Análise combinatória

Fatorial

Dado um número natural *n*, define-se fatorial do número natural *n* ou *n* fatorial, como sendo o produto de todos os números naturais consecutivos de n até 1. Da seguinte forma:

$n! = n\,.\,(n-1)\,.\,(n-2)\,.\,...\,.\,3\,.\,2\,.\,1$ para todo $n > 1$.

Por definição temos que: $\begin{cases} 0! = 1 \\ 1! = 1 \end{cases}$

Exemplos:

1. Calcule os fatoriais:

a) $3! = 3\,.\,2\,.\,1 = 6$

b) $6! = 6\,.\,5\,.\,4\,.\,3\,.\,2\,.\,1 = 720$

c) $9! = 9\,.\,8! = 9\,.\,8\,.\,7! = 9\,.\,8\,.\,7\,.\,6! = 504\,.\,720 = 362\,880$

2. Vamos calcular os fatoriais:

a) $\dfrac{8!}{3!\,.\,5!} = \dfrac{8\,.\,7\,.\,6\,.\,5!}{3\,.\,2\,.\,1\,.\,5!} = \dfrac{336}{6} = 56$

b) $\dfrac{8!}{3! + 5!} = \dfrac{8\,.\,7\,.\,6\,.\,5\,.\,4\,.\,3\,.\,2\,.\,1}{3\,.\,2\,.\,1 + 5\,.\,4\,.\,3\,.\,2\,.\,1} = \dfrac{40\,320}{6 + 120} = \dfrac{40\,320}{126} = 336$

3. Simplifique a expressão $\frac{(n+2)!}{n!}$

Solução:

$$\frac{(n+2)!}{n!} = \frac{(n+2)\,.\,(n+1)\,.\,n}{n} = (n+2)\,(n+1) = n^2 + 3n + 2$$

Exercícios

1. Simplificar as expressões abaixo:

a) $\frac{6!}{3!}$

b) $\frac{10!}{7!\,.\,3!}$

c) $\frac{n!}{(n-1)!}$

d) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$

e) $\frac{(n-1)!}{n!} \cdot \frac{(n+1)!}{(n-2)!}$

2. Calcular o valor das expressões:

a) $\frac{5! + 2!}{3!}$

b) $\frac{6! - 4!}{2! + 0!}$

c) $\frac{200! + 201!}{199!}$

Permutação simples

Seja um conjunto com *n* elementos distintos. Uma permutação simples dos *n* elementos desse conjunto é uma sequência desses *n* elementos, de modo que a mudança de ordem desses *n* elementos determina permutações diferentes.

Utilizando o princípio fundamental da contagem podemos determinar o número de permutações da seguinte forma:

$P_n = n\,.\,(n-1).\,(n-2).\,\ldots\,.\,3\,.\,2\,.\,1$

Ou ainda utilizando fatoriais temos:

$$P_n = n!$$

Exemplos:

1. Calcule:

a) P_6

$P_6 = 6! = 6 . 5 . 4 . 3 . 2 . 1 = 720$

b) $P_3 + 2 . P_5$

$P_3 = 3! = 3 . 2 . 1 = 6$

$P_5 = 5! = 5 . 4 . 3 . 2 . 1 = 120$

Portanto: $P_3 + 2 . P_5 = 6 + 2 . 120 = 246$

2. Quantos números de 4 algarismos distintos podemos formar com os algarismos 1, 2, 3 e 4?

Solução:

$P_4 = 4! = 4 . 3 . 2 . 1$

$P_4 = 24$

Resposta: Podemos formar 24 números diferentes.

3. Quantos anagramas tem a palavra MANTO?

Solução:

Como a palavra MANTO tem 5 letras, temos:

$P_5 = 5! = 5 . 4 . 3 . 2 . 1$

$P_5 = 120$

Resposta: 120 anagramas.

Permutação com repetição

Vamos analisar a seguinte situação:

Quantos anagramas podemos formar com a palavra MARCA?

