EQUAÇÃO QUADRÁTICA
recorte da história das equações

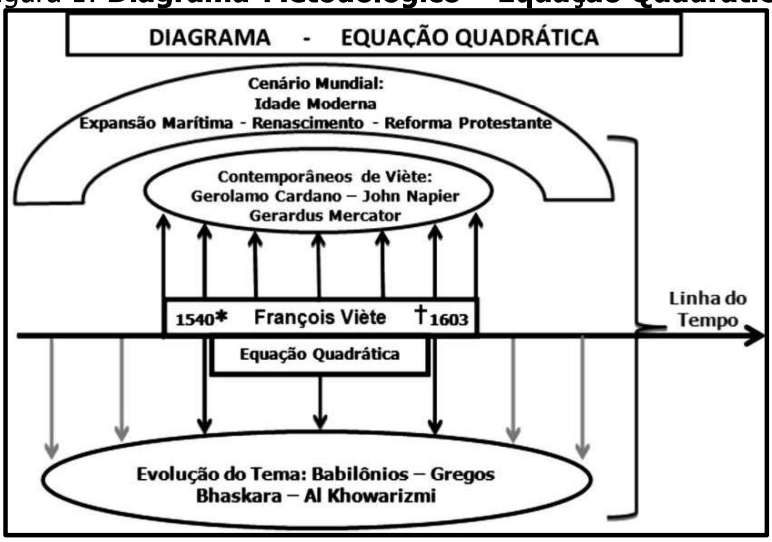
Lucas Antonio Mendes de Lima
Mayara Gabriella Grangeiro Pereira
Miguel Chaquiam

Introdução

Hoje em dia várias tendências em Educação Matemática fornecem suporte metodológico para professores que visam dar mais significado e compreensão ao estudo da matemática. Dentre as diversas tendências daremos destaque à história da matemática, fato que não descarta o uso de outras, tais como resolução de problemas, tecnologias da informação e comunicação, modelagem matemática e etnomatemática.

O texto apresentado a seguir é parte do Trabalho de Conclusão de Curso, que tem como tema *A História da Matemática no processo de ensino e aprendizagem da Matemática*, cuja constituição foi pautada no diagrama metodológico proposto por Chaquiam (2016), Figura 1.

Figura 1: **Diagrama-Metodológico – Equação Quadrática**



Fonte: Elaborado pelos autores, adaptado de Chaquiam (2016)

Contexto histórico geral relacionado ao personagem principal

Para nos situar em tempo e espaço em relação ao personagem principal, neste caso, François Viète (1540-1603). Elencamos fatos que marcaram o cenário mundial em que Viète viveu, tomando por base Boyer (1974), Eves (2004) e sites que publicam conteúdos científicos.

O século XVI foi marcado por um período histórico denominado de Idade Moderna. Três acontecimentos podem ser destacados nesse período: a Expansão Marítima, o Renascimento e a Reforma Protestante. Esses acontecimentos alteraram significativamente a política, a economia, a sociedade e a cultura e, por consequência, as pessoas passaram a adotar modos de vida diferenciados em relação aos daqueles da Idade Média.

As descobertas de novas rotas marítimas e novas terras abriram caminho para as comunicações com todo do mundo. Na religião, a Reforma Protestante, marcou o processo de decadência da Igreja católica, a principal representante da ordem feudal. Na política, a formação das monarquias nacionais iniciada durante a Baixa Idade Média, com a submissão da nobreza e da Igreja, consolidou-se na Idade Moderna com o surgimento dos Estados Absolutos.

O Renascimento cultural firmava novos valores e princípios, com a contestação dos valores medievais-feudais. No mais, o século XVI foi marcado por transições da Renascença para o Mundo Moderno, considerado como um marco do final da Idade Média e do início da Idade Moderna.

Esses acontecimentos nos evidenciam importantes mudanças no cenário mundial, dentro de um contexto sociocultural, têm como finalidade demarcar tempo e espaço em torno de Viète e de seus contemporâneos, apresentados a seguir, além de integrar fatos da história geral à história da matemática, podem proporcionar uma visão interdisciplinar entre História e Matemática e nos mostrar que a história da matemática é, sim, parte da história da humanidade.

Os contemporâneos de François Viète

Tendo em vista o cenário mundial, destacamos outros personagens que contribuíram para o desenvolvimento cientifico e que foram contemporâneos de Viète, dentre eles: Gerolamo Cardano (1501-1576); Gerardus Mercator (1512-1954); e John Napier (1550-1617).

