AULA 8

Funções Trigonométricas

Objetivos

- Definir *Funções Trigonométricas*.
- Introduzir a noção de medida de ângulos em *radianos*, utilizada para definir tais funções no *Círculo Trigonométrico*.
- Esboçar gráficos de *Funções Trigonométricas*.
- Definir as *Funções Trigonométricas Inversas*, utilizando-as para resolver equações.

1. INTRODUÇÃO

Você conhece algum método para calcular a altura da Pedra do Bode?[1] Do Pão de Açúcar? E para calcular o comprimento do raio da Terra?

Desde muito cedo os homens se empenharam em desenvolver métodos para determinar distâncias como essas, inacessíveis por medição direta. Respostas a tais questões, e outras, foram sistematizadas, e uma coleção delas constituiu a área da matemática conhecida como *Trigonometria*.

A palavra *Trigonometria* significa mensuração no triângulo, referindo-se ao desenvolvimento de métodos para o cálculo das medidas de seus ângulos e dos comprimentos de seus lados. Esses métodos foram desenvolvidos a partir da percepção de relações entre tais medidas em triângulos retângulos semelhantes e tornaram instrumentos importantes de medição.

Depois, as primeiras noções foram estendidas para pensar relações que contemplassem ângulos maiores que 90º, levando à definição e ao estudo das *funções trigonométricas*.

Do estudo dessas funções, como extensão da *trigonometria do triângulo retângulo*, abrem-se possibilidades para a investigação e modelagem de fenômenos que, quando representados matematicamente, têm seus valores se repetindo em intervalos regulares, como ondas.

[1] Você sabe onde fica a Pedra do Bode? Se não sabe, faça uma consulta na Internet!

Esse será o tema central desta aula e será retomado durante seu curso, dada a sua importância.

Como leitura complementar, anexamos no Apêndice deste livro seções sobre *Semelhança de Triângulos*, pelo seu papel na fundamentação e desenvolvimento da *Trigonometria*; sobre a *Trigonometria no Triângulo*; sobre *Funções Periódicas*. Por fim, uma discussão sobre *Identidades Trigonométricas* e sua utilização para resolver equações.

2. ESTENDENDO AS NOÇÕES DA TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO

Quando θ for o ângulo de referência para o cálculo das *razões* entre os lados de um triângulo retângulo, estes lados serão nomeados como indicado no triângulo ABC da Figura 1.

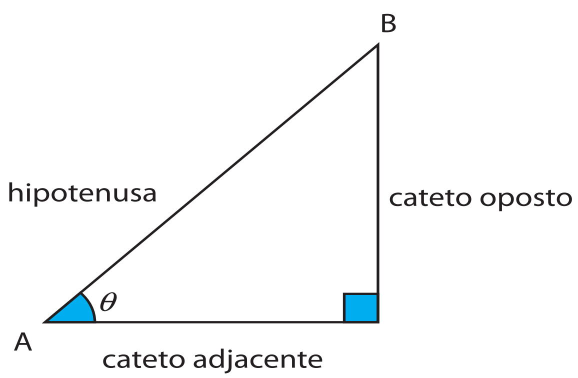

Figura 1 - Lados do triângulo retângulo relativos ao ângulo θ

Para cada valor do ângulo θ, entre 0 e 90º, destacamos na definição 2.1 a seguir as seis razões entre os comprimentos de *catetos* e da *hipotenusa*, chamadas *razões trigonométricas*.

2.1 Definição

As *razões trigonométricas seno*, *cosseno* e *tangente*, *cossecante*, *secante* e *cotangente* são expressas respectivamente por:

$$sen\theta = \frac{cateto \quad oposto \quad a \quad \theta}{hipotenusa} \qquad \csc\theta = \frac{hipotenusa}{cateto \quad oposto \quad a \quad \theta}$$

$$\cos\theta = \frac{cateto \quad adjacente \quad a \quad \theta}{hipotenusa} \qquad \sec\theta = \frac{hipotenusa}{cateto \quad adjacente \quad a \quad \theta}$$

$$\tan\theta = \frac{cateto \quad oposto \quad a \quad \theta}{cateto \quad adjacente \quad a \quad \theta} \qquad \cot\theta = \frac{cateto \quad adjacente \quad a \quad \theta}{cateto \quad oposto \quad a \quad \theta}$$

Na Definição 2.1, observe as relações entre as três razões à direta e as três à esquerda:

$$\csc\theta = \frac{1}{sen\theta}; \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}; \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}.$$

Veja que podemos escrever as três razões à esquerda em termos das três razões à direita. Por isso, na maior parte do tempo, estudamos apenas as *razões trigonométricas* definidas como *seno*, *cosseno* e *tangente*.

Estas *razões trigonométricas* são, em particular, *funções* do ângulo θ. Mas do modo como estão definidas, não podemos considerar ângulos maiores do que 90º em seu domínio.

Como estender a definição das *razões* (como *funções*) *trigonométricas* para contemplar ângulos θ quaisquer?

A Figura 2 ilustra uma proposta, em que os ângulos são medidos a partir do semieixo positivo *x*. Por convenção, o sentido anti-horário da rotação do raio *OP*, como assinalado na Figura 2, corresponderá a valores positivos da medida dos ângulos.

