Exercícios propostos

16) Construa os gráficos das seguintes funções:

a) $f(x) = |4 - 2x|$

b) $g(x) = 1 + x + |x| + |x^2 - 2|$

c) $h(x) = \dfrac{x}{|x|}$

17) Dê o domínio e construa o gráfico da função:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + 2x}{-x} & \text{se } x < 0 \\ \dfrac{x^2 - 2}{x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

5.4 Funções trigonométricas

Vamos inicialmente estudar alguns conceitos básicos necessários à compreensão das funções trigonométricas: arco de circunferência, medidas de arcos, ângulo central e arcos côngruos.

Todos estes conceitos foram trabalhados nos cursos de Geometria I e II. É conveniente que você tenha bastante clareza destes para prosseguir neste estudo. Se você tem dúvidas, volte àqueles materiais e aprofunde seus conhecimentos. Aqui será apresentada uma revisão sucinta destes conceitos e sua operacionalização.

Arco de circunferência

Considere uma circunferência qualquer e nela fixe um ponto A.

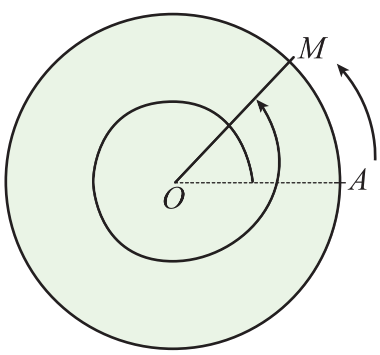


Figura 5.29

Suponha que um ponto móvel desloque-se sobre a circunferência a partir de A, sempre no mesmo sentido, até parar no ponto M.

O caminho percorrido pelo ponto é o *arco* $\overset{\frown}{AM}$. Dizemos que $\overset{\frown}{AM}$ é um "arco de circunferência".

Pergunta: como medimos este arco? (lembre-se de suas disciplinas de geometria!)

Medidas de arcos

Você já se perguntou por que foi feita a divisão em 360 partes e não em 100, por exemplo? A origem dessa escolha é histórica, pois foi criada inicialmente pelos babilônios e também por povos pré-colombianos das Américas (Incas, Maias...), que utilizavam um sistema de numeração com base sexagesimal. Outra explicação é o estabelecimento de uma relação com o chamado movimento de Translação da Terra em torno do Sol, que alguns povos acreditavam se completar em 360 dias.

São usadas basicamente duas medidas de arcos: o grau, que você já conhece e é usado há milênios, e o radiano, que você também conhece, unidade que vamos usar em nosso estudo das funções trigonométricas.

Grau: uma circunferência é dividida em 360 partes iguais; cada uma dessas partes é um arco que mede 1 grau. Assim, a circunferência toda mede 360 graus e um arco de x graus corresponde a $\frac{x}{360}$ da circunferência (veja a figura 5.30). Denotamos x graus por x^o.

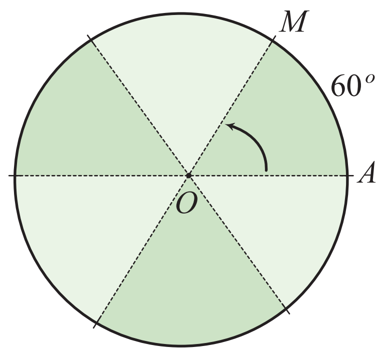


Figura 5.30

Radiano: diz-se que um arco mede um radiano se seu comprimento é igual ao raio da circunferência que o contém (pense que você pode "esticar" o arco e colocá-lo sobre uma régua). A notação para radiano é rad e um radiano corresponde a aproximadamente $57,296$ graus.

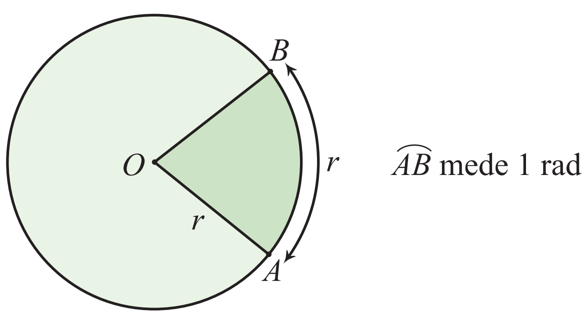


Figura 5.31

Exemplos:

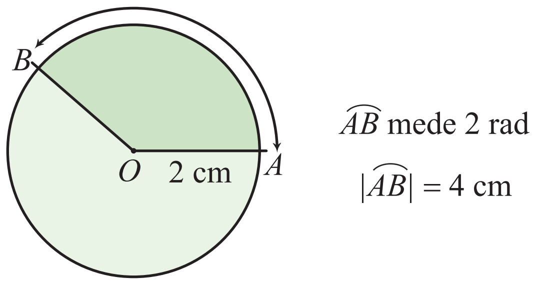


Figura 5.32

A circunferência tem raio de 2 cm e $\overset{\frown}{AB}$ mede 2 radianos; seu comprimento em centímetros é 4.

Observação 15. A *medida do arco* é em rad, mas seu *comprimento* pode ser medido em qualquer unidade de comprimento, por exemplo, em centímetros!

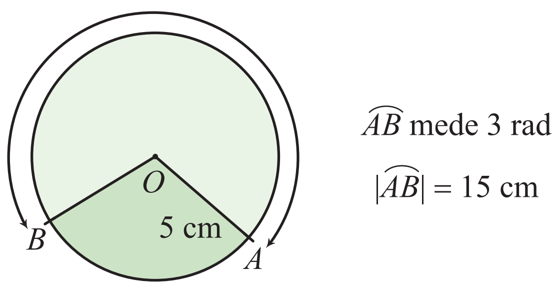


Figura 5.33

Os pontos A e B determinam um arco de 3 rad sobre a circunferência de raio 5 cm; o comprimento do arco $\overset{\frown}{AB}$ é 15 cm.

Relação entre grau e radiano

Sabe-se que o comprimento de uma circunferência de raio r é $2\pi r$ (se "esticarmos" a circunferência de raio r sobre uma régua, obtemos a medida de $2\pi r$ na unidade de comprimento do raio). A medida do arco correspondente à circunferência toda é então 2π rad, uma vez que cada arco de comprimento r mede 1 rad. Mas o arco correspondente à circunferência toda também mede 360°, então 360° correspondem a 2π rad ou 180° correspondem a π rad.

Didaticamente é importante que seus alunos percebam o porquê da correspondência entre o arco de 180° e sua medida em radianos (π rad), senão os estudantes apenas acreditarão e memorizarão esta informação, sem perceber o que significa. Conseqüentemente, terão dificuldade em operar com ela.

Para expressarmos os graus em radianos ou os radianos em graus fazemos uma regra de três.

Exemplos:

37) Expresse 135º em radianos.

$$180^\circ \text{------} \pi \text{ rad}$$
$$135^\circ \text{------} y$$

$$y = \frac{135 \times \pi}{180} = \frac{3\pi}{4} \text{ rad}$$

38) Expresse $\frac{\pi}{6}$ em graus.

$$180^\circ \text{------} \pi \text{ rad}$$
$$z \text{--------} \frac{\pi}{6}$$

$$z = \frac{180 \times \frac{\pi}{6}}{\pi} = 30^\circ$$

Exercício proposto

18) Expresse em radianos:

a) 90° b) 60° c) 45°

d) 270° e) 120°

Ângulo central

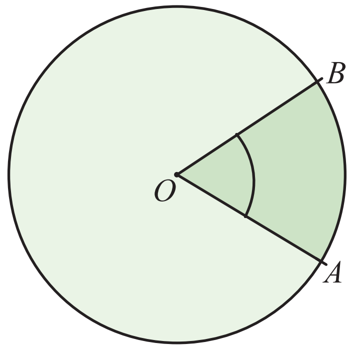


Figura 5.34

Seja O o centro da circunferência e A e B pontos sobre ela. As semi-retas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ determinam o ângulo $A\hat{O}B$. Por definição, a medida do ângulo central $A\hat{O}B$ é igual à medida do arco $\overset{\frown}{AB}$ (em graus ou radianos).

Observação 16. Note que na figura 5.35 a seguir os arcos $\overset{\frown}{AB}$ e $\overset{\frown}{CD}$ têm a mesma *medida* (em graus ou radianos), mas não têm o mesmo *comprimento.*

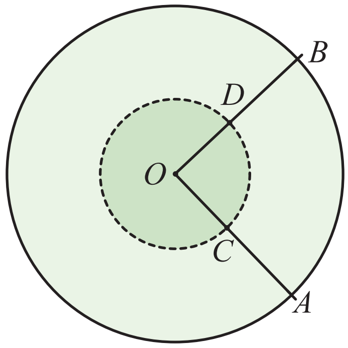


Figura 5.35

Isto acontece porque a medida de um arco independe do "tamanho" da circunferência, ou seja, do seu raio. Já o comprimento do arco depende do raio da circunferência que o contém.

Exemplo:

39) Calcule o comprimento L do arco correspondente a um ângulo central de 60°, em uma circunferência de raio 10 cm.

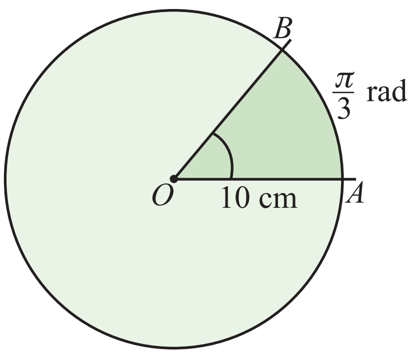


Figura 5.36

Note que a medida de arco que se relaciona com o comprimento é o radiano: um arco mede 1 rad quando seu comprimento é igual ao raio da circunferência que o contém. 60° corresponde a $\dfrac{\pi}{3}$ rad.

A cada 1 radiano corresponde uma medida do raio, ou seja, 10 cm. A $\frac{\pi}{3}$ rad corresponderá $\frac{\pi}{3} \times 10 = \frac{10\pi}{3}$ cm, ou aproximadamente 10,46 cm (lembre-se que π é um número real, irracional, com representação decimal 3,1415926535... Em geral usaremos para π a aproximação 3,14).

Ciclo trigonométrico ou circunferência trigonométrica

Alguns autores chamam de **círculo trigonométrico**, como você deve ter estudado em Geometria II.

Em trigonometria convencionou-se estabelecer uma orientação sobre a circunferência, fixando nela um sentido de percurso. O ciclo trigonométrico é a circunferência de raio 1, centrada na origem do sistema cartesiano XOY, orientada a partir do ponto $(1,0)$. O sentido positivo é o anti-horário e o sentido negativo é horário. O ciclo trigonométrico é o "lugar" onde faremos nosso estudo das funções trigonométricas.

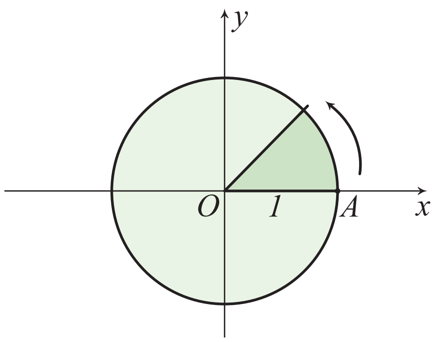


Figura 5.37

Marcamos os arcos no ciclo trigonométrico a partir do ponto $A = (1,0)$, em sentido positivo ou negativo. Veja em seguida os exemplos dos arcos de $\frac{\pi}{4}$ rad e de $-\frac{\pi}{4}$ rad no ciclo trigonométrico:

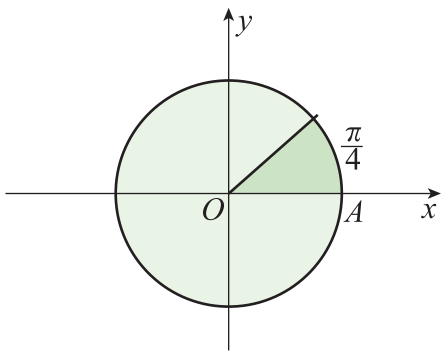


Figura 5.38 – Arco de $\frac{\pi}{4}$ rad

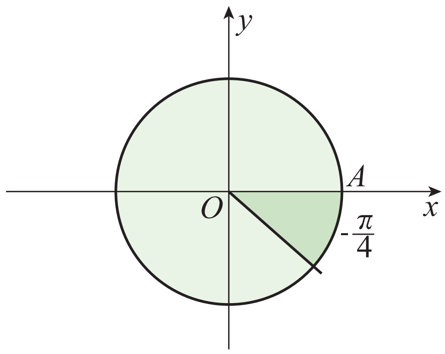


Figura 5.39 - Arco de $-\frac{\pi}{4}$ rad

No ciclo trigonométrico o *comprimento* de um arco é igual ao *módulo de sua medida* em radianos. Se α é a medida do arco em radianos (α pode ser negativo!) e L é o seu comprimento, vimos que $L = |\alpha| \cdot r$ (exemplo 39). Como $r = 1$, teremos $L = |\alpha|$.

Exemplo:

40) A medida do arco em radianos é $\frac{\pi}{4}$; como o raio é 1, seu comprimento é $\frac{\pi}{4}$ unidades de comprimento. O arco de medida $-\frac{\pi}{4}$ tem o mesmo comprimento.