Iniciamos com **Gerolamo Cardano** (1501-1576), que de acordo com Eves (2004), foi um dos personagens mais extraordinários da história da matemática. Começou sua vida profissional como médico, mas paralelamente se dedicava à Matemática.

Cardano deixou uma obra vasta, abrangendo aritmética, astronomia e física, medicina e outros assuntos. Dentre seus livros, o mais importante foi *Ars Magna*, o primeiro grande tratado em latim exclusivamente à álgebra. Nele encontram-se alguns relatos às raízes negativas de uma equação e ao cálculo com números imaginários. Há indícios que Cardano tinha algum conhecimento da regra de sinais de Descartes. Como jogador inveterado, ele escreveu um manual do jogador onde aborda algumas questões de probabilidade.

Gerard de Cremer, que segundo Seemann (2003) é o nome latinizado de **Gerardus Mercator**, nasceu em 5 de março de 1512, sétimo filho de um sapateiro em Rupelmonde, região de Flandres, município de Kruibekena na atual Bélgica, perto do porto de Antuérpia. Por conta da precária situação financeira da família, em 1526, sob a influência do seu tio Gisbert, Gerardus foi mandado para 's-Hertogenbosch para seguir carreira na igreja e ser educado pelos "Irmãos da vida comum".

Com o desenvolvimento de seus estudos, destaca-se nos ramos da cartografia e da Matemática. Sua reputação veio da elaboração de mapas, atlas e da sua famosa projeção cartográfica de 1569, projeção cilíndrica do globo terrestre sobre uma carta plana, embora apresentasse distorções, essa ação auxiliou a navegação marítima e tornou-se modelo para inúmeros mapas-mundiais. Além disso, a projeção de Mercator contribuiu para a constituição de outro tipo de projeção cartográfica, a projeção cilíndrica transversa secante, denominada de Universal Transversa de Mercator (UTM).

Segundo Boyer (1974), outro personagem importante do século XVI, foi **John Napier** (1550-1617), que não era um matemático profissional. Era um proprietário escocês, Barão de Murchiston, que administrava suas propriedades e escrevia sobre diversos assuntos. Napier só se interessava por certos assuntos da matemática, em especial os que se referiam à computação e trigonometria.

Napier ficou conhecido como inventor do Logaritmo quando, em 1614, publicou o seu *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* (Uma Descrição do Maravilhoso Cânon de Logaritmos) que conteve uma descrição de logaritmos, um conjunto de tabelas, e regras para o uso dos mesmos.

Por meio desses três contemporâneos de Viète é possível inferir sobre o desenvolvimento científico noutros ramos do conhecimento, bem como, o desenvolvimento da Matemática.

Traços biográficos de François Viète

Segundo os estudos de Gil (2001), François Viète (1540-1603) nasceu em França, em Fontenay-le-Comte, na província de Poitou a cerca de 50 km de La Rochelle. Filho de Étienne Viète, advogado, e de Marguerite Dupont, Viète iniciou os seus primeiros estudos no convento franciscano de Fontenay e, mais tarde, com 18 anos, foi admitido na Universidade de Poitier, onde concluiu o curso de Direito em 1560. Depois da obtenção da graduação, Viète regressou a Fontenay onde exerceu a profissão de advogado.

Viète sempre demonstrou interesse pela Matemática nos tempos livres e conseguiu importantes descobertas em diversos ramos, por exemplo, na aritmética, na álgebra, na trigonometria e na geometria, embora, ao longo da sua vida tenha sido absorvido por trabalhos oficiais na vertente do direito.

Mesmo não se considerando um matemático, Viète não deixou de agir como tal, visto que mantinha contato com pessoas que atuavam em outros campos da ciência e se fez presente em diversas discussões sobre diversos assuntos que envolviam matemática.

Um olhar sobre a evolução da equação quadrática

Os **Babilônios**, uma das antigas civilizações da Mesopotâmia, se estabeleceram inicialmente numa parte da região ocupada pelos Sumérios e, aos poucos, foram conquistando diversas cidades da região mesopotâmica e até conquistarem o povo hebreu e a cidade de Jerusalém, assim, o império formado pelo rei Hamurabi passa a ter como capital a cidade de Babilônia. Além de Hamurabi, outro importante imperador foi Nabucodonosor, responsável pela construção dos Jardins suspensos da Babilônia.