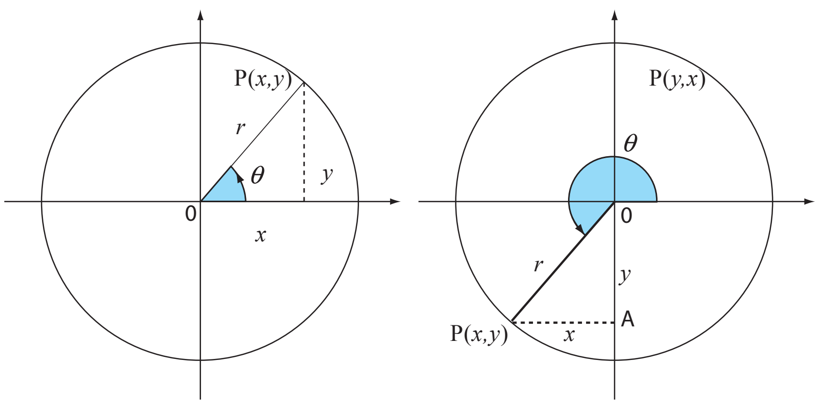

Figura 2 - Estendendo a Trigonometria do Triângulo

Para prosseguirmos, observe o ponto $P(x, y)$ em ambos os quadros da Figura 2 e analise o triângulo retângulo "imaginário" constituído por sua ordenada, abscissa *x* e o raio *OP*. Dê o nome de *r* ao comprimento ou norma de *OP*.

Com essa linguagem, e utilizando a Definição 2.1, é possível reescrever as *razões trigonométricas* como a seguir:

$$sen\theta = \frac{ordenada \quad do \quad ponto \quad P}{|OP|} = \frac{y}{r};$$

$$\cos\theta = \frac{abcissa \quad do \quad ponto \quad P}{|OP|} = \frac{x}{r};$$

$$\tan\theta = \frac{ordenada \quad do \quad ponto \quad P}{abcissa \quad do \quad ponto \quad P} = \frac{y}{x}.$$

Confirme na Figura 2 que esta reescrita passa a admitir ângulos maiores que 90º na determinação de *razões trigonométricas*. E ainda que as *razões* (que são *funções* de θ) reescritas para ângulos menores que 90º coincidem com as definições das *razões trigonométricas* para ângulos entre zero e 90º, como apresentada na *Trigonometria no Triângulo*.

Essa proposta de extensão da *Trigonometria no Triângulo* para contemplar ângulos θ quaisquer está sistematizada na definição a seguir.

2.2 Definição

Em um sistema de coordenadas cartesiano, seja $P=(x,y)$ um ponto qualquer na reta passando pela origem que forma um ângulo θ com a direção positiva do eixo *x* (Figura 2).

Chamando $\left|\overline{OP}\right|$ de *r*, definimos

$$sen\theta=\frac{y}{r} \qquad \csc\theta=\frac{r}{y}$$

$$\cos\theta=\frac{x}{r} \qquad \sec\theta=\frac{r}{x}$$

$$tan\theta=\frac{y}{z} \qquad \cot\theta=\frac{x}{y}$$

2.3 Comentários

Como divisões por zero não são permitidas, as *razões* $\tan\theta$ e $\sec\theta$ não estão definidas quando $x = 0$; ou seja, para $\theta=90^0$.

Pelo mesmo motivo, $\csc\theta$ e $\cot\theta$ não estão definidas quando

$y = 0$; ou seja, para $\theta=0^0$.

Nessa extensão das *razões trigonométricas* para contemplar ângulos maiores do que 90º, utilizamos outra unidade de medida de ângulo, chamada *radiano*. Motivos dessa convenção serão discutidos ainda nesta aula. Para isso relembramos também o sentido ou orientação positiva adotada para o ângulo θ: positivo, se medido no sentido anti-horário, a partir do eixo *x*.

3. MEDIDAS DE ÂNGULO

Na *Trigonometria do Triângulo* os ângulos foram medidos como se indicassem direções, em graus. A unidade 1º corresponde a 1/360, parte de uma volta completa num plano, em torno de um eixo. Isto quer dizer que o ângulo dado por uma volta completa mede 360º.

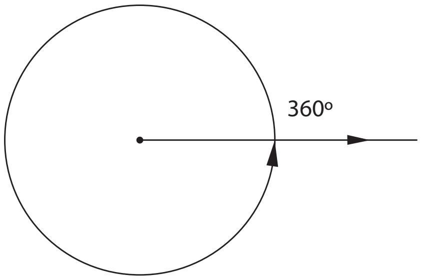

Figura 3 - Medida do ângulo de uma volta

Ao estender a *Trigonometria no Triângulo* introduzimos um outro modo de medir ângulos. Nesse novo modo, representamos a volta completa de 360º desenhando um círculo. A nova unidade de medida de ângulo, chamada de 1 radiano, corresponde ao ângulo que subtende um arco de comprimento igual ao seu raio.[2] Explore a Figura 4 e confirme o que estamos dizendo.

[2] Uma vez que círculos são figuras geométricas semelhantes (a forma é sempre a mesma!), esta medida não varia com o comprimento de seus raios.

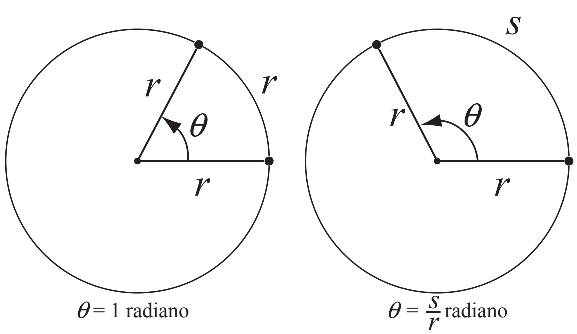

Figura 4 - Medida de ângulos em radianos

O símbolo usado para a medida *radiano* é rad.

