10) Um restaurante "a quilo" vende 100 kg de comida por dia, a R\$ $12,00$ o quilo. Uma pesquisa revelou que, para cada real de aumento no preço, o restaurante perderia 10 clientes, com um consumo médio de 500 gramas cada. Qual deve ser o valor do quilo de comida para que o restaurante tenha a maior receita?

11) Considere os conjuntos $A = \left\{ x \in \mathbb{R} / x \leq \frac{1}{2} \right\}$ e $B = \{ x \in \mathbb{R} / x \geq -1 \}$ e as funções $f : A \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x - 1$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ definida por $g(x) = x^2$ e $h : \mathbb{R}_+ \to B$ definida por $h(x) = 4x - 1$. Determine a função inversa de $h \circ (g \circ f)$.

5.1.3. Funções polinomiais de modo geral

Definição. Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função polinomial quando existem constantes reais a_0, a_1, a_2, ..., a_n tais que

$$f(x) = a_n x^n + a_n - 1x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0\,,$$

com n natural não-nulo.

Exemplos:

17) $f(x) = 13x^3 - 4x^2 + \dfrac{78}{11}$

$a_0 = \dfrac{78}{11}; a_1 = 0; a_2 = -4; a_3 = 13.$

18) $g(t) = 8t^9 + 4\sqrt{2}t^5 - t + 1$

$a_0 = 1;\ a_1 = -1;\ a_2 = a_3 = a_4 = 0;\ a_5 = 4\sqrt{2};\ a_6 = a_7 = a_8 = 0;\ a_9 = 8$

19) $h(t) = -3$; $a_0 = -3$; as outras constantes são nulas.

Observação 9. A expressão $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0$ chama-se *polinômio* e se $a_n \neq 0$, dizemos que é um *polinômio de grau* n . O grau do polinômio (e não da função!) é então o maior valor de n para o qual a_n é diferente de zero. A função:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0$$

é uma *função polinomial de grau* n quando $a_n \neq 0$. As funções afim e quadrática são exemplos de funções polinomiais.

Observação 10. Se todas as constantes $a_0,\ a_1,\ a_2,\ ...,\ a_n$ são nulas, temos o *polinômio nulo*, cujo grau não está definido. Se a constante a_0 é não nula e todas as outras são nulas, temos um *polinômio de grau zero* (exemplo 19).

Igualdade de polinômios

Dois polinômios $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0$ e $b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_2 x^2 + b_1 x^1 + b_0$ são iguais quando $m = n$ e $a_n = b_m,\ a_{n-1} = b_{m-1}, ..., a_2 = b_2,\ a_1 = b_1,\ a_0 = b_0$. Assim, dois polinômios são iguais quando têm o mesmo grau e seus termos correspondentes são iguais.

Observação 11. É claro que a igualdade de funções vale para funções polinomiais. Duas funções polinomiais $f(x)$ e $g(x)$ serão iguais quando $f(x) = g(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$. Isto acontece quando seus coeficientes correspondentes são iguais.

Simbolicamente, para

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0 \ ,$$

$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_2 x^2 + b_1 x^1 + b_0$$

$f = g$ se e somente se $m = n$ e

$$a_n = b_m,\ a_{n-1} = b_{m-1}, ..., a_2 = b_2,\ a_1 = b_1,\ a_0 = b_0 .$$

Raízes de uma função polinomial

Dizemos que s é raiz da função polinomial

$$f\left(x\right) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0$$

quando $f(s) = 0$, ou seja, quando

$$a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + ... + a_2 s^2 + a_1 s^1 + a_0 = 0 .$$

O Teorema Fundamental da Álgebra (que será estudado com detalhes posteriormente, em outra disciplina) nos diz que um polinômio de grau n tem exatamente n raízes complexas. Estas raízes não são necessariamente distintas.