A respeito da "Matemática" babilônica, Boyer (1974) destaca que seu desenvolvimento foi pautado na utilização do sistema numérico que tinha como base fundamental o sessenta, muito provavelmente por conta da facilidade da metrologia. Além disso, foram hábeis na elaboração de algoritmos para obtenção de raízes de equações, assim como, nos cálculos que envolviam operações aritméticas fundamentais e tabelas exponenciais.

De acordo com Boyer (1974), os babilônios também faziam uso de tabulações como auxílio para álgebra desenvolvida no período, por exemplo, as tabulações de $n^2 + n^3$ para valores inteiros de n.

Ainda no campo da álgebra, eles também apresentavam a solução da equação quadrática a partir de uma flexibilidade algébrica da adição ou multiplicação de um determinado termo em ambos os membros da equação, além de outras estratégias algébricas.

Para esclarecer esta abordagem dos Babilônios a respeito da resolução da equação do segundo grau, com o uso de tais manipulações, consideremos o problema que pede o lado de um quadrado, se a área menos o lado dá 14,30 (base sexagesimal). Sua solução equivale a resolver a equação $x^2 - x = 870$, expressa por eles do seguinte modo, conforme Boyer (1974), Tome a metade de 1, que corresponde a 0;30, e multiplique 0;30 por 0;30, o que resulta 0;15; some isto a 14,30, o que dá 14,30;15. Isto é, o quadrado de 29;30. Agora some 0;30 a 29;30 e o resultado é 30, o lado do quadrado.

Resolução esta, que se resume basicamente na utilização da fórmula $x = \sqrt{(p/2)^2 + q} + p/2$. A qual pode ser desenvolvida, a partir da equação $x^2 - px = q$ usando os conhecimentos atuais para estabelecer o valor de x.

Além disso, os Babilônios também abordavam dois tipos de problemas envolvendo a solução das equações quadráticas, para as quais faziam uso das transformações algébricas. Para tanto, eles classificaram as equações em três tipos: $x^2 + px = q$; $x^2 = px + q$ e $x^2 + q = px$. Sabe-se que os babilônios não detinham o conhecimento para solucionar uma equação quadrática na sua forma completa, portanto, eles elaboravam técnicas de solução a partir da classificação apresentada.

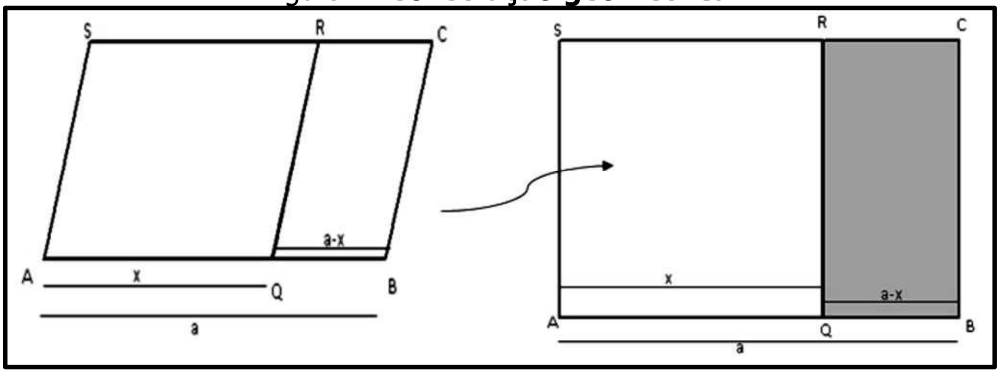
Os **Gregos** ainda hoje se chamam helenos, o nome usado por seus antigos antepassados que se estabeleceram no decorrer das costas do Mediterrâneo. Para Boyer (1974), a "Matemática" abordada por eles surge de rudimentos de cálculos de origem babilônica e egípcia trazidos por mercadores, entretanto, destacam-se por estudos em astronomia e geometria.