Convencionando o sentido de rotação anti-horário como positivo, vamos definir a medida de um ângulo central arbitrário θ, como a seguir.

3.1 Definição

A medida em *radianos* de um ângulo central θ em um círculo corresponde à razão entre os comprimentos do arco subtendido e o seu raio. Ou seja, em radianos, $\theta = \dfrac{s}{r}$.

Em outras palavras, tomando o raio do círculo como a unidade de comprimento, a medida de um ângulo corresponderá à medida linear do arco por ele subtendido, com a orientação como foi definida. Observe novamente a Figura 4, relacionando-a com a definição de *radiano*.

3.2 Exemplo: utilizando a Definição 3.1

a) Se o raio de um círculo for 4 cm, então a medida, em radianos, do ângulo que subtende um arco de 8 cm, será $\theta = \frac{8}{4} rad = 2rad$.

b) A Figura 5 representa dois satélites artificiais, circulando ao redor da Linha do Equador. O raio de sua órbita é, aproximadamente, $3\times10^8 m$. Para uma separação angular registrada de $\theta = 0,03rad$, o comprimento de arco que separa os dois satélites pode ser calculado como

$$s = r\theta = (3\times10^8 m)(0,03rad) = 9\times10^6 m.$$

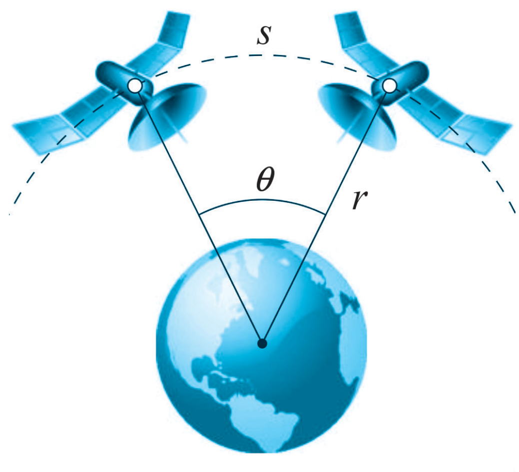

Figura 5 - Satélites em órbita

Podemos fazer corresponder as medidas de ângulos, em graus, às suas medidas em *radianos*: lembrando que a circunferência tem comprimento $c = 2\pi r$, então um ângulo completo de uma volta, correspondente a 360º, é equivalente a $\frac{2\pi r}{r} = 2\pi\, rad$.

Veja que $\theta = \pi$ corresponde a meia-volta, ou seja, 180º.

Assim, $2\pi\, rad \cong 360°$, $\pi\, rad \cong 180°$, $1\, rad \cong \frac{180°}{\pi} \cong 57,29°$ e $1° \cong \frac{\pi}{180} rad \approx 0,017 rad$.

A Figura 6 a seguir representa algumas medidas de ângulo em *radianos*, considerando os sinais positivo e negativo, de acordo com sua *orientação*.

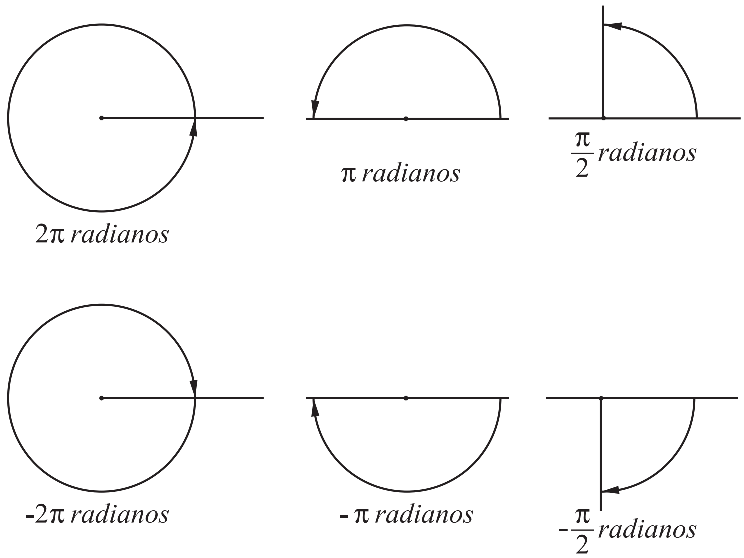

Figura 6 - Medindo ângulos em radianos

3.3 Exemplo: conversão de medidas de ângulos

Um ângulo de 60º vale $60 \times 1°$. Portanto, em radianos $60° \cong 60\left(\frac{\pi}{180}\right) rad = \frac{\pi}{3} rad.$

Um ângulo de $\frac{\neq}{4} rad$ vale $\frac{\pi}{4} \times 1\, rad$. Portanto, em graus, $\frac{\pi}{4} rad \cong \frac{\pi}{4} \times \frac{180}{\pi} = 45°.$

3.4 Notação, linguagem e convenções

Na definição e estudo das *Funções Trigonométricas*, a convenção será medir ângulos como proposto na Definição 3.1. Assim, de agora em diante, as medidas dos ângulos θ serão em *radianos*, a partir do semieixo positivo O, considerando seu sentido de rotação anti-horário como o sentido positivo.

A letra *x* passará a nomear a *variável independente* das *funções trigonométricas* e corresponde à medida do ângulo denominado até o momento pela a letra grega θ. A letra *y* estará, na maioria das vezes, referindo-se ao valor da *função trigonométrica* para cada valor de *x*, medido em *radianos*.