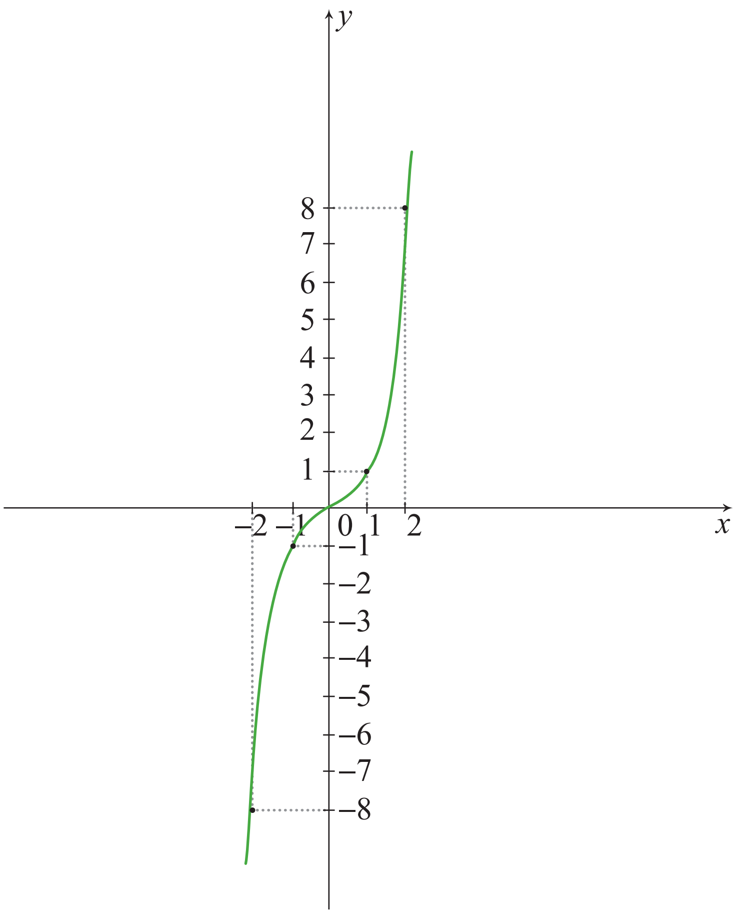
Exemplos:

20) $f(x) = x^3$ possui três raízes iguais, $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Diz-se neste caso que zero é uma raiz de *multiplicidade* 3.

21) $g(x) = x^5 - x^3$ possui cinco raízes reais, mas três delas são iguais. De fato, $x^5 - x^3 = 0$ implica $x^3(x^2 - 1) = 0$ e daí obtemos as raízes $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = x_4 = x_5 = 0$.

Gráfico das funções polinomiais

Conforme já foi visto, funções polinomiais de grau 0 ou 1 (funções afins) têm como gráfico uma reta e funções polinomiais de grau 2 (funções quadráticas) têm como gráfico uma parábola. Para funções polinomiais de grau maior do que 2 não existe uma tal caracterização do gráfico. O que sabemos é que as raízes determinam pontos onde o gráfico "corta" o eixo X e o "termo independente" (coeficiente a_0) determina o ponto onde o gráfico "corta" o eixo Y. Como ilustração, vamos esboçar o gráfico da função $f(x) = x^3$:



x	$y = f(x)$
0	0
-1	-1
-2	-8
-3	-27
-10	-1000
1	1
2	8
3	27
10	1000
-1/2	-1/8
1/2	1/8

Figura 5.18

$\text{Im} f = \mathbb{R}$ e f é crescente em seu domínio (prove!).

Observe também que $f(1) = -f(-1), f(2) = -f(-2), f(3) = -f(-3)$, e de modo geral $f(x) = -f(-x)$. Isto caracteriza uma função ímpar, conforme a definição a seguir:

Definição. Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função par quando $f(x) = -f(-x)$ para todo x em seu domínio; a função é uma função ímpar quando $f(x) = -f(-x)$ para todo x em seu domínio.

Exemplos:

22) Como já vimos, $f(x) = x^3$ é uma função ímpar, pois $f(x) = x^3$ e $f(-x) = -x^3$, ou seja, $f(x) = -f(-x)$.