Nesse sentido, de acordo com os estudos de Yves (2004), o método utilizado pelos Gregos para solucionar as equações quadráticas, estava embasado exatamente na geometria. Esta por sua vez, apoiada nos livros Elementos de Euclides, especificamente no Livro IV, na proposição 28:

> Aplicar a um dado segmento de reta AB um paralelogramo AQRS de área igual a uma figura retilínea F, e ficando aquém por um paralelogramo QBCR semelhante ao paralelogramo dado, não excedendo a área de F a do paralelogramo descrito sobre metade de AB e semelhante à deficiência QBCR. Considere o caso particular em que o paralelogramo dado é um quadrado. Denote o comprimento AB por a, a base AQ do paralelogramo aplicado (que é então um retângulo) por x e o lado de um quadrado F, de área igual à do retângulo, por b. Então $x(a - x) = b^2$.
>
> (EVES, 2004, p.110)

Dessa forma, apresentamos a seguir uma construção geométrica similar da ideia exposta anteriormente:

Figura 2: **Construção geométrica**



Fonte: Elaborado pelos autores.

Nesse sentido, a área da figura hachurada é igual à área de um quadrado de lado b, consequentemente b^2, caracterizando então a relação exposta por Euclides da forma: $x(a - x) = b^2$.

Bhaskara (1114-1185), segundo Boyer (1974), foi o mais importante matemático do século XII dentre tantos oriundos pela Índia. Desenvolveu estudos baseados na aritmética e na álgebra, dos quais preencheu algumas lacunas na obra de Brahmagupta, dentre elas, apresentou uma solução geral da equação de Pell e o problema da divisão por zero.

Além disso, das contribuições Bhaskara no campo da Álgebra, assim como do povo hindu de um modo geral, ecoam a seguinte afirmação: *Uma equação quadrática (com respostas reais) tem duas raízes formais*. Além disso, eles unificaram a resolução algébrica destas equações por meio da utilização do método de completamento de quadrado, o qual é denominado de método Hindu.

Nesse sentido, para evitar repetição, apresentamos a seguir um exemplo da utilização deste modelo de resolução, na caracterização feita por Al-Khowarizmi para alguns tipos de abordagens a respeito das equações quadráticas.

Mohamed Ibu-Musa Al Khowarizmi nasceu em torno de 780 e morreu por volta do ano 850 e, para Boyer (2004), um mestre matemático do período que também atuou como astrônomo e geógrafo que, assim como Euclides, teve grande influência na Europa Ocidental. Este sábio escreveu obras nas duas áreas, as quais foram baseadas nos Sindhind da Índia e, especificamente a respeito da Matemática, escreveu dois livros de Aritmética e Álgebra.

Nesse sentido, por meio de um de seus livros mais importantes denominado de *Al-Jabr wa'l muqabalh* surge o termo álgebra e palavra *algorismi* é, portanto, a versão latina do nome Al-Khwarizmi da qual derivou a palavra algoritmo. No livro de *Al-Jabr wa'l muqabalh* é abordado num dos capítulos a solução de equações com os seguintes itens: raízes, quadrados e números (x, x^2 e números).

Neste mesmo livro, nos capítulos IV, V e VI são abordados especificamente os três casos de equações quadráticas com três termos que, segundo Boyer (2004), envolvem (i) quadrados e raízes iguais a números; (ii) quadrados e números iguais a raízes e (iii) raízes e números iguais a quadrados, cujas soluções por ele apresentadas, são dadas por regras "culinárias" e para "completar o quadrado" aplicada a exemplos específicos, ilustradas no capítulo IV por meio das equações: $x^2 + 10x = 39$, $2x^2 + 10x = 48$ e $(1/2)x^2 + 5x = 28$.

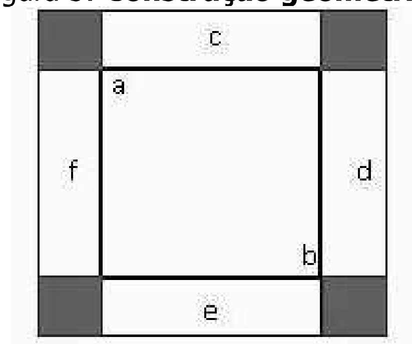
Além disso, no capítulo V usa o seguinte exemplo $x^2 + 21 = 10x$, cujas raízes são 3 e 7 obtidos pela fórmula de resolução da equação do segundo grau completa, isto é, $x = 5 \pm\sqrt{25-11}$. Além disso, Al-Khowarizmi chama atenção para um fato que usamos hoje, o discriminante deve ser positivo.