Estes acordos adéquam notação e linguagem às do conceito de função real, como trabalhado no Cálculo.[3]

[3] Esta mudança na notação tem o propósito de adequar a notação àquela utilizada no contexto das funções reais de variáveis reais. Ao medir o ângulo em radianos, possibilitamos a representação das funções trigonométricas em sistemas de coordenadas cartesianos, adotando uma mesma unidade de medida em ambos os eixos. Este é o modo como trabalhamos com as funções reais, em matemática. Estabelecido este acordo, estamos em condições de definir Funções Trigonométricas como funções reais de variáveis reais, no Círculo Trigonométrico.

4. O CÍRCULO TRIGONOMÉTRICO

Razões trigonométricas independem das dimensões dos lados do triângulo retângulo considerado e estão em função apenas da medida x do ângulo (que antes chamávamos de θ). Por isso, na Definição 2.1 podemos considerar $r = |OP| = 1$. Feita essa opção, o ponto P, representado nas figuras 7 e 8, descreverá um círculo de raio 1, quando variamos os valores de suas abscissas e ordenadas.

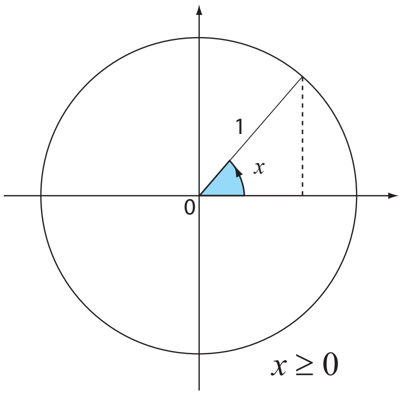

Figura 7 - Medida de ângulo $x \geq 0$

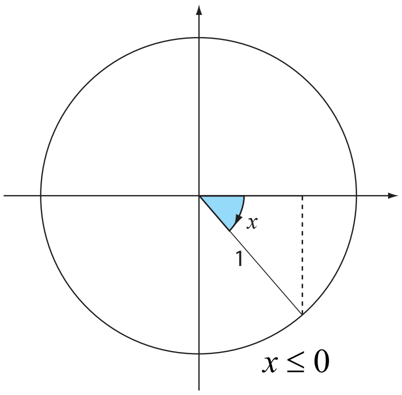

Figura 8 - Medida de ângulo $x \leq 0$

Observe ainda nas figuras 7 e 8 os cuidados com as medidas de ângulo, em termos da orientação.

4.1 Definição

Chamamos *Círculo Trigonométrico* a uma representação de um círculo que inclui os elementos destacados acima: raio 1, medida de ângulos centrais em radiano, sentido anti-horário de rotação tomado como positivo ao medir ângulos.

Uma definição possível para as *Funções Trigonométricas* como funções em *IR* se beneficia da noção de *Círculo Trigonométrico*.[4]

[4] Digo aqui "uma definição possível" porque poderíamos perfeitamente defini-las de outros modos. Por exemplo, poderíamos defini-las organizando-nos a partir da representação de um círculo, mas considerando outros valores diferentes de 1 unidade para o raio *r*.

4.2 Definição

Para um ângulo (de medida) x no *Círculo Trigonométrico* no plano *uv*, os valores $\cos x$ e $senx$ são as coordenadas $(\cos x, senx)$ do ponto de interseção P da reta suporte do ângulo com o círculo $u^2 + v^2 = 1$. As funções $y = \cos x$ e $y = senx$ definidas deste modo têm domínio *IR* e são denominadas *função cosseno* e *função seno*, respectivamente.

Veja o que a Definição 4.2 diz, explorando as figuras a seguir.

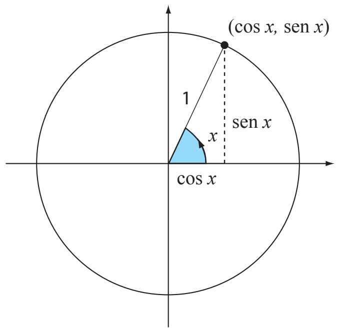

Figura 9 - Seno e cosseno no 1º quadrante

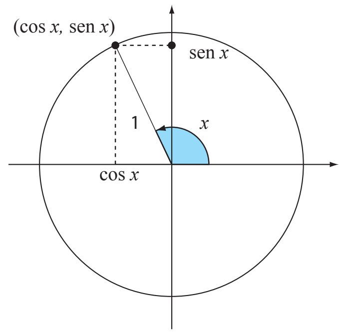

Figura 10 - Seno e cosseno no 2º quadrante

Ainda nas figuras 9 e 10, observe que ângulos (de medida) x e $x+2k\pi$ correspondem ao mesmo ponto $P=(\cos x, sen x)$ sobre o *Círculo Trigonométrico*.

Se k for um número inteiro, o número $2k\pi$ representa a medida de k comprimentos de medida 2π, correspondendo então a k vezes o comprimento do círculo de raio 1. Explorando novamente as mesmas figuras 9 e 10, você verá que os ângulos x e $x+2k\pi$ correspondem ao mesmo ponto $P=(\cos x, sen x)$ sobre o *Círculo Trigonométrico*.

Isso quer dizer que os valores da abscissa e da ordenada do ponto P, em função do ângulo x, se repetem em ciclos, de *período*[5] igual a 2π. Dito de outro modo, as funções seno e cosseno, que correspondem, respectivamente, à ordenada e à abscissa do ponto $P=(\cos x, sen x)$, têm *período* 2π.

[5] Entenda o período como o menor intervalo de valores de x em que um ciclo da função se completa.