23) $f(x) = x^2 + 1$ é uma função par, pois:

$$f(x) = x^2 + 1 \text{ e } f(-x) = (-x)^2 + 1 = x^2 + 1, \text{ ou seja, } f(x) = -f(-x).$$

Observação 12. Funções pares e ímpares têm características importantes em seus gráficos:

i) o gráfico de uma função par é simétrico em relação ao eixo $Y : (x, y)$ e $(-x, y)$ são pontos do gráfico da função, para todo x do domínio.

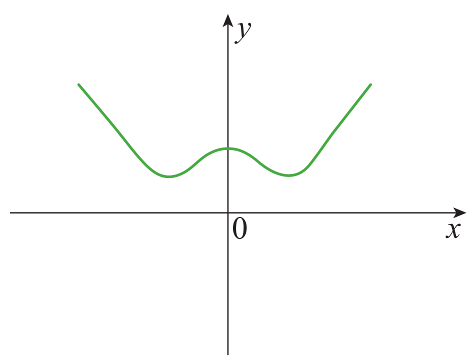


Figura 5.19 - Gráfico de uma função par.

ii) o gráfico de uma função ímpar é simétrico em relação a origem do plano cartesiano: (x, y) e $(-x, -y)$ são pontos do gráfico da função, para todo x do domínio.

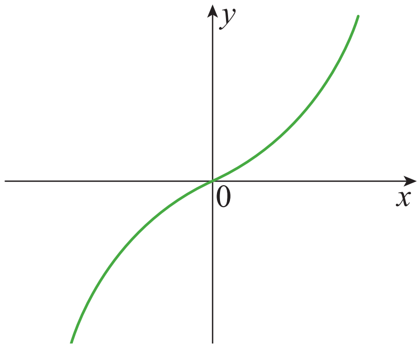


Figura 5.20 – Gráfico de uma função ímpar.

Exercícios propostos

12) Esboce o gráfico das funções $f(x)=x^3+1$ e $f(x)=x^3-1$. O que você pode observar?

13) O gráfico abaixo é o gráfico de uma função polinomial de grau 3. Determine a função.

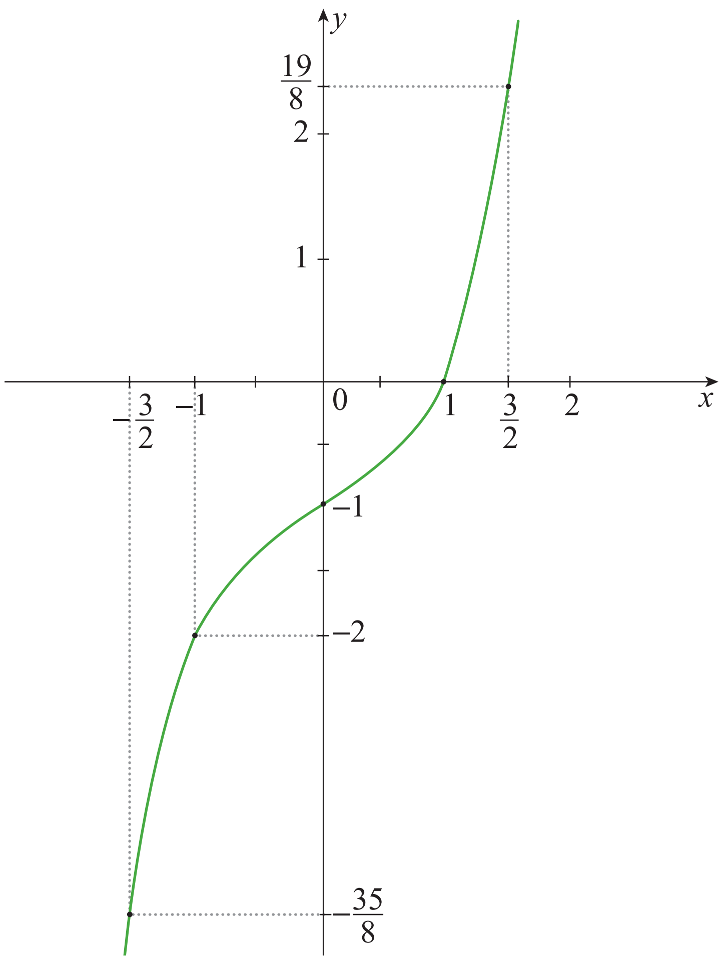


Figura 5.21

5.2 Funções racionais

As funções racionais são as funções da forma $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, sendo P e Q funções polinomiais.