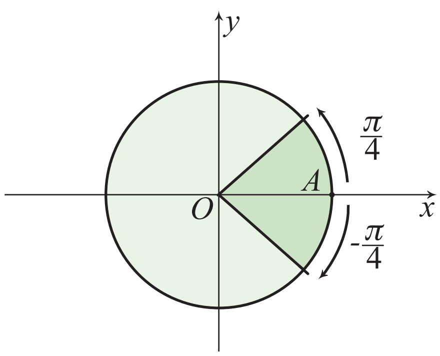


Figura 5.40

Quadrantes

O ciclo trigonométrico tem quatro quadrantes, numerados também a partir do ponto $(1, 0)$:

Quadrante I: de 0° ou 0 rad a 90° ou $\dfrac{\pi}{2}$ rad.

Quadrante II: de 90° ou $\dfrac{\pi}{2}$ rad a 180° ou π rad.

Quadrante III: de 180° ou π rad a 270° ou $\dfrac{3\pi}{2}$ rad.

Quadrante IV: de 270° ou $\dfrac{3\pi}{2}$ rad a 360° ou 2π rad, fechando o círculo.

Veja a figura:

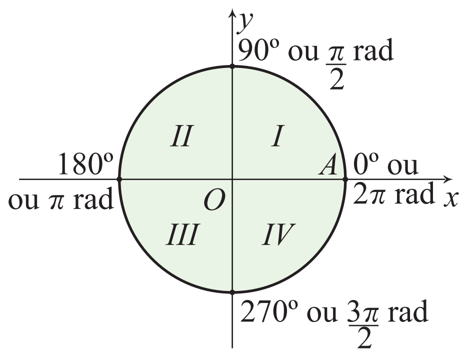


Figura 5.41

Exercício resolvido

4) Localizar no ciclo trigonométrico o arco de medida $\dfrac{3\pi}{4}$ rad.

Resolução. Note que um arco de medida $\dfrac{3\pi}{4}$ rad corresponde a 3 arcos sucessivos de $\dfrac{\pi}{4}$ rad, isto é, $\dfrac{3\pi}{4} = 3 \times \dfrac{\pi}{4}$. Como a circunferência mede 2π, um arco de $\dfrac{\pi}{4}$ corresponde a um oitavo da circunferência: $\dfrac{2\pi}{8} = \dfrac{\pi}{4}$. Assim, o arco de medida $\dfrac{3\pi}{4}$ corresponde a três oitavos da circunferência. Veja a figura:

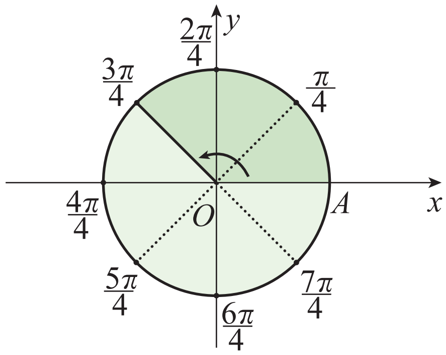


Figura 5.42

Exercícios propostos

20) O ciclo trigonométrico foi dividido em oito partes iguais. Localize sobre ele a extremidade B do arco $\overset{\frown}{AB}$, sendo dada a medida deste arco:

a) 135º

b) –180º

c) $\frac{5\pi}{4}$ rad

d) $-\frac{\pi}{2}$ rad

e) $-\frac{3\pi}{4}$ rad

21) Localize no ciclo trigonométrico a extremidade B dos arcos $\overset{\frown}{AB}$ de medida:

a) 120º

b) 330º

c) $-\frac{11\pi}{6}$ rad

d) $\frac{4\pi}{3}$ rad

e) $\frac{7\pi}{6}$ rad

Arcos côngruos

Suponha que um ponto móvel (como na definição de arco) desloque-se sobre a circunferência a partir de $(1,0)$, sempre no mesmo sentido, até parar em $\frac{\pi}{4}$. Temos duas possibilidades: o ponto pára em $\frac{\pi}{4}$ assim que o atinge ou o ponto dá certo número de voltas na circunferência antes de parar em $\frac{\pi}{4}$. Observe na figura 5.43 que o arco de $\frac{\pi}{4}$ rad tem a mesma extremidade que os arcos $\frac{\pi}{4}+2\pi$ rad, $\frac{\pi}{4}+4\pi$ rad, $\frac{\pi}{4}+6\pi$ rad,... , $\frac{\pi}{4}+k\pi$,... para todo inteiro k. Os valores negativos de k também produzem arcos de mesma extremidade que $\frac{\pi}{4}$, resultantes do movimento em sentido horário (sentido negativo): $\frac{\pi}{4}-2\pi$ rad, $\frac{\pi}{4}-4\pi$ rad, $\frac{\pi}{4}-6\pi$ rad...

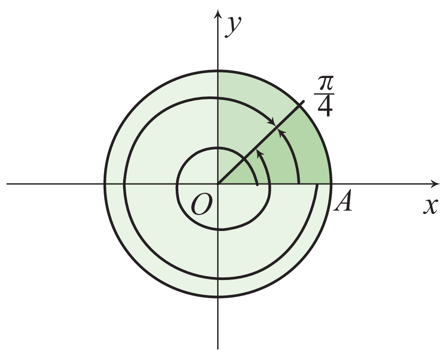


Figura 5.43

Côngruo
É um termo derivado da palavra congruente que, matematicamente, refere-se a objetos de mesma medida.

Genericamente, se B é a extremidade de um arco de α rad, então B é a extremidade de todos os arcos $\alpha+2k\pi$ rad, para todo k inteiro. Dois arcos são côngruos quando têm a mesma extremidade, isto é, diferem entre si por um múltiplo inteiro de 2π. Para medidas em graus, dois arcos são côngruos quando têm a mesma extremidade e diferem entre si por um múltiplo inteiro de 360°. Percebemos assim que quando marcamos a extremidade de um arco no ciclo trigonométrico, estamos na verdade marcando a extremidade de uma infinidade de arcos. Chamamos de *primeira determinação positiva* (abreviamos pdp) de um arco de medida α rad ao arco côngruo a α cuja medida é β, com $0 \leq \beta \leq 2\pi$. Para medidas em graus, a primeira determinação positiva (pdp) de um arco de $x°$ é o arco côngruo a x cuja medida é y para $0 \leq y \leq 360°$.

Como exemplo, vamos encontrar a pdp do arco de medida $\frac{20\pi}{7}$. Procuramos o maior múltiplo de 7 menor do que 20. Como $20 = 2 \times 7 + 6$, este múltiplo é 14 e podemos escrever

Você lembra do Algoritmo da Divisão, estudado em Fundamentos I?

$$\frac{20\pi}{7} = \frac{(14+6)\pi}{7} = \frac{14\pi}{7} + \frac{6\pi}{7} = 2\pi + \frac{6\pi}{7}.$$

Como $0 \leq \frac{6\pi}{7} \leq 2\pi$, e os arcos de medidas $\frac{20\pi}{7}$ e $\frac{6\pi}{7}$ diferem de um múltiplo inteiro 2π (pois $\frac{20\pi}{7} - \frac{6\pi}{7} = 2\pi$), a pdp de $\frac{20\pi}{7}$ será $\frac{6\pi}{7}$.

Exercícios resolvidos

7) Encontrar a pdp do arco de medida $\frac{47\pi}{6}$.

Resolução. Como $47 = 7 \times 6 + 5$, escrevemos:

$$\frac{47\pi}{6} = \frac{(42+5)\pi}{6} = 7\pi + \frac{5\pi}{6}$$

Note que 7π não é um múltiplo de 2π; neste caso fazemos $7\pi = 6\pi + \pi$. Então:

$$7\pi + \frac{5\pi}{6} = 6\pi + \pi + \frac{5\pi}{6} = 6\pi + \frac{11\pi}{6}$$

Assim, $\frac{47\pi}{6} - \frac{11\pi}{6} = 6\pi$, o que significa que os arcos de medida $\frac{47\pi}{6}$ e $\frac{11\pi}{6}$ diferem por um múltiplo inteiro de 2π. Também $0 \leq \frac{11\pi}{6} \leq 2\pi$. A pdp será então $\frac{11\pi}{6}$. Veja a figura:

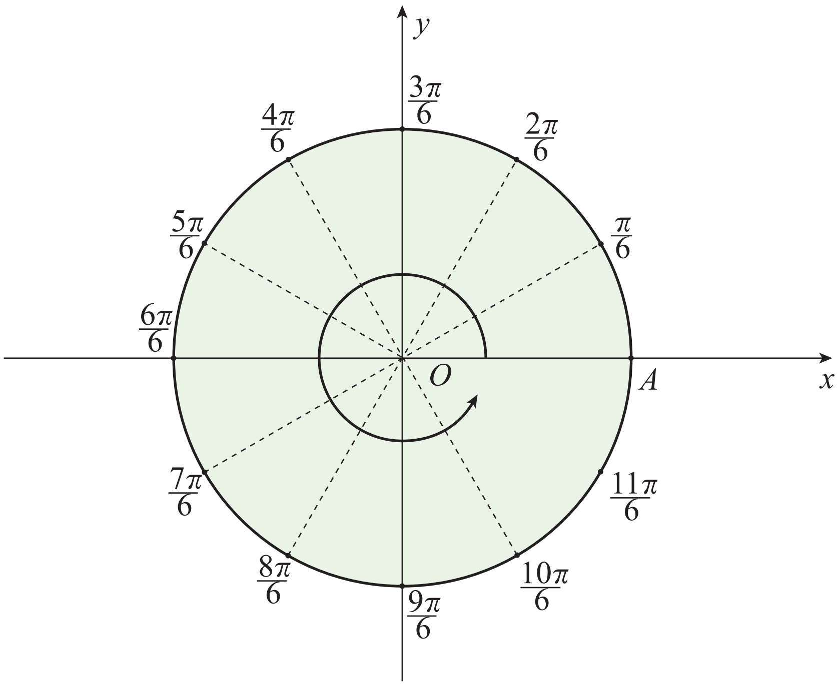


Figura 5.44

8) Encontre a pdp do arco de medida 465°.

Resolução. 465 é maior do que 360; logo, este arco tem mais de uma volta.

Como $465 = 1 \times 360 + 105$, a pdp do arco de medida 465° será 105°. Veja a figura:

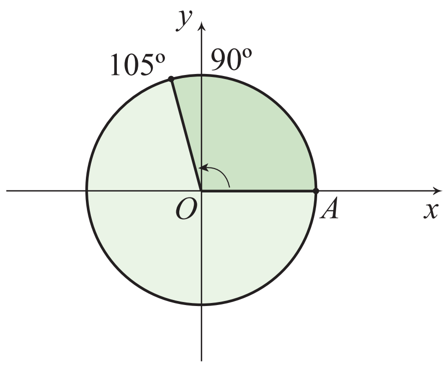


Figura 5.45

Exercícios propostos

21) Determinar a pdp dos arcos cujas medidas são:

a) $\dfrac{17\pi}{4}$

b) $-\frac{43\pi}{8}$

c) 615^{o}

d) -1330^{o}

22) Dê a medida de três arcos cuja pdp é $\frac{4\pi}{5}$.

23) Dê a medida de três arcos cuja pdp é 120^{o}.

5.4.1 Função seno e função cosseno

As funções trigonométricas constituem um tema importante da Matemática, tanto por suas aplicações (que vão desde as mais elementares, no dia-a-dia, até as mais complexas, na Ciência e na alta tecnologia) como pelo papel central que desempenham na Análise.

O objetivo inicial da Trigonometria era o tradicional problema da resolução de triângulos, que consiste em determinar os seis elementos dessa figura (três lados e três ângulos) quando se conhecem três deles, sendo pelo menos um deles um lado. Posteriormente, com a criação do Cálculo Infinitesimal, e o seu prolongamento, que é a Análise Matemática, surgiu a necessidade de atribuir às noções de seno, cosseno e suas associadas tangente, cotangente, secante e cossecante, o *status* de função real de uma variável real. Assim, por exemplo, além de $\cos\alpha$, cosseno do ângulo α, tem-se também $\cos x$, o cosseno do número real x, isto é, a função $\cos:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

Analogamente há também as funções seno, tangente, cotangente, secante e cossecante, completando as *funções trigonométricas.*

Uma propriedade fundamental das funções trigonométricas é que elas são periódicas. Por isso, são especialmente adequadas para descrever os fenômenos de natureza periódica, oscilatória ou vibratória: movimento de planetas, som, corrente elétrica alternada, circulação do sangue, batimentos cardíacos, etc.

Quando se opera com números $\operatorname{sen} x$, $\cos x$ e $\operatorname{tg} x$ no triângulo retângulo, x representa a medida de um ângulo agudo. Vamos estender as noções de seno, cosseno, tangente, cotangente, secante e cossecante de x para o caso em que x representa a medida de um ângulo qualquer. Nesta situação usaremos como medida o radiano.