Vamos escrever essas observações em linguagem matemática.

4.3 Notação e linguagem

As funções $y = sen x$ e $y=\cos x$ são *funções periódicas* de *período* 2π, satisfazendo a:

$sen(x) = sen(x+2k\pi)$, para todo inteiro k.

$\cos(x) = \cos(x+2k\pi)$, para todo inteiro k.

4.4 Exemplo: resolvendo equações

Que valores de x satisfazem a equação $sen x - 1 = 0$?

Escrito de outro modo, queremos determinar os valores de x para os quais $sen x = 1$. No intervalo $[0, 2\pi]$, isto acontece apenas quando $x=\frac{\pi}{2}$. Assim, todas as soluções possíveis, em IR, serão dadas por $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, para k número inteiro.

5. CONSTRUINDO GRÁFICOS

Os sinais das funções trigonométricas, quando positivos, estão representados na Figura 11. Uma justificativa para este quadro de sinais decorre do fato de as funções trigonométricas terem sido definidas como razões das ordenadas e abscissas de pontos em cada um dos quadrantes. Esta análise será útil para o traçado de gráficos.

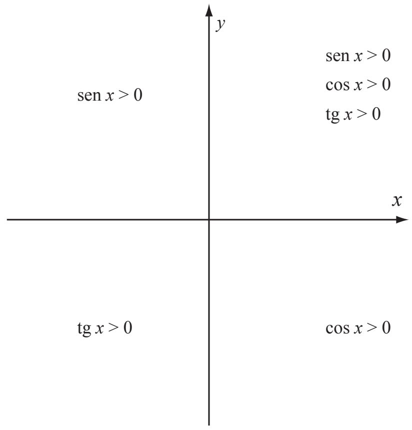

Figura 11 - Sinais das Funções Trigonométricas

5.1 O gráfico da Função Seno

A função $y = senx$ é definida para todo número real x. É uma *função periódica*, de *período* 2π . Por isso, basta explorarmos o traçado de seu gráfico para x no intervalo $[0, 2\pi]$.

Relembrando que $-1 \leq senx \leq 1$, para todo valor de x, seu gráfico estará totalmente contido na faixa do plano determinada pelas retas $y = -1$ e $y = 1$, como na Figura 12. Dizemos que sua *amplitude*[6] vale 1.

[6] A amplitude de uma função periódica é a metade da diferença entre seu maior valor da oscilação e o seu menor valor.

Não temos elementos para garantir que a *concavidade* do gráfico da função será como a do desenho. No entanto, auxiliados pela Tabela 1 de valores da função $y = senx$ para valores de x no intervalo $[0, 2\pi]$ e pelo quadro de sinais, esboçamos a forma do gráfico.

Tabela 1
Valores da função $y = senx$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$senx$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0

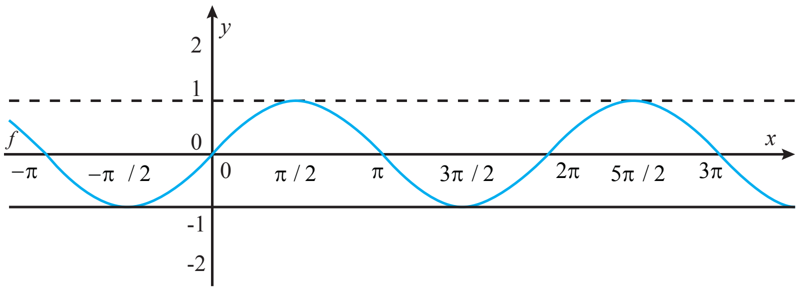

Figura 12 - Gráfico da Função Seno

5.2 O gráfico da Função Cosseno

O gráfico da *função cosseno* pode ser obtido a partir do gráfico da *função seno,* desenhado acima, retomando

- a identidade[7] $\cos x = sen\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$ e

- a discussão sobre *translações horizontais*, em nossa Aula 4. Seu esboço terá a forma

[7] Estude o Apêndice 4 neste livro.

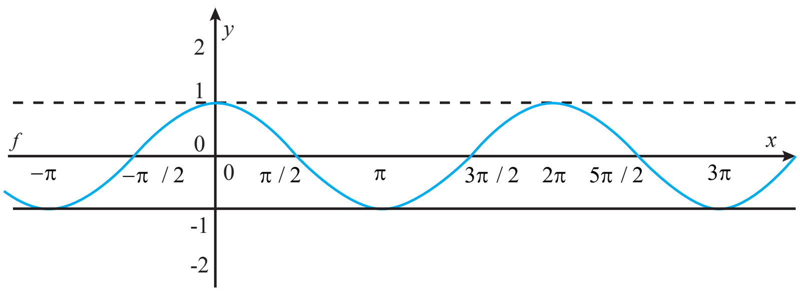

Figura 13 - Gráfico da Função Cosseno

5.3 O gráfico da Função Tangente

Observe nas figuras 14 e 15 as representações do comprimento PT da tangente do ângulo θ. As representações são válidas porque, pela semelhança dos triângulos, podemos escrever que $\dfrac{PT}{1}=\dfrac{y}{x}=\tan\theta$.