Nos trabalhos de Al-khowarizmi é notória a presença e influência dos gregos, embora, segundo Boyer (1974), seja pouco evidente nas primeiras demonstrações geométricas, a exemplo, para a equação $x^2 + 10x = 39$ enuncia:

> Traça um quadrado ab para representar, e sobre os quatro lados desse quadrado coloca retângulos *c*, *d*, *e* e *f* cada um com largura 2 ½. Para completar o quadrado maior é preciso acrescentar os quatro pequenos quadrados nos cantos. Portanto, para completar o quadrado somamos 4 vezes, 6 ¼ unidades ou 25 unidades, obtendo, pois, um quadrado de área total 39 + 25 = 64 unidades. O lado do quadrado grande deve, pois, ser de 8 unidades, de que subtraímos 2 vezes 2 ½ ou 5 unidades, achando $x = 3$.
>
> (BOYER, 1974, p.168)

Abaixo apresentamos uma representação da citação acima.

Figura 3: **Construção geométrica**



Fonte: Elaborado pelos autores

Observa-se que ao acrescentarmos os quatro quadrados pequenos coloridos para completar o quadrado maior, onde cada um desses tem área equivalente a 6 ¼ unidades, que multiplicados por quatro resultam uma área equivalente a 25 unidades, que adicionadas a 39 totalizam 64 unidades. Assim, o lado do quadrado maior é igual a 8, do qual subtraímos duas vezes 2 ½, ou seja 5, oque nos leva a concluir $x = 3$, comprovando que a resposta constante no capítulo 4 está correta.

Além disso, Boyer (1974) afirma que no livro Al-khowarizmi constam outros seis casos de equações que abordam todas as possibilidades quanto as equações quadráticas que tem uma raiz positiva, apresentadas de forma sistemática e completa. Por outro lado, também afirma que uma publicação na Turquia põe em dúvida o fato da obra de Al-khowarizmi ser a primeira obra sobre o assunto, visto que um manuscrito de uma obra de abd-al-Hamid ibn-Turk, denominada de *Necessidades Lógicas em Equações Mistas* é parte do livro *Al-Jabr wa'l muqabalh*, talvez publicada antes deste.

Boyer (1974) considera que **François Viète** foi um nome importante para Álgebra, devido ao fato de contribuições apresentarem uma aproximação das abordagens modernas. Visto que até o tempo dos Árabes e o início do tempo moderno o conhecimento a respeito das equações quadráticas não havia se expandido, pois abordavam apenas os casos particulares.

Nesse sentido, Viète usou um esquema para escrever uma equação quadrática de um modo geral, de tal forma que a escrita representava qualquer classe destas equações. Assim, ele introduziu o uso de *vogal* para representar uma quantidade indeterminada e *consoante* para números conhecidos.

De acordo com o mesmo autor, se Viète tivesse usado símbolos existentes em seu tempo representava todas as equações quadráticas na forma, com *A* sendo a incógnita e B, C e D os parâmetros. Com isso, vemos que a Álgebra de Viète merece destaque pela generalidade de sua expressão.

Além disso, numa de suas últimas obras, o *De numerosa potestatum ... resolucione* (1600), ele usou o método para resolução aproximada de equações, que é muito próximo do conhecido como método de Horner. Para melhor compreensão, apresentamos uma resolução da seguinte equação por Boyer (1974)

> $x^2 + 7x = 60750$, Viète encontrou a primeira aproximação por falta para x, o valor $x_1 = 200$. Depois, substituindo $x = 200 + x_2$ na equação de partida, ele achou $x^2_2 + 407x_2 = 19350$. Essa equação, agora conduz a uma segunda aproximação $x_2 = 40$, agora fazendo $x_2 = 40 + x_3$, resulta na equação $x^2_3 + 487x_3 = 1470$e a raiz dessa é $x_3 = 3$. Portanto, $x_2 = 43$ e $x = 243$. (Escrita em notação moderna).
> (BOYER, 1974, p.225)

Este método é importante visto que pode ser aplicado a qualquer equação polinomial com coeficientes reais e uma raiz real. Contudo, para utiliza-lo precisa desta raiz real, o que pode dificultar um problema em que não se consegue identificar imediatamente.

Portanto, a respeito da evolução dos estudos referentes as equações quadráticas, vale ressaltar que as discussões das primeiras classificações, assim como, utilização de técnica para resolução foi abordada inicialmente pelos babilônios que utilizavam fórmula semelhante a que utilizamos até os dias atuais, entretanto, eram apenas para a classificação apresentada na época.

Posteriormente, os gregos, também apresentaram contribuições significativas para solucionar as equações quadráticas, baseadas na geometria. Por outro lado, Bhaskara considerou que uma equação quadrática (com respostas reais) tem duas raízes formais e apresentou a lógica do completamento de quadrado.