Seja x um número real e considere no ciclo trigonométrico o ponto P tal que o arco $\overset{\frown}{AP}$ tenha medida x rad. Este ponto P é determinado quando "enrolamos" o segmento de comprimento x no ciclo trigonométrico a partir do ponto A. Se x é positivo, este procedimento é no sentido anti-horário; se x é negativo, o sentido é horário. Os valores seno e cosseno de x são as coordenadas do ponto P. Veja a figura:

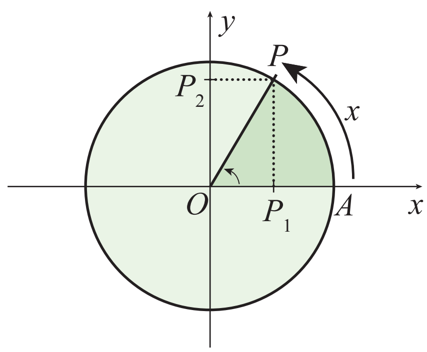


Figura 5.46

Podemos então definir:

Definição. O seno do ângulo de medida x rad ou o seno do número real x (ou do arco $\overset{\frown}{AP}$) é a ordenada do ponto P; o cosseno do número real x (ou do arco $\overset{\frown}{AP}$) é a abscissa do ponto P. Como as coordenadas de um ponto são únicas, ficam definidas as funções seno e cosseno:

$$\begin{aligned} \text{sen} : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \text{sen}\, x \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \cos : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \cos x \end{aligned}$$

Na figura 5.46, $\text{sen}\, x = \overline{OP_2}$ e $\cos x = \overline{OP_1}$.

Domínio e Imagem das funções seno e cosseno

O domínio das funções seno e cosseno é o conjunto dos números reais: a *todo número real* x podemos associar um ponto P no ciclo trigonométrico e este ponto P terá duas coordenadas: a ordenada (marcada no eixo Y) será $\operatorname{sen} x$ e a abscissa (marcada no eixo X) será $\cos x$.

Como estas coordenadas estão limitadas pelo ciclo trigonométrico, a imagem das funções seno e cosseno é o intervalo $[1,-1]$.

Relação fundamental

Decorre do Teorema de Pitágoras que $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, para todo x real. De fato, é só considerar o triângulo retângulo OP_1P. Os segmentos $\overline{OP_1}$ e $\overline{P_1P}$ que correspondem a $\cos x$ e $\operatorname{sen} x$, respectivamente, são os catetos; o segmento $\overline{OP}$ é a hipotenusa. Veja a figura:

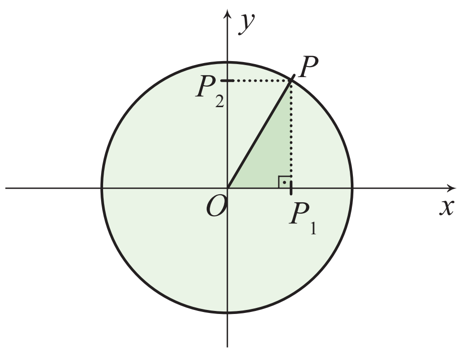


Figura 5.47

Observando o ciclo trigonométrico, podemos determinar alguns valores das funções seno e cosseno:

$\operatorname{sen} 0 = 0$	$\cos 0 = 1$
$\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2} = 1$	$\cos\dfrac{\pi}{2} = 0$
$\operatorname{sen}\pi = 0$	$\cos\pi = -1$
$\operatorname{sen}\dfrac{3\pi}{2} = -1$	$\cos\dfrac{3\pi}{2} = 0$

Sinal algébrico do seno e cosseno de x

Na figura a seguir (5.48) apresentamos as possíveis posições de um ponto M no ciclo trigonométrico, de modo que o arco $\overset{\frown}{AM}$ tenha medida x, dependendo dos valores reais de x:

i) M_1 está no primeiro quadrante e corresponde ao arco de medida x_1: seno e cosseno de x_1 são positivos.

ii) M_2 está no segundo quadrante e corresponde ao arco de medida x_2: seno de x_2 é positivo e cosseno de x_2 é negativo.

iii) M_3 está no terceiro quadrante e corresponde ao arco de medida x_3: seno e cosseno de x_3 são negativos.

iv) M_4 está no quarto quadrante e corresponde ao arco de medida x_4: seno de x_4 é negativo e cosseno de x_4 é positivo.

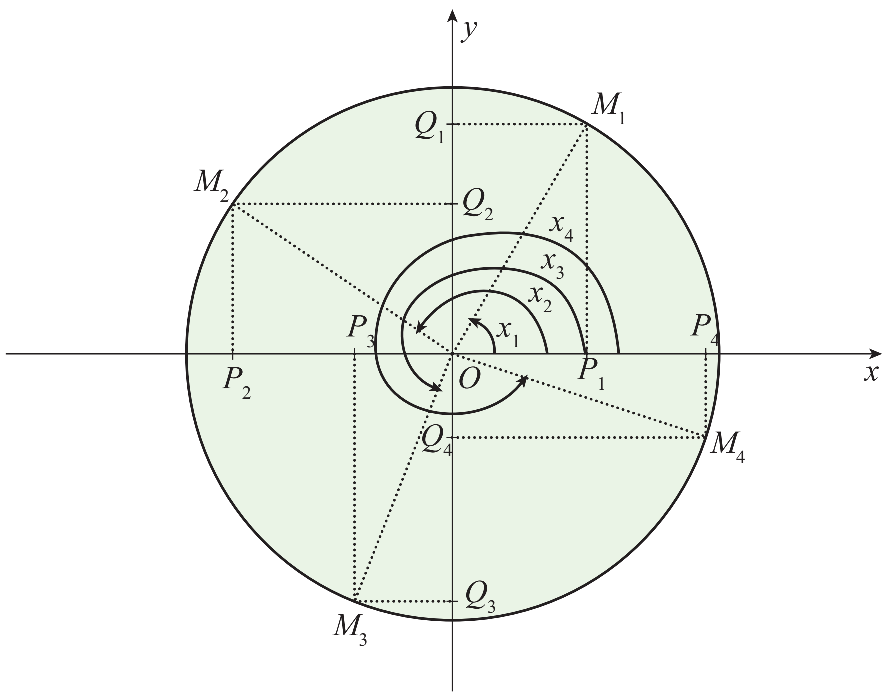


Figura 5.48

A figura 5.49 dá um resumo dos sinais algébricos dos valores de seno e cosseno nos quatro quadrantes:

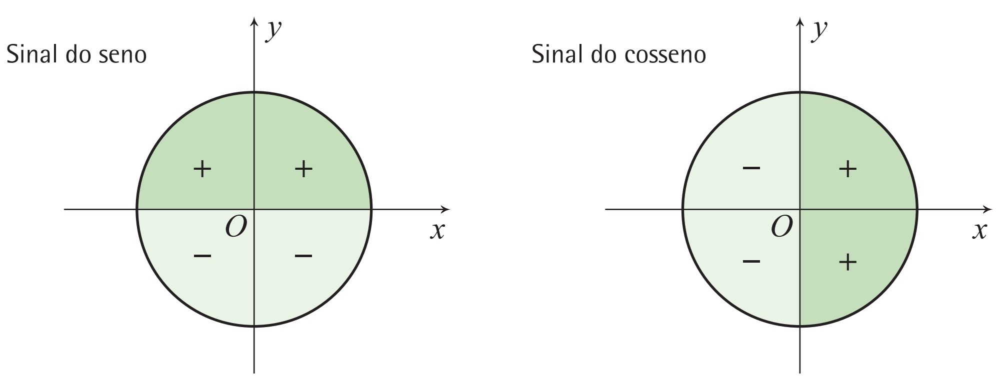


Figura 5.49

Seno e cosseno de arcos côngruos

Quanto vale $\text{sen}\frac{7\pi}{2}$? E $\cos\frac{7\pi}{2}$?

Como $\frac{7\pi}{2}$ é maior do que 2π, tomamos sua primeira determinação positiva (pdp): $\frac{7\pi}{2}=\frac{4\pi+3\pi}{2}=2\pi+\frac{3\pi}{2}$.

Assim, a pdp do arco de medida $\frac{7\pi}{2}$ é $\frac{3\pi}{2}$; isto significa que os arcos de medida $\frac{7\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$ têm a mesma extremidade, determinando as mesmas coordenadas.

Logo, $\text{sen}\frac{7\pi}{2}=\text{sen}\frac{3\pi}{2}=-1$ e $\cos\frac{7\pi}{2}=\cos\frac{3\pi}{2}=0$.

Generalizando, *arcos côngruos têm o mesmo seno e o mesmo cosseno.* Se x é a primeira determinação positiva de um arco, os arcos côngruos a ele são representados por $x+2k\pi$, com k percorrendo o conjunto dos números inteiros. Então

$$\text{sen}(x+2k\pi)=\text{sen}\,x,\ \forall\ k\in\mathbb{Z}$$
$$\cos(x+2k\pi)=\cos x,\ \forall\ k\in\mathbb{Z}$$

Valores notáveis do seno e cosseno

Vamos lembrar o que acontece no triângulo retângulo:

$\alpha+\beta=90^\circ$, então:

$\text{sen}\,\alpha=\frac{c}{a}=\cos\beta$

$\text{sen}\,\beta=\frac{b}{a}=\cos\alpha$

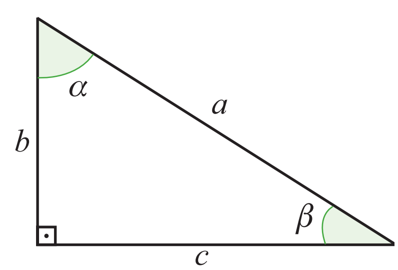


Figura 5.50

Vamos calcular agora os valores de seno e cosseno para os arcos de medida $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{\pi}{6}$. Veja a figura 5.51.

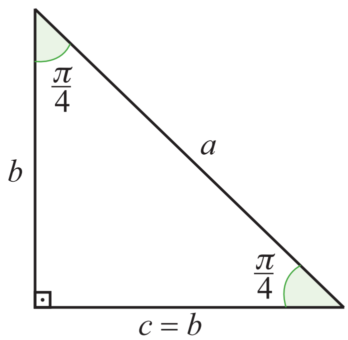


Figura 5.51

i) Para $\alpha = \beta = 45^o$, ou $\alpha = \beta = \frac{\pi}{4}$, temos:

$$2b^2 = a^2$$

$$a = b\sqrt{2}$$

$$sen\frac{\pi}{4} = \frac{b}{a} = \frac{b}{b\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{4}$$

ii) $\alpha = 30^o = \frac{\pi}{6}$ e $\beta = 60^o = \frac{\pi}{3}$

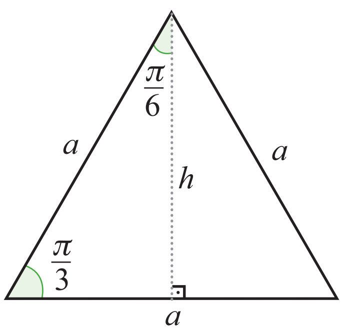


Figura 5.52

$$h^2 + \frac{a^2}{4} = a^2$$

$$h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$$

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

Então

$$\text{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{h}{a} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{6}$$

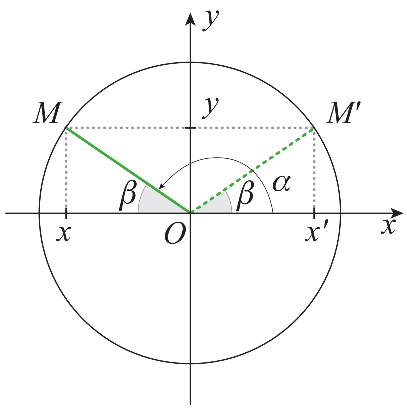
$$\text{e} \quad \cos\frac{\pi}{3} = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2} = \text{sen}\frac{\pi}{6}$$

Resumindo:

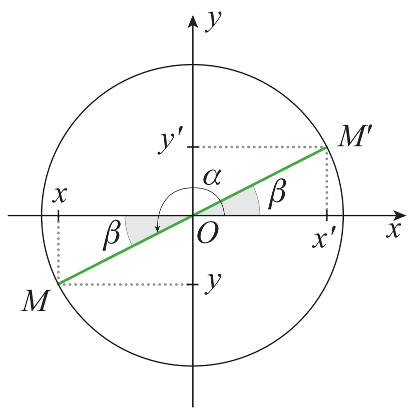
x (em rad)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	- 1	0
$\text{sen } x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	- 1

Redução ao primeiro quadrante

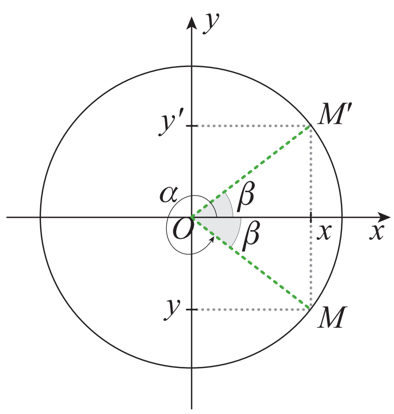
Se x é a medida em radianos de um arco no segundo, terceiro ou quarto quadrantes, $\cos x$ e $\operatorname{sen} x$ podem ser determinados a partir de arcos no primeiro quadrante. Estes arcos do primeiro quadrante são tais que os valores de seno e cosseno, em módulo, são iguais a $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$. Observe na figura a seguir as simetrias que nos permitem proceder desta forma:



$\cos\alpha = x = -x' = -\cos\beta$
$\operatorname{sen}\alpha = y = \operatorname{sen}\beta$



$\cos\alpha = x = -x' = -\cos\beta$
$\operatorname{sen}\alpha = y = -y' = -\operatorname{sen}\beta$



$\cos\alpha = x = \cos\beta$
$\operatorname{sen}\alpha = y = -y' = -\operatorname{sen}\beta$

Figura 5.53

Faremos agora um exemplo para x em cada um dos quadrantes:

41) Determinar $\operatorname{sen}\dfrac{5\pi}{6}$ e $\cos\dfrac{5\pi}{6}$.

