq 1$).

4.2 Explorando o gráfico de $y = \log_a x$, ($a > 0, a \neq 1$)

Observe que todos os gráficos interceptam o eixo x no valor 1. Isto significa que o valor da função no ponto $x = 1$ é 0. Ou seja, $\log_a 1 = 0$, qualquer que seja o valor $a > 0$.

Veja que gráficos das *funções logarítmicas* nunca interceptam o eixo y . No entanto, as curvas gráfico se aproximam desse eixo, à medida que o valor de x fica muito pequeno. Quando x fica próximo do $x = 0$, ainda que positivo, o valor da ordenada y fica:

- muito grande em valor absoluto, mas negativo, no caso da base $a > 1$;
- muito grande, positivo, no caso de $0 < a < 1$.

Quando o valor de x fica muito grande, veja que:

- o valor da ordenada y fica muito grande e positivo, no caso da base $a > 1$;
- o valor da ordenada y fica muito grande (em valor absoluto), sempre negativo, no caso da base $0 < a < 1$.

Observe agora o gráfico de $y = \log_a x$, com $a > 1$. Ela é *côncava para baixo*. O que estaria provocando esse efeito visual? Ele resulta do fato de que as variações Δy , representadas na figura abaixo para $x > 1$, são cada vez menores (mantendo espaços regulares de variação Δx).

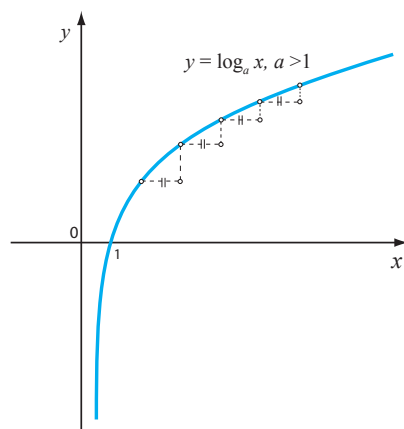


Figura 6 - Concavidade do gráfico de $y = \log_a x$, $a > 1$

Isso quer dizer que as taxas $\frac{dy}{dx}$ têm seu valor cada vez menor, o que significa que a função se modifica cada vez mais devagar.

Informações como essas são importantes e podem ser recuperadas de leituras de bons esboços de gráficos.

5. PROPRIEDADES DA FUNÇÃO $y = \log_a x$

A função $y = \log_a x$, definida como inversa de $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$) desfaz sua ação sobre um valor x , e por isso,

$$1- \log_a (a^x) = x, \text{ para todo } x \text{ em } \mathbb{R}.$$

Observe que desfazer a ação da exponencial sobre o número x corresponde a recuperá-lo a partir da expressão a^x . Isso é obtido nesta primeira propriedade, fazendo a ação $y = \log_a x$ atuar sobre a^x ; ou seja, compondo as duas funções.

Da mesma forma, $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$) desfaz a ação de $y = \log_a x$ em um ponto x .³ Assim,

$$2- a^{\log_a x} = x, \text{ para todo } x \text{ em } \mathbb{R}^+.$$

A propriedade 3 é um caso especial da propriedade 1, uma vez que $a^0 = 1$, para todo a .

$$3- \log_a 1 = 0$$

Além destas, três outras propriedades são importantes quando utilizamos a função $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$) na resolução de problemas. São elas:

³ Lembre-se de que se f é inversa de g , então g é inversa de f .

$$4- \log_a (AB) = \log_a (A) + \log_a (B)$$

$$5- \log_a \left(\frac{A}{B}\right) = \log_a (A) - \log_a (B)$$

$$6- \log_a (A^p) = p \log_a (A)$$

Demonstração de 4:

Da definição de função inversa temos

f e f^{-1} são inversas, então $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$.

No caso do par de inversas $y = \log_a x$ e $y = a^x$, a definição se traduz

$\log_a x = c$, quer dizer $a^c = x$.

Assim, sejam $c_1 = \log_a A$ e $c_2 = \log_a B$. Então $a^{c_1} = A$, $a^{c_2} = B$; e

$\log_a (AB) = \log_a (a^{c_1} a^{c_2})$. Fazendo uso das propriedades de exponenciais,

$\log_a (a^{c_1} a^{c_2}) = \log_a (a^{c_1+c_2}) = c_1 + c_2 = \log_a A + \log_a B$, como queríamos demonstrar.