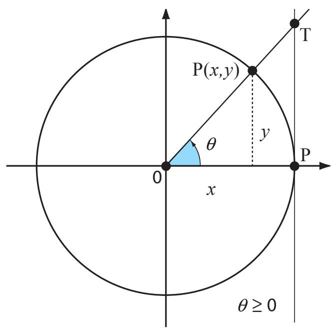

Figura 14 - A Tangente no 1º quadrante

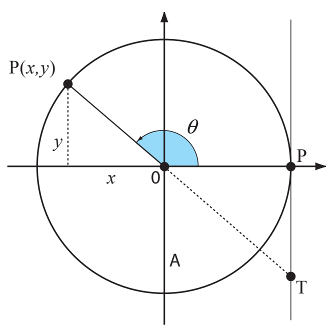

Figura 15 - A Tangente no 2º quadrante

Explore a variação desse comprimento, imaginando a posição do eixo suporte $OP(x, y)$ se movendo no sentido anti-horário, em torno do ponto *O*: o comprimento PT fica muito grande, positivo, quando θ fica próximo de $\frac{\pi}{2}$, no primeiro quadrante. Quando θ fica próximo de $\frac{\pi}{2}$, no segundo quadrante, o comprimento PT será marcado abaixo do eixo *x*, correspondendo a valores negativos para a tangente. Ou seja, para tais valores de θ, o valor da tangente é negativo, com valor absoluto muito grande. E o que acontece quando θ está próximo de $\frac{3\pi}{2}$? Faça uma análise semelhante à que foi feita para o caso em que θ fica próximo de $\frac{\pi}{2}$.

Por fim, veja que a função $y = \tan x$ não admite valores para $x = k\frac{\pi}{2}$, *k* ímpar, que são os zeros da função $y = \cos x$.[8] Estes valores não pertencem ao domínio da função $y = \tan x$, porque $\tan x = \frac{senx}{\cos x}$ e o nosso sistema numérico não admite divisão por zero.

Situações semelhantes às que foram discutidas para θ próximo de $\frac{\pi}{2}$ e de $\frac{3\pi}{2}$ ocorrerão nos demais valores $x = k\frac{\pi}{2}$, *k* ímpar. Isto justifica em parte por que o gráfico da função tangente terá sua forma como representada na Figura 16.

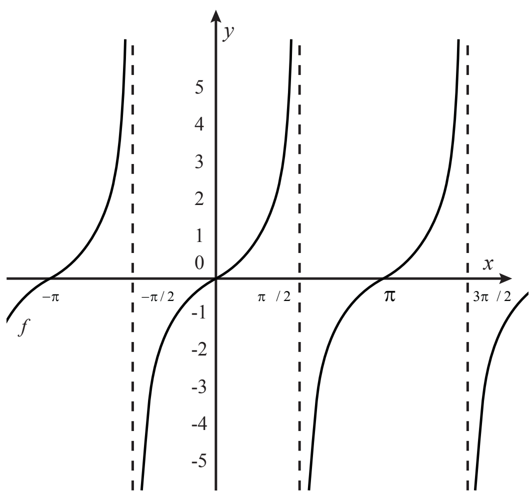

Figura 16 - Gráfico da Função Tangente

5.4 Exemplo: construindo novas funções

Na Aula 4, esboçamos gráficos de funções $y = f(x)$ expressas como

[8] Lembre-se de que os zeros da função $y = \cos x$ ocorrem em $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

translações de funções $y=g(x)$, cuja fórmula ou gráfico eram conhecidos. Em outras palavras, uma vez conhecido o gráfico de $y=g(x)$, aprendemos a esboçar o gráfico de $y=f(x)=g(x)+k$ ou $y=f(x)=g(x+k)$. Vamos retomar aqui os mesmos procedimentos que utilizamos lá, para esboçar gráficos de funções que envolvem funções trigonométricas em sua expressão, tais como $y=\pi+\cos x$, ou $y=\cos(x+\pi)$.

5.4.1 Exemplos: translações verticais e translações horizontais

O esboço de $y=\pi+\cos x$ pode ser obtido a partir do gráfico de $y=\cos x$, por meio de uma *translação vertical*, adicionando o numero π a todas as ordenadas dos pontos sobre o gráfico. Lembre-se de que $\pi\approx 3{,}14$.

Observe que a faixa que encerra o gráfico da função, determinada pelas retas $y=-1$ e $y=1$, passará a corresponder a $y=-1+\pi$ e $y=1+\pi$. O gráfico de $y=\pi+\cos x$ terá a mesma forma de $y=\cos x$, incluindo o mesmo período, porém encerrado nessa outra faixa no plano. Tente fazer seu esboço!

Já no caso de $y=\cos(x+\pi)$, seu gráfico será obtido a partir do de $y=\cos x$ por meio de uma *translação horizontal* de π unidades para a esquerda. Nenhuma modificação haverá na faixa no plano que encerra o gráfico.[9]

Observe que as *translações horizontais* e as *translações verticais* não modificam a *amplitude* e o *período* das funções trigonométricas.

5.4.2 Exemplo: modificações na Amplitude e no Período[10]

Como esboçar o gráfico de uma função como $y=2senx$?

Veja sua tabela de valores, apresentada abaixo para x no intervalo $[0,2\pi]$.

Tabela 2

Valores de $y=2senx$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$2senx$	0	$2\times\frac{1}{2}$	$2\times\frac{1}{\sqrt{2}}$	$2\times\frac{\sqrt{3}}{2}$	2×1	$2\times\frac{\sqrt{3}}{2}$	$2\times\frac{1}{\sqrt{2}}$	$2\times\frac{1}{2}$	0	2×-1	0

Observe que todas as *ordenadas* dos pontos que estarão sobre o gráfico estão multiplicadas por 2, o que inclui os valores $y=1$ e $y=-1$, que são os valores maior e menor da oscilação. Lembre-se de que estes últimos determinam as duas faixas no plano que limitam o gráfico da função.