Observemos que o arco de medida $\frac{5\pi}{6}$ encontra-se no segundo quadrante e é um múltiplo de $\frac{\pi}{6}$, isto é, $\frac{5\pi}{6} = 5 \times \frac{\pi}{6}$. Para chegar a $\frac{5\pi}{6}$ é necessário percorrer cinco arcos de $\frac{\pi}{6}$.

Veja a figura:

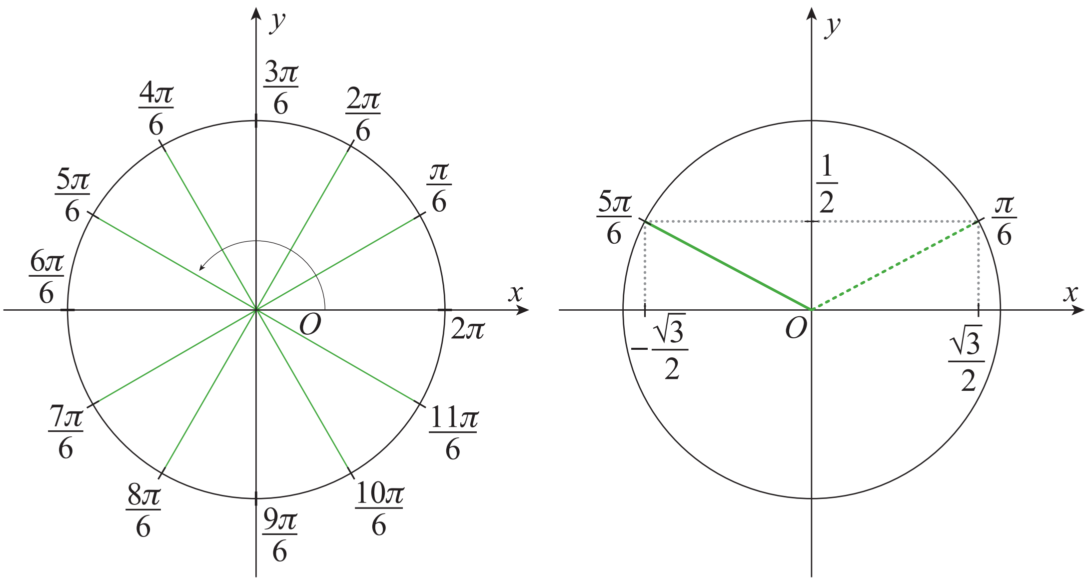


Figura 5.54

Observando a simetria, vemos que

$$\operatorname{sen}\frac{5\pi}{6} = \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \text{ e } \cos\frac{5\pi}{6} = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(lembre-se que no segundo quadrante o seno é positivo e o cosseno é negativo).

42) Determine $\operatorname{sen}\frac{4\pi}{3}$ e $\cos\frac{4\pi}{3}$.

O arco de medida $\frac{4\pi}{3}$ encontra-se no terceiro quadrante; usando a mesma idéia do exemplo anterior, para chegar a $\frac{4\pi}{3}$, é necessário percorrer quatro arcos de $\frac{\pi}{3}$. Veja a figura:

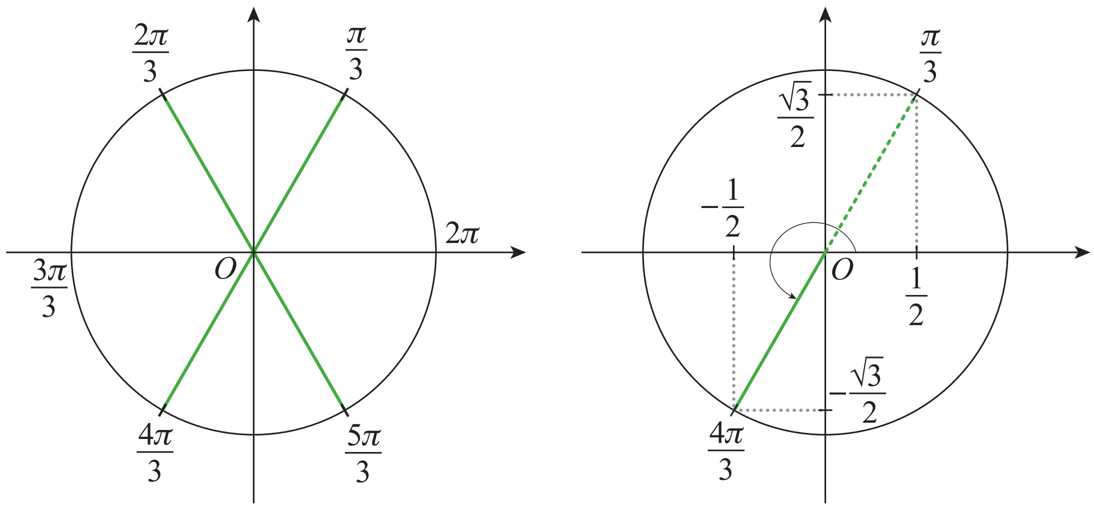


Figura 5.55

Vemos então que

$$\operatorname{sen}\frac{4\pi}{3} = -\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ e } \cos\frac{4\pi}{3} = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

(lembre-se que no terceiro quadrante seno e cosseno são negativos).

43) Determine $\operatorname{sen}\dfrac{7\pi}{4}$ e $\cos\dfrac{7\pi}{4}$.

O arco de medida $\dfrac{7\pi}{4}$ encontra-se no quarto quadrante; analogamente aos exemplos anteriores e observando a figura, concluímos que:

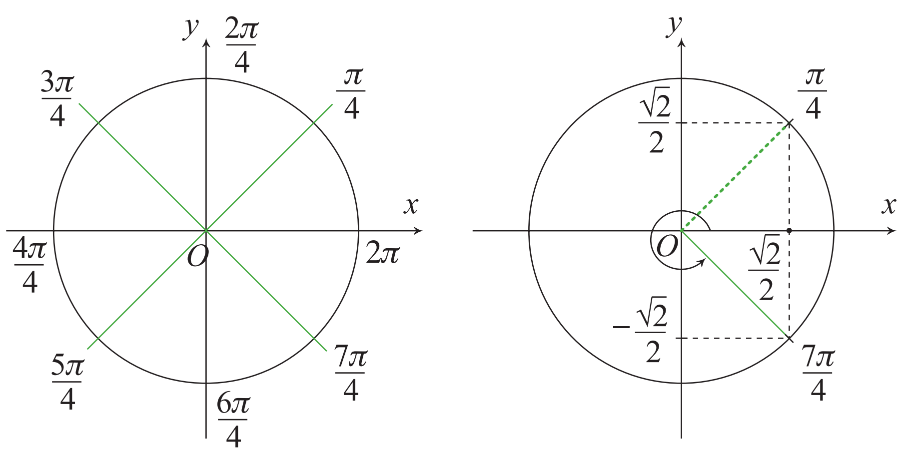


Figura 5.56

$$\text{sen}\,\frac{7\pi}{4} = -\text{sen}\,\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ e } \cos\frac{7\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(Lembre-se que no quarto quadrante o seno é negativo e o cosseno é positivo).

Exercício proposto

24) Determine seno e cosseno dos arcos de medida:

a) $\frac{7\pi}{6}$

b) $\frac{11\pi}{4}$

c) $\frac{8\pi}{3}$

d) $-\frac{5\pi}{4}$

e) $\frac{17\pi}{6}$

f) $\frac{23\pi}{3}$

g) $-\frac{24\pi}{16}$

Gráficos da função seno e da função cosseno

Como o domínio das funções seno e cosseno é o conjunto dos números reais e a imagem é o intervalo $[1,-1]$, os gráficos destas funções estão contidos na faixa horizontal $\mathbb{R}\times[1,-1]$. Estude os gráficos com atenção: eles darão informações sobre o comportamento das funções seno e cosseno.

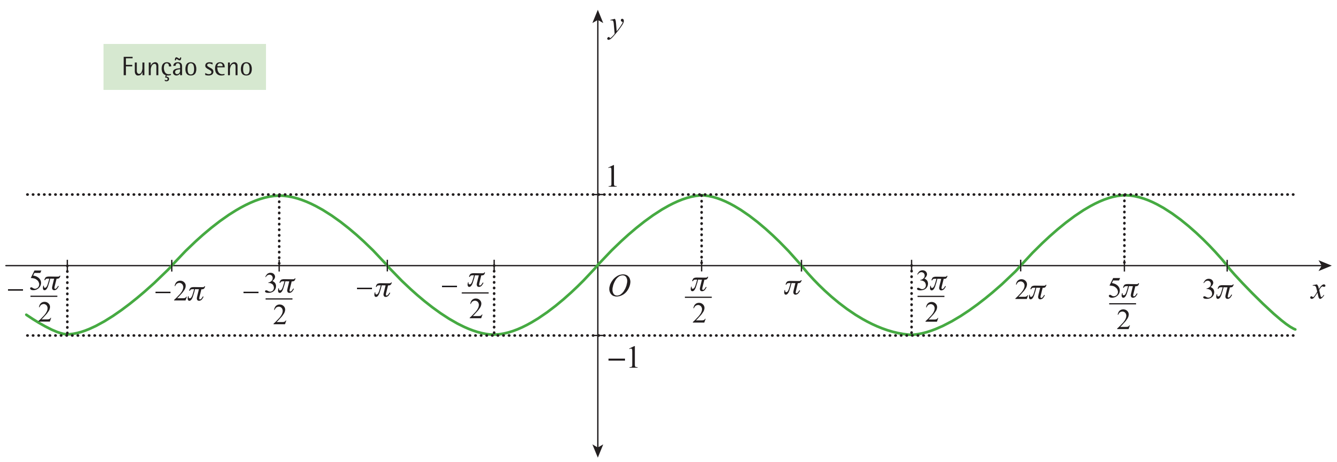


Figura 5.57

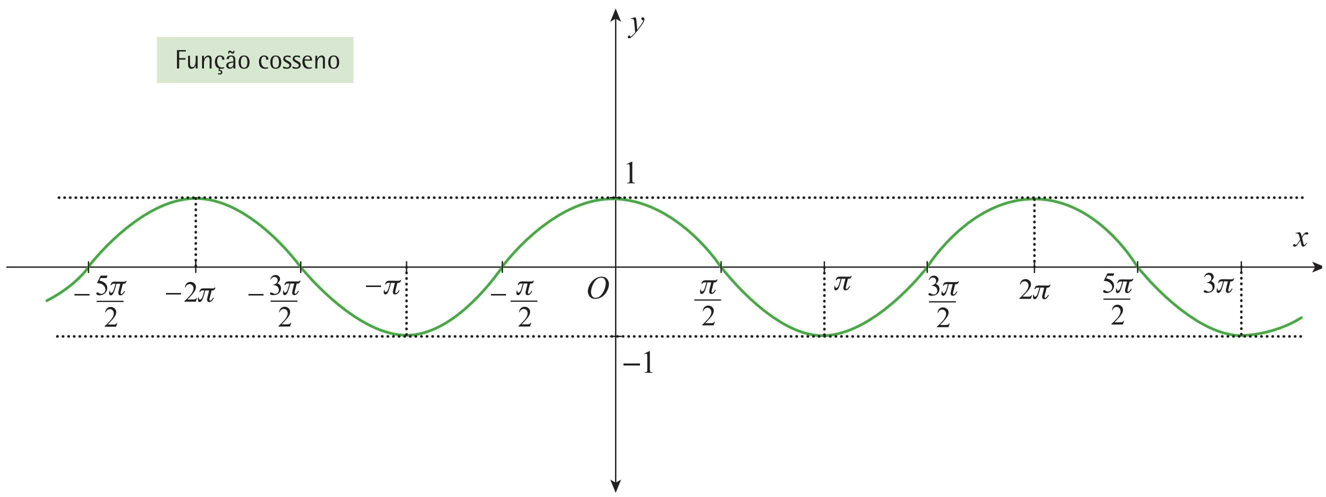


Figura 5.58

Considerações sobre as funções seno e cosseno

As funções seno e cosseno têm características especiais; vamos estudá-las agora, utilizando todas as informações que já temos sobre o comportamento destas funções. Estas informações serão muito importantes para as próximas disciplinas de Cálculo.

1) Zeros das funções seno e cosseno

Os zeros das funções seno e cosseno são os valores de x para os quais se tem $\operatorname{sen} x = 0$ e $\cos x = 0$, respectivamente. Analisando os gráficos, vemos que:

i) os zeros de $\operatorname{sen} x$ são

$$0,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ldots,\ -\pi,\ -2\pi,\ -3\pi,\ldots$$

ou seja, os valores de x dados por $x = k\pi$, para todo $k \in \mathbb{Z}$.

ii) os zeros da função $\cos x$ são

$$\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2},\ \frac{5\pi}{2},\ \frac{7\pi}{2},\ldots,\ -\frac{\pi}{2},\ -\frac{3\pi}{2},\ -\frac{5\pi}{2},\ -\frac{7\pi}{2},\ldots$$

ou seja, os valores de x dados por $x = \frac{(2k+1)\pi}{2}$, ou $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$, para todo $k \in \mathbb{Z}$.