Neste caso, perceba que a palavra MARCA, possui duas letras repetidas, e quando permutamos duas letras iguais, o anagrama não se altera. Desta forma devemos considerar uma *permutação com repetição*, assim devemos proceder da seguinte maneira:

Calculamos a permutação com as 5 letras que possui a palavra marca e, em seguida, calculamos a permutação da quantidade de letras repetidas. O resultado será a divisão entre as permutações, ou seja a permutação de 5 elementos com 2 repetidos.

$$P_5^2 = \frac{5!}{2!} = \frac{5.4.3.2!}{2!} = 60$$

Portanto a palavra MARCA, possui 60 anagramas diferentes.

Exemplo:

Numa prateleira existem 5 livros diferentes de Matemática, 4 livros diferentes de Português e 3 livros diferentes de Inglês.

a) De quantos modos diferentes podemos arrumá-los?

Solução:

$$P_{12} = 12! = 12.11.10.9.8.7.6.5.4.3.2.1$$

$$P_{12} = 479\,001\,600$$

Resposta: Podemos arrumar de 479 001 600 modos diferentes.

b) De quantos modos diferentes podemos arrumá-los de maneira que os livros de cada matéria fiquem sempre juntos?

Solução:

Como podemos variar a posição dos três tipos de matéria (Matemática, Português e Inglês) e cada matéria variarem os livros entre si, então temos:

$$P_3 . P_5 . P_4 . P_3 = 3!.5!.4!.3! = 103\,680$$

Resposta: Podemos arrumar de 103 680 modos diferentes.

c) De quantos modos diferentes podemos arrumá-los de modo que os livros de Inglês fiquem sempre juntos?

Se considerarmos os livros de inglês juntos e com posições sempre fixas, eles podem ser considerados como um único elemento. Sendo assim somando-se às outras 9 posições ocupadas pelos outros livros, obtemos 10 posições e o número de possibilidades é dado por P_{10}. Como as posições dos livros de inglês não são fixas, devemos multiplicar P_{10} por P_3. Assim temos que:

$P_{10} . P_3 = 10! . 3! = 21\ 772\ 800$

Resposta: Podemos arrumar de 21 772 800 modos diferentes.

Exercícios

3. Calcular:

a) P_7

b) $P_8 - 3 . P_6$

4. Quantos números de 5 algarismos distintos podemos formar com os algarismos 2, 3, 4, 8 e 9?

5. Quantos anagramas tem a palavra CAMELO?

6. Quantos anagramas da palavra CAMELO, começam com a letra M?

7. Quantos anagramas possui a palavra MATEMÁTICA?

Arranjo simples

Um arranjo simples de *p* elementos distintos, tirados de um conjunto com *n* elementos distintos (*p* menor ou igual a *n*), é uma sequência desses *p* elementos, de modo que a mudança de ordem desses *p* elementos determina arranjos diferentes.

Indica-se:

$A_{n,p}$ ou A_n^p com $p \in \mathbb{N}$ e $p \leq n$.

Fórmula do número de arranjos:

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Exemplos:

1. Calcule:

a) A_5^3

$$A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5.4.3.2!}{2!} = 60$$

a) $A_8^2 - A_6^3$

$$A_8^2 = \frac{8!}{(8-2)!} = \frac{8.7.6!}{6!} = 56$$

$$A_6^3 = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6.5.4.3!}{3!} = 120$$

Portanto: $A_8^2 - A_6^3 = 56 - 120 = -64$

2. Quantos números de quatro algarismos distintos podemos formar com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7?

Solução:

$$A_7^4 = \frac{7!}{(7-4)!} = \frac{7.6.5.4.3!}{3!} = 840$$

Resposta: Podemos formar 840 números diferentes.

3. Quantos múltiplos de 3, formados por quatro algarismos distintos, podem ser formados com os algarismos 2, 3, 4, 6 e 9?

Solução:

Um número é múltiplo de 3 quando a soma dos valores absolutos dos seus algarismos for divisível por 3.