As demais propriedades se demonstram de modo análogo.

As propriedades acima são importantes na resolução de *equações logarítmicas*.

6. EXEMPLOS**6.1 Exemplo: resolvendo equações logarítmicas**

Para determinar o valor de t que satisfaça

$$5 = 3(10^{2t}),$$

podemos escrever

$\log_{10}(5) = \log_{10}(3(10^{2t}))$. Aplicando a propriedade 4 ao segundo membro da igualdade, temos:

$$\log_{10}(3(10^{2t})) = \log_{10} 3 + \log_{10}(10^{2t}).$$

Veja você que, na segunda parcela dessa última expressão, temos $\log_{10}(10^{2t}) = 2t$, pela propriedade 1.

Desse modo, retomando a equação que estamos resolvendo já com essas informações escrevemos:

$\log_{10}(5) = \log_{10} 3 + 2t$. Segue que $t = \frac{\log_{10}(5) - \log_{10}(3)}{2}$. Em situ-

ações práticas, a escrita desse valor como um número decimal, em geral aproximado, pode ser obtida com auxílio de uma calculadora ou de uma tabela.

6.2 Exemplo: reescrevendo expressões envolvendo logaritmos

Observe o resultado que obtivemos no exercício anterior:

$$t = \frac{\log_{10}(5) - \log_{10}(3)}{2}.$$

Ainda utilizando as propriedades de logaritmos, podemos reescrever essa expressão, tornando-a concisa.

Da propriedade 5, a expressão do numerador se reescreve

$$\log_{10}(5) - \log_{10}(3) = \log_{10} \frac{5}{3}.$$

Desse modo,

$$t = \frac{1}{2} \left(\log_{10} \left(\frac{5}{3} \right) \right).$$

Utilize agora a propriedade 6 para escrever $t = \log_{10} \left(\frac{5}{3} \right)^{\frac{1}{2}}$.

6.3 Exemplo: avaliando a idade de um fóssil⁴

Um crânio descoberto em uma escavação arqueológica tem 10% da quantidade original de carbono-14 presente. Como avaliar sua idade?

Ora, sabe-se que a quantidade, q , de carbono-14 radioativo, que permanece no organismo t anos depois da morte, pode ser modelada por $q = q_0 e^{-0,000121t}$, onde q_0 é a quantidade de carbono inicial.

Para respondermos à questão colocada, devemos determinar o valor do tempo t para o qual $q = \frac{10}{100} q_0$.

Resolvendo a equação $\frac{10}{100} q_0 = q_0 e^{-0,000121t}$, escrevemos:

$$\frac{1}{10} = e^{-0,000121t}$$

$$\ln \frac{1}{10} = \ln e^{-0,000121t}, \text{ ou}$$

$$-\ln 10 = -0,000121t. \text{ Ou seja, } t = 10^6 \frac{\ln 10}{121}.$$

Com o auxílio de uma calculadora, a resposta é $t = 15.678,7$ anos.

⁴ HUGHES-HALLET *et al.*
Cálculo e aplicações, p. 49,
Exercício 13.

7. RELAÇÕES ENTRE AS FUNÇÕES LOGARÍTMICAS

Os gráficos na figura a seguir são gráficos de *funções logarítmicas*, de equação $y = k \ln x$, para diferentes valores do número real positivo k .

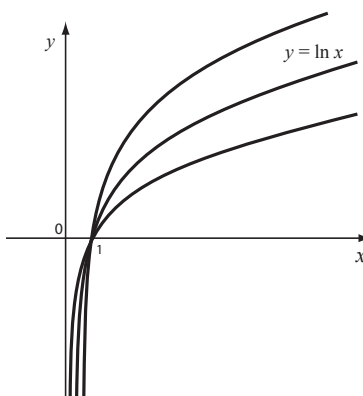


Figura 7 - Gráficos das funções $y = k \ln x$

Qualquer $y = \log_a x$ está aí representada, para um valor conveniente da constante k .

De fato, existe um valor adequado k para cada valor da base a , tal que

$$\log_a x = k \ln x.$$

Essa constante é conhecida como *mudança de base*.