2) Seno e cosseno são funções periódicas

Uma função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ diz-se *periódica* quando existe um número real $T\neq 0$ tal que $f(x+T)=f(x)$, para todo $x\in\mathbb{R}$. Neste caso também tem-se $f(x+kT)=f(x)$, para todo $k\in\mathbb{Z}$ e para todo $x\in\mathbb{R}$. O *menor número positivo* T tal que $f(x+T)=f(x)$, para todo $x\in\mathbb{R}$, é chamado de *período* da função f.

Já sabemos que $\operatorname{sen}(x+2\pi)=\operatorname{sen} x$ para todo $x\in\mathbb{R}$ e também $\operatorname{sen}(x+2k\pi)=\operatorname{sen} x,\ \forall\, k\in\mathbb{Z},\ \forall\, x\in\mathbb{R}$. Isto nos garante que seno é uma função periódica e o menor número positivo T para o qual se tem $\operatorname{sen}(x+T)=\operatorname{sen} x$ é $T=2\pi$. Assim, o período da função seno é 2π. Isto significa que o gráfico da função $\operatorname{sen} x$ "se repete" a cada intervalo de comprimento 2π, a partir da origem. Analogamente, o período da função cosseno também é 2π. Veja novamente as figuras 5.57 e 5.58.

Exercício resolvido

9) Encontre o período da função $f(x)=\operatorname{sen}\left(\frac{4}{5}x\right)$.

Resolução: Procuramos o menor número $T>0$ tal que $f(x+T)=f(x)$, para todo $x\in\mathbb{R}$. Isto significa que

$$f(x+T)=\operatorname{sen}\left(\frac{4}{5}(x+T)\right)=\operatorname{sen}\left(\frac{4}{5}x+\frac{4}{5}T\right)=\operatorname{sen}\frac{4}{5}x=f(x).$$

Como o período da função seno é 2π, devemos ter

$$\frac{4}{5}T=2\pi\Rightarrow T=\frac{10\pi}{4}=\frac{5\pi}{2}.$$

Logo, o período de f é $\frac{5\pi}{2}$. Confira o resultado fazendo o gráfico.

3) Cosseno é uma função par e seno é uma função ímpar

Uma função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é *par* quando $f(x)=f(-x)$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$ e uma função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é *ímpar* quando $f(x)=-f(-x),\ \forall\, x\in\mathbb{R}$. Vamos analisar as funções seno e cosseno:

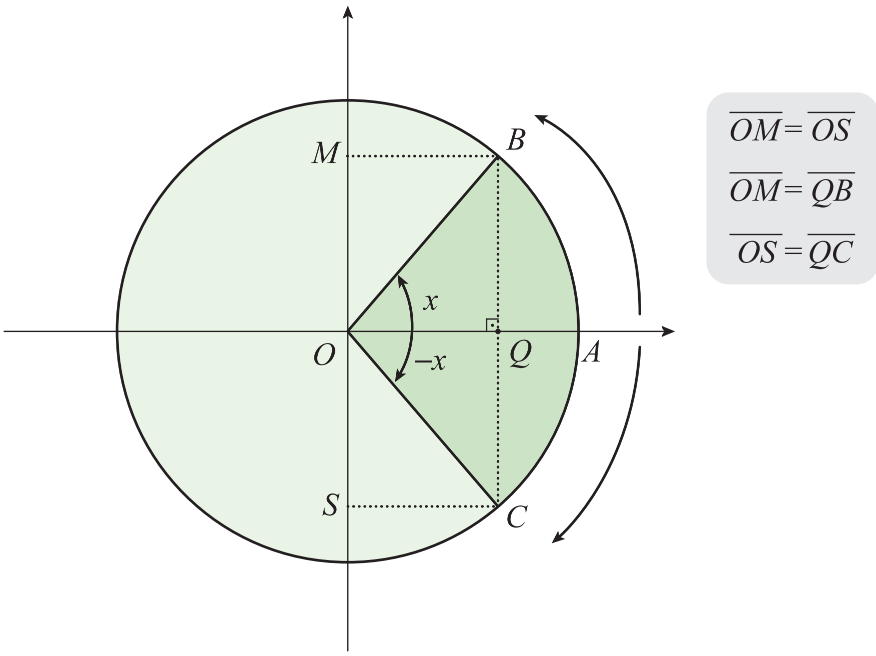


Figura 5.59

O triângulo BOC é isósceles, o que significa que os arcos $\overset{\frown}{AB}$ e $\overset{\frown}{AC}$ têm a mesma medida de x rad. Logo,

$$\cos x=\cos(-x),\ \forall\, x\in\mathbb{R} \ \text{ e } \ \operatorname{sen} x=-\operatorname{sen}(-x),\ \forall\, x\in\mathbb{R}.$$

Assim, cosseno é uma função par e seno é uma função ímpar.

4) Funções compostas envolvendo seno e cosseno

Dada uma função real g, podemos pensar nas funções compostas $(\operatorname{sen}\circ g)(x)=\operatorname{sen}(g(x))$, $(\cos\circ g)(x)=\cos(g(x))$, $(g\circ \operatorname{sen})(x)=g(\operatorname{sen} x)$ e $(g\circ\cos)(x)=g(\cos x)$. Vamos fazer alguns exemplos para casos especiais da função g.

Exemplos:

44) $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x+\pi$,

$$(\operatorname{sen}\circ g)(x)=\operatorname{sen}(g(x))=\operatorname{sen}(x+\pi)$$

Vamos fazer o gráfico da função $sen(x+\pi)$, comparando-o com o gráfico de $\operatorname{sen} x$:

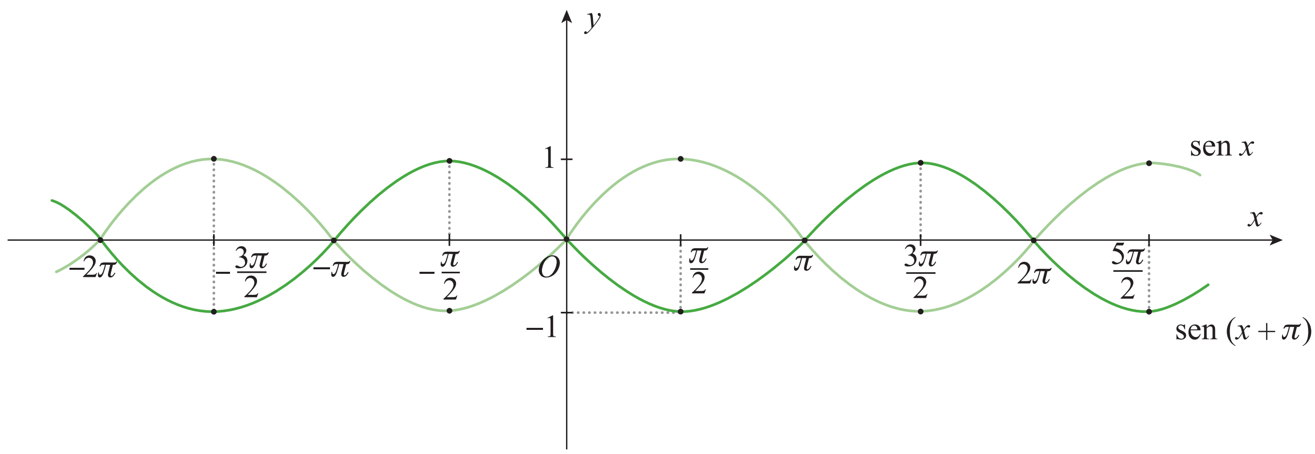


Figura 5.60

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
sen $(x+\pi)$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0

Analisando o gráfico, vemos que:

1) Os gráficos das funções $\operatorname{sen} x$ e $\operatorname{sen}(x+\pi)$ têm o mesmo "formato". A diferença é que o gráfico de $\operatorname{sen}(x+\pi)$ está "deslocado" π unidades à direita no plano cartesiano em relação ao gráfico de $\operatorname{sen} x$. Note que os gráficos das duas funções cortam o eixo X nos mesmos pontos.

2) O domínio e a imagem da função $\operatorname{sen}(x+\pi)$ são os mesmos da função $\operatorname{sen} x$.

3) $\operatorname{sen} x$ e $\operatorname{sen}(x+\pi)$ têm o mesmo período 2π (note que o gráfico de $\operatorname{sen}(x+\pi)$ se repete a cada intervalo de comprimento 2π, a partir de $x=0$).

Tarefa

Faça o gráfico da função composta

$$(\cos \circ g)(x) = \cos(g(x)) = \cos(x+\pi)$$

e compare-o com o gráfico de $\cos x$. O que você conclui?

45) $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $h(x)=2x$, $(\cos\circ h)(x)=\cos(h(x))=\cos(2x)$

Vamos comparar o gráfico da função $\cos(2x)$ com o gráfico de $\cos x$:

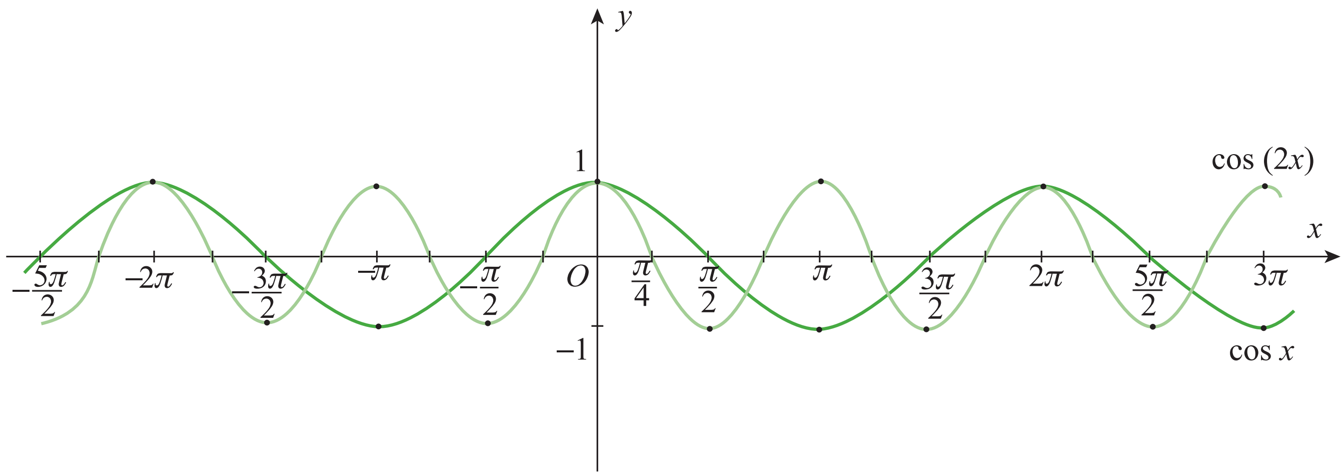


Figura 5.61

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$\cos(2x)$	1	0	-1	0	1

Analisando os gráficos, vemos que:

a) os gráficos de $\cos(2x)$ e $\cos x$ têm o mesmo "formato" mas o gráfico de $\cos(2x)$ parece que "encolheu"! Por exemplo, $\cos(2x)$ corta o eixo X em $x=\dfrac{\pi}{4}$, enquanto $\cos x$ corta o eixo X em $x=\dfrac{\pi}{2}$ (as funções não têm os mesmos zeros). Isto significa que $\cos x$ e $\cos(2x)$ não têm o mesmo período; o gráfico de $\cos(2x)$ se repete a cada intervalo de comprimento π, a partir da origem. De fato, para a função composta $(\cos\circ h)(x)=\cos(h(x))=\cos(2x)$, temos que:

$$(\cos\circ h)(x+\pi)=\cos(h(x+\pi))=\cos(2(x+\pi))=$$
$$\cos(2x+2\pi)=\cos(2x)=\cos(h(x))=(\cos\circ h)(x).$$

b) o domínio e a imagem da função $\cos(2x)$ são os mesmos da função $\cos x$.

Tarefa

1) Faça e estude os gráficos das funções compostas $\cos(3x)$, $\cos(4x)$, $\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)$ e $\cos\left(\dfrac{x}{4}\right)$. O que você conclui sobre os períodos destas funções? E sobre os períodos das funções $\operatorname{sen}(3x)$, $\operatorname{sen}(4x)$, $\operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{2}\right)$ e $\operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{4}\right)$?