Desta forma, com os algarismos 2, 3, 4, 6 e 9 podemos ter os possíveis grupos de quatro algarismos, que formarão múltiplos de 3:

- 2, 3, 4 e 6, pois $2 + 3 + 4 + 6 = 15$ e 15 é divisível por 3;
- 2, 3, 4 e 9, pois $2 + 3 + 4 + 9 = 18$ e 18 é divisível por 3;
- 2, 4, 6 e 9, pois $2 + 4 + 6 + 9 = 21$ e 21 é divisível por 3.

Perceba que todos os grupos possuem 4 elementos que formarão os múltiplos de 3 com quatro algarismos, ou seja, temos três grupos de números com esta possibilidade variando os números entre si.

Assim:

$$A_4^4 = \frac{4!}{(4-4)!} = \frac{4 . 3 . 2 . 1!}{0!} = \frac{24}{1} = 24$$

Como tem três grupos, o total de números formados é:

$$3 . A_4^4 = 3 . 24 = 72$$

Resposta: O total de múltiplos de 3 distintos é 72.

4. O código secreto do cartão magnético do cliente de um banco é formado por cinco algarismos diferentes que devem ser digitados numa determinada sequência. Qual é o número máximo de códigos diferentes que se pode formar nesse caso?

Solução:

$$A_{10}^5 = \frac{10!}{(10-5)!} = \frac{10 . 9 . 8 . 7 . 6 . 5!}{5!} = 30\,240$$

Resposta: Podemos formar 30 240 códigos diferentes.

Exercícios

8. Calcular:

a) A_{80}^{2}

b) $2 \,.\, A_{9}^{2} + A_{8}^{3}$

9. Quantos números de 3 algarismos distintos podemos formar com os algarismos 1, 2, 4, 8 e 9?

10. 8 pessoas pretendem utilizar um sofá de 5 lugares. De quantas maneiras diferentes podem sentar-se no sofá?

11. Quantos números, entre 1 000 e 6 000, podemos formar com os algarismos ímpares, sem os repetir?

Combinação simples

Uma combinação simples de *p* elementos distintos, tirados de um conjunto de *n* elementos distintos, considerando que *p* é menor ou igual a *n*, é qualquer subconjunto de *p* elementos desse conjunto, desde que a mudança de ordem desses elementos determine a mesma combinação.

Indica-se:

$C_{n,p}$ ou C_n^p com p $(p \leq n)$

Fórmula do número de combinações:

$$C_n^p = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

Exemplos:

1. Calcule:

a) C_6^2

$$C_6^2 = \frac{6!}{2!\,(6-2)!} = \frac{6\,.\,5\,.\,4!}{2\,.\,1\,.\,4!} = \frac{30}{2} = 15$$

b) $C_9^4 - C_7^3$

$$C_9^4 = \frac{9!}{4!\,(9-4)!} = \frac{9\,.\,8\,.\,7\,.\,6\,.\,5!}{4\,.\,3\,.\,2\,.\,1\,.\,5!} = \frac{3\,024}{24} = 126$$

$$C_7^3 = \frac{7!}{3!\,(7-3)!} = \frac{7\,.\,6\,.\,5\,.\,4!}{3\,.\,2\,.\,1\,.\,4!} = \frac{210}{6} = 35$$

Portanto: $C_9^4 - C_7^3 = 126 - 35 = 91$

2. Quantas comissões constituídas de 4 pessoas podem ser formadas a partir de um grupo de 8 pessoas?

Solução:

$$C_8^4 = \frac{8!}{4!\,(8-4)!} = \frac{8\,.\,7\,.\,6\,.\,5\,.\,4!}{4\,.\,3\,.\,2\,.\,1\,.\,4!} = \frac{1\,680}{24} = 70$$

Resposta: Podemos formar 70 comissões diferentes.

3. Ao final de uma reunião com 15 participantes, todos cumprimentam-se um a um uma única vez. Quantos cumprimentos são trocados?

Solução:

$$C_{15}^{2} = \frac{15!}{2!\,(15-2)!} = \frac{15\,.\,14\,.\,13!}{2\,.\,1\,.\,13!} = \frac{210}{24} = 105$$

Resposta: Serão trocados 105 cumprimentos.