Para f estar definida, o denominador deve ser diferente de zero; o denominador será zero quando $Q(x) = 0$, ou seja, nas raízes da função polinomial $Q(x)$. Assim, o domínio de f é o conjunto $\mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R} \,/\, Q(x) = 0\}$.

Exemplos:

24) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$; o domínio de f será $\mathbb{R}$ pois a função polinomial que aparece no denominador não se anula (não tem raízes reais): $D(f) = \mathbb{R}$.

25) $g(x) = \dfrac{1}{x+3}$; $D(g) = \mathbb{R} - \{-3\}$, uma vez que -3 é raiz da função polinomial $Q(x) = x + 3$.

26) $h(x) = \dfrac{4x^3 - x + 1}{x^3 - x}$; para determinarmos o domínio de h devemos verificar para quais valores de x a função polinomial $Q(x) = x^3 - x$ se anula, ou seja, devemos calcular as raízes de $Q(x)$:

$$x^3 - x = 0$$
$$x(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x^2 - 1 = 0$$
$$\Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1 \text{ ou } x = -1.$$

Então teremos $D(h) = \mathbb{R} - \{0, 1, -1\}$.

27) $K(x) = \dfrac{2}{x^4 - x^2 + 5x - 3}$; neste caso não é tão simples determinar o domínio. Não sabemos como calcular, através de uma fórmula, as raízes de uma função polinomial deste tipo. Para determinar o domínio da função K, devemos usar métodos mais elaborados de cálculo de raízes através de aproximações. Você estudará estes métodos após as disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral.

Observação 13. Para as funções polinomiais de grau 4 do tipo $h(x) = ax^4 + bx^2 + c$, isto é, com os coeficientes de x^3 e x iguais a zero, podemos calcular as raízes usando uma mudança de variável, isto é, fazendo $x^2 = y$ (conseqüentemente $x^4 = y^2$) e construindo uma nova função $h_1(x) = ay^2 + by + c$. As raízes de h_1 irão determinar as raízes de h.

As equações do tipo $ax^4 + bx^2 + c = 0$ são chamadas *equações biquadradas*.

Exemplo:

28) Determinar as raízes de $h = x^4 - 5x^2 - 4$

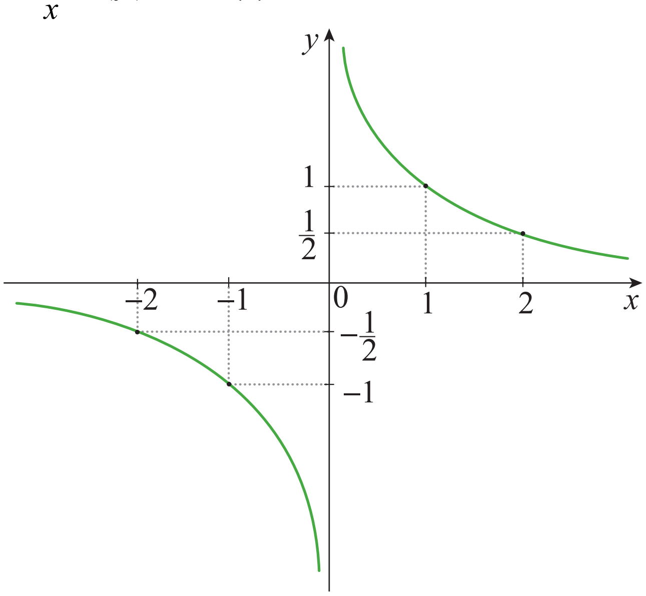
Resolução: Fazendo a mudança de variável, $x^2 = y$, obtemos $h_1(x) = y^2 - 5y + 4$. Para $h_1(y) = 0$, temos $y^2 - 5y + 4 = 0$ (uma equação do segundo grau) e as raízes são $y_1 = 1$ e $y_2 = 4$. Como $x^2 = y$, fazemos $x^2 = 1$ e $x^2 = 4$; resolvendo estas equações, temos $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$ e $x_4 = -2$. Estas são as raízes da função $h(x)$.