Isso quer dizer que se conhecemos bem a função $y = \ln x$ ou, na verdade, qualquer outra $y = \log_a x$, conhecemos todas as outras *funções logarítmicas* $y = \log_a x$.

7.1 Determinando o valor da mudança de base entre $y = \log_a x$ e $y = \ln x$.

Da definição da função $y = \log_a x$ como inversa de $y = a^x$, sabemos que:

$$a = e^{\ln a}, \text{ para todo } a \geq 0$$

$$\log_a x = c \text{ é o mesmo que dizer } a^c = x.$$

Uma vez que $a = e^{\ln a}$, podemos escrever

$$a^c = (e^{\ln a})^c = x, \text{ ou seja, } e^{c \ln a} = x.$$

Isto é o mesmo que dizer

$$c \ln a = \ln x.$$

De outro modo, $c = \frac{1}{\ln a} \ln x$, o que nos permite escrever

$$\log_a x = \frac{1}{\ln a} \ln x.$$

Obtivemos assim o valor da constante *mudança de base*, $k = \frac{1}{\ln a}$.

8. UM COMENTÁRIO FINAL

Vale a pena ser feito um comentário sobre o desenvolvimento histórico dessa função.

A *função logarítmica* possui uma propriedade importante – a de transformar produtos de números em soma, que, na verdade foi o motivo de sua concepção. No século XVIII, das grandes navegações, buscavam-se modos para tornar os cálculos mais simples. O *Logaritmo* constituiu-se como um dos instrumentos que possibilitava simplificações. Historicamente, sua invenção antecede os estudos da função exponencial geral. Isto quer dizer que a ordem de apresentação dos dois conteúdos aqui neste texto inverte a ordem histórica de sua criação. No entanto, hoje é mais natural apresentá-los desse modo; inclusive porque a evolução da tecnologia, com o advento de calculadoras e computadores, tornou sem sentido o motivo inicial (transformar produtos de números em somas) da concepção dos *logaritmos*.

EXERCÍCIOS

1 - Resolva as equações, determinando o valor de t

a) $3 = 2(10^t)$ b) $7(3^t) = 2(5^t)$ c) $50.000 = 25.000e^{-0,5t}$

2 - Resolva as equações, usando logaritmos naturais na resolução.

a) $200 = 50(3)^t$ b) $a = b^t$ c) $2P = Pe^{0,2t}$

3 - Converta cada uma das funções a seguir à forma $P = P_0a^t$. Quais representam crescimento exponencial ou decaimento exponencial?

a) $P = P_0e^{2t}$ b) $P = P_0a^t$ c) $P = 79e^{-2,5t}$

4 - Converta a função $P = 72(0,5)^t$ à forma $P = P_0e^{-kt}$.

5 - Uma população P era de 1,6 milhões em 1980 e estava crescendo à taxa anual de 2,8%. Seja t o tempo em anos desde 1980.

(a) Expresse P como função na forma $P = P_0a^t$.

(b) Expresse P como função exponencial usando base e .

(c) Compare as taxas de crescimento anual e contínua.

6 - Em 1994, a população do mundo era de 5,6 bilhões, e projetava-se que a população atingiria 8,5 bilhões por volta do ano de 2030. Qual é a taxa anual de crescimento nessa previsão?

7 - O ar numa fábrica está sendo filtrado, de modo que a quantidade, P , de poluentes (em mg/litro) está decrescendo de acordo com a equação $P = P_0e^{-kt}$, onde t representa o tempo em horas. Se 10% da poluição é removida nas primeiras 5 horas,

(a) Qual porcentagem da poluição resta depois de 10 horas?

(b) Quanto tempo vai levar até que a poluição seja reduzida de 50%?

(c) Esboce um gráfico da poluição contra o tempo. Mostre o resultado de seus cálculos no gráfico, explicando por que a quantidade de poluição poderia decrescer dessa forma.

REFERÊNCIAS

HUGHES-HALLETT, D. *et al.* *Cálculo e aplicações*. São Paulo: Edgard Blucher Ltda., 1999.

PINTO, M.; ARAUJO, J.; FERREIRA, C. *Cálculo I*. Belo Horizonte: Editora UFMG, 2008. (Coleção Educação a Distância)