4. De um grupo de dez pessoas sendo seis homens e quatro mulheres, é sorteado um grupo de quatro pessoas. Determine quantos grupos diferentes podem ser formados se:

a) O grupo é formado unicamente por homens;

Solução:

$$C_{6}^{4} = \frac{6!}{4!\,(6-4)!} = \frac{6\,.\,5\,.\,4!}{2\,.\,1\,.\,4!} = \frac{30}{2} = 15$$

Resposta: Poderão ser formados 15 grupos diferentes.

b) O grupo é formado por dois homens e duas mulheres.

Solução:

$$C_{6}^{2}\,.\,C_{4}^{2} = \frac{6!}{2!\,(6-2)!}\cdot\frac{4!}{2!\,(4-2)!} = \frac{6\,.\,5\,.\,4!}{2\,.\,1\,.\,4!}\cdot\frac{4\,.\,3\,.\,2!}{2\,.\,1\,.\,2!} = \frac{30}{2}\cdot\frac{12}{2} = \frac{360}{4} = 90$$

Resposta: Poderão ser formados 90 grupos diferentes.

Exercícios

12. Calcular:

a) C_{12}^{8}

b) $3\,.\,C_{5}^{4} + 2\,.\,C_{10}^{3}$

13. Quantas comissões constituídas de 6 pessoas podem ser formadas a partir de um grupo composto por 10 pessoas?

14. Determinar o número de subconjuntos com 3 elementos que podem ser formados, a partir do conjunto dos divisores positivos de 12.

15. Uma empresa é formada por 4 sócios argentinos, 3 sócios chilenos e 5 sócios brasileiros. De quantos modos podemos formar uma diretoria de 6 sócios, sendo 2 argentinos, 1 chileno e 3 brasileiros?

Gabarito

Análise combinatória

1.

a) $\frac{6!}{3!} = \frac{6.5.4.3!}{3!} = 120$

b) $\frac{10!}{7!\,.\,3!} = \frac{10\ .\ 9\ .\ 8\ .\ 7!}{3\,.\,2\,.\,1\,.\,7!} = \frac{720}{6} = 120$

c) $\frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n\,.\,(n-1)!}{(n-1)!} = n$

d) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = \frac{(n+1)\,.\,n\,.\,(n-1)!}{(n-1)!} =$
$= (n+1)\,.\,n = n^2 + n$

e) $\frac{(n-1)!}{n!}\,.\,\frac{(n+1)!}{(n-2)!} = \frac{(n-1)\,.\,(n-2)!}{n!}\,.$
$\frac{(n+1)\,.\,n!}{(n-2)!} = (n-1)\,.\,(n+1) = n^2 - 1$

2.

a) $\frac{5! + 2!}{3!} = \frac{5\,.\,4\,.\,3\,.\,2\,.\,1\,.+2\,.\,1}{3\,.\,2\,.\,1} =$
$= \frac{120+2}{6} = \frac{122}{6} = \frac{61}{3}$

b) $\frac{6! - 4!}{2! + 0!} =$
$= \frac{6\,.\,5\,.\,4\,.\,3\,.\,2\,.\,1 - 4\,.\,3\,.\,2\,.\,1}{2\,.\,1 + 1} =$
$= \frac{720 - 24}{2+1} = \frac{696}{3} = 232$

c) $\frac{200! + 201!}{199!} =$
$= \frac{200\,.\,199! + 201\,.\,200\,.\,199!}{199!} =$
$= \frac{(200 + 201\,.\,200)\,.\,199!}{199!} =$
$= 200 + 201\,.\,200 = 200 +$
$+ 40\,200 = 40\,400$

3.

a) $P_7 = 7\,.\,6\,.\,5\,.\,4\,.\,3\,.\,2\,.\,1 = 5\,040$

b) $P_8 - 3\,.\,P_6$
$P_8 = 8\,.\,7\,.\,6\,.\,5\,.\,4\,.\,3\,.\,2\,.\,1 = 40\,320$
$P_6 = 6\,.\,5\,.\,4\,.\,3\,.\,2\,.\,1 = 720$
$P_8 - 3\,.\,P_6 = 40\,320 - 3\,.\,720 = 40$
$320 - 2\,160 = 38\,160$