Gráfico das funções racionais

Não é possível fazer generalizações sobre o gráfico destas funções. Mas é possível verificar algumas regularidades nos gráficos das funções racionais. Vejamos:

Exemplos:

29) $f(x) = \dfrac{1}{x}; D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$



x	$y = f(x)$
1	1
-1	-1
2	$\frac{1}{2}$
-2	$-\frac{1}{2}$

Figura 5.22

Note que $f(x)=\frac{1}{x}$ é uma função ímpar (prove!). Para $x>0$, à medida que x se aproxima de zero, o valor da função "aumenta" (quanto menor o denominador, maior a fração). Por outro lado, à medida que $x>0$ assume valores cada vez maiores, o valor da função se aproxima de zero.

Tarefa

O que acontece à esquerda do eixo Y ?

Exemplos:

30) $f(x)=\frac{1}{x-2}; D(f)=\mathbb{R}-\{2\}$

x	$y=f(x)$
0	$-\frac{1}{2}$
1	-1
$\frac{3}{2}$	-2
$\frac{5}{2}$	2
10	$\frac{1}{8}$
-10	$-\frac{1}{12}$

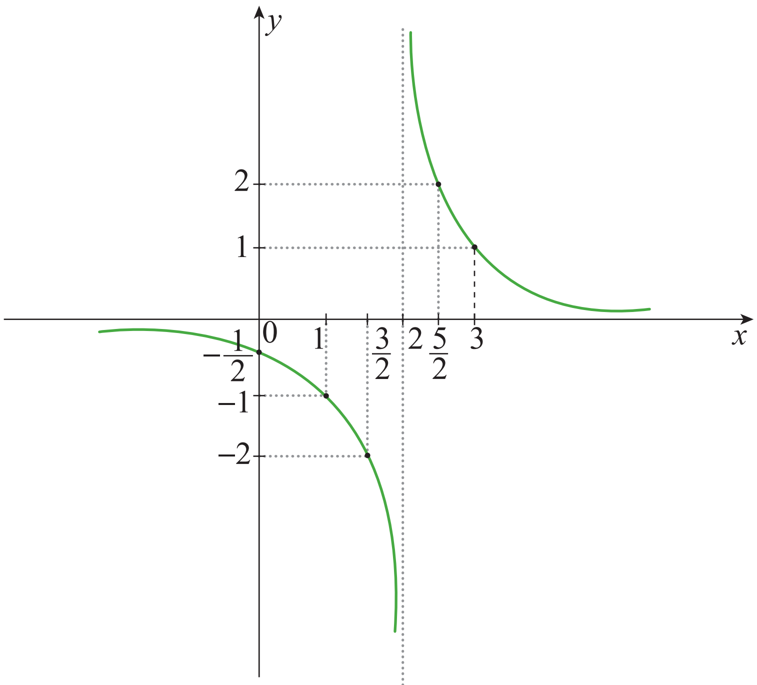
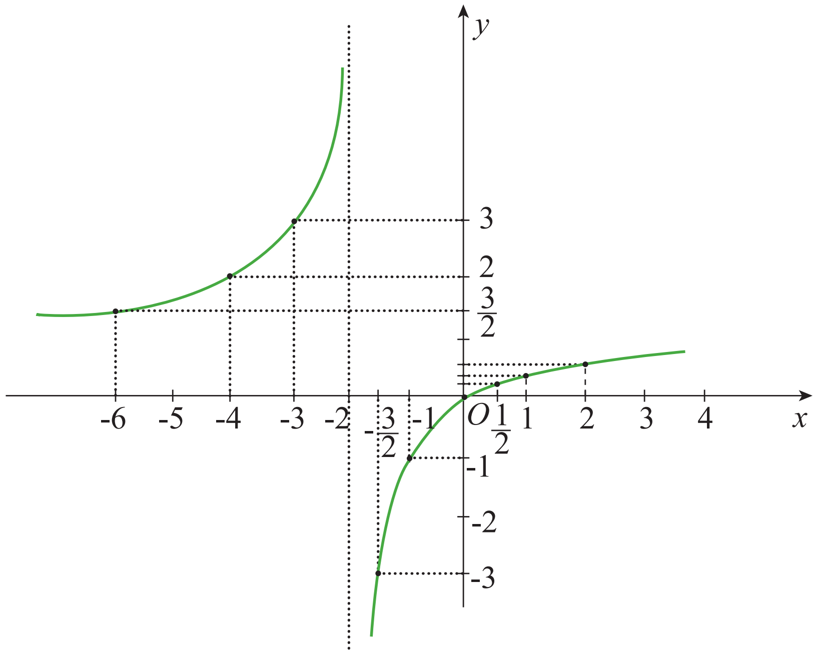