Observe que os *zeros* da função não se modificam e nem o seu *período*.

[9] Confira que já fizemos uma translação horizontal em 4.3, ao esboçar o gráfico de $y=sen\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$.

[10] Os exemplos particulares que trazemos aqui representam casos gerais, no sentido de indicar procedimentos gerais a que podemos recorrer.

Tente esboçar o gráfico da função, desenhando primeiro as retas $y = -2$ e $y = 2$, que determinam a faixa no plano que vai encerrar o gráfico.

Como segundo exemplo, vamos discutir o gráfico de $y = sen(2x)$. Para começar, lembre-se de que se $0 \leq 2x \leq 2\pi$, ou seja, se $0 \leq x \leq \pi$, então $sen2x$ terá percorrido um *ciclo* completo. Isto quer dizer que o *período* da função $y = sen(2x)$ é π.

Veja na Tabela 3 como isso acontece.

Tabela 3
Valores de $y = sen(2x)$

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$sen2x$	0	$sen\left(2\times\frac{\pi}{4}\right) = sen\frac{\pi}{2} = 1$	$sen\left(2\times\frac{\pi}{2}\right) = sen\pi = 0$	$sen\left(2\times\frac{3\pi}{4}\right) = sen\frac{3\pi}{2} = -1$	0

Não há alteração na *amplitude*, e o gráfico completa seu ciclo em $0 \leq x \leq \pi$. Faça o esboço!

6. FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Todas as funções trigonométricas não admitem *inversa* em seu domínio, uma vez que elas não são injetoras nele.[11]

[11] Retome a aula sobre Funções Inversas e procure justificar as afirmações feitas.

No entanto, podemos restringir o domínio de cada uma delas, de modo a possibilitar a obtenção das inversas. Em cada caso, essa restrição pode ser feita de muitas formas. Vamos utilizar as restrições que são consideradas como *domínios principais* das inversas.[12]

[12] Lembre-se de que domínios e imagens serão parte integrante das funções que serão definidas.

6.1 A Inversa da Função Seno

A função $y = senx$ é injetora quando definida em $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, porque seus valores não se repetem nesse intervalo, pois ela é crescente.[13] Podemos definir sua inversa nesse intervalo. Ela é denominada função arco seno.

[13] Ver a definição de *função crescente*.

De sua definição como inversa da função seno, seu domínio é $[-1,1]$, que é a imagem da função seno. Por sua vez, sua imagem é o intervalo $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, que é a restrição do domínio escolhida.

O gráfico será obtido como a reflexão, em torno da reta $y = x$, da curva gráfico de $y = senx$, para x em $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

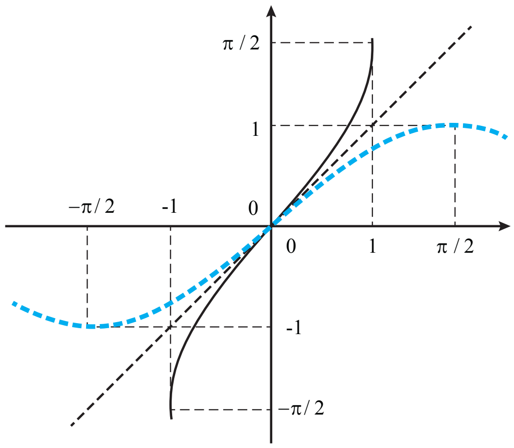

Figura 17 - O gráfico de $y = arcsenx$

A função arco seno de x, simbolizada por $y = arcsenx$, é o ângulo no intervalo $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ cujo seno é x. De outro modo, $y = arcsenx$ significa $x = seny$ e $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$.

6.1.1 Exemplo: resolvendo equações

Sabemos que $sen\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Para encontrarmos um ângulo cujo seno é $\frac{\sqrt{3}}{2}$, então podemos responder que um valor para esse ângulo é $\frac{\pi}{3}$. Ou seja, $arcsen\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$. Há outros ângulos com essa propriedade; mas aqui estamos respondendo de acordo com a restrição ao domínio $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, conforme combinamos.

Assim, resolver a equação $arcsenx = \frac{\pi}{3}$ é escrever $x = sen\frac{\pi}{3}$, ou seja, $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

6.2 A inversa da Função Cosseno

Observe o gráfico de $y = \cos x$ e verifique que essa função é injetora no intervalo $[0, \pi]$.

Sua função inversa, $y = \arccos x$, é denominada arco cosseno. Seu domínio é $[-1,1]$, e sua imagem é $[0, \pi]$. Do mesmo modo que a função arco seno, temos que $y = \arccos x$ significa $x = \cos y$, para $0 \leq y \leq \pi$.

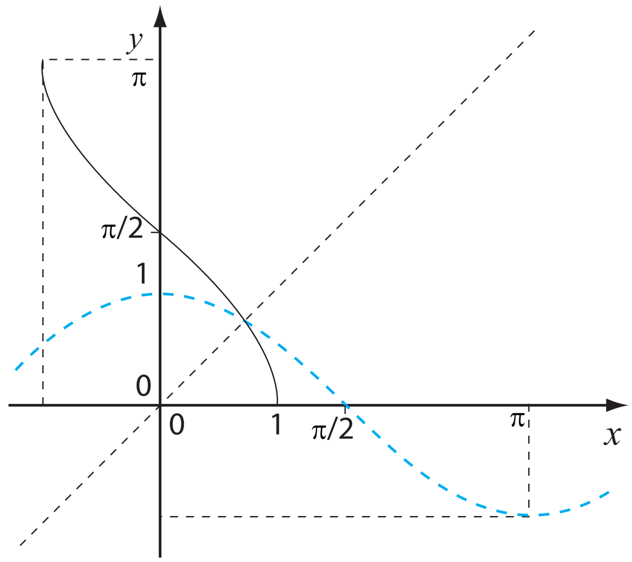

Figura 18 - O gráfico de $y = \arccos x$

6.3 A inversa da Função Tangente

A Função Arco Tangente é definida do mesmo modo que as duas inversas já estudadas. Temos

$y = \arctan x$ se e somente se $x = \tan y$, para $-\dfrac{\pi}{2} \leq y \leq \dfrac{\pi}{2}$.