4. $P_5 = 5\,.\,4\,.\,3\,.\,2\,.\,1 = 120$

5. $P_6 = 6\,.\,5\,.\,4\,.\,3\,.\,2\,.\,1 = 720$

6. $P_5 = 5.4.3.2.1 = 120$

7. A palavra MATEMÁTICA, possui 3 letras "A", 2 letras "M" e 2 letras "T" repetidas, assim:

$P_{10}^{3,2,2} = \frac{10!}{3!\,.\,2!\,.\,2!} =$
$= \frac{10\,.\,9\,.\,8\,.\,7\,.\,6\,.\,5\,.\,4\,.\,3!}{2\,.\,1\,.\,2\,.\,1\,.\,3!} =$
$= \frac{604\,800}{4} = 15\,1200$

8.

a) $A_{80}^{2} = \frac{80!}{(80-2)!} = \frac{80\,.\,79\,.\,78!}{78!} = 6\,320$

b) $2\,.\,A_9^2 + A_8^3$

$A_9^2 = \frac{9!}{(9-2)!} = \frac{9\,.\,8\,.\,7!}{7!} = 72$

$A_8^3 = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8\,.\,7\,.\,6\,.\,5!}{5!} = 336$

Portanto: $2\,.\,A_9^{\,2} + A_8^{\,3} = 2\,.\,72 + 336 = 480$

9. $A_5^3 = \dfrac{5!}{(5-3)!} = \dfrac{5.4.3.2!}{2!} = 60$

10. $A_8^5 = \dfrac{8!}{(8-5)!} = \dfrac{8.7.6.5.4.3!}{3!} = 6\,720$

11. Os algarismos ímpares são: 1, 3, 5, 7 e 9.

Desta forma, entre 1 000 e 6 000, temos:

Começados por 1, A_4^3

Começados por 3, A_4^3

Começados por 5, A_4^3

Como $A_4^3 = \dfrac{4!}{(4-3)!} = \dfrac{4.3.2.1}{1!} = \dfrac{24}{1} = 24$

Assim, o número total é de $3.\,A_4^3 = 3.\,24 = 72$

12.

a) C_{12}^8

$C_{12}^8 = \dfrac{12!}{8!\,(12-8)!} = \dfrac{12.11.10.9.8!}{8!.4.3.2.1} = \dfrac{11\,880}{24} = 495$

b) $3.C_5^4 + 2.C_{10}^3$

$C_5^4 = \dfrac{5!}{4!\,(5-4)!} = \dfrac{5.4!}{4!.1} = \dfrac{5}{1} = 5$

$C_{10}^3 = \dfrac{10!}{3!\,(10-3)!} = \dfrac{10.9.8.7!}{3.2.1.7!} = \dfrac{720}{6} = 120$

Portanto: $3.C_5^4 + 2.C_{10}^3 = 3.5 + 2.120 = 255$

13. $C_{10}^6 = \dfrac{10!}{6!\,(10-6)!} = \dfrac{10.9.8.7.6!}{4.3.2.1.6!} = \dfrac{5\,040}{24} = 210$

14. D(12) = {1, 2, 3, 4, 6, 12}

$C_6^3 = \dfrac{6!}{3!\,(6-3)!} = \dfrac{6.5.4.3!}{3.2.1.3!} = \dfrac{120}{6} = 20$ subconjuntos.

15. Diretoria:

Argentinos: $C_4^2 = \dfrac{4!}{2!\,(4-2)!} = \dfrac{4.3.2!}{2.1.2!} = \dfrac{12}{2} = 6$

Chilenos: $C_3^1 = \dfrac{3!}{1!\,(3-1)!} = \dfrac{3.2!}{1.2!} = 3$

Brasileiros: $C_5^3 = \dfrac{5!}{3!\,(5-3)!} = \dfrac{5.4.3!}{3!.2.1} = \dfrac{20}{2} = 10$

Portanto, pelo princípio fundamental da contagem, o número de diretorias que podemos formar é:

$C_4^2.C_3^1.C_5^3 = 6.3.10 = 180$