2) Para $f(x)=2x+\dfrac{\pi}{2}$, faça o gráfico e determine o período da função composta $(\cos\circ f)(x)=\cos(f(x))=\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Exemplo:

46) $u(x)=1+x$, $(u\circ\operatorname{sen})(x)=u(\operatorname{sen}(x))=1+\operatorname{sen} x$

Vamos analisar e comparar os gráficos de $\operatorname{sen} x$ e $1+\operatorname{sen} x$:

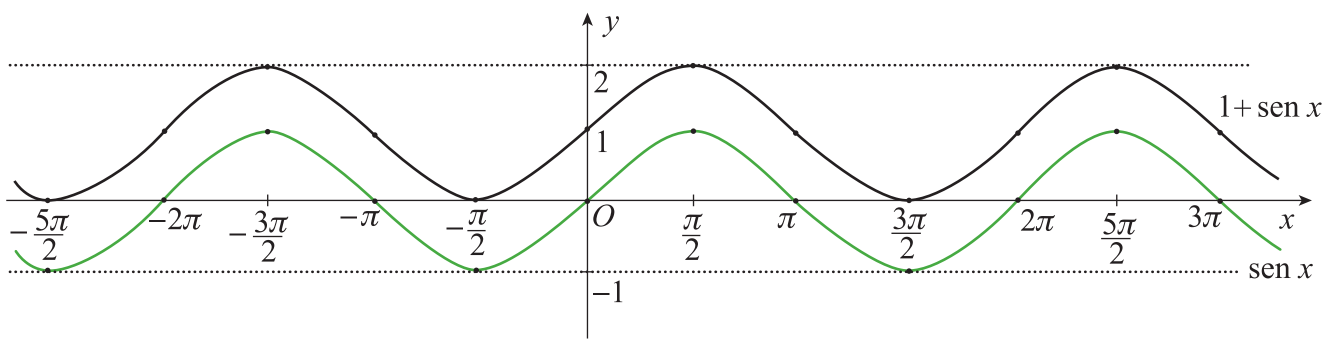


Figura 5.62

Observamos que:

a) os dois gráficos têm o mesmo "formato", mas o gráfico de $1+\operatorname{sen} x$ está deslocado uma unidade na vertical, para cima. Conseqüentemente, a função $1+\operatorname{sen} x$ não corta o eixo X nos mesmos pontos que a função $\operatorname{sen} x$ (as funções não têm os mesmos zeros).

b) o período das funções é 2π.

c) o domínio de $1+\operatorname{sen} x$ é o mesmo da função $\operatorname{sen} x$, mas as imagens são diferentes: $\operatorname{Im}(1+\operatorname{sen} x)=[0,2]$.

Tarefa

Seja $v(x) = -2 + x$. Analise o gráfico da função composta

$$(v \circ \cos)(x) = v(\cos(x)) = -2 + \cos x .$$

Compare com o gráfico de $\cos x$.

Exercícios propostos

25) Dê o período e os zeros das seguintes funções:

a) $m(x) = 3 + \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

b) $s(x) = -4 + \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

26) Faça o gráfico das funções abaixo, no intervalo $[-2\pi, 3\pi]$.

a) $f(x) = \text{sen}(-2x)$

b) $g(x) = \text{sen}\left(\frac{x}{4}\right)$

c) $m(x) = \cos\left(\frac{x}{3}\right)$

27) Sabendo que $\cos x = 0{,}1$ e x está no quarto quadrante, calcule $\text{sen} x$.

Inversas das funções seno e cosseno

Seno e cosseno não são funções injetoras; por exemplo, temos $\text{sen}\ 0 = \text{sen}\ \pi = 0$ e $\cos 0 = \cos 2\pi = 1$, valores distintos resultando na mesma imagem. Mas, observando o gráfico destas funções, vemos que, se as restringirmos a certos intervalos (domínio e contradomínio), elas serão injetoras e sobrejetoras e, portanto, terão uma inversa. Vamos analisar a função seno. Observe atentamente seu gráfico:

Função seno

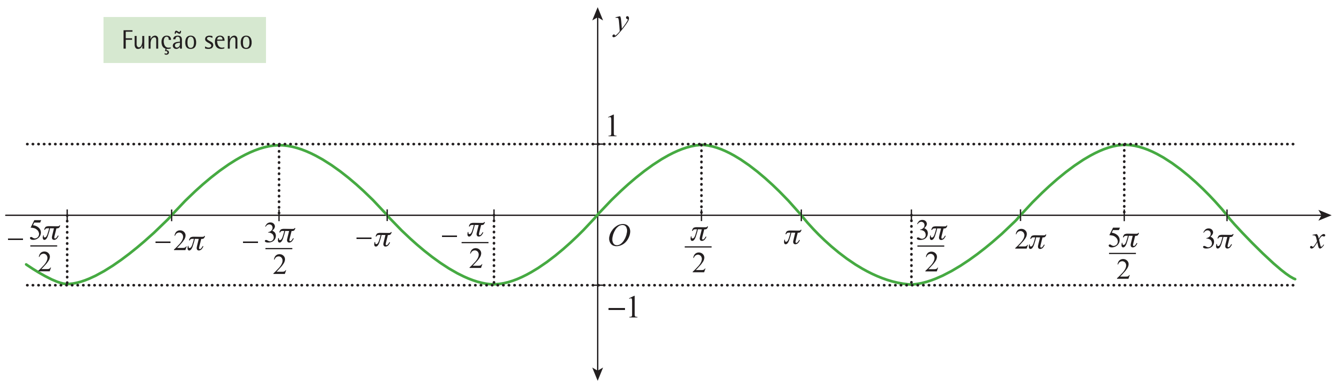


Figura 5.63

No intervalo $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ a função seno é injetora, e o mesmo ocorre nos intervalos $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$, $\left[-\frac{3\pi}{2},-\frac{\pi}{2}\right]$, e em uma infinidade de outros. Observe também que nestes intervalos a imagem da função é $[-1,1]$, ou seja, ela também é sobrejetora. Fixando o intervalo $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, consideremos a função

$$F:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to[-1,1]$$

$$F(x)=\operatorname{sen} x$$

F é uma função bijetora (prove isso!) e, portanto, inversível! Definimos a inversa da função F como

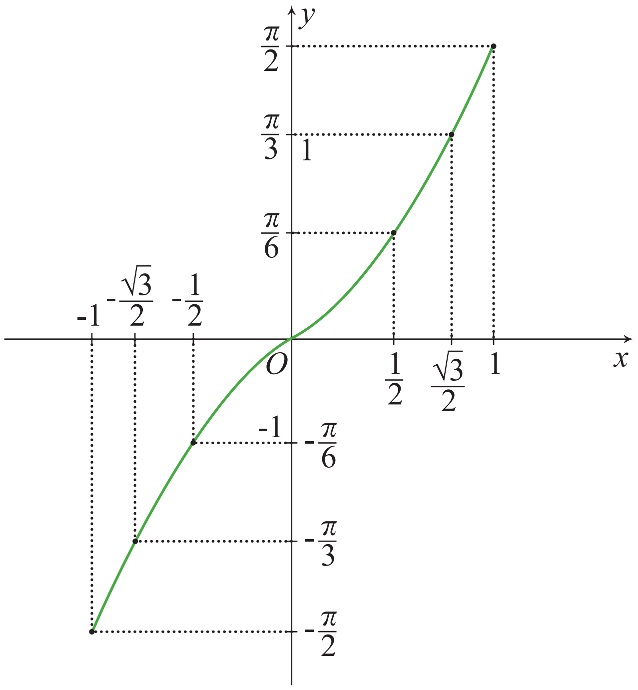
$$g:[-1,1]\to\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$$

$g(x)=\operatorname{arcsen} x$ (lê-se "arco seno de x").

A função g associa a cada número real x do intervalo $[-1,1]$, o *arco* cujo *seno* é x. Por exemplo:

$$g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{6};\ g(0)=0;\ g\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{\pi}{6};\ g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\pi}{4}.$$

O gráfico da função g é dado por



x	arc sen x
0	0
1/2	$\pi/6 \cong 0{,}52$
$\sqrt{3}/2$	$\pi/3 \cong 1{,}04$
$\sqrt{2}/2$	$\pi/4 \cong 0{,}78$
-1/2	$-\pi/6$
$-\sqrt{3}/2$	$-\pi/3$

Figura 5.64

Note que os gráficos de F e g são simétricos em relação à bissetriz do primeiro quadrante:

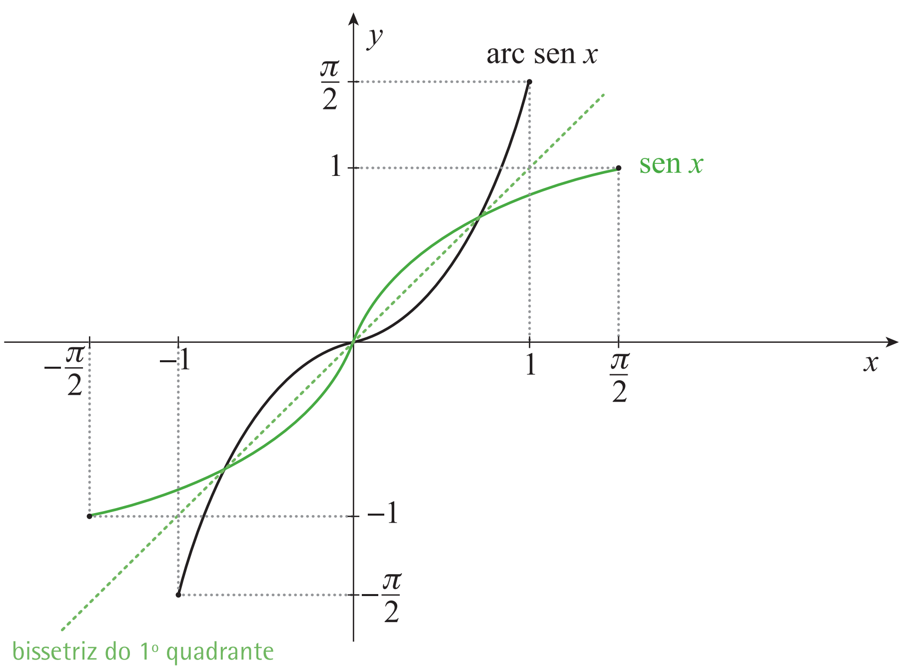


Figura 5.65

Analisando agora a função cosseno,

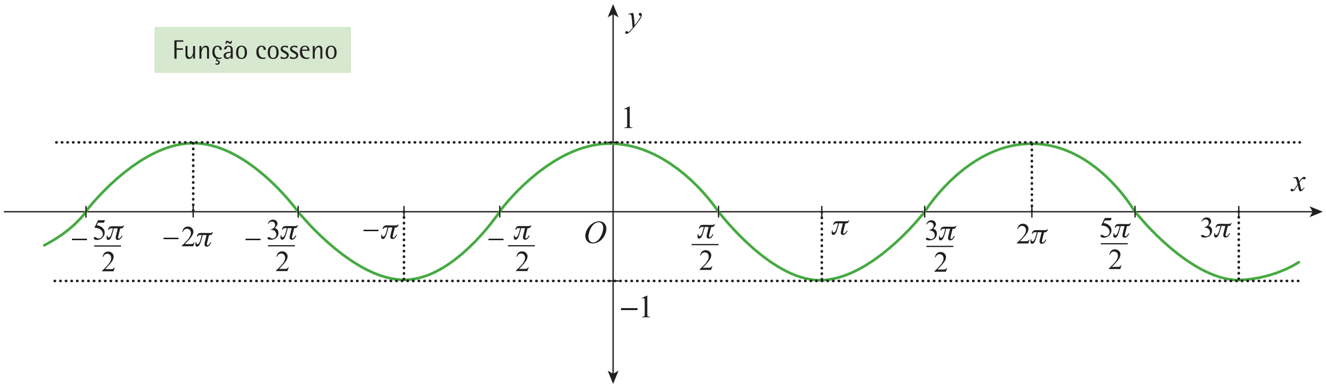


Figura 5.66

Vemos que ocorre a mesma situação que ocorria com o $\operatorname{sen}\alpha$: em certos intervalos a função é injetora. Fixamos o intervalo $[0,\pi]$ para definir a função

$$H:[0,\pi]\to[-1,1]$$

$$H(x)=\cos x$$

H é uma função bijetora (prove isso!) e, portanto, inversível. A inversa da função H é a função:

$$h:[-1,1]\to[0,\pi]$$

$h(x)=\operatorname{arccos} x$ (lê-se "arco cosseno de x").