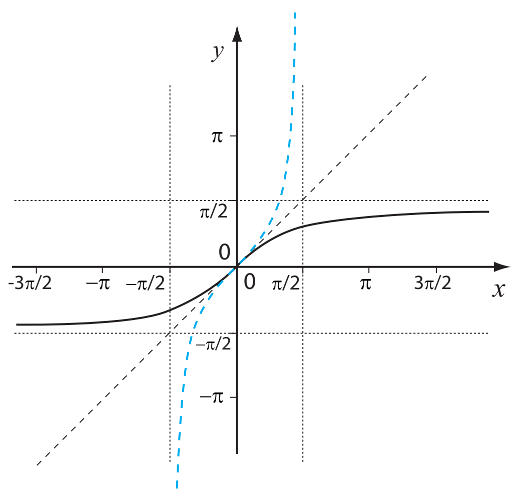

Figura 19 - O gráfico de $y = \arctan x$

O domínio de $y = \arctan x$ é $(-\infty, +\infty)$, e a imagem é $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Veja como o gráfico está todo dentro na faixa do plano limitada por

$y = -\dfrac{\pi}{2}$ e $y = \dfrac{\pi}{2}$.

EXERCÍCIOS

1- Um menino empina uma pipa a 3 m de altura, num ângulo de visão que num certo momento é de 45º. Qual o comprimento da linha que está sendo dado nesse momento?

2- Uma câmera de filmar está localizada em um poste a 4 m do solo e acompanha um carro em movimento. No momento em que o carro está a 6 m do poste, qual o ângulo entre o foco da câmera e o poste?

3- Uma escada de 2 m está encostada num muro, fazendo um ângulo de 35º com o chão. Qual a altura de seu topo, em relação ao chão? Qual a distância entre a sua base e o muro?

4- Calcular os valores de todas as funções trigonométricas, no caso de o ponto $P(x, y)$ na Figura 2 ter coordenadas: $(1,3)$; $(2,-5)$. Faça um desenho representando o ângulo θ em cada um dos casos.

5- Converta de graus para radianos: 30º; 150º; 640º.

6- Converta de radianos para graus: $\frac{\pi}{5} rad$; $2rad$.

7- Que valores de x satisfazem $\cos x - 1 = 0$?

8- Que valores de x satisfazem $\cos^2 x - 2\cos x + 1 = 0$?

9- Em uma circunferência de raio 4, qual o comprimento do arco oposto a um ângulo central de $\frac{5\pi}{3}$ rad? E de 60º?

10- Resolva: $senx = \tan x$, para x em $[0, 2\pi]$.

11- Para $senx = \frac{3}{5}$, x em $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, determine o valor de $\cos x$ e $\tan x$.

12- Diga qual o *período* das seguintes funções:

(a) $y = sen(x-3)$ (b) $y = \pi + senx$ (c) $y = \frac{1}{2}\cos x$ (d) $y = 3sen(x+5)$ (e) $y = 3sen(4x)$

13- Diga qual a *amplitude* das funções da questão 12.

14- Esboce os gráficos das funções da questão 12.

15- Faça $y = x$ na identidade $\cos(x+y) = \cos x \cos y - senxseny$ e escreva a identidade nova.

16- Faça $-y$ na identidade $\cos(x+y) = \cos x \cos y - senxseny$ e escreva a identidade nova.

17- Mostre que $\cos x = sen\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$. Sugestão: use a fórmula de adição de arcos.

18- Resolva $sen2x = \cos x$ em $[0, 2\pi]$.

19-Esboce o gráfico de $y = sen(x+2)$.

20- Esboce o gráfico de $y = -2 + senx$.

21- Complete[14] a tabela abaixo, como indicado, levando em conta que $\cos x = sen\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

Tabela de valores da função $y = \cos x$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos x$					$sen\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=0$				$sen\left(\pi+\frac{\pi}{2}\right)=-1$		0

22- Esboce os gráficos de $y = \cos 3x$ e de $y = 3\cos x$.

[14] Sugestão: utilize a tabela dos valores da função seno. Não se esqueça de que a função seno é uma função periódica, de período 2π.

REFERÊNCIAS

ANTON, H. *Cálculo*: um novo horizonte. Porto Alegre: Bookman, 2000.

FINNEY, R; WEIR, M; GIORDANO, F. *Cálculo*. George B. Thomas. São Paulo: Addison Wesley, 2002.

GAULTER, B.; LESLYE, B. *Modular Mathematics for GCSE*. Great Britain: Oxford University Press, 1991.

HOLDERNES, J. *GCSE Maths Higher Level*. Causeway Press Ltd: Great Britain, 1987.

SIMMONS, G. *Cálculo com Geometria Analítica*. São Paulo: McGraw Hill Ltda., 1987.

STEWART, J. *Cálculo*. 4. ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning. vol. I.