Figura 5.23

Note a semelhança do gráfico da função $f(x)=\frac{1}{x-2}$ com o gráfico da função do exemplo anterior. O gráfico de $f(x)=\frac{1}{x-2}$ pode ser obtido pelo deslocamento horizontal (de duas unidades) do gráfico de $f(x)=\frac{1}{x}$.

31) $f(x)=\dfrac{x}{x-2}; D(f)=\mathbb{R}-\{2\}$

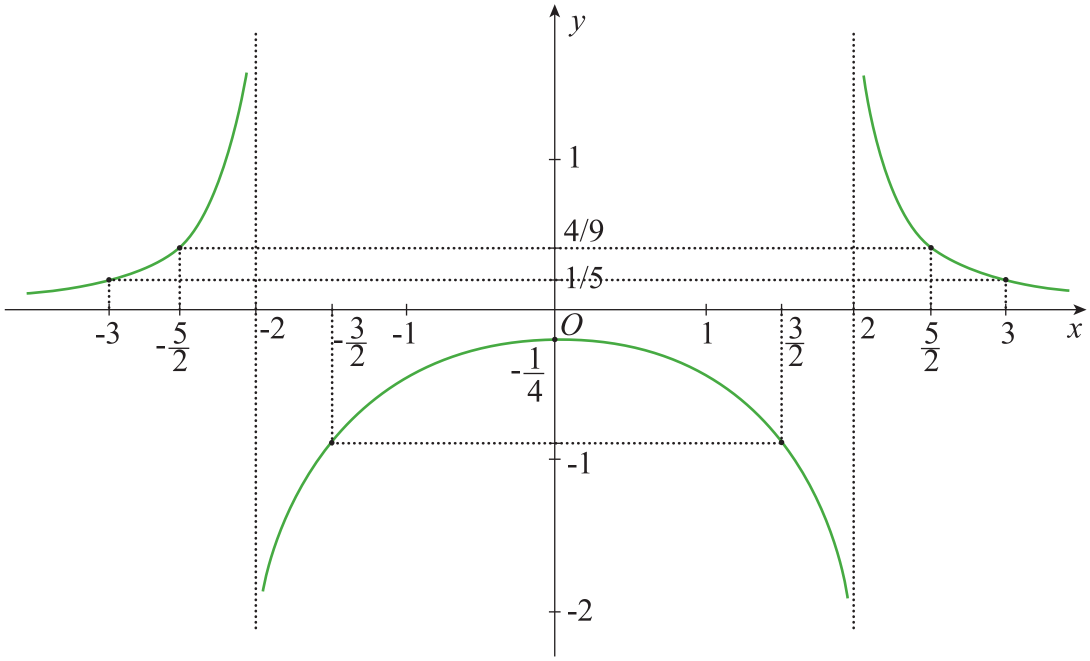


x	$y=f(x)$
0	0
1	1/3
2	1/2
-1	-1
-3	-3
-4	2
-6	3/2
1/2	1/5
-3/2	-3

Figura 5.24

Observe, também neste exemplo, a semelhança com os gráficos dos exemplos anteriores.

32) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-4}; D(f)=\mathbb{R}-\{2,-2\}$



x	$y=f(x)$
0	$-\dfrac{1}{4}$
$\dfrac{3}{2}$	$-\dfrac{4}{5}$
3	$\dfrac{1}{5}$
-3	$\dfrac{1}{5}$
$\dfrac{5}{2}$	$\dfrac{4}{9}$
$-\dfrac{5}{2}$	$\dfrac{4}{9}$

Figura 5.25

Note que este gráfico difere dos anteriores; observe que a função que aparece no denominador é uma função quadrática.

Exercícios propostos

14) Dê o domínio e faça o gráfico das funções racionais:

a) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

b) $g(x) = \dfrac{x+2}{x^2 - 4}$

c) $h(x) = 1 + \dfrac{1}{x-3}$

15) Dê os intervalos de crescimento e decrescimento das funções do exercício anterior.

5.3 Função-módulo

A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |x|$ é chamada "função-módulo". Lembrando a definição de módulo, $|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$, temos $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$.

O gráfico de f será:

x	$y = f(x)$
1	1
-1	1
2	2
-2	2
0	0

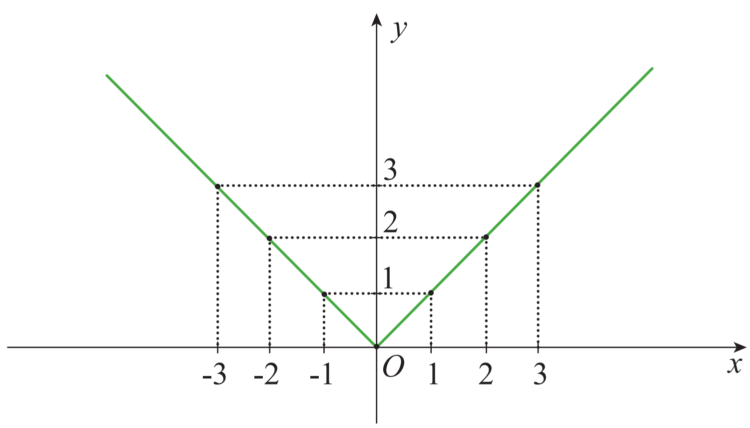


Figura 5.26

Observando o gráfico, vemos que $\operatorname{Im} f = [0, +\infty)$.

Exemplos de função-módulo composta com outras funções:

33) $f(x) = |3x - 6|$

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 6 & \text{se } 3x - 6 \geq 0 \\ -(3x - 6) & \text{se } 3x - 6 < 0 \end{cases}$$

Resolvendo as inequações, temos:

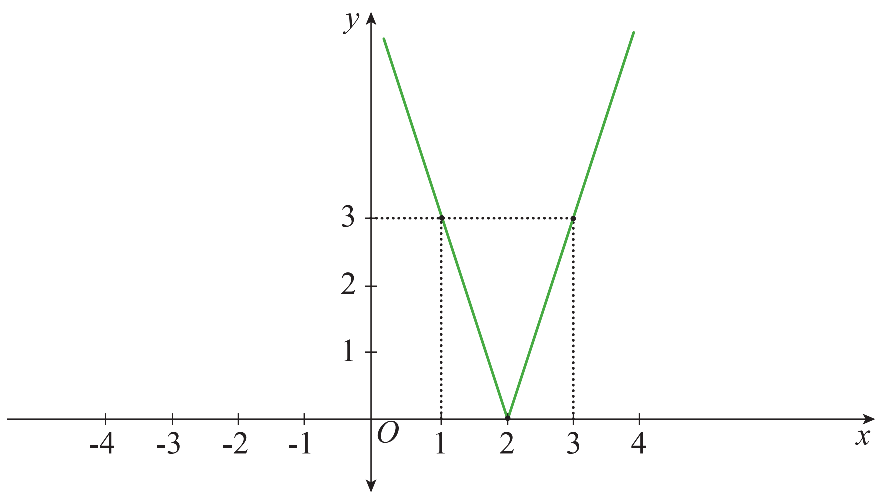
$$3x - 6 \geq 0 \Rightarrow 3x \geq 6 \Rightarrow x \geq 2$$

$$3x - 6 < 0 \Rightarrow 3x < 0 \Rightarrow x < 2$$

Assim, a função f pode ser escrita como:

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 6 & \text{se } x \geq 2 \\ -3x + 6 & \text{se } x < 2 \end{cases}$$

O gráfico de f é:



x	$y = f(x)$
2	0
1	3
3	3
4	6
-1	9

Figura 5.27

Observamos pelo gráfico que $\operatorname{Im} f = [0, +\infty)$.

34) $g(x) = |x^2 - 5|$

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 5 & \text{se } x^2 - 5 \geq 0 \\ -x^2 + 5 & \text{se } x^2 - 5 < 0 \end{cases}$$

Resolvendo as inequações, temos:

$$x^2 - 5 \geq 0 \Rightarrow x \geq \sqrt{5} \text{ ou } x \leq -\sqrt{5}$$

$$x^2 - 5 < 0 \Rightarrow -\sqrt{5} < x < \sqrt{5}$$

A função g pode ser escrita como

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 5 & \text{se } x \geq \sqrt{5} \text{ ou } x \leq -\sqrt{5} \\ -x^2 + 5 & \text{se } -\sqrt{5} < x < \sqrt{5} \end{cases}$$

O gráfico de g é:

x	$y = f(x)$
$\sqrt{5}$	0
$-\sqrt{5}$	0
3	4
-3	4
-1	4
1	4

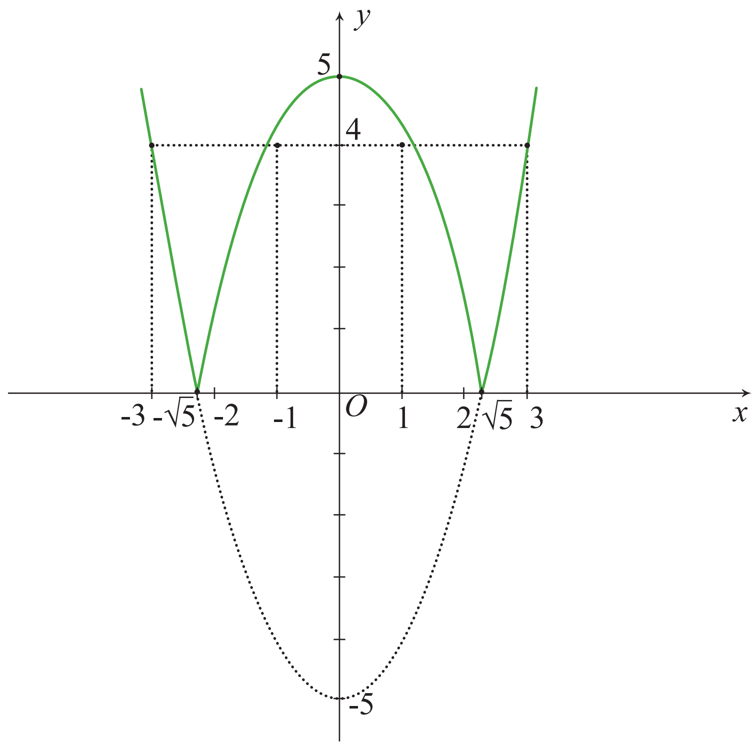


Figura 5.28

Observe a diferença do gráfico de g com o gráfico de $h(x) = x^2 - 5$. No gráfico da função g a parte correspondente aos valores entre as raízes de h foi "rebatida" para a parte positiva do plano (acima do eixo X).

Observação 14. O gráfico de uma função-módulo estará sempre acima do e/ou sobre o eixo X.