A função h associa a cada número real x do intervalo $[-1,1]$ o *arco* cujo *cosseno* é x. O gráfico da função h é dado por:

x	arccos x
-1	-1
-1/2	2π/3
0	π/2
1/2	π/3
1	0

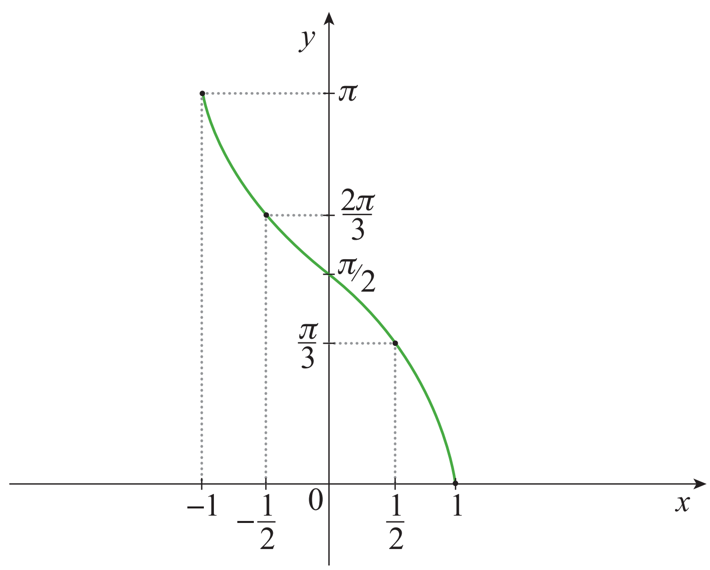


Figura 5.67

Também neste caso os gráficos de H e h são simétricos em relação à bissetriz do primeiro quadrante:

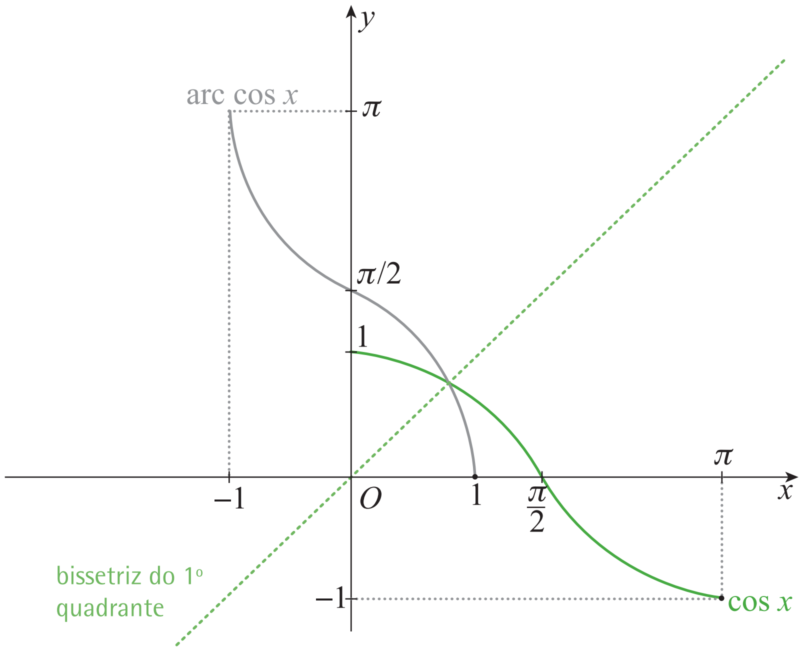


Figura 5.68

Exercícios resolvidos

10) Calcule $\operatorname{sen}\left(\arccos \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Resolução. Queremos calcular o seno do arco cujo cosseno é $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Se y é o arco cujo cosseno é $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, isto é, $\cos y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, qual o valor de $\operatorname{sen} y$? Lembramos que nosso intervalo de trabalho para os valores do arco y é o intervalo $[0,\pi]$, a imagem da função arco cosseno. Assim, existe um único valor de y no intervalo $[0,\pi]$, tal que $\cos y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Este valor, como sabemos, é $\dfrac{\pi}{4}$. Assim,

$$\operatorname{sen}\left(\arccos \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \operatorname{sen} y = \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

11) Determine $\operatorname{sen}(\arccos x)$, para x qualquer em $[-1,1]$.

Resolução. Seja y o arco cujo cosseno é x, isto é, $\cos y = x$.

Queremos determinar $\operatorname{sen} y$. Pela relação fundamental, temos que $\operatorname{sen}^2 y + \cos^2 y = 1$; substituindo $\cos y = x$ na igualdade, temos:

$$\operatorname{sen}^2 y + x^2 = 1$$
$$\operatorname{sen}^2 y = 1 - x^2$$
$$\operatorname{sen} y = \pm\sqrt{1 - x^2}$$

Para escolher o sinal correto, ou seja, para saber se $\operatorname{sen} y$ é positivo ou negativo, devemos observar que y pertence à imagem da função arco cosseno, isto é, y pertence ao intervalo $[0, \pi]$. Neste intervalo o seno é positivo, e temos $\operatorname{sen} y = \sqrt{1 - x^2}$.

12) Determine $\operatorname{arcsen}\left(\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}\right)$.

Resolução. Como $\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2} = -1$, o problema consiste em determinar $\operatorname{arcsen}(-1)$. O único arco pertencente ao intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ cujo seno é -1 é $\frac{-\pi}{2}$. Logo, $\operatorname{arcsen}\left(\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}$.

Você poderia pensar que, como seno e arco seno são funções inversas, então $\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x) = x$, para qualquer valor x. Mas não podemos esquecer a definição! É preciso estar atento para o domínio e contradomínio das duas funções.

Exercício proposto

28) Calcule:

a) $\operatorname{sen}\left(\operatorname{arcsen}\frac{1}{2}\right)$

b) $\cos\left(\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

c) $\operatorname{sen}(\arccos 0)$

d) $\cos\left(\operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

e) $\operatorname{arcsen}\left(\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4}\right)$

f) $\arccos\left(\cos\frac{3\pi}{2}\right)$

5.4.2 A função tangente

Seja x um número real cujo cosseno é diferente de zero, determinando no ciclo trigonométrico o ponto D (lembre-se: o ponto D é a extremidade do arco de medida x rad). Definimos a função tangente de x (a notação é $\operatorname{tg} x$) como sendo a ordenada do ponto B, que é o ponto de intersecção do prolongamento do raio OD com uma reta paralela ao eixo Y passando pelo ponto A (tangente à circunferência), chamada "eixo das tangentes". Este eixo é uma "cópia" do eixo Y, com valores negativos abaixo de A e positivos acima de A. Veja a figura:

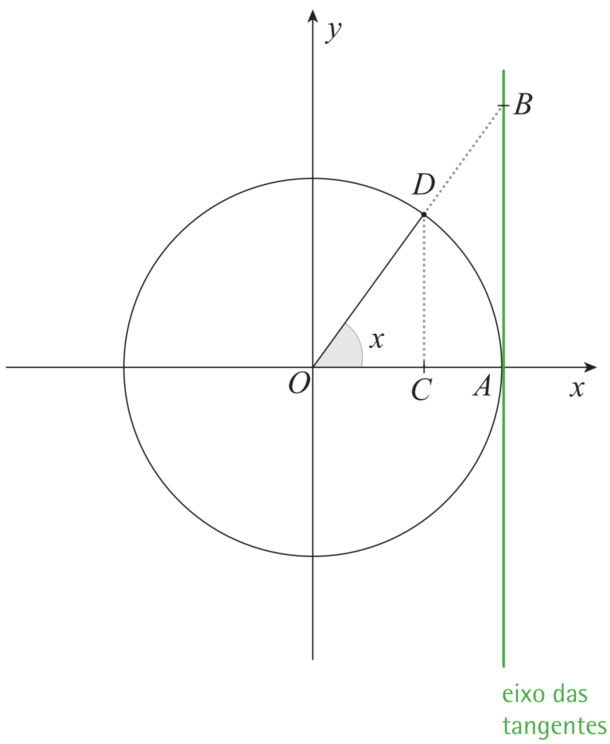


Figura 5.69

Observação 17. Note que se o cosseno de x for zero, então x será um arco de medida $k\pi + \dfrac{\pi}{2}$, para algum $k \in \mathbb{Z}$. Neste caso não haverá intersecção do prolongamento do raio OD com o eixo das tangentes, uma vez que serão paralelos. Por isso excluímos estes arcos da definição de tangente.

Relação entre seno, cosseno e tangente

Por quê?

Na figura 5.69 considere os triângulos COD e AOB, que são semelhantes. Então seus lados são proporcionais e teremos

$\dfrac{CD}{OC} = \dfrac{AB}{OA}$, ou seja, $\dfrac{\text{sen}\, x}{\cos x} = \dfrac{\text{tg}\, x}{1}$, para valores de x tais que $\cos x \neq 0$.

Lembrando que $\cos x = 0$ quando $x = k\pi + \dfrac{\pi}{2}$, $\forall\, k \in \mathbb{Z}$, podemos definir a função tangente como:

$$tg : \mathbb{R} - \left\{ k\pi + \frac{\pi}{2} / k \in \mathbb{Z} \right\} \to \mathbb{R}$$

$$\text{tg} x = \frac{\text{sen}\, x}{\cos x}$$

Sinal algébrico da tangente

O sinal da tangente depende dos sinais do seno e do cosseno. No primeiro e terceiro quadrantes seno e cosseno têm o mesmo sinal, o que significa que a tangente é um número positivo. No segundo e no quarto quadrantes seno e cosseno têm sinais contrários, o que significa que a tangente é um número negativo. Também podemos analisar geometricamente, como mostra a figura (notação análoga a da figura 5.69):

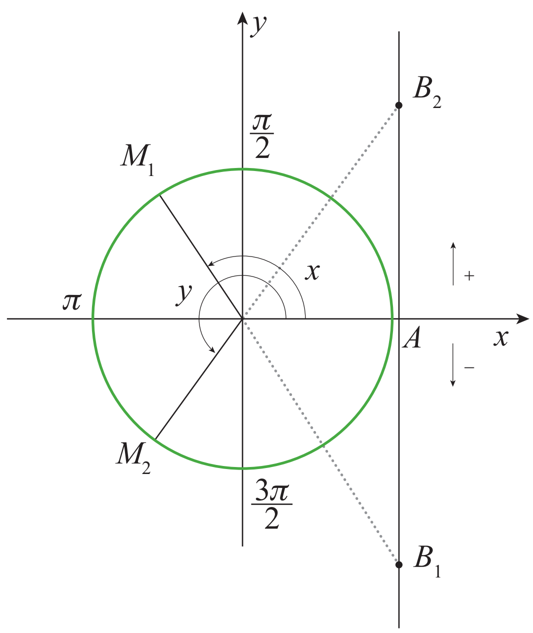


Figura 5.70

Valores notáveis da tangente

Para $x = 0$, temos sen $0 = 0$ e $\cos 0 = 1$. Logo, $\operatorname{tg} 0 = 0$.

Para $x = \frac{\pi}{2}$, não existe um valor para a tangente, mas observe que quando x assume valores cada vez mais próximos de $\frac{\pi}{2}$, porém menores do que $\frac{\pi}{2}$, os valores de $\operatorname{tg} x$ aumentam, tornando-se infinitamente grandes. Veja a figura:

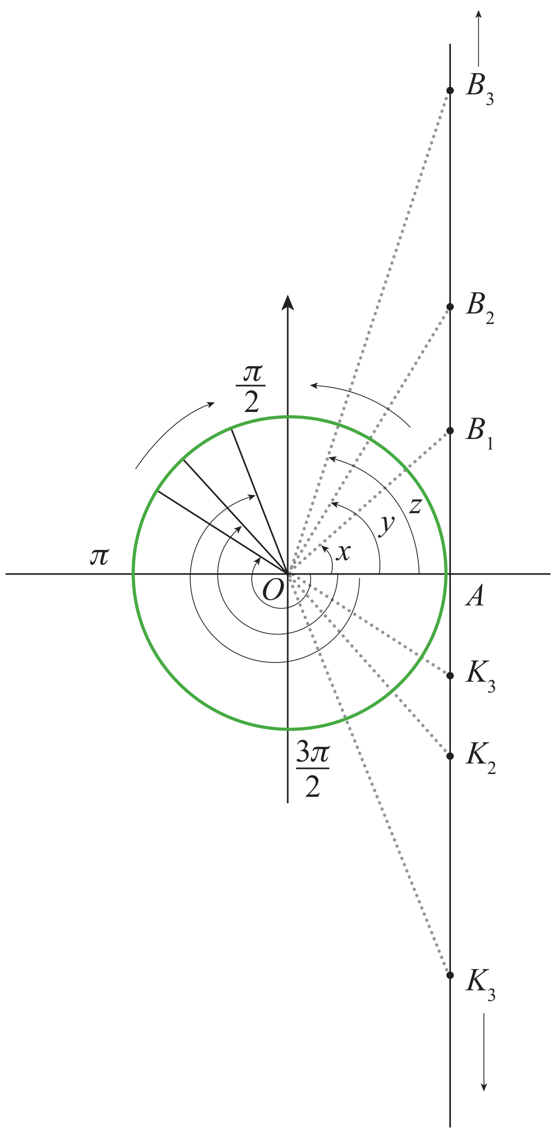


Figura 5.71

No entanto, quando x assume valores maiores do que $\frac{\pi}{2}$ e aproximando-se cada vez mais deste valor, $\operatorname{tg} x$ é um número negativo assumindo, em módulo, valores infinitamente grandes.

Para $x=\pi$, $\text{sen}\,\pi=0$ e $\cos\pi=-1$. Logo, $\text{tg}\,\pi=0$.

Para $x=\frac{3\pi}{2}$, não existe $\text{tg}\,x$. Estude o que acontece com a $\text{tg}\,x$ quando os valores de x se aproximam de $\frac{3\pi}{2}$.

Para $x=\frac{\pi}{4}$, $tg\frac{\pi}{4}=\dfrac{sen\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}}=\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=1$.

Para $x=\frac{\pi}{6}$, $tg\frac{\pi}{6}=\dfrac{sen\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6}}=\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Para $x=\frac{\pi}{3}$, $tg\frac{\pi}{3}=\dfrac{sen\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}}=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$.

Resumindo:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	π
$\text{tg}\,x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	0

Exercício resolvido

13) Determine o valor de $\text{tg}\,\frac{22\pi}{3}$.

Resolução.

$\frac{22\pi}{3}=\frac{18\pi}{3}+\frac{4\pi}{3}=6\pi+\frac{4\pi}{3}$. Logo, $\text{tg}\,\frac{22\pi}{3}=\text{tg}\,\frac{4\pi}{3}$.

Como $\text{sen}\,\frac{4\pi}{3}=-\text{sen}\,\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\cos\frac{4\pi}{3}=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$,

teremos $\text{tg}\,\frac{22\pi}{3}=\text{tg}\,\frac{4\pi}{3}=\dfrac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$.