Posteriormente, Al-Khowarizmi considera "o que conhecemos por discriminante hoje deve ser positivo". Além disso, em seu livro retoma os métodos de abordados na Babilônia (por meio da regra) e por Bhaskara (completamento de quadrado). Por fim, evidenciamos a generalização feita por Viète para representar qualquer classe destas equações.

Tomando por base a generalização apresentada por Viète, associada as regras utilizadas pelos babilônios, assim como, das outras contribuições apresentadas, há uma aproximação considerável das abordagens apresentas no livros didáticos atuais.

Textos complementares sobre equações e Viète

Sugerimos como leitura complementar duas dissertações que apresentadas a seguir, uma voltada para abordagem histórica das equações algébricas e outra apresenta um estudo desenvolvido acerca de François Viète.

Na primeira, Ribeiro (2015) nos apresenta uma visão atual a respeito da utilização da História da Matemática para o ensino das equações algébricas, o que vem corroborar no sentido da importância referente a abordagem por nós apresentada.

Na segunda, de Gil (2001), encontramos um estudo exclusivamente do François Viète. No qual, o autor evidencia uma bibliográfica do mesmo e apresenta as suas contribuições para a ciência, caracterizando assim a relevância do personagem destacado nesta construção das equações quadráticas.

Considerações finais

Compreendendo a construção apresentada a respeito da equação quadrática, entendemos que a história da matemática não deve ser trabalhada em separado do ensino da matemática, mas, como um recurso complementar durante a abordagem dos conteúdos e, evidentemente, associada a outras tendências em Educação Matemática, dentre elas, a resolução de problemas e o uso das tic's no ensino.

Nossa abordagem visa destacar a importância da construção histórica do estudo das equações quadráticas e que estas podem ser utilizadas em sala de aula na Educação Básica. Ao evidenciarmos o matemático François Viète, procuramos destacar o início de uma generalização das equações quadráticas, ideia fundamental para compreensão dos estudos atuais.

Os fatos relativos a história geral, que engloba o período de vida de Viète, nos favorece no sentido de localizar o estudo em tempo e espaço. Além disso, evidencia-se a possibilidade de uma abordagem interdisciplinar com a história da humanidade, assim como, com outras áreas do conhecimento, como por exemplo, quando citamos entre alguns de seus contemporâneos Gerardus Mercator que desenvolveu estudos em cartografia e matemática.

Por fim destacamos um equívoco ainda constante em alguns textos didáticos a respeito da denominação atribuída a fórmula para encontrar raízes de uma equação do segundo grau, "método de Bhaskra para solução de equações do segundo grau", quando na verdade é uma fórmula que está diretamente relacionada a estudos desde o período dos Babilônios.

Bibliografia referenciada e consultada

BOYER, C. **História da Matemática**. São Paulo: Blucher, 1974.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: matemática. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1997.

CHAQUIAM, M. Um diagrama, um texto. In: MENDES, I. A.; CHAQUIAM, M. **História nas aulas de Matemática**: fundamentos e sugestões didáticas para professores. Belém: SBHMat, 2016.

CHAQUIAM, M. **História da matemática em sala de aula**: proposta para integração aos conteúdos matemáticos. Coleção História da Matemática para Professores. Natal: Livraria da Física, 2015. 82 p.

EVES, Howard. **Introdução a História da Matemática**. Campinas (SP): Editora da UNICAMP, 2004.

GIL, Antonio Carlos. **Como elaborar projeto de pesquisa**. São Paulo: Editora Atlas S.A. 2008.

GIL, Paulo Duarte Bastos. **François Viète**: o despontar da álgebra simbólica. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, 2001.

RIBEIRO, Denise Benino Dourado. **O uso da história das equações nos processos de ensino e de aprendizagem da matemática na educação básica**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Anhanguera de São Paulo, 2015.

SEEMANN, Jörn. **Mercator e os geógrafos**: em busca de uma "projeção" do mundo. Revista de Geografia da UFC, v. 2, n. 03, p. 7-17, 2003.

Sites consultados:

https://lilimachado.wordpress.com/2012/05/05/contexto-historico-do-renascimento/

http://www.historiamais.com/idademoderna.htm

http://www.somatematica.com.br/biograf/khwarizmi.php

https://fr.wikipedia.org