Observação 18. Como sabemos reduzir seno e cosseno ao primeiro quadrante, também podemos fazê-lo para a tangente, já que ela depende destas duas funções. Note que basta conhecer uma das funções, seno ou cosseno, para conhecermos a tangente, pois seno e cosseno estão relacionados pela Relação Fundamental $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$. Por exemplo, se sabemos que x está no primeiro quadrante e $\operatorname{sen} x = 0,2$, podemos calcular a $\operatorname{tg} x$ fazendo:

$$(0,2)^2 + \cos^2 x = 1$$

$$0,04 + \cos^2 x = 1$$

$$\cos^2 x = 1 - 0,04$$

$$\cos^2 x = 0,96 = \frac{96}{100}$$

$$\cos x = \sqrt{\frac{96}{100}} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

(como x está no 1º quadrante, tomamos a raiz positiva).

Logo, $\operatorname{tg} x = \dfrac{0,2}{\frac{2\sqrt{6}}{5}} = \dfrac{\frac{2}{10}}{\frac{2\sqrt{6}}{5}} = \dfrac{1}{2\sqrt{6}}$.

Gráfico da função tangente

Lembrando as considerações que fizemos para os valores notáveis da tangente, vamos construir seu gráfico:

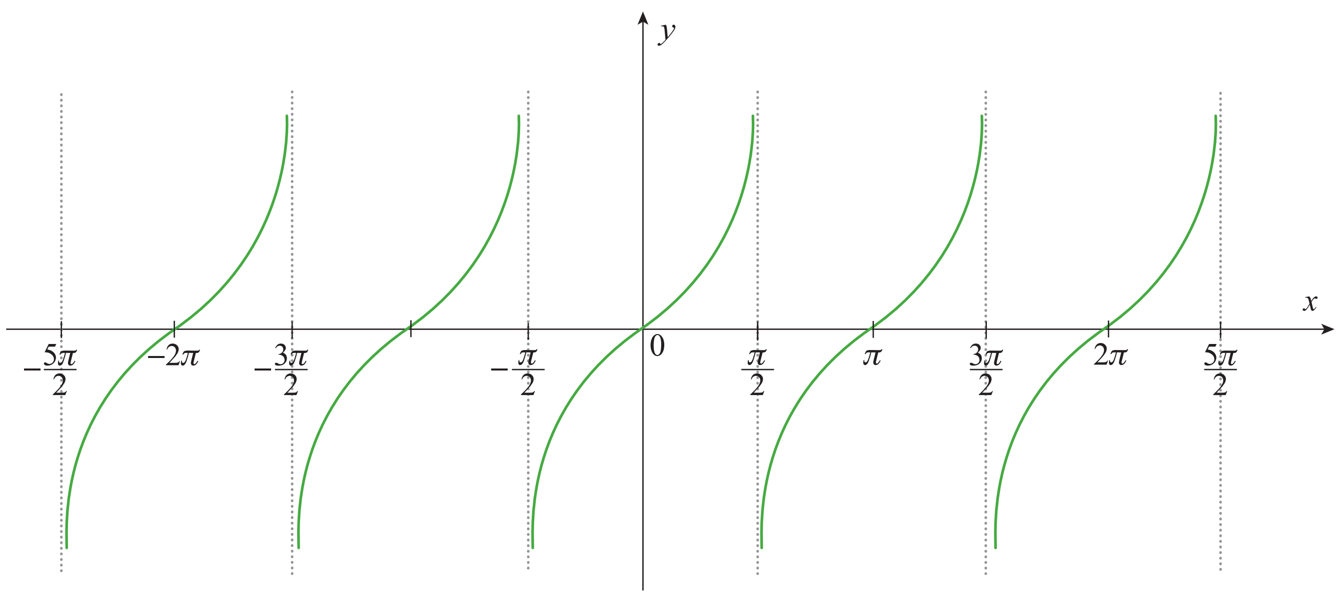


Figura 5.72

Estudando o gráfico, podemos observar que:

1) A tangente é uma função periódica e seu período é π. De fato,

$$\operatorname{tg}(x+\pi)=\frac{\operatorname{sen}(x+\pi)}{\cos(x+\pi)}=\frac{\operatorname{sen} x.\cos\pi+\cos x.\operatorname{sen}\pi}{\cos x.\cos\pi-\operatorname{sen} x.\operatorname{sen}\pi}=\frac{-\operatorname{sen} x}{-\cos x}=\operatorname{tg} x.$$

Note que o gráfico no intervalo $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ se repete a cada intervalo de comprimento π, do tipo $\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ com $k\in\mathbb{Z}$.

2) Os zeros da função tangente são os zeros da função seno, isto é, $\operatorname{tg} x=0$ quando $x=k\pi$, pra todo $k\in\mathbb{Z}$.

3) A imagem da função tangente é o conjunto dos números reais.

4) A função não está definida para os valores $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$, para todo $k\in\mathbb{Z}$, ou seja, estes pontos não têm imagem pela função tangente. Observe o que acontece na vizinhança destes pontos, lembrando das considerações que fizemos para os valores notáveis da tangente.

5) Nos intervalos

$\ldots\left(\frac{-5\pi}{2},\frac{-3\pi}{2}\right),\left(\frac{-3\pi}{2},\frac{-\pi}{2}\right),\left(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right),\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right),\ldots$ a função tangente é injetora. Isto nos sugere que ela é inversível em cada um destes intervalos.

Inversa da função tangente

Restringindo a função tangente ao intervalo $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, obtemos uma função bijetora

$$G:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$$
$$G(x)=\operatorname{tg} x$$

A inversa da função G é a função

$$g:\mathbb{R}\to\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$$

$g(x) = \text{arctg}\, x$ (como para seno e cosseno, lê-se "arco tangente de x").

A função inversa g associa a cada número real x o arco cuja tangente é x. Por exemplo, $g(1) = \text{arctg}\, 1 = \frac{\pi}{4}$, $g(-1) = \text{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$, $g(0) = \text{arctg}\, 0 = 0$.

Os gráficos da função tangente e de sua inversa são simétricos em relação à bissetriz do primeiro quadrante:

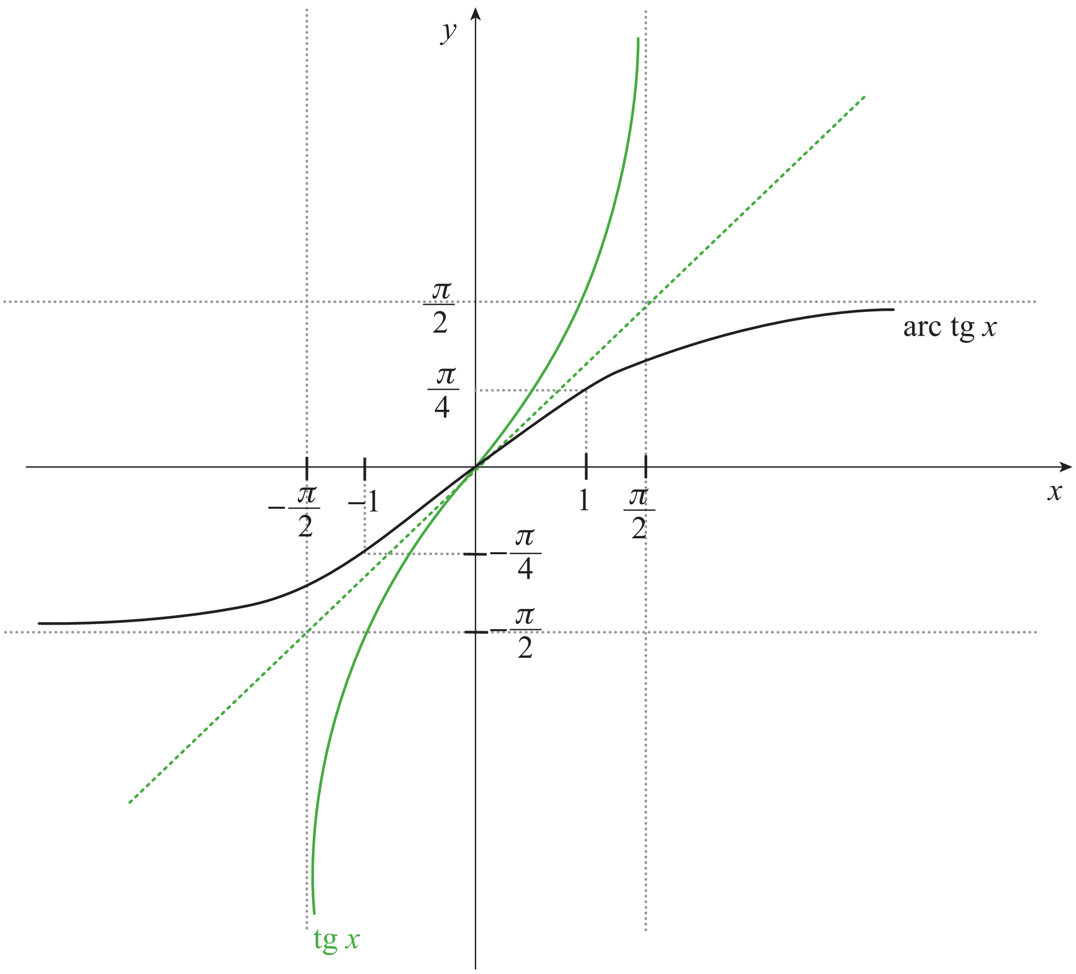


Figura 5.73

Exercício resolvido

14) Calcule $\text{sen}(\text{arctg}(-\sqrt{3}))$.

Resolução. Seja x o arco cuja tangente é $-\sqrt{3}$, isto é, $\text{tg}\, x = -\sqrt{3}$. Queremos calcular $\text{sen}\, x$. Sabemos dos valores notáveis que $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$; mas qual arco cuja tangente resulta no oposto deste número? Vamos observar no ciclo trigonométrico:

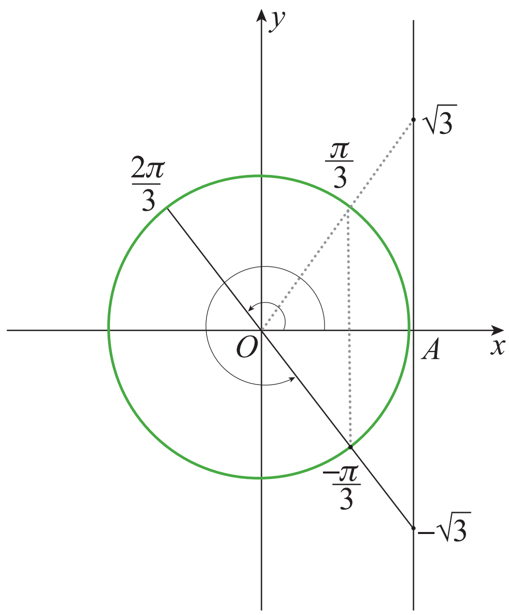


Figura 5.74

Vemos que, para os arcos de medida $\frac{2\pi}{3}$ e $\frac{-\pi}{3}$ tem-se $\operatorname{tg}\frac{2\pi}{3}=\operatorname{tg}\frac{-\pi}{3}=-\sqrt{3}$. Mas a função arctg tem como imagem o intervalo $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, isto é, tem como imagem arcos no primeiro ou quarto quadrantes. O arco de medida $\frac{2\pi}{3}$ está no segundo quadrante. Logo, escolhemos $x=\frac{-\pi}{3}$ e $\operatorname{sen}\frac{-\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Exercícios propostos

29) Conhecendo o seno e o cosseno de $\frac{\pi}{6}$ rad, $\frac{\pi}{4}$ rad e $\frac{\pi}{3}$ rad, calcule $\operatorname{sen}x$ e $\cos x$ para:

a) $x=1230^{\circ}$

b) $x=-960^{\circ}$

c) $x=\frac{-13\pi}{4}$ rad

d) $x=\frac{47\pi}{6}$ rad

30) Determine o sinal algébrico dos números reais:

a) $\text{sen}\sqrt{5}$ b) $\cos 7,68$

c) $\text{sen } 13$ d) $\cos\sqrt{2}$

31) Faça o gráfico das funções abaixo, no intervalo $[-2\pi, 3\pi]$.

a) $f(x) = \text{tg } 2x$ b) $g(x) = \text{tg}\dfrac{x}{2}$

c) $h(x) = 1 + \cos 3x$ d) $m(x) = -2 + \text{sen}\dfrac{x}{2}$

32) Dê o período das funções:

a) $g_1(x) = \cos\dfrac{3x}{4}$ b) $g_2(x) = \text{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

c) $g_3(x) = 5\cos\dfrac{\pi x}{2}$ d) $g_4(x) = 8 - \text{sen}\dfrac{x}{3}$

e) $g_5(x) = 1 + \text{tg}\dfrac{x}{2}$ f) $g_6(x) = \text{tg}(2x)$

33) Mostre as identidades:

a) $\cos(\pi + t) = -\cos t$

b) $\text{sen}\left(t + \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos t$

c) $\text{sen } 3t = 3\text{sen } t - 4\text{sen}^3 t$

d) $1 + \cos t = 2\cos^2\left(\dfrac{t}{2}\right)$

34) Calcule:

a) $\text{tg}\dfrac{-13\pi}{3}$

b) $\text{tg}\dfrac{23\pi